目　　录

第 0 章　记号和预备知识

0.1　集　　合

若 A, B 是 E 的两个子集，则记

$$A\backslash B = \{x \in E: x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

若 $f: E \to F$ 是映射，$A \subset E$，则把 f 在 A 上的限制记作

$$f|A \text{ 或 } f|_A.$$

X 到自身上的恒等映射记作 Id_X.

若 $\{x_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 是一集合，则把除去元素 x_i 后的集合记作

$$\{x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n\}.$$

$\# X$ 表示 X 的基数.

0.2　代　　数

$\mathbf{N}$ 表示正整数全体和零，$\mathbf{Z}$ 表示整数环，$\mathbf{R}$ 为实数域，$\mathbf{C}$ 为复数域，$\mathbf{H}$ 为四元数体(见 8.9). $\mathbf{R}_+$(相应地 $\mathbf{R}_-$)表示正(相应地负)实数和零的集合，$\mathbf{R}_+^*$ (相应地 $\mathbf{R}_-^*$)为除去 0 后的集合. 对一个域 K, K^* 表示这个域除去 0 . 关于代数结构，分别用 $\mathrm{Hom}(\cdot;\cdot)$, $\mathrm{Isom}(\cdot;\cdot)$ 来记从一个赋有该代数结构的集合到另一个赋有同一代数结构的集合的同态和同构的全体，但对两个向量空间，我们用 $L(E;F)$ 代替 $\mathrm{Hom}(E;F)$，来表示从 E 到 F 中的线性映射全体. 我们约定，提到两个向量空间时，往往总是指在同一个域上的. 向量空间 E 的线性群是 $\mathrm{Isom}(E;E) = \mathrm{GL}(E)$. 对向量空间 E 而言，$E = A \oplus B$ 表示 E 是它的两个向量子空间 A 和 B 的直和. 对向量空间 E, E^* 表示它的代数对偶空间.

I 表示单位阵，${}^tA$ 表示 A 的转置.

对集合 X, $\mathfrak{S}_X$ 表示它的置换群，即双射 $X\to X$ 全体关于映射合成所成的群. 对 $X=\{1,2,\cdots,n\}$,把群 $\mathfrak{S}_X$ 写作 $\mathfrak{S}_n$(称为对称群), $\mathscr{A}_n$ 表示由偶置换全体构成的 $\mathfrak{S}_n$ 的闭子群(称为交错群). Klein 群 $\mathscr{V}_4$ 就是二元素群自乘的积 $\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$. 二面体群 $\mathscr{D}_{2n}$ (其中 n 是任一整数)是在 $ab=ba^{-1}$ 这一关系下循环群 $\mathbf{Z}_n$ 经由 $\mathbf{Z}_2$ 的扩张,这里a(相应地 b)是 $\mathbf{Z}_n$(相应地 $\mathbf{Z}_2$)的生成元.

$\binom{n}{p}$表示二项式系数(也记作 C_n^p),参见 1.5.2.

除非另有申明,所有我们讨论的域都是交换域.

0.3 度量空间

在距离记为 d 的度量空间里,对子集 $A\subset X$ 引进它的直径 $\operatorname{diam}(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$(在 $\mathbf{R}_+\cup\infty$ 中加以考虑). 对两个子集 A, $B\subset X$, A 到B 的距离就是数量

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\},$$

特别有

$$d(X,A)=\inf\{d(x,y):y\in A\}$$

(不要把 $d(A,B)$ 跟 9.11 中引进的 $\delta(A,B)$ 混淆起来).

对球,我们采用 [FR] 中的记号:

$$U(a,r)=\{x\in X:d(a,x)<r\},$$
$$B(a,r)=\{x\in X:d(a,x)\leqslant r\},$$

更一般地

$$U(A,r)=\{x\in X:d(x,A)<r\},$$
$$B(A,r)=\{x\in X:d(x,A)\leqslant r\}.$$

有些情况下要强调指明 X, 就写成 $B_X(\cdot,\cdot)$.

若 X, Y 是两个度量空间, $\operatorname{Is}(X;Y)$ 就表示从X到Y中的等距对应的全体,亦即满足

$$d(f(x),f(y))=d(x,y)\quad\forall x,y\in X$$

的 $f:X\to Y$ 全体.

特别记 $\mathrm{Is}(X; X) = \mathrm{Is}(X)$.

0.4 一 般 拓 扑

我们多次用到：一族递减的紧集有非空交集（在 11.7.3.2 里我们将重温这一事实的证明）.

0.5 双 曲 三 角

定义双曲余弦、正弦和正切如下：

$$\mathrm{ch}t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}, \qquad \mathrm{sh}t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2},$$

$$\mathrm{th}t = \frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t} \ (t \in \mathbf{R});$$

并引进"主值反双曲余弦"函数

$$\mathrm{Arc\ ch} = (\mathrm{ch}|\mathbf{R}_+)^{-1},$$

它是一个映射 $[1, \infty[\to \mathbf{R}$.

0.6 Lebesgue 测度，积分理论

在有些部分，我们相当自由地使用这些内容. 特别是一些基本定理：收敛定理，积分与极限交换定理，Fubini 定理，关于 $\mathbf{R}^n$ 的开集上 C^1 阶映射的变量替换定理. 我们还会碰到一个子集 K 的特征函数 χ_K；以及测度空间的象空间的概念. 关于这些内容的一本参考书是 [GT] (Guichardet 著，积分学，Armand Colin 出版社).

第 1 章 群在集合上的作用：概念，例子和应用

将一个空间的几何学，看作是研究变换群作用下的不变性质，这种观念是 Félix Klein 在著名的"Erlangen 纲领"中提出的（参见 [GBG]，特别是第 253 页）。

本章中，我们定义群在集合上的作用，可迁性，稳定群，齐性空间，一意性等概念，并用大量代数的、尤其是几何的例子来说明它们。这些例子读者在以后各章还会遇见。

本章最末两节 1.7 和 1.8，分别讲拼嵌群和绕空间一个定点的旋转群的有限子群。这两节充分应用了前面各节引进的概念；我们之所以选用这两部分内容，是因为它们既有造型上的方便，又有某些处理上的困难——这跟问题本身显然的初等性形成对照。1.8 节跟三维空间的正多面体关系很密切，在 12.5 节我们还会遇到这些多面体。

1.1 定　　义

对任一集合 X，我们用 $\mathfrak{S}_X$ 来记双射 $f:X\to X$ 全体所成的群（对于记作"$\circ$"的映射合成或乘法而言）。

1.1.1 定义. 设 G 是群，X 是集合. G 在 X 上的作用，就是一个同态 $\varphi:G\to\mathfrak{S}_X$；我们也说 G（通过 φ）作用在 X 上.

1.1.2 记号. 对 $g\in G$，$x\in X$，记 $\varphi(g)(x)=g(x)$；作用则记为 (G,X,φ) 或 (G,X). 特别有

$$\forall g\in G: x\longmapsto g(x) \text{ 是双射；}$$

$$\forall g,h\in G,\ \forall x\in X: g(h(x))=(gh)(x).$$

例如对所有的 x 和 G 的单元 e，都有 $e(x)=x$；且 $\varphi(g^{-1})=$

$(\varphi(g))^{-1}$.

1.2 例　子

1.2.1 $G\subset\mathfrak{S}_X$ 是一个子群，这是最常见的情形。例如，G定义为$\mathfrak{S}_X$的满足某些条件的子群。

1.2.2 置 $A=\{1,\cdots,n\}$，则 $\mathfrak{S}_A=\mathfrak{S}_n$（对称群）。设 $G=\mathfrak{S}_n$。于是G作用在A上；但它也很自然地作用于 $X=\mathscr{P}_{n,p}=\{P\subset A: \#P=p\}$，即$A$中$p$个元素所成子集的全体（$0\leqslant p\leqslant n$）。

1.2.3 对给定的 $g\in\mathfrak{S}_n$，设 $G=\{g^k: k\in\mathbf{Z}\}\subset\mathfrak{S}_n$，则$G$作用在$A=X$上。

1.2.4 若X是向量空间，则它的线性群

$$G=\mathrm{GL}(X)=\{f: X\to X:\ f\text{ 为线性双射}\}$$

作用于X上。

1.2.5 设E是欧氏向量空间（见第 8 章），且

$$O(E)=\{f\in\mathrm{GL}(E):\ f\text{ 等距}\},$$

则 $G=O(E)$ 自然地作用在$X=E$上。而且从 $O(E)$ 还可导出两个作用，它们分别作用于 Grassmann 流形

$$X=G_{E,p}=\{V\subset E: V\text{为}E\text{的 }p\text{ 维子空间}\}$$

和

$$X=\{E\text{ 的标准正交基}\}.$$

1.2.6 设$X=G$是群，则$G=G$通过好几种方式作用于自身，它们都很重要：

$$\varphi(g)(h)=gh\ \text{（左平移）};$$

$$\varphi(g)(h)=hg\ \text{（右平移）};$$

$$\varphi(g)(h)=ghg^{-1}\ \text{（内自同构）}$$

1.2.7 设X是仿射平面（见第 2 章），$GA(X)=G$ 是X的仿射双射全体所成的群（X 的“仿射群”），$\Gamma(X)$ 是X中二次曲线——定义为X的子集或者表示为方程形式——全体，则 $\mathrm{GA}(X)$ 作用在 $\Gamma(X)$ 上。

1.2.8 设X是任一度量空间,距离记为 d, 则有它的等距群

$$\mathrm{Is}(X)=I(X)$$

作用其上:

$$G=\mathrm{Is}(X)=\{f\in\mathfrak{S}_X:\forall x,y\in X:d(f(x),f(y))=d(x,y)\}.$$

1.2.9 若 $G=\mathbf{R}$, $X=S^3=\{x\in\mathbf{R}^4:\|x\|=1\}\subset\mathbf{R}^4$, 将$\mathbf{R}^4$看作$\mathbf{C}^2$,于是可定义作用 $(\mathbf{R},S^3,\varphi)$ 如下:

$$\varphi(t)(z,z')=(e^{it}z,e^{it}z').$$

这个例子在几何上是非常重要的: 参见 4.3.6.2 和 18.8.1 两节.

1.2.10 其它例子. 见 4.5.9,8.8,9.5,18.10.

1.3 一 意 性

1.3.1 定义. 作用 (G,X,Π) 称为一意的,如果Π是单射(也就是说,只有 $e\in G$一个元素对应于X上的恒等变换).

若 $G\subset\mathfrak{S}_X$ (参见 1.2.1),则作用总是一意的. 若G并非一意的,则可作 $(G/\ker\varphi,X,\varphi)$, 它总是一意的.

在 1.2 的例子中间, 仅 1.2.6 和 1.2.9 的作用并非现成就是一意的. 在 1.2.6 中,左平移和右平移都是一意的, 而内自同构当且仅当G的中心 Z_G 等于$\{e\}$时才是一意的. 1.2.9 中则有

$$\ker\varphi=2\pi\mathbf{Z}.$$

1.4 可 迁 性

1.4.1 定义. 作用 (G,X,φ) 称为可迁的, 如果 $\forall x,\ y\in X$, $\exists g\in G\,|\,g(x)=y$.

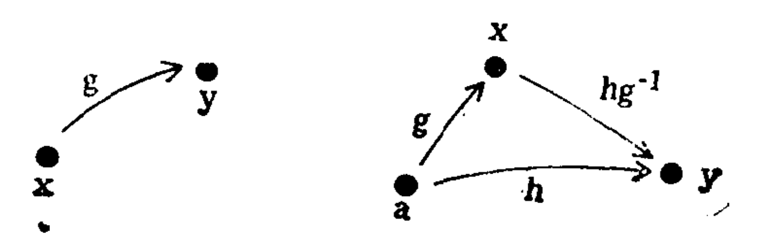


图 1.4.1.

实际上，只需验证 $\exists a\in X|\forall x\in X, \exists g\in G|g(a)=x$. 因为，若 $g(a)=x, h(a)=y$，则 $y=(hg^{-1})(x)$.

1.4.2 例. 从可迁性的角度来看，1.2 中的各例情况如下:

——1.2.2 可迁;

——1.2.3 可迁当且仅当置换 g 是“循环”的;

——1.2.4 不可迁;在 $X\backslash 0$ 上可迁吗?

——1.2.5 在 E 上不可迁(为什么?),但在任何 $G_{E,p}$ 上可迁(为什么?);

——1.2.6: 平移是可迁的,但内自同构不可迁(若 G 是交换群，则每点不动!);

——1.2.7 不可迁: 抛物线不是椭圆;见 15.3.3.2;

——1.2.9 不可迁: 见 18.8.

1.4.3 定义. 作用 (G, X) 称为单可迁的，如果对任何 $x, y\in X$ 存在唯一的 $g\in G$ 使 $g(x)=y$.

1.4.4 例.

1.4.4.1 若 G 一意、可迁、可交换,则它必定单可迁. 因为,若 $\exists x, g, h|g(x)=h(x)$，就有

$$g(y)=h(y) \quad \forall y\in X,$$

事实上，

$$\begin{aligned} g(y)&=g(k(x))=k(g(x))=k(h(x))\\ &=h(k(x))=h(y). \end{aligned}$$

1.4.4.2 左平移(参见 1.2.6)是单可迁的.

1.4.4.3 在 $G_{E,p}$ 上,对于 $0\leqslant p\leqslant \dim E$，正交群 $O(E)$ 不是单可迁的;但在标准正交基全体上它是单可迁的.

1.4.5 推广. (G, X) 称为 p-可迁 $(p\in \mathbf{N})$的,如果 G 在由 X 中 p 个不同点构成的点组的集合上可迁. 见 2.3.3.5, 4.5.10, 4.6.9, 6.1.1, 9.1.6, 9.1.7, 9.6.2, 9.7.1, 18.5.5, 18.8.4, 18.10.6, 19.4.5.1 中的例子. $p=2$ 时,也称为双重可迁,余类推.

1.5 稳定群,齐性空间

现在来考虑某种非单可迁性,因为我们注意到,若

$$y = g(x) = h(x),\ 则\ (h^{-1}g)(x) = x.$$

1.5.1 定义. 对于作用 (G, X),所谓 $x \in X$ 的稳定群或迷向群就是 $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$.

1.5.2 例. 在 1.2.2 中,对于 $X = A$ 和 $x = 1$,有自然同构 $G_1 \cong \mathfrak{S}_{n-1}$. 若 $X = \mathscr{P}_{n,p}$,则

$$G_{\{1,\cdots,p\}} \cong \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p}.$$

通过这种同构,可以计算置换和组合的总数,即 $\#\mathfrak{S}_n = n!$ 和

$$\#\mathscr{P}_{n,p} = \binom{n}{p} = C_n^p,$$

见 1.5.8.

在 1.2.6 中,对内自同构,有

$$G_g = \{h \in G : hg = gh\},$$

即 g 的换位子群.

在 1.2.5 中,对 $G_{E,p}$ 有同构 $G_V \cong O(p) \times O(n-p)$ (其中 $n = \dim E$) 和 $O(p) = O(\mathbf{R}^p)$.

1.5.3 恒有

$$\boxed{G_{g(x)} = gG_Xg^{-1}}$$

换句话说,$G_{g(x)}$ 和 G_x 是 G 的两个(通过一个内自同构)共轭的子群,因而总是同构的. 这样就用另一种方式很快地得出 1.4.4.1 的结论.

1.5.4 定义. 集合 X 称为(关于作用 G 的)齐性空间,如果 $\exists(G, X, \varphi)$ 可迁.

设 X 关于 (G, X, φ) 是齐性的,固定 $x \in X$;设 $\theta: G \to X$ 定义为 $\theta(g) = g(x)$. 由于 $g(x) = h(x)$ 等价于 $h^{-1}g \in G_x$,所以 θ 通过下述等价关系推衍到 G 的商空间 G/G_x:

$$g\Re h \Longleftrightarrow h^{-1}g \in G_x.$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\theta} & X \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \nearrow_{\underline{\theta}} & \\ G/G_x & & \end{array}$$

(注意: G/G_x 一般并不是群!)由上图可见: $\underline{\theta}: G/G_x \to X$ 是双射. 于是,在集论的意义上有

1.5.5

$$\boxed{X \underset{集}{\cong} G/G_x}$$

这个关系式是极其有用的,有了它,可以把对集合 X 的研究化为一个代数问题,即对 (G, G_x) 的研究: 例如可参见[B-H],[WF].

1.5.6 推论. 若 G 有限,则 X 也有限,且 $\#X = (\#G)/(\#G_x)$(对任一 $x \in X$).

1.5.7 有一点要注意: 若 G 和 X 都是拓扑空间, 而 φ 是 $G \times X$ 到 X 中的连续映射,则一般说来,拓扑空间 X 并不同胚于带有商拓扑的 G/G_x:见 1.9.1 中的一个反例.

1.5.8 应用"牧羊人法则"(参见 [BI 0],p. EIII. 41),由 1.5.2 和 1.5.6 可得出 $\#A = n = (\#\mathfrak{S}_n)/(\#\mathfrak{S}_{n-1})$,于是由数学归纳法就有 $\#\mathfrak{S}_n = n!$. 从而

$$\#\mathscr{P}_{n,p} = (\#\mathfrak{S}_n)/[(\#\mathfrak{S}_p)(\#\mathfrak{S}_{n-p})] = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

1.5.9 由 1.5.2 和 1.5.5, 可将 Grassmann 流形 $G_{E,p}$ 写成齐性空间 $G_{n,p} = O(n)/O(p) \times O(n-p)$; 它的应用可见 [HU] 中第 18 章,也可参见 14.3.7.

1.6 轨道,分类公式

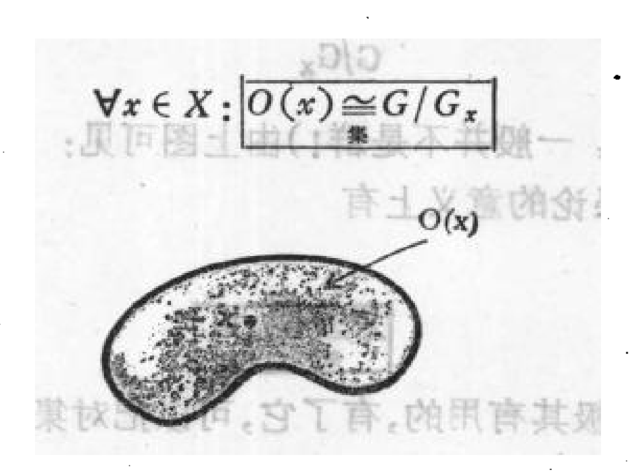
现在研究非可迁性.

1.6.1 定义. 对于 (G, X),$x \in X$ 的**轨道** $O(x)$ 就是

$$O(x)=\{g(x):g\in G\}.$$

在 X 中引进等价关系 $x\Re y\Longleftrightarrow\exists g\in G\,|\,g(x)=y$，则我们看到，等价类就是轨道，因而它们构成一个划分．这样就得到一个轨道空间 X/G．由 1.5.5 有

1.6.2



由 1.5.6 又有

1.6.3 推论． 若 G 是有限集，则对任一 x，$O(x)$ 是有限集，且

$$\#O(x)=(\#G)/(\#G_x).$$

1.6.4 例． 1.2.3 中的轨道称为置换 g 的循环．通过对它们的讨论，可将 $\mathfrak{S}_n$ 中的共轭元素进行完全分类．

1.2.5 中，对于 $X=E$，轨道是以原点为中心的球面：

$$S(0,r),\ r\in\mathbf{R}_+.$$

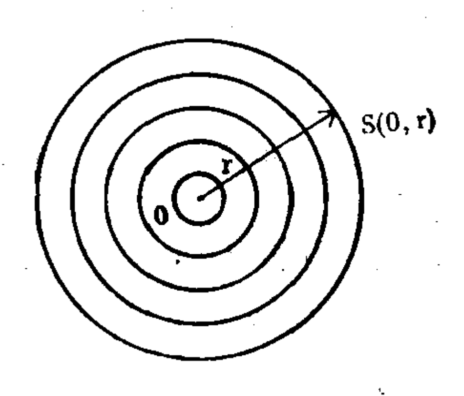


图 1.6.4.

1.2.9 中轨道集合的结构是很有趣的；容易看出所有的轨道都是圆(由于 $S^1=\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$，见 1.2.3 末尾)，而且是两两相套的，因此商空间同胚于球面 S^2（见 4.3.6）．要将这种 S^3 按圆所作的划分表示出来是很难的，那就是著名的 Hopf 纤维化；请参阅 18.8 和 18.9

中从不同的角度对这个重要例子所作的讨论.

1.6.5 附注. 给定作用 (G, X) 后,找出轨道并将轨道集合 X/G 参数化的问题,通常称为分类问题. 我们会看到许多这样的例子:关于 1.2.6 和 1.4.2,可见 2.7.5.11. 此外,关于角,可参见 8.6,8.7,二次形式的分类,可参见 13.1.4,仿射二次曲面分类,可参见 15.2,或者也可参见 18.6,13.10.

1.6.6 推论(分类公式). 设 X 和 G 都有限,G 作用在 X 上. 若 $A\subset X$,而且 A 跟每条轨道交于一点且只交于一点,则

$$\boxed{\# X = \sum_{x\in A} \# G/\# G_x}$$

A 称为映射 $p:X\to X/G$ 的一个截面,因为有 $s:X/G\to X$ 使 $p\circ s = \mathrm{id}_{X/G}$ 且 $A = s(X/G)$;我们可以说,A 将轨道集合参数化了.

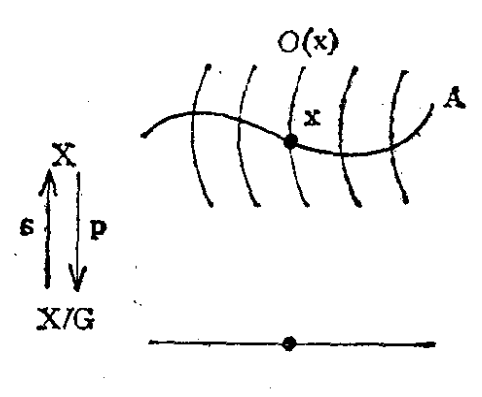


图 1.6.6.

1.6.7 在 p-群上的应用

1.6.7.1 定义. G 称为一个 p-群,如果它是有限群且存在素数 p 和 $m\in \mathbf{N}^*$ 使 $\# G = p^m$.

1.6.7.2 定理. 每个 p-群都有一个非平凡中心.

证明:我们通过内自同构,使 G 作用在 G 上(参见 1.2.6),并将 G 的中心记为 Z_G,考察在 $X = G\backslash Z_G$ 上由 G 所诱导的作用(参见 1.4.2,1.2.6).

关于 A 对 X/G 所作的参数化,有(参见 1.6.6):

$$\# X = \sum_{x \in A} \# G / \# G_x,$$

由此有

$$\# G = p^m = \# Z_G + \sum_{x \in A} \# G / \# G_x,$$

但以 $\# G_x$ 除 p^m 仍是 p 的乘方，而且 $\# G / \# G_x = p^{m(x)}$，其中 $m(x) \geqslant 1$。因此 p 除得尽 $\# G$ 和 $\# X$，从而除得尽 $\# Z_G$。

1.6.7.3 附注. 1.6.7.2 的证明过程，是证明每一有限域必为可交换的这一结论时的关键所在. 例如可参见 [AN] 第 37 页. 为使 1.6.7.2 的证明更精炼，可讨论一个 $p^m q$ 阶有限群的 Sylow 子群(p, q 是两个互质的素数)，见 [SE1]，第 147 页.

1.6.8 现在，作为这章概论的结尾，我们来讨论两个更复杂的问题，其中一个是平面几何的问题，另一个是立体几何的问题. 证明过程都是粗线条的，对细节感兴趣的读者，或可自己动手补出证明，或可自行查阅参考文献.

1.7 拼 嵌 群

1.7.1 参观格拉纳达城阿朗勃拉宫的旅游者，正如浏览下面几页的读者一样，都会对重复排列某种图案而覆盖整个平面的图形发生兴趣. 实际上，图案可以千变万化，而排列的方法却是有限的；确切地说，不多不少恰好 17 种. 读者可参见 1.7.4.1 至 1.7.4.5 各节以及 1.7.6.1 至 1.7.6.12 各节. 在阿朗勃拉宫仅有其中的十一种. 其余六种，有五种可在撒哈拉南部的巴库巴和贝斯兰部落里见到，另一种则见于一种中国图案. 1.7 节的目的，就是将这些“重复排列图案”的问题公理化，然后证明只有 17 种可能的群. 在阿朗勃拉宫没有动物或人的图案，这纯然是宗教禁令这种表现形式的结果(与之相反，例如图 1.7.4.8 和 1.7.6.13 就有这类图案). 其实，甚至可以这么说：正是这种禁令——它阻止了艺术家探求新的图案的创造性——推动着艺术家创造各种方式去重复某一图案，以致

最后发现了17种可能的方式；这个成就对那个时代来说，是相当惊人的．也请参阅 1.7.7.8.

1.7.2 为了说明(除了其它目的外)本节标题的意义，我们的公理化做法可以这样开始：假定装饰画家用一块瓦片或者一个拼嵌样模着手铺填平面，他凭这种瓦片变化出种种式样来．为了简便起见，我们先假定他移动瓦片时并不转动它，或者说，瓦片是沿着一边铺开去的；参见1.7.6．设 E 是欧氏平面，$P\subset E$ 是拼嵌样模所占的部位；P 经移动后应填满整个平面而无空隙，这就是下面的公理 GP2．但要得到阿朗勃拉的那些铺嵌图形，这一点还是不够的．事实上，有所谓"不规则"的铺嵌，譬如象：

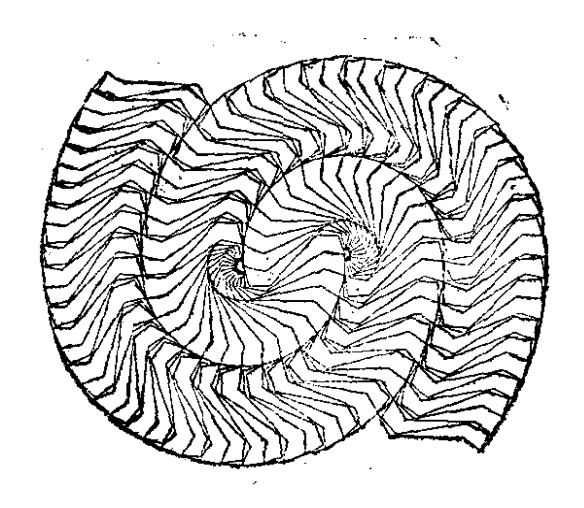


图 1.7.2.

德国数学会年鉴，1937 年第 46 册，原作者 H. Vorderberg. Teubner.

它是由一个九边形的样片经过平面的正等距变换拼成的．这个铺嵌图形是从 Voderberg 的书上引用来的，见 [VG1] 和 [VG2]；它具有一个惊人的性质：两个样模之间的空隙可以由同样的样模填满．读者可以自己来拼一个不规则的铺嵌图形：把 R^2 的正方形样模随意地水平或竖直地放在整数坐标点所构成的 $\mathbf{Z}^2$ 的网点上，如图 1.7.3.关于有趣的"严格非周期铺嵌"问题，可参阅[RN1]，[RN2]（见 19.6.12)，[RN3]，[GA]．也可参见 1.9.16 和第 170 页的图．如果要得出"规则"的铺嵌图形，就要引进一个 E 的等距变换群，这就是下述的公理 GP1．在图 1.7.2 和 1.7.3 中并没有群．

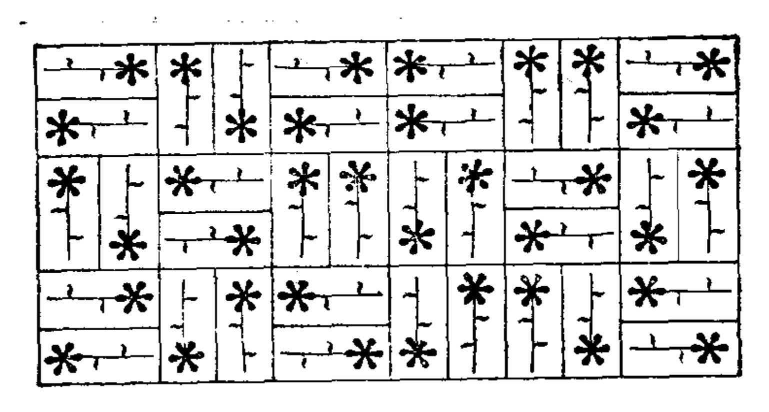


图 1.7.3.

1.7.3 拼嵌群公理. E 是欧氏平面，P 是 E 中一个连通紧集，P 的内部非空，G 是 E 的正等距(移动)群 $\mathrm{Is}^+(E)$ 的子群，它们满足:

GP1 $\bigcup_{g\in G} g(P)=E$,

GP2 若 $g(\mathring{P})\cap h(\mathring{P})\neq\varnothing$，则 $g(P)=h(P)$.

1.7.4 现在我们证明，倘若在 E 的线性群中把共轭的子群看作同

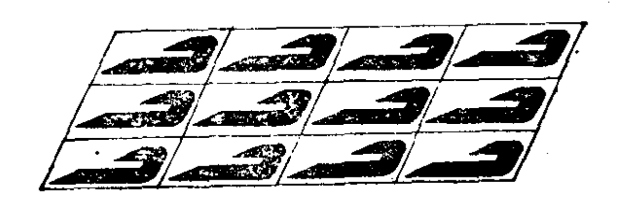


图 1.7.4.1.

一个群，满足上述公理的群 G 只有五个；它们分别对应于下面的五个图，其中的那些样模是最基本的，也就是说，它们满足一个比 GP2 更强的公理，即从 $g(\mathring{P})\cap h(\mathring{P})\neq\phi$ 就有 $g=h$.

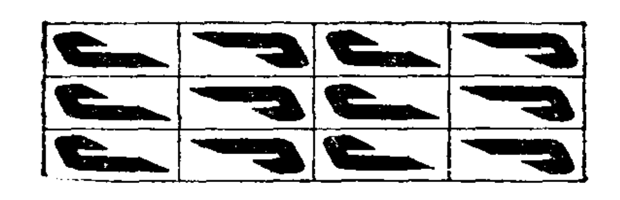


图 1.7.4.2.

即使这些群(不计共轭差别)都是有限的，样模式样还是可以变化无穷的.

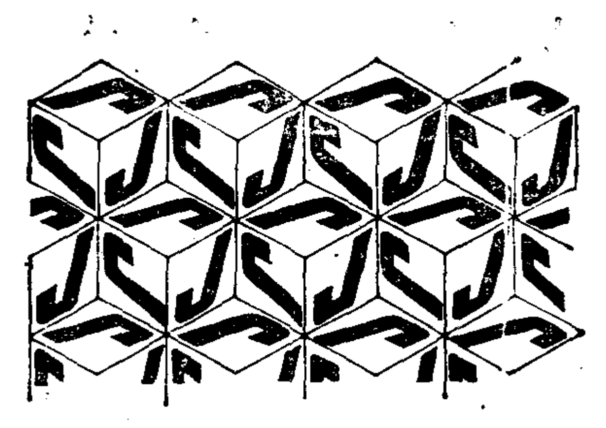


图 1.7.4.3.

1.7.5 证明

1.7.5.0 设 $\vec{E}$ 是 E 的底向量空间，且映射

$$\rightarrow : \mathrm{Is}^{+}(E) \rightarrow \mathrm{GL}(\vec{E})$$

的核 $\ker(\rightarrow) = T(E)$ 是 E 中平移的全体（有关内容可参见 2.3.3.4）。我们知道（参见 9.3.4）每个

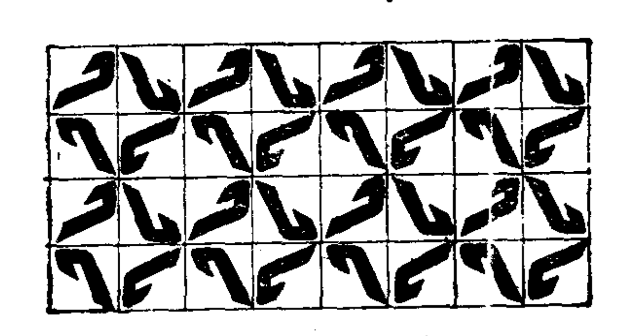


图 1.7.4.4.

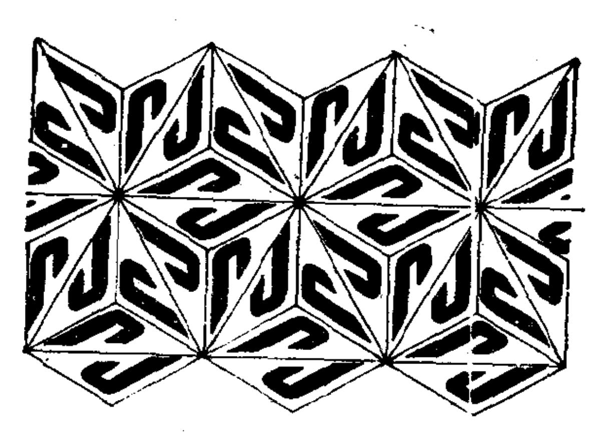


图 1.7.4.5.

图 1.7.4.1 到 1.7.4.5 和 1.7.6.6 到 1.7.6.12 都转引自 Y. Bossard 著《花饰、墙壁及铺嵌》，CEDIC, 1977.

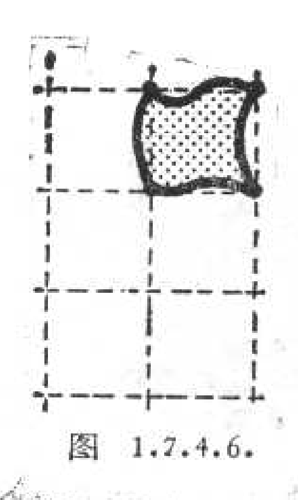


图 1.7.4.6.

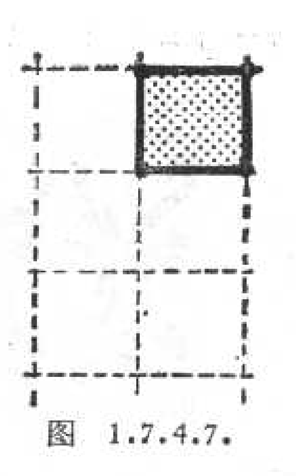


图 1.7.4.7.

图 1.7.4.8.

M. C. Escher，"无穷动"，水彩画，1953 年，305×230mm.海牙 Escher 纪念馆.

$$f \in \mathrm{Is}^+(E) \setminus T(E)$$

有且仅有一个不动点,称作它的中心,并有一个角度;这些 f 就是旋转. 下文中我们在许多地方引用了第 9 章中有关欧氏平面仿射几何的结果,有时就不再重申. 证明中第一个关键的想法是:

1.7.5.1 群 G 离散地作用于 E, 换句话说, $\forall a \in E$, 轨道 $G(a)$ 在 E 中是离散的, 甚至是由孤立点组成: $\forall b \in G(a) \exists \varepsilon > 0$ 使得对以 b 为中心、以 ε 为半径的圆盘 $B(b, \varepsilon)$ 有 $B(b, \varepsilon) \cap G(a) = \{b\}$. 特别在 E 的一个紧集中, 所有的轨道都只有有限多个点,这是因为紧离散集总是有限集.

为了证明离散性,首先我们注意到, 根据公理 GP2, E 中每个紧集只含有限多个不同的样模 $g(P)$: 利用紧集中任一序列都有一个极限点这一性质,由归谬法即得结论. 然后再注意到,一个样模 $P' = g(P)$ 的稳定子群,设为 $G_{P'} = \{g \in G : g(P') = P'\}$,总是有限的. 事实上,根据 9.8.6.1,存在 $a' \in E$ 使

$$G_{P'} \subset G_{a'} = \{g \in G : g(a') = a'\}.$$

选取样模 P'' 使相应的点 a'' (根据 9.8.6.1)有 $a'' \neq a'$. 既然只有恒等变换使 a' 和 a'' 都不动(必要时参阅 9.1.6), $G_{P'}$ 的基数就跟样模 $g(P'')$, $g \in G_{P'}$ 的个数相等;由于这些样模各各分布在一个以 a 为中心的圆周上,它们的个数是有限的.

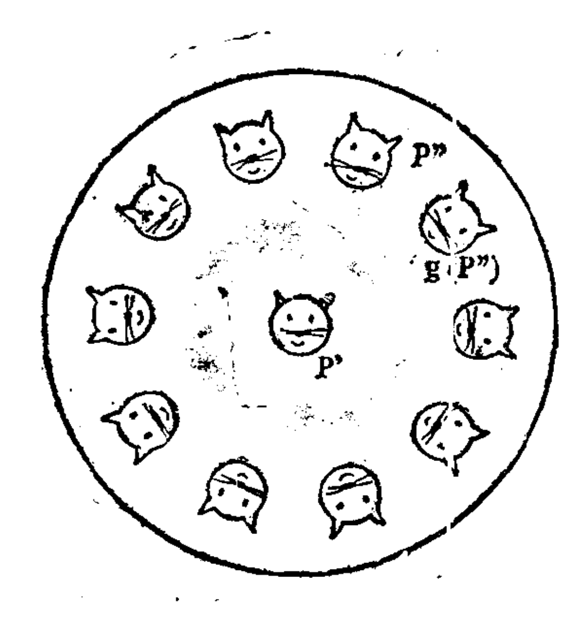


图 1.7.5.0.

最后要证明G的每条轨道 $G(a)$ 都是由孤立点组成的；由于G是群，我们就只要证明 a 在 $G(a)$ 里是孤立的．设任给 $\eta > 0$；跟圆盘 $B(a, \eta)$ 相交的样模的个数是有限的，因为它们位于同一个紧集中，即以 a 为中心、以 $\eta + \delta$ 为半径的圆盘中，这里 δ 表示样模的直径．然而 $B(a, \eta) \cap G(a)$ 的所有元素位于这有限多个样模中的一个之内，根据第一段，它们在每个样模中的个数就都是有限的．于是 $G(a) \cap B(a, \eta)$ 有限，从而 a 在 $G(a)$ 中孤立。

证明的第二个要点是：引进G中由平移全体构成的子群

$$\Gamma = G \cap T(E).$$

于是：

1.7.5.2 群Γ是一个网格，也就是说，存在 $\vec{E}$ 的一个基$\{\vec{u}, \vec{v}\}$使得Γ正好是沿所有的向量 $\mathbf{Z}\vec{u} + \mathbf{Z}\vec{v}$ 的平移的集合．

首先，用归谬法证明Γ至少含有两个线性独立的平移．先假定 $\Gamma = \mathrm{Id}_E$，那么G仅含旋转；若其中有两个旋转 r, s 的中心不同，则根据 1.7.5.0，换位子 $rsr^{-1}s^{-1}$ 是非平凡的平移，因此G中的旋转都是以同一点ω为中心的，于是 $\bigcup_{g \in G} g(P)$ 含在一个以ω为中心的圆盘内，从而与 GP1 相悖．假定Γ中的方向都是平行的，并设 $r \in G \backslash \Gamma$，而 $t \in \Gamma$ 是一个沿向量$\vec{\xi}$的平移；则等距 rtr^{-1}

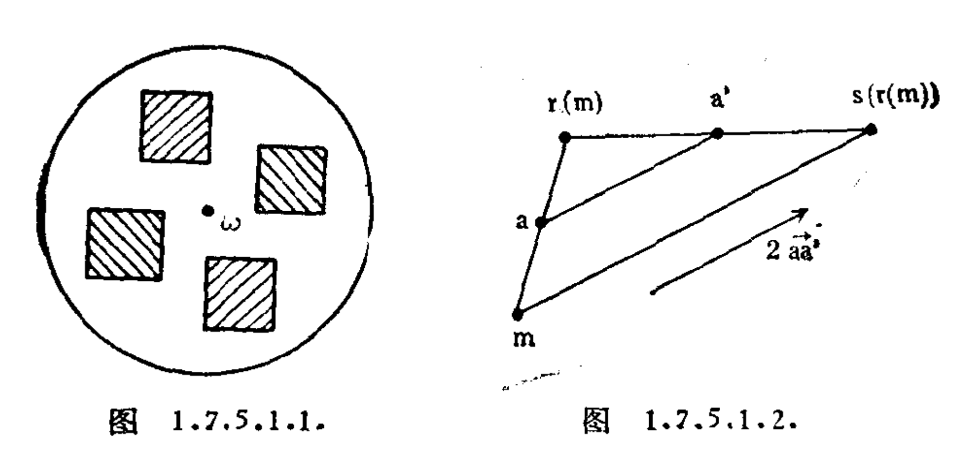


图 1.7.5.1.1.　　图 1.7.5.1.2.

就是沿向量 $r(\vec{\xi})$ 的平移，且因 $r(\vec{\xi})$ 应与$\vec{\xi}$平行，r必是一个中心对称．于是 $G \backslash \Gamma$ 中所有的旋转都成了中心对称；若 r, s 分别以 a, a' 为对称中心，则sr就是沿向量 $2\overrightarrow{aa'}$的平移．这样，$G \backslash \Gamma$

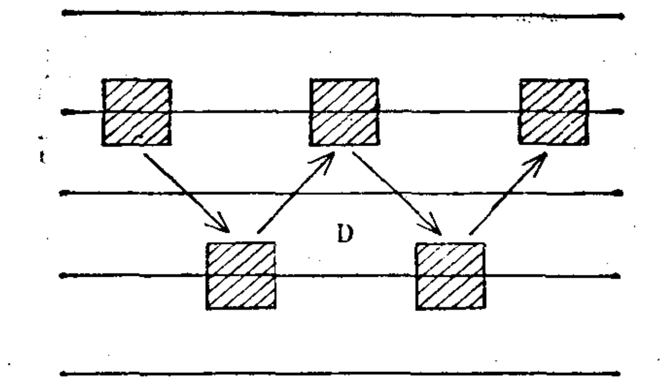


图 1.7.5.1.3.

中所有元素的对称中心就将位于一条平行于我们的平移方向的直线上；由此将推出 $\bigcup_{g\in G} g(P)$ 含于一条以D为中轴的带子内，这跟 GP1 又是相悖的.

现在，Γ 已至少含有两个线性独立的向量平移；还要说明的是存在 $\vec{u}, \vec{v}$ 使

$$\Gamma = \{平移\ \mathbf{Z}\vec{u} + \mathbf{Z}\vec{v}\}.$$

根据 1.7.5.1，可以找到Γ中一个具有最小模 $\|\vec{u}\|$ 的向量平移 $\vec{u}$ 以及具有最小模 $\|\vec{v}\|$ 的向量平移 $\vec{v}\notin \mathbf{Z}\vec{u}$；我们说，$\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 就是所要求的两个向量平移. 设Q是平行四边形

$$Q = \{a + t\vec{u} + s\vec{v} : t,\ s\in [0,\ 1]\},$$

顶点 a 是任意给定的. 由于G是群，而

$$\Gamma \supset \{平移\ \mathbf{Z}\vec{u} + \mathbf{Z}\vec{v}\},$$

所以 $g(Q)$, $g\in\Gamma$ 充满整个 E；从而 a 在Γ作用下的轨道上的任一点——它不在 $a + \mathbf{Z}\vec{u} + \mathbf{Z}\vec{v}$ 内——将给定该轨道上位于Q内的一点 y. 但由 $\vec{u}, \vec{v}$ 的取法，y 到Q的四个顶点的距离都严格地小于 $\|\vec{u}\|$ 或 $\|\vec{v}\|$. 由此得出Γ中这么一个平移，跟 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 的选取是矛盾的. 为了证明这一点，不失一般性，我们假设 y 位于三角形

$$\{a,\ b = a + \vec{u},\ c = a + \vec{v}\}$$

内；直线 $\langle a, y\rangle$ 交对角线 $\langle b, c\rangle$ 于 a'，我们有 $d(a, y) < d(a, a')$. 但 $d(a, a') < (d(a, b) + d(a, c))/2$，与 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 的选取矛

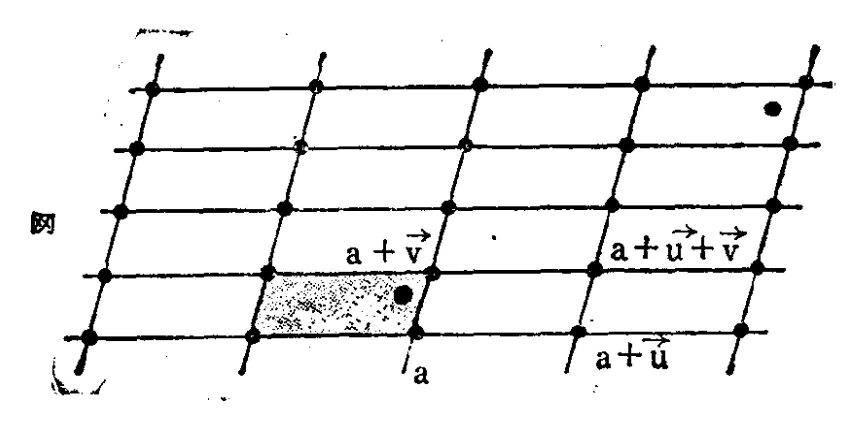


图 1.7.5.1.4.

盾.

1.7.5.3 现在来看G中真正的旋转，即 $G' = G \backslash \Gamma$ 的元素. 若 $r \in G'$, 公理 GP2 说明 r 必定是有限阶的. G仅含二阶旋转，也即仅含关于E中的点的对称的情况，是很容易的: 若 $G = \Gamma$, 那就是图 1.7.4.1 的群; 若确实有二阶旋转，那就是 1.7.4.2 的群. 所以，现在假定 $r \in G'$ 的阶 $\alpha \geqslant 3$, 而且角度为 $2\pi/\alpha$, 这总是可能的;设 a 是旋转中心. 设 b 是 G' 中不同于 a 且最靠近 a 的旋转中心; 再设 s 是以 b 为中心、阶 $\beta \geqslant 3$、角度为 $2\pi/\beta$ 的旋转. 令 $t = (rs)^{-1}$, 从而 $rst = \mathrm{id}_E$. 但 9.3.6 中证明, t 的中心 c 保证了三角形 abc 的内角和是 r, s, t 的角度之和的一半. 现在我们证明,由 b 的选取可以引出: 若记 t 的阶为 γ,则 t 的角度

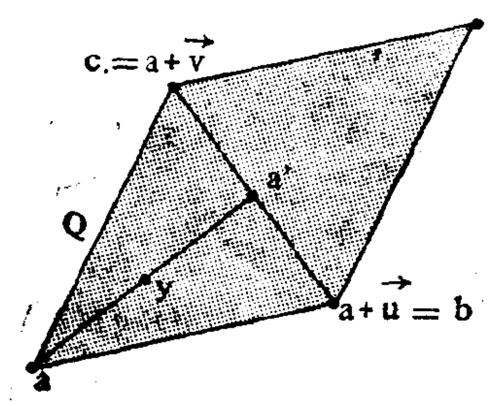


图 1.7.5.1.5.

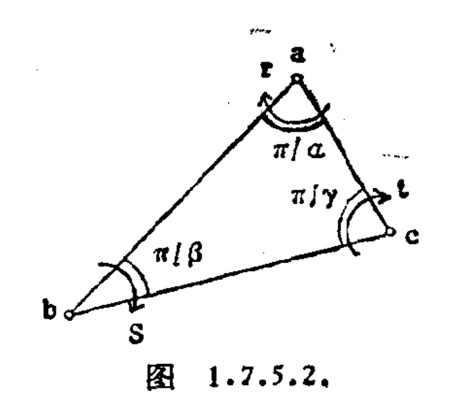


图 1.7.5.2.

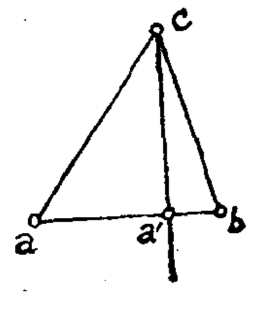


图 1.7.5.3.



等于 $2\pi/\gamma$. 事实上倘若 t 的角度为 $2\pi n/\gamma, n \geqslant 2, G'$ 中就将存在一个以 c 为中心、角度小于 t 的角度的旋转；由此，再用一次 9.3.6 的结果，就将得出 $(rt')^{-1} \in G'$ 且其中心 a' 比 b 更靠近 a，这是矛盾。

因为三角形内角和为 π，我们就有

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=1.$$

因为 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}$ 且都 $\geqslant 3$，所有的可能性可由下表给出：

1.7.5.4

$$\boxed{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=1}$$

	$1/\alpha$	$1/\beta$	$1/\gamma$
情形 I	1/3	1/3	1/3
情形 II	1/2	1/4	1/4
情形 III	1/2	1/3	1/6

容易证明 I，II，III 这三种情形分别相应于 1.7.4.3，1.7.4.4 和 1.7.4.5 各图的群。

1.7.6 如果现在我们讨论同样的问题，但把 $\mathrm{Is}^+(E)$ 换成整个 $\mathrm{Is}(E)$ 群，也就是说瓦片的两面都得用来装饰铺砌，这时前面的讨论仍然有效(1.7.5.1 和 1.7.5.2)，但 G 的情况要稍微复杂一些；我们还能找到另外 12 个群，加在一起就是 17 个。这 12 个群就是下面的图形所对应的那些群：

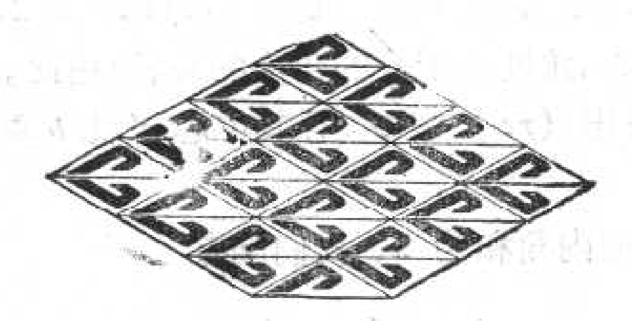


图 1.7.6.1

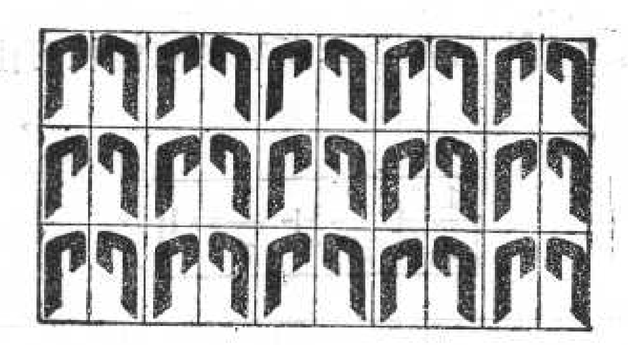


图 1.7.6.2.

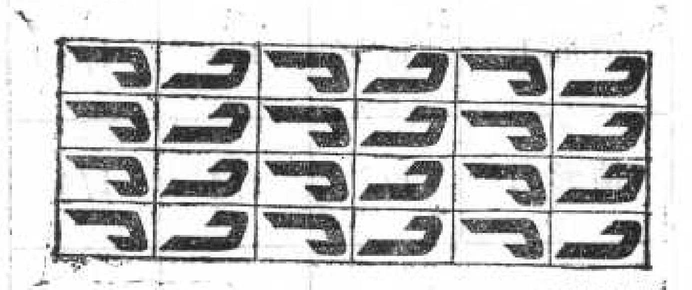


图 1.7.6.3.

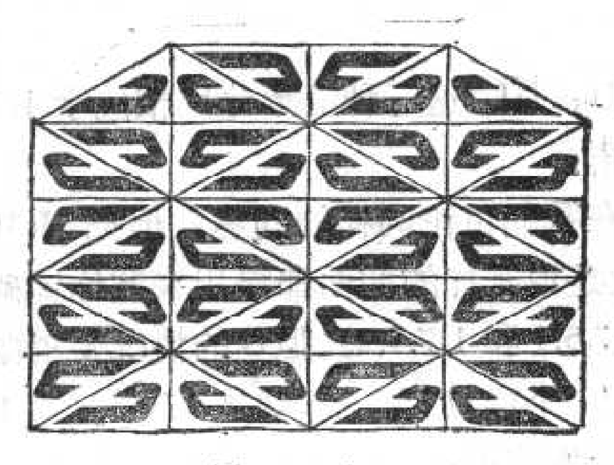


图 1.7.6.4.

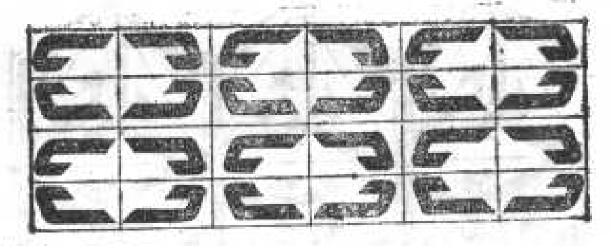


图 1.7.6.5.

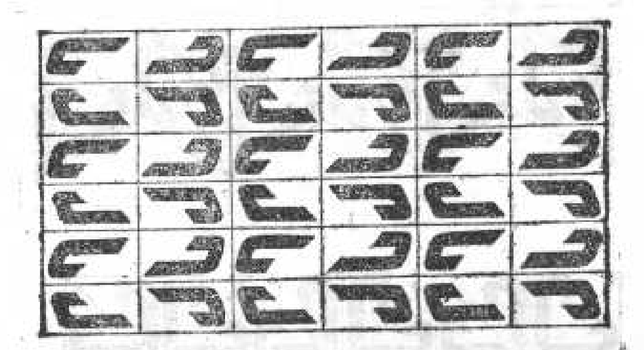


图 1.7.6.6.

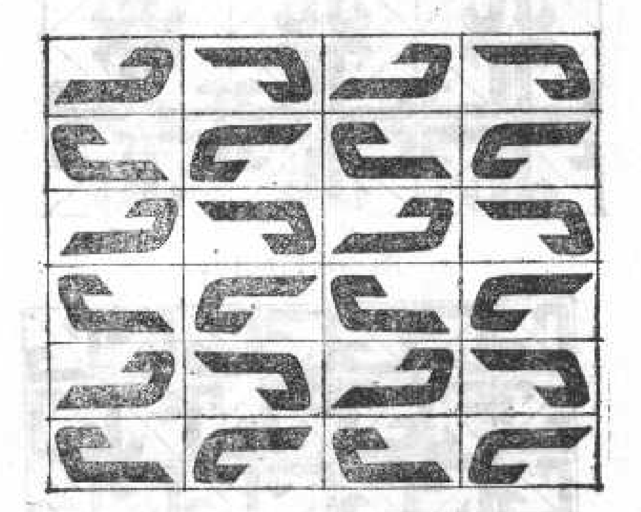


图 1.7.6.7.

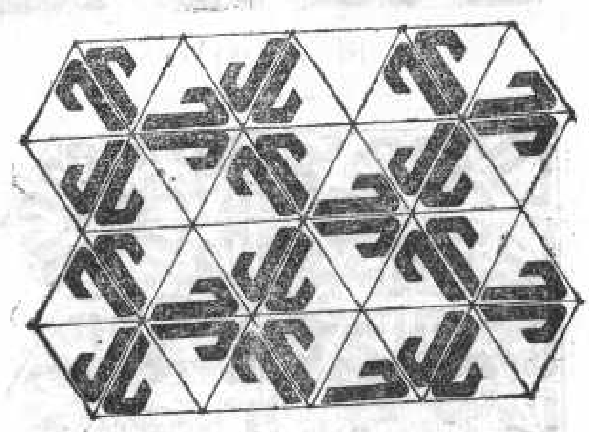


图 1.7.6.8.

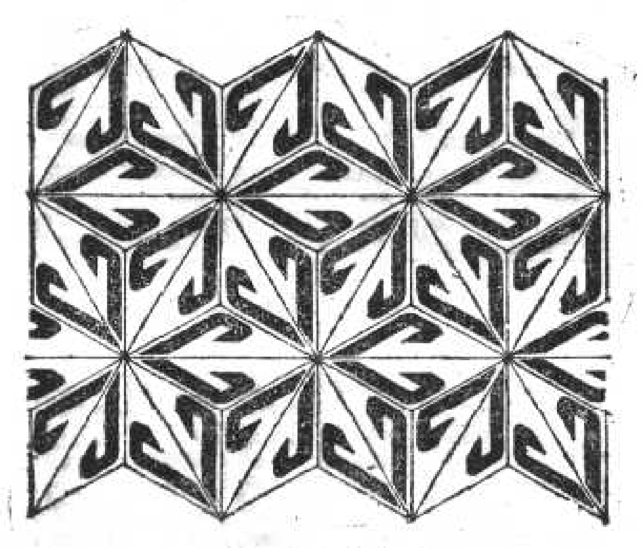


图 1.7.6.9.

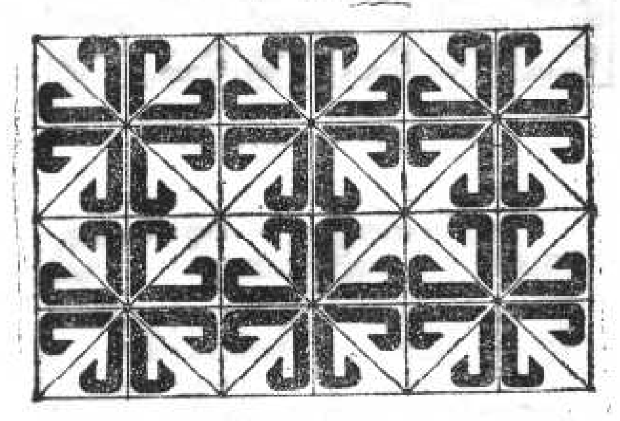


图 1.7.6.10.

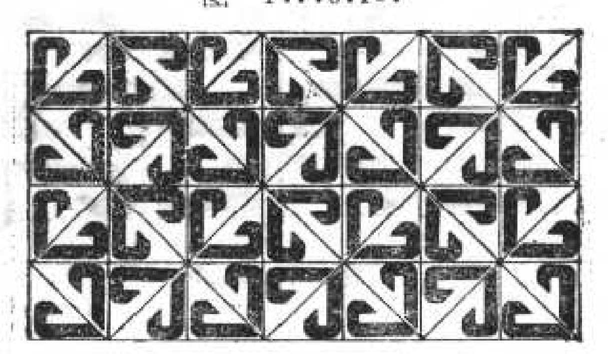


图 1.7.6.11.

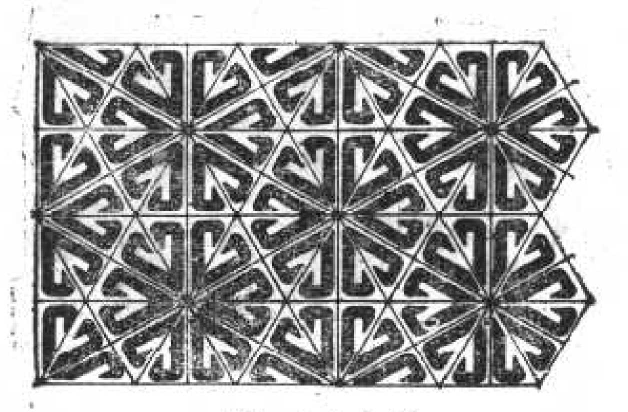


图 1.7.6.12.

1.7.7 附注

1.7.7.1 第一个严格证明拼嵌群共有 17 种的人，似乎是 Fedorov(1891年). 进一步的历史的或工艺的说明,可参见[FT2], p.38, [CR1], p. 279, [H-C], 第 II 章.

Fedorov 的出发点是结晶学. 关于平面及空间的晶体群，最新的完备的参考书是 [BUR], [CR2] 中也有某些很有意思、很详细的历史材料. 尤其可参见 [SC1]. 也可参见 1.9.14 和[SC2]. 关于 4 维的情形,参见 [B-B-N-W-Z].

1.7.7.2 铺嵌的问题是在 3 维欧氏空间提出的，但在别的非欧的空间也有这个问题；例如在球面或在双曲空间. 球面 S^2 上的铺嵌问题可参见下面的 1.8.6 节，双曲空间的铺嵌可参见 19.6.12.

1.7.7.3 3 维空间的铺嵌可见 [BUR], 其中举出了 230 种铺嵌方式. 在任意维的情形，问题相当复杂，我们还不能有什么预言. 在 4 维的情形,有 4783 种.

1.7.5.2 中关键问题的证明,在任意维的情形已不是那么容易，这是 Bieberbach 的定理,参见 [WF], 第 100 页.

1.7.7.4 无不动点的(任意维)拼嵌群的分类问题，却来得更简单些,所谓无不动点是指 $\forall g \in G\backslash e$: 对所有的 $x \in E$, $g(x) \neq x$. 这种群之所以引起我们的兴趣,是因为商空间 X/G 是光滑的,而且还是一个微分流形.

在 2 维的情形,只有两个群具有这一性质,一个是图 1.7.4.1 的群,它给出的商空间是二维环面 $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, 另一个是图 1.7.6.3 的群，商空间为著名的 Klein 瓶. 在 [WF] 第 3 章里有这些群在任意维情形下的分类; 3 维时有 6 种,参见 [WF], 第 117 页.

1.7.7.5 关于铺嵌以及一些相近的但更引人入胜的内容，可参见 [FT1] 和 [FT2].

1.7.7.6 关于与图 1.7.4.8 和 1.7.6.13 相仿的其它图画，可参见[FT2], "铠甲铁片" I, II, III 和 [ER].

1.7.7.7 还可参见 1.8.7, 1.9.4, 1.9.9, 1.9.12.

1.7.7.8 关于一种更细致的、得出 81 种铺嵌形式的分类，参

图 1.7.6.13.
M. C. Escher，"骑士循环铺嵌习作"，墨汁与水彩，海牙 Escher 纪念馆.



图 1.7.6.14. 样模 P.

见 [GR-SH1]. 关于 91 种形式的，参见 [GR-SH2]. 也可参见 1.9.13.

1.8 S^2 的铺嵌，正多面体与 $O^+(3)$ 的有限子群

1.8.1 对 1.7.5.3 可作这样的解释：以 a 为中心的有限价的旋转，产生了以 a 为圆心的圆的规则铺嵌. 或者还可以这样说，平面铺嵌问题孕育着绕平面上固定点的旋转群，即 $O^+(2)$ 的同构群的有限子群的研究(参见 8.3). 同样，3 维欧氏空间的铺嵌问题孕育着 $O^+(3)$ 的有限子群的研究，而它又可以化为球面 S^2 的铺嵌问题. 这里，我们只讨论最后的这个问题，对 230 种空间晶体群感兴趣的读者可参看 [BUR].

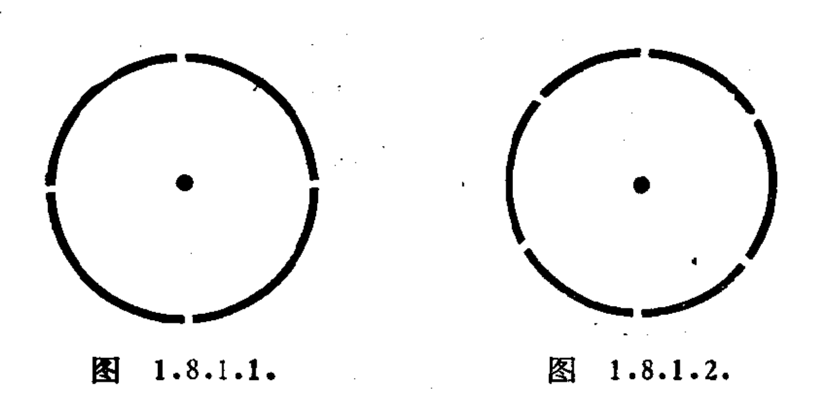


图 1.8.1.1.　　图 1.8.1.2.

1.8.2 定理. 不计 $O(3)$ 中的共轭差别的话，$O^+(3)$ 的有限子群共有五种，其中三种是群，两种是以 $\geqslant 2$ 的整数为足标的群序列.

在给出 1.8.3.4 中关于正多面体的直观模型之前，我们先对这个问题给出一种数学上的解决方法. 关于正多面体，参见 12.5, 12.6 两节.

1.8.3 证明提要

1.8.3.1 出发点是巧妙地运用分类公式 1.6.6. 另一种用到正多面体以及 Euler 公式的方法，将在 12.7.4 中给出；在 12.6 中我

们将对任意维的正多胞形进行分类。

设 $G\subset O^+(3)$ 是给定的有限子群，其作用限制在球面 S^2 上；引进

$$\Gamma=\{(g,x)\in(G\backslash e)\times S^2:g(x)=x\},$$

它是跟 G 在 S^2 中的不动点，也就是说(参见 8.4.7.1)是跟 G/e 的旋转轴有密切联系的。下面用两种办法来计算 $\#\Gamma$，先就 g 求和，然后就 x 求和。令

$$X=\{x\in S^2:g\in G\backslash e\,|\,g(x)=x\},$$

这是非平凡的 g 的不动点集合。

根据 8.4.7.1，每个 $g\in G\backslash e$ 恰好有两个不同的不动点，因而 $\#\Gamma=2(\#G-1)$。为计算$\#X$,我们来看 G 作用于 $X\subset S^2$ 的轨道以及由 1.6.6 中的截面 A 所给出的参数。对 $x\in A$，有（参见 1.6.2）：$\#O(x)=\#G/\#G_x$；但（参见 1.5.3）$\#G_y$ 对每个 $y\in O(x)$ 都是常数。设这常数记为 $\nu(x)$。这个常数正是由 G_y 生成的旋转的阶数；于是有$\#(G_y\backslash e)=\nu(x)-1$。由于

$$G_y\backslash e=\{g\in G\,|\,(g,y)\in\Gamma\},$$

有

$$\#\Gamma=\sum_{x\in A}(\nu_x-1)\#O(x)=\sum_{x\in A}(\nu_x-1)(\#G)/(\#G_x)$$
$$=\sum_{x\in A}\frac{\#G(\nu_x-1)}{\nu_x},$$

从而

1.8.3.2

$$\boxed{2-\frac{2}{\#G}=\sum_{x\in A}\left(1-\frac{1}{\nu_x}\right).}$$

1.8.3.3 若所有的 ν_x 都很大,则每个 $1-(1/\nu_x)$ 都很接近 1，因此除了和式中不超过两项的情形外，它们的和是大于 2 的。由此容易看出,所有可能的情形有如下表所示：

	ν_1	ν_2	$\#G$
情形 I	n	n	n

2 轨道

	ν_1	ν_2	ν_3	$\#G$
情形 II	2	2	n	$2n$
情形 III	2	3	3	12
情形 IV	2	3	4	24
情形 V	2	3	5	60

n 为任何$\geqslant 2$的整数

3 轨道

1.8.3.4 因此对轨道的基数及相应的迷向群的阶数而言，只存在 5 种可能的情形. 接下来还要证明 1°：每种情形都是确实发生的；2°：不计在 $O(3)$ 中的共轭差别的话，每一种情形只对应一个群 G.

第 2° 点并不很难，但需要很仔细地讨论，参见 [AS]. 至于 1°,我们可以看到:

——情形 I 是由一个 $\mathbf{R}^3$ 中的 n 阶旋转所生成的 n 阶循环群实现的；两个轨道由位于公共旋转轴上的、S^2 的两个点构成（图 1.8.4.1）;

——情形 II 是 $O^+(3)$ 中保持 $\mathbf{R}^3$ 的某平面上以原点为中心的正 n 边形的稳定性的子群的情形；G 包含 n 个角度为 $2k\pi/n$、以多边形的轴为轴的旋转，以及关于多边形中心跟顶点和各边中点的 n 条连线的对称（注意 n 为奇数或偶数时的微小

差别)．群G称为二面体群（$2n$ 阶，参见 0.2)．多边形轴上的、S^2 的两点仅构成一个轨道，另两个轨道：一个是多边形的顶点(我们可以在 S^2 上描出来)，一个是各边中点在 S^2 上的辐射投影点；见图 1.8.4.1；

——情形 III, IV, V 是由 $O^+(3)$ 中保持以原点为中心的正四面体、正六面体、正十二面体的稳定性的子群实现的．正四面体和正六面体的情形是显易的；正十二面体则不然，我们将在 12.5.5 再讨论．

1.8.4 我们说(参见12.5.4 和 12.5.5)，正六面体和正八面体的群是

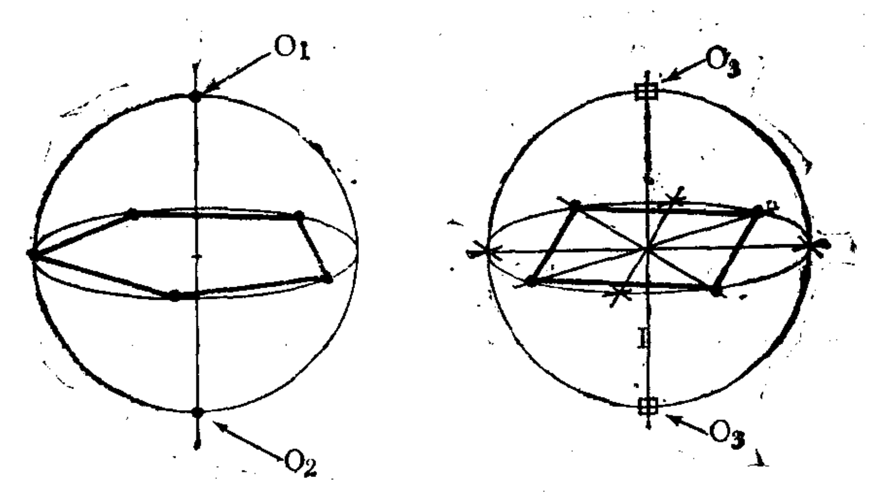


图 1.8.4.1

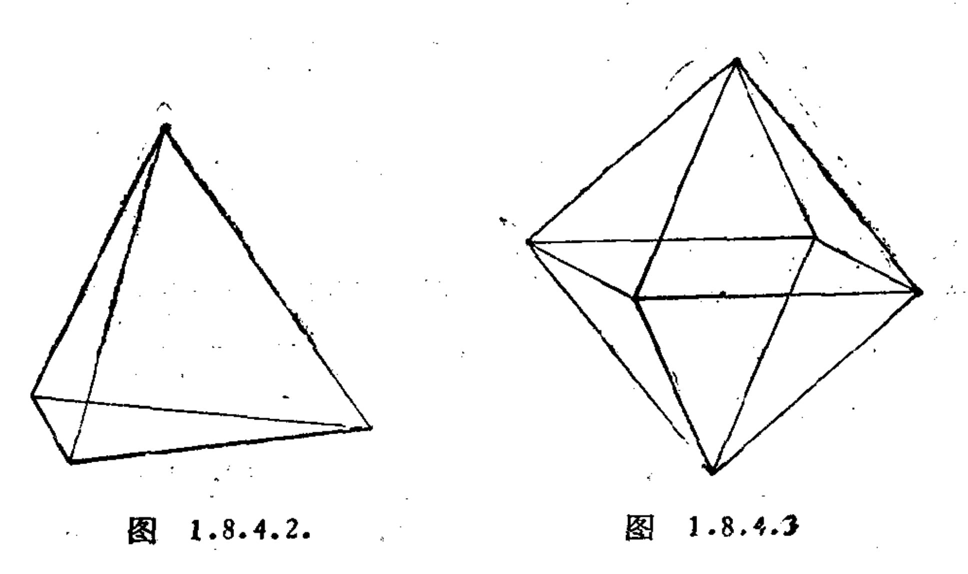


图 1.8.4.2.　　　　图 1.8.4.3

一样的，而且，正十二面体和正二十面体的群也是一样的．情形 III 的群G同构于 $\mathscr{A}_4$，IV 的群同构于 $\mathfrak{S}_4$，V 的群同构于 $\mathscr{A}_5$；

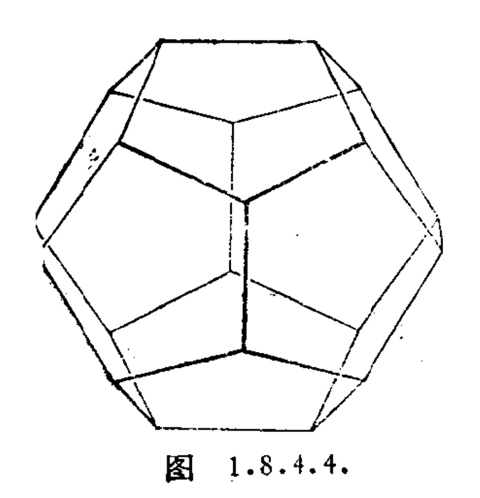


图 1.8.4.4.

图 1.8.4.5.

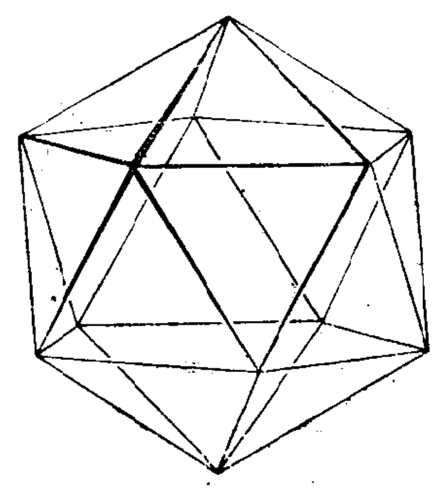
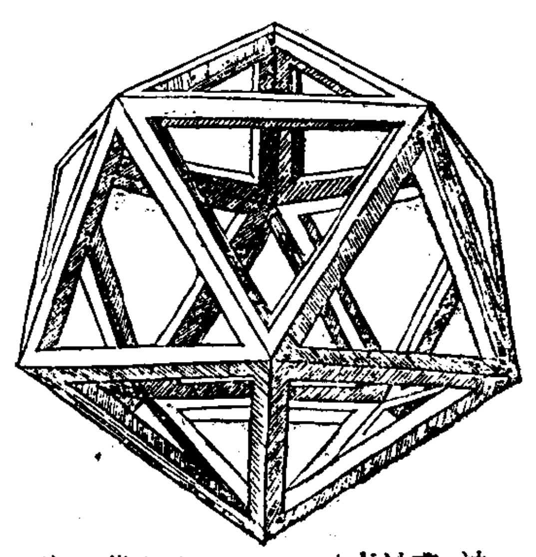
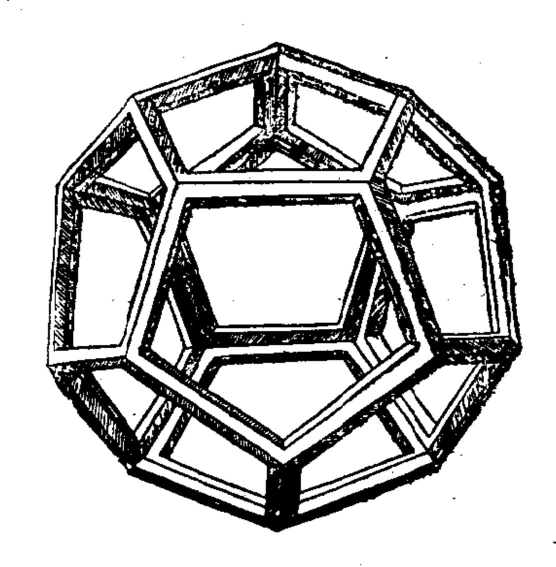


图 1.8.4.6.



达·芬奇为 Luca Pacioli神甫«神奇的比例»所画的二十面体.



达·芬奇为 Luca Pacioli 神甫«神奇的比例»所画的十二面体.

图 1.8.4.7.

这些结论参见 12.5.5.6.

1.8.5 跟 1.7.6 的讨论相仿地，我们在这里也可以讨论 $O(3)$ 的

有限群．这并不困难；我们可以看到，跟情形V相应的是一个120阶的群，图形如下．它提供了相应的 S^2 的一种基本铺嵌．

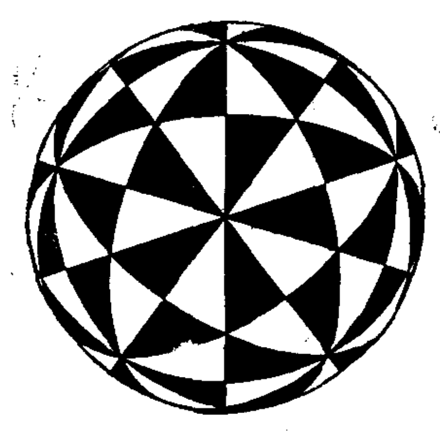


图 1.8.5.
H. S. M. Coxeter,《几何导论》, John Wiley 出版社.

1.8.6 对于 S^2 的铺嵌（或者甚至双曲平面的铺嵌，参见 19.2），1.7.5.2 的主要方法还是可行的(图 1.7.5.3)：但必须考虑三个"旋转" r, s, t，使 $rst =$ 恒等变换．

在欧氏、球面、双曲这三种几何里，它们的角度应有 $2\pi/\alpha$, $2\pi/\beta$, $2\pi/\gamma$ 的形式，α, β, γ 都是整数，而且这些角度之和应是这些旋转的中心 r, s, t 所构成的三角形的内角和的两倍．在欧氏几何里总有 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=1$，根据 18.3.8.4，在球面几何里

1.8.6.1

$$\boxed{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}>1,}$$

根据 19.5.4，在双曲几何里 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<1$．我们也可以由此出发对 $O^+(3)$ 的有限子群进行分类．显然它们是为数有限的(至少对 α, β, γ 的可能取值范围而言)．双曲几何则情形大不相同：除几个较小的数外，所有的 (α, β, γ) 组合都满足

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<1,$$

在 19.6.2 中我们会看到，确实每个这样的群给出了双曲平面的一种铺嵌，因而后一种情形的群是为数无限的．有关的参考或补充的内容也可参见 19.6.12．

1.8.7 由生成元和关系定义的群

我们可以由满足一个关系的两个生成元 r, s 来定义二面体群 $\mathfrak{D}_{2n}$（参见 0.2 和 1.8.3.4）：

1.8.7.1 $r^n = s^2 = e, \ rs = sr^{-1}$.

1.8.3.4 中正多面体相应的三种 $O^+(3)$ 子群也可由满足下述关系的两个生成元 r, s 来定义：

$$r^p = s^q = (rs)^2 = e,$$

其中，对正四面体而言 $p, q = \{3, 3\}$，对正六面体为 $\{3, 4\}$，对正十二面体为 $\{3, 5\}$. 注意，满足这种关系的有限抽象群的存在性并不是很显然的.

也可以相仿地定义拼嵌群；例如图 1.7.4.1 的拼嵌群是由满足关系 $rs = sr$ 的两个生成元 r, s 定义的. 请读者自己写出其它的拼嵌群.

描述二面体群的另一种不同于 1.8.7.1 的方法，是指定两个生成元 r, s 满足一个关系：

1.8.7.2 $r^2 = s^2 = (rs)^n = e$.

相仿地，正多面体的三种稳定子群（$O(3)$ 的稳定子群，阶分别为 24, 28, 120，见 12.5.4.1, 12.5.4.2, 12.5.5.6）由三个生成元 r, s, t 和关系

1.8.7.3 $r^2 = s^2 = t^2 = (rs)^p = (st)^q = (tr)^2 = e$

所定义，p, q 如上所述.

我们注意到 1.8.7.2 和 1.8.7.3 非常相象；实际上这是更一般的群的两个特例，那种群定义为由超平面对称所生成的、欧氏仿射空间的等距群的离散子群。它们之所以引起人们的兴趣，是因为在欧氏几何以外的好多领域都碰得到它们；特别是在半单李群的研究中，它们起了很大的作用。关于这一近来进展很大的课题以及上面那些例子的进一步说明，可参见：［C-M］全书或其中第 38—51 页；［BI4］全书及其中第 234—240 页的历史附注.

1.9 练　　习

1.9.1 讨论 $G = \mathbf{Z}$ 作用在 $\mathbf{R}^2$ 的圆 S^1 上的轨道，这里，根据实数 α 的性质，$\mathbf{R}^2$ 是通过 $\varphi(n)(z) = e^{i\alpha n}z$ 等同于 $\mathbf{C}$ 的. 如果 α 是

无理数，由此可以作出 1.5.7 中提到的反例吗？

1.9.2 对 $G=\mathbf{R}$，$X=S^3$ 讨论同样的问题，沿用 1.2.9 中的记号：$\Pi(t)(z,z')=(e^{i\alpha t}z,\ e^{i\alpha t}z')$，$\alpha\in\mathbf{R}$.

1.9.3 根据下面给出的提要，完成定理 1.8.2 的证明.

1.9.4 先对其中 5 种、然后对所有 17 种拼嵌群，讨论：

——迷向群的阶；

——它的结构；

——它的各种轨道的性质；

——由生成元及关系给出的定义(参见 1.8.7).

1.9.5 对作用在 S^2 上的 $O^+(3)$ (或 $O(3)$) 的有限子群讨论同样的问题.

1.9.6 画出在情形 I, II, III, IV 的群的作用下，S^2 的基本铺嵌样式.

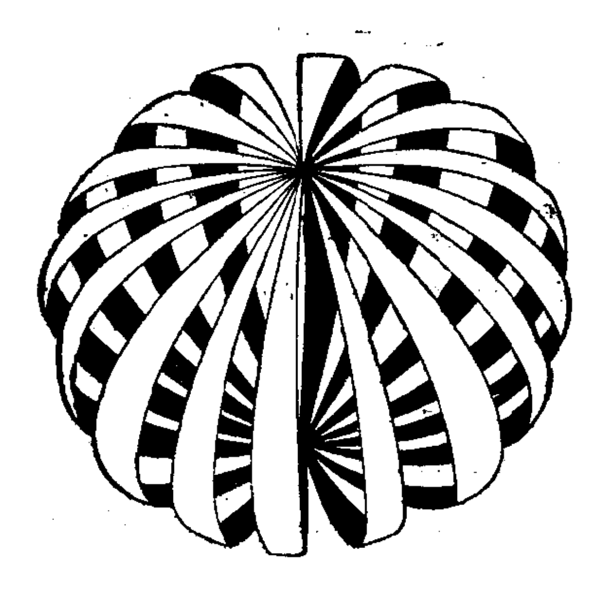


图 1.9.6.

1.9.7 证明从 1.7.7.4 中得到的商空间就是环面和 Klein 瓶.

1.9.8 证明对圆 S^1、球面 S^3 (例如参见 18.8.1) 以及更一般地对球面 S^{2k+1}，都存在无穷多种相应的拼嵌群.

1.9.9 比较、讨论下列著作中的拼嵌群分类问题：[GR]，第 72—84页，[H-C]，第 70—81 页，[WL]，第 22—115 页.

1.9.10 设 E 为 k 个元素的有限域上的有限 n 维向量空间，计算

$\#G_{E,p}$ (参见 1.2.5).

1.9.11 求 $O^+(3)$ 的所有的紧子群.

1.9.12 **基本域.** 设 $G\subset \mathrm{Is}(E)$ 是欧氏仿射平面的等距群的子群;假设G的所有的轨道都是E的离散子集. 对固定的 $a\in E$, 证明

$$P=\{x\in E: d(x, a)\leqslant d(x, g(a)) \quad \forall g\in G\}$$

满足拼嵌群公理.

1.9.13 **拼嵌价.** 考虑样模为凸形且满足 1.7.3 的平面拼嵌, 证明平面上至少同属三个不同样模的点的数目是有限的, 大于或等于 3 且不依赖于P的选取;下面以 r 记这个数. 将P的顶点顺序记作 $m_1,\cdots,m_r$, 用 α_i 表示含有 m_i 的样模的个数, 证明序列 $(\alpha_i)_{i=1,\cdots,r}$ 与P的选取无关(不计序列倒置或轮换的差别);称之为拼嵌的价序列. 证明总有

$$\frac{r}{2}-1=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\alpha_i}$$

(可参照 12.7.2, 12.7.4). 并进而证明: 只有 23 种可能的价序列. 画出价序列为(3, 3, 3, 3, 3,3),(3, 3, 3, 3, 6),(3, 3, 3, 4, 4),(3, 3, 4, 3, 4), (4, 4, 4, 4), (3, 6, 3, 6), (3, 4, 6, 4), (6, 6, 6),(4, 8, 8),(3, 12, 12),(4, 6, 12)的拼嵌样式. 最后证明这些拼嵌不能产生任何别的价序列. 必要时可参见 1.7.7.8.

1.9.14 可以用任意三角形拼嵌平面吗? 用任意凸四边形呢? 用任意四边形呢? 关于五边形及边数更多的情形,可见 [SC2].

1.9.15 设 $s: 1\longmapsto 2\longmapsto 1$ 和 $t: 2\longmapsto 3\longmapsto 2$ 是 $\mathfrak{S}_3$ 中两个置换. 证明 $t\circ s$ 是 3 阶的. 从而证明,若 $\mathfrak{S}_3$ 作用于群G上,且G关于 s 不变 (即 $s(g)=g$)、关于 t 逆不变(即 $t(g)=g^{-1}$), 则必有 $g=g^{-1}$.

参见在 9.5.4.9 中的应用.

1.9.16 证明用图 1.9.16 中的六种样模可以铺嵌平面;证明由这六种样模实现的平面铺嵌不是周期的, 也就是说, 保持拼嵌整体稳定的平面等距群中不可能含有非平凡的平移. 对这个证明感到困难的读者,或可参考 [RN1], 或可进行下面的工作: 画下六种样

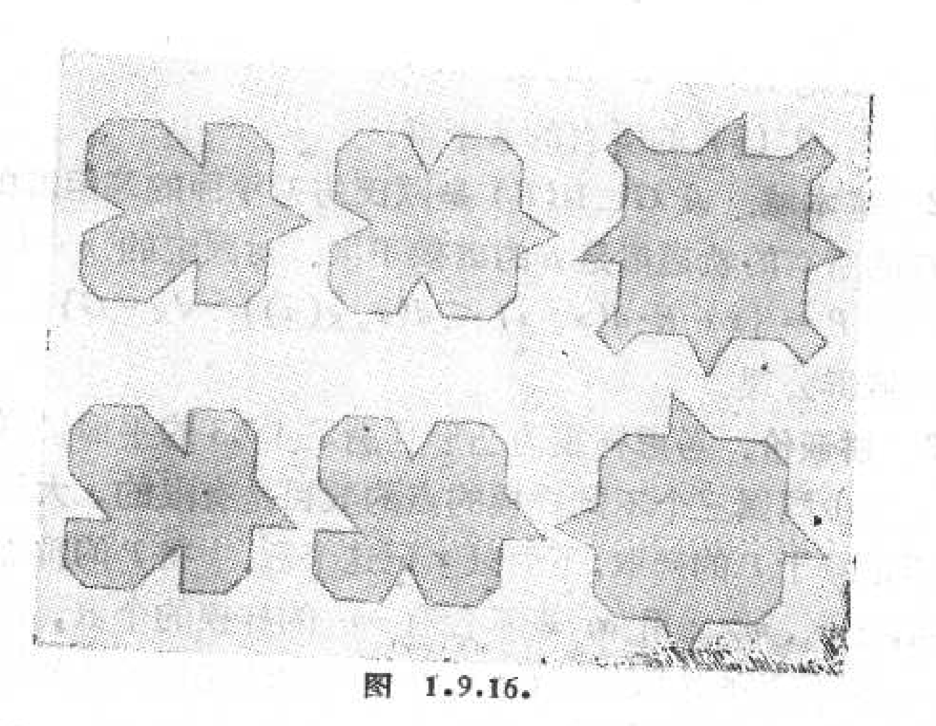


图 1.9.16.

模,然后复印相当数量,再剪下来拼拼看.也可参见第 170 页的图.

第2章 仿射空间

这一章介绍仿射空间，这是本书中用得最多的几何空间。仿射空间就是一个向量空间，我们在其中引进线性变换——平移，从而忘掉0这个点的特殊性。于是，仿射空间、仿射空间的映射、仿射子空间的基本性质，都是线性代数中的性质在某种程度上的翻版。因此，大部分证明都是不言而喻的：凡要证明仿射空间中的一个结论，我们的思路就是通过适当的平移把它化为向量空间中的问题，这样的做法往往也就是把所考虑的空间在某一点向量化。

从第 2.5 节起，几何重又登场，首先是几个很容易的定理：Thalès 定理，Pappus 定理和 Desargues 定理。唯一比较困难而又很有趣的结果，是第 2.6 节中仿射几何的基本定理，它声称：两个仿射空间之间的集合论意义下的映射，若把位于同一直线的点仍变成位于同一直线的点，则它几乎就是仿射映射。

这一章的最后部分讲有限维实仿射空间和一些以后要用到的结果；这些空间，以及它们的仿射群 GA(·)，都有一个标准拓朴。它们具有完全成正比的 Lebesgue 测度。根据测度论，我们将证明 X 的每一紧子集 K 总有一点，即中心，是在任何使 K 整体不变的 X 的自同构下不动的。根据同样的思想，使紧集 K 整体不变的自同构全体构成的 GA(X) 的子群，若内部非空，则必然是紧的；反之，GA(X) 的任一紧子群必含于 X 的关于某点的稳定群之中。

想要知道 2.1 至 2.6 各节证明的细节的读者，可以在 [FL] 中得到满意的答复。

这章里碰到的向量空间都是域上的向量空间。如果同时考虑两个向量空间或仿射空间，它们总是在同一个基域上的，唯一的值得注意的例外是第 2.6 节。

一个很有意思的习题：仔细讨论在哪些地方用到了基域的可

交换性．并且在必要时适当修改讨论的结果．

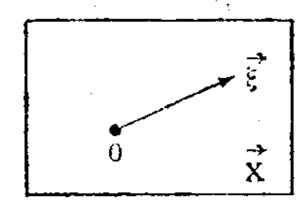
2.1 定　　义

2.1.1　定义． 域K上的一个仿射空间，就是一个群的作用$(\vec{X}, X, \Phi)$，其中$\vec{X}$是K上的向量空间并作为一意、可迁的加群作用在X上．

2.1.2　记号． 置

$$\Phi(\vec{\xi})(x) = x + \vec{\xi};$$

$\Phi(\vec{\xi})$称为X的平移，更确切地说，$\Phi(\vec{\xi})$是沿向量$\vec{\xi}$的平移并记作$t_{\vec{\xi}}$.



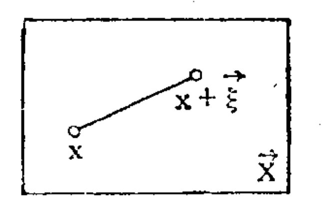


图　2.1.1.

我们通常就把仿射空间记为X．有时把$\vec{X}$叫作仿射空间X的底向量空间．

2.1.3　根据1.4.4.1，$(\vec{X}, X, \Phi)$是单可迁的，因而存在一个映射

$$\boxed{\Theta: X \times X \to \vec{X},\ \text{也记作}\ (x, y) \longmapsto \overrightarrow{xy}}$$

使得对所有$x, y \in X$有$y = \Phi(\Theta(x, y), x)$．可以把$\overrightarrow{xy}$称为由固定向量$(x, \overrightarrow{xy})$或二点组$(x, y)$决定的自由向量．

也记

2.1.4

$$\overrightarrow{xy} = y - x,$$

这一点将于3.1.7在某种意义上加以证实．$\vec{X}$作用在X上，从而

$$(x + \vec{\xi}) + \vec{\eta} = x + (\vec{\xi} + \vec{\eta}),\ \text{因此可记作}\ x + \vec{\xi} + \vec{\eta}.$$

特别是，Θ满足：

2.1.5

$$\begin{cases}\forall x\in X: \Theta_x: y\longmapsto \Theta(x,y) \text{ 是双射 } X\to\vec{X},\\ \forall x,y,z\in X: \Theta(x,y)+\Theta(y,z)=\Theta(x,z)\text{ (Chasles 等式)}.\end{cases}$$

事实上我们有 $\Theta_x^{-1}(\vec{\xi})=x+\vec{\xi}$，由此就得出上述两个性质.

2.1.6 等价定义. 设 X 是非空集合，$\vec{X}$ 是 K 上向量空间，若

$$\Theta: X\times X\to\vec{X}$$

使得 $\forall x$ 映射 Θ_x 是双射且 $\Theta(x,y)+\Theta(y,z)=\Theta(x,z)$ $\forall x,y,z\in X$，则关于作用 $\Phi(\vec{\xi})(x)=\Theta_x^{-1}(\vec{\xi})$ 而言，X 是一个仿射空间. 反之亦然.

事实上我们可顺次得出：$\Theta(x,x)=0$，$\Theta(y,x)=-\Theta(x,y)$，$\Phi(-\vec{\xi})\circ\Phi(\vec{\xi})=\mathrm{Id}_x$ 和 $\Phi(\vec{\eta})\circ\Phi(\vec{\xi})=\Phi(\vec{\eta}+\vec{\xi})$.

2.1.7 定义. 把 $\vec{X}$ 的维数称为 X 的**维数**，记作 $\dim X=\dim\vec{X}$. 若维数为 0，则 X 是一个**点**；若维数为 1，则称 X 为**仿射直线**；若维数为 2，则称 X 为**仿射平面**.

下面的说明完全证实了定义 2.1.6 的合理性. 我们已知存在双射 $\Theta_x: X\to\vec{X}$，它们满足：

2.1.8 $\Theta_y^{-1}\circ\Theta_x=\Phi(\overrightarrow{xy})$，$\Theta_y\circ\Theta_x^{-1}: z\mapsto z+\overrightarrow{yx}$ $\forall x,y\in X$.

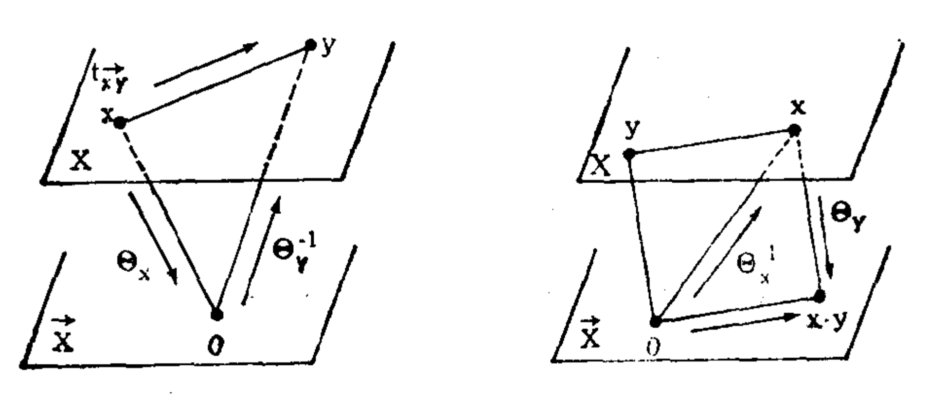


图 2.1.8.

2.1.9 定义. 对 $a\in X$，X_a 表示一个向量空间，它的底集是 X，其上赋有的向量空间结构保证 $\Theta_a: X\to\vec{X}$ 是向量空间的同构. 称 X_a 是 X 在 a 处的**向量化空间**.

2.2 例子，仿射标架

2.2.1 取 $X=\vec{X}$，$\Phi(\vec{\xi})(\vec{\eta})=\vec{\xi}+\vec{\eta}\quad\forall\vec{\xi},\vec{\eta}\in\vec{X}$. 这样就在任一向量空间上得到了一个自然的仿射结构.

2.2.2 若 $(\vec{X},X,\Phi)$，$(\vec{X}',X',\Phi')$ 是两个仿射空间，则 $(\vec{X}\times\vec{X}',X\times X',\Phi\times\Phi')$ 也是仿射空间，这里

$$(\Phi\times\Phi')(\vec{\xi},\vec{\xi}')(x,x')=(\Phi(\vec{\xi})(x),\Phi'(\vec{\xi}')(x')).$$

2.2.3 设 E 是向量空间，F 是 E 的向量子空间，X 是 F 所决定的等价关系的一个等价类，则对于 $\Phi(f)(x)=x+f$，$x\in X$，$f\in F$ 来说 (F,X,Φ) 自然地成为一个仿射空间. 这里要注意（这正是仿射空间记法的长处所在），与 2.2.1 的特殊情况不同，集 X 并不象 $\vec{X}$ 有原点 0 那样具有"特殊的"点. 因为当 F 是 X 的超平面时，给定 X 的一点就等价于给定 F 在 E 中的补集；而一般说来，并不存在"自然"补集，一个从更抽象的角度说明这一点的例子在第 2.2.5 节中. 这种 X 的一个特殊情形是线性方程组

$$\sum_j a_{ij}x_j=\ b_i(i=1,\cdots,k)$$

的解集合，事实上它可以看作某个适当的线性映射下的逆象 $f^{-1}(B)$，从而是子空间 $F=f^{-1}(0)$，即 f 的核的等价类.

2.2.4 设 $(\vec{X},X,\Phi)$ 是仿射空间，$\vec{S}\subset\vec{X}$ 是向量子空间. 这时在 X 中定义了一个等价关系

$$\mathscr{R}(\vec{S}):x\mathscr{R}x'\Longleftrightarrow\overrightarrow{xx'}\in\vec{S}.$$

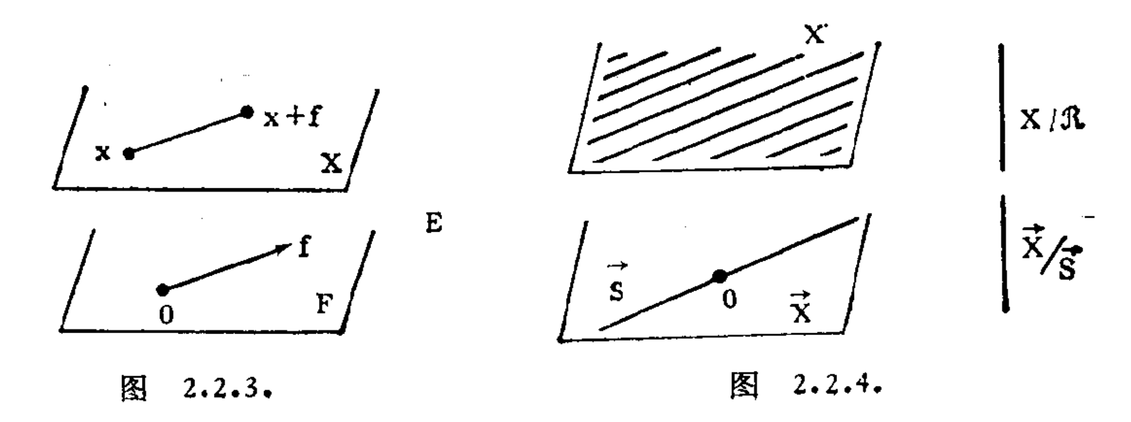


图 2.2.3.　　图 2.2.4.

于是 $(\vec{X}/\hat{S}, X/\mathscr{R}, \Phi)$很自然地是一个仿射空间，这里$\Phi$是由向商空间的投影来定义的。在 2.4.1 中我们会看到什么是等价类。

2.2.5 设E是向量空间，H是它的一个超平面；置

$$\boxed{E_H = \{W: H\text{在}E\text{中的补子空间}\}.}$$

注意到W都是向量直线；利用 1.2.5 的记号，可以写成

$$E_H = G_{E,1} \backslash G_{H,1}.$$

因而:

2.2.6 命题. 在 E_H 上存在自然的仿射空间结构，其底向量空间是 $\vec{E}_H = L(E/H; H)$（对两个向量空间，我们用 $L(\cdot;\cdot)$ 表示从一个到另一个的线性映射全体的集合）。

注意到 $\dim E/H = 1$，就有

$$\dim \vec{E}_H = \dim H = \dim E - 1.$$

为要定义 $\Theta: E_H \times E_H \to L(E/H;H)$，设 $W, W' \in E_H$，$\alpha \in E/H$. 若 $p: E \to E/H$ 是标准投影，则 $p^{-1}(\alpha)$ 是E的仿射超平面(参见 2.2.3)；我们知道，p 限制在H的任一补集上时，是一个同构，因而可令:

$$\Theta(W, W')(\alpha) = (p|W')^{-1}(\alpha) - (p|W)^{-1}(\alpha) \in H;$$

(图 2.2.5 中：$w' = (p|W')^{-1}(\alpha)$，$w = (p|W)^{-1}(\alpha)$)。可直接验证Θ满足公理 2.1.1(或 2.1.5)。

2.2.5 和 2.2.6 在 5.1 节中是很重要的。另外，很自然地我们会要找出 2.2.3 和 2.2.6 的联系（图 2.2.3 和 2.2.5）。由此得出下述命

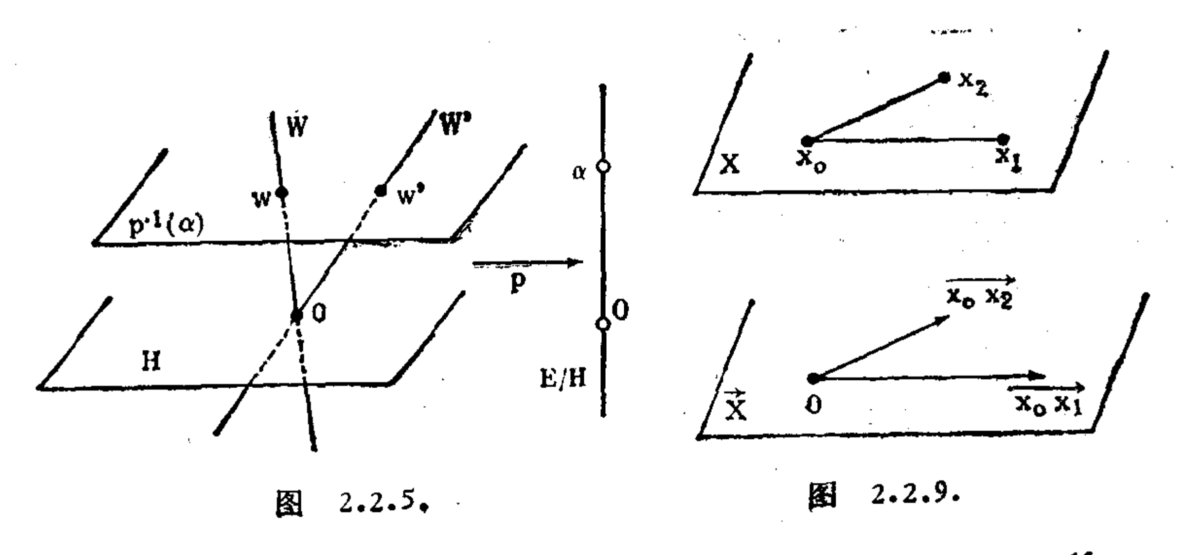


图 2.2.5.　　　　图 2.2.9.

题，它的证明留给读者去完成，其中仿射空间同构的概念将在第 2.3 节中定义.

2.2.7 命题. 设 E 是向量空间，H 是 E 的超平面，X 是关于 H 的一个等价类，则 E_H 和 X 作为仿射空间，在映射

$$E_H \ni W \longmapsto W \cap X \in X$$

下是自然同构的.

2.2.8 为了在仿射空间中进行计算，我们把向量空间的基加以推广. 习惯上，

我们只在有限维空间中谈仿射标架.

2.2.9 定义. 仿射空间 X 的(仿射)标架，就是给定 X 的 $d+1$ 个点 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,d}$，使 $\{\overrightarrow{x_0\,x_i}\}_{i=1,\cdots,d}$ 是 $\vec{X}$ 的基(因而必须有 $d=\dim X$). $x \in X$ 在这标架中的坐标，就是使 $\overrightarrow{x_0x} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{x_0x_i}$ 的

$$\{\lambda_i\}_{i=1,\cdots,n},$$

也就是 $\overrightarrow{x_0x}$ 在 $\vec{X}$ 的基 $\{x_0x_i\}_{i=1,\cdots,d}$ 中的坐标. 我们可以写

$$x = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d).$$

2.2.10 注. 可以等价地说成 $\{x_i\}_{i=1,\cdots,d}$ 是向量化空间 X_{x_0} 的基(参见 2.1.9)；或者还可说成 $\{x_0, x_1, \cdots, x_d\}$ 是 X 的单形；参见 2.4.7.

2.3 仿射空间的态射

设 $(\vec{X}, X, \Theta)$, $(\vec{X}', X', \Theta')$ 是(在同一域上的)两个仿射空间(参见 0.2)，$f: X \to X'$ 是(在集合论意义下给定的)映射.

2.3.1 命题. 对 $f: X \to X'$，下列条件是等价的:

(i) $\exists a \in X \mid f \in L(X_a; X'_{f(a)})$;

(ii) $\forall a \in X: f \in L(X_a; X'_{f(a)})$;

(iii) $\exists a \in X \mid \Theta'_{f(a)} \circ f \circ \Theta_a^{-1} \in L(\vec{X}; \vec{X}')$;

(iv) $\forall a \in X: \Theta'_{f(a)} \circ f \circ \Theta_a^{-1} \in L(\vec{X}; \vec{X}')$.

而且，$\Theta'_{f(a)}\circ f\circ\Theta_a^{-1}$ 从而仅与 f 有关；将该映射记为 $\vec{f}$ 或 $L(f)$. 于是 $\vec{f}\circ\Theta=\Theta'\circ(f\times f)$. 满足上述等价条件之一的映射称为从 X 到 X' 中的(仿射空间的)**态射**或**仿射映射**. 态射的集合**记为** $A(X;X')$. 若 f 同时还是双射，则称 f 是(仿射空间的)**同构**；若 f 是双射且 $X=X'$,则称为 X 的**自同构**.

$$X_a \xrightarrow{f} X'_{f(a)}\qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \Theta_a\downarrow & & \downarrow\Theta'_{f(a)} \\ \vec{X} & \xrightarrow[\vec{f}]{} & \vec{X'} \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} X\times X & \xrightarrow{f\times f} & X'\times X' \\ \Theta\downarrow & & \downarrow\Theta' \\ \vec{X} & \xrightarrow[\vec{f}]{} & \vec{X'} \end{array}$$

2.3.2 附注. 对于仿射映射,对所有的 $x,y\in X$ 有:

$$\boxed{\overrightarrow{f(x)f(y)}=\vec{f}\,(\overrightarrow{xy}),\ f(y)=f(x)+\vec{f}(\overrightarrow{xy}).}$$

此中含义是颇有启发性的：f 由平移和线性映射组成.

2.3.3 例

2.3.3.1 若 $X=X'=\mathbf{R}$, 我们就有熟识的映射

$$x\longmapsto ax+b,\ a,b\in\mathbf{R}.$$

2.3.3.2 常值映射 f 必为仿射的,而且 $\vec{f}=0$. 反之，若 f 是仿射映射而 $\vec{f}=0$, 则 f 是常值映射.

2.3.3.3 若 $f=\mathrm{Id}_X$, 则 $\vec{f}=\mathrm{Id}_{\vec{X}}$ (而且 f 是仿射映射!). 反过来的情况,请见下文.

2.3.3.4 若 $f\in A(X;X')$, $g\in A(X';X'')$,则 $g\circ f\subset A(X;X'')$ 且 $\overrightarrow{g\circ f}=\vec{g}\circ\vec{f}$. 特别是

$$\mathrm{GA}(X)=A(X;X)\cap\mathfrak{S}_X$$

在合成运算下成群，称为 X 的**仿射群**. 我们有同态

$$L:\mathrm{GA}(X)\in f\longmapsto\vec{f}=L(f)\in\mathrm{GL}(\vec{X})$$

(其中 $\mathrm{GL}(\vec{X})=L(\vec{X};\vec{X})\cap\mathfrak{S}_X$ 是 $\vec{X}$ 的线性群). L 的核，即 $L^{-1}(\mathrm{Id}_{\vec{X}})$, 自然就是 $\vec{X}$,即 X 的平移的全体(参见 2.1.2);以后我们把它**记作**

$$\mathrm{Ker}L=T(X);$$

这是 $\mathrm{GA}(X)$ 的正规子群.

2.3.3.5 仿射群在仿射标架上是单可迁的. 这一点譬如说可以这么看出: 若 $\{x_i\}_{i=0,\cdots,d}$, $\{x'_i\}_{i=0,\cdots,d}$ 是 X 和 X' 的仿射标架, 则唯一存在 $f\in A(X,X')$ 使

$$f(x_i)=x'_i \ \forall_i=0,\cdots,d.$$

2.3.3.6 更有理由说, X 是关于群 $GA(X)$ (比在 2.1.1 中定义 X 的群 $\vec{X}=T(X)$ 更大) 的齐性空间. 将 $a\in X$ 在 $GA(X)$ 中的稳定群记作 $GA_a(X)$. 于是(参见 1.5.5)在集论意义下有

$$X\cong GA(X)/GA_a(X),$$

而且限制 $L:GA_a(X)\to GL(\vec{X})$ 是群同构. 为详细说明怎样从 $T(X)$ 和 $GA_a(X)$ 出发得到 $GA(X)$, 我们引进:

2.3.3.7 **定义.** 群 G 称为其子群 H 与 K 的半直积, 如果

$$G=H\cdot K=\{hk:h\in H,k\in K\},\ H\cap K=\{e\},$$

且 H 为正规子群.

可以知道, 写法 $g=hk$ 是唯一的; 也可写成 $G=K\cdot H$, 元素乘积写法也是唯一的, 但若 $g=hk=k'h$, 一般 $k\neq k'$.

2.3.3.8 **命题.** 对 $a\in X$, 我们有半直积

$$GA(X)=T(X)GA_a(X).$$

所要找的从 $GA(X)$ 到 $T(X)\times GA_a(X)$ 中的映射(参见 2.1.2) 当然就是 $f\longmapsto(t_{\overrightarrow{f(a)a}},\ t_{\overrightarrow{f(a)a}}\circ f)$.

2.3.3.9 对任何 $a\in X,\lambda\in K^*=K\backslash 0$, 以 a 为中心、以 λ 为比率的位似, 记成 $H_{a,\lambda}$, 就是映射 $H_{a,\lambda}:x\mapsto a+\lambda\overrightarrow{ax}$.

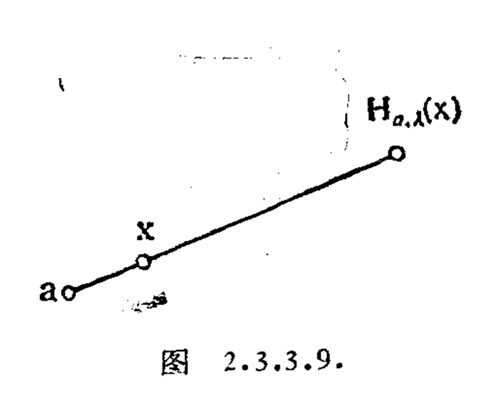


图 2.3.3.9.

这是一个仿射映射, 且有 $\vec{H}_{a,\lambda}=\lambda\mathrm{Id}_{\vec{X}}$ (应用 2.3.2). 参看第 170 页的例子. 这里 K 的可交换性起了重要作用. 反过来:

2.3.3.10 **命题.** 设 $f\in GA(X)$ 使 $\vec{f}=\lambda\mathrm{Id}_{\vec{X}}$, 且 $\lambda\in K\backslash 1$, 则唯一存在 a 使 $f=H_{a,\lambda}$.

为证明 2.3.3.10, 如同在证明大部分一般性的仿射空间的结果

时一样，我们把空间向量化．现在任取 $b\in X$，在向量空间 X_b 中计算；我们要找 $f(a)=a$，根据 2.3.2 有 $a=f(b)+\lambda(a-b)$，由此得出唯一的解

$$a=\frac{1}{1-\lambda}(f(b)-\lambda b).$$

2.3.3.11

$$\boxed{H_{a,\lambda}\circ H_{a,\mu}=H_{a,\lambda\mu}\ \forall a\in X\ \forall\lambda,\ \mu\in K.}$$

如果 $\lambda=1$，不能再用 2.3.3.10，但这时我们知道（参见 2.3.3.4）f 是平移．为把 f 划一地表为 $\vec{f}=\lambda\mathrm{Id}_{\vec{X}}$，$\lambda\in K^*$，我们引进：

2.3.3.12 命题．定义． $\mathrm{GL}(\vec{X})$ 的中心是 $K^*\mathrm{Id}_{\vec{X}}$．其逆象是 $\mathrm{GA}(X)$ 的正规子群，记为 $\mathrm{Dil}(X)=L^{-1}(K^*\mathrm{Id}_{\vec{X}})$；它是 $T(X)$ 和所有 $H_{a,\lambda}(a\in X,\lambda\in K^*\backslash 1)$ 在集合论意义下的和，$T(X)$ 是 $\mathrm{Dil}(X)$ 的正规子群．$\mathrm{Dil}(X)$ 的元素全体，称为 X 的**扩张**．

关于 $\mathrm{GL}(\vec{X})$ 的中心，参见 2.8.4（要用到 8.2.16 的思想）．扩张的几何特征将在 2.5.6 中作充分的描述．

2.3.4 在 $A(X;X')$ 上可以自然地加上什么结构——如同 $L(X;X')$ 自然地是向量空间那样吗？有兴趣的读者在 [FL] 可以看到怎么在 $A(X;X')$ 上构造一个自然的仿射空间结构，其维数为

$$\dim A(X;X')=(\dim X+1)\dim X'.$$

在 2.3.9 中可以看到这个维数是合理的．

2.3.5 考虑两个象 2.2.5 中那样的集族，即设 E，E' 是两个向量空间，H，H' 分别是 E，E' 的超平面，引进相应的仿射空间

$$X=E_H,\ X'=E'_{H'};$$

设 $f\in L(E;E')$；由此可以推断有一个态射 $f:X\to X'$ 吗？要使 W 是跟 H 相补的向量直线，必须要 $f(W)$ 的维数仍为 1 且仍穿过 H'．这一点可由 2.3.6 引进的集合确切地得到保证．

2.3.6

$$L_{H,H'}(E;E')=\{f\in L(E;E'):f(H)\subset H'$$
$$\text{且}\ \underline{f}:E/H\to E'/H'\ \text{是单射}\},$$

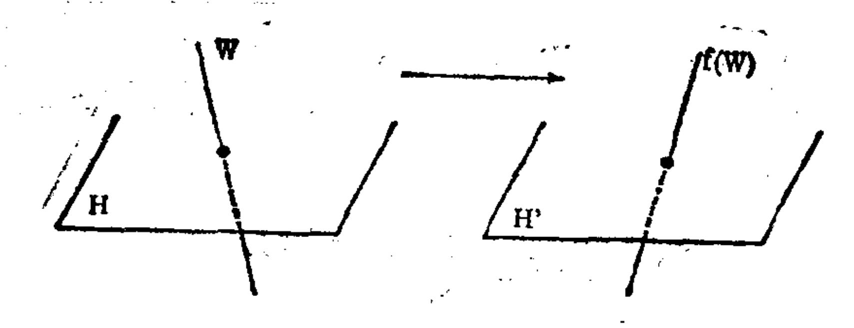


图 2.3.5.

其中 $\underline{f}\in L(E/H;\ E'/H')$ 是由 f 通过商空间投影得出的，$f(H)\subset H'$ 恰好使这一做法可行. 于是就有 $f(W)\in E'_{H'}$ $\forall W\in E_H$；把这样定义的映射记作 $\bar{f}: E_H\to E'_{H'}$. 我们可以直接证明

2.3.7 命题. 若 $f\in L_{H,H'}(E;\ E')$，则 $\bar{f}\in A(X;\ X')$；映射

$$L(\bar{f})=\vec{\bar{f}}\in L(L(E/H;\ H);\ L(E'/H';\ H'))$$

就是

$$\eta\longmapsto f\circ\eta\circ\underline{f}^{-1}.$$

另外，$\bar{f}=\bar{g}$ 当且仅当存在 $k\in K^*$ 使 $g=kf$.

2.3.7 的逆命题参见 3.2.1 和 5.1.3. 至于 2.3.7 的意义，则可见第 5 章.

$$\begin{array}{ccc} E/H & \xrightarrow{\ \underline{f}\ } & E'/H' \\ \eta\downarrow & & \downarrow \\ H & \xrightarrow[f|H]{} & H' \end{array}$$

2.3.8 态射在标架中的计算.

设 $f\in A(X;\ X')$，$\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$，$\{x'_j\}_{j=0,1,\cdots,p}$ 是 X，X' 的标架；令 $e_i=\overrightarrow{x_0x_i}$，$e'_j=\overrightarrow{x'_0x'_j}$，引进 $\vec{f}$ 相应的矩阵：

$$M(\vec{f})=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\cdots\cdots&\alpha_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{p1}&\cdots\cdots&\alpha_{pn}\end{pmatrix}.$$

根据 2.3.2，若 $x=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$：

$$f(x)=f(x_0)+\vec{f}(\overrightarrow{x_0x})=f(x_0)+\vec{f}\left(\sum_i\lambda_ie_i\right).$$

若 $f(x)=(\lambda'_1,\cdots,\lambda'_p)$，我们写 $\overrightarrow{x'_0f(x_0)}=\sum_j a_je'_j$，这里

$$\lambda'_j=a_j+\sum_k \alpha_{jk}\lambda_k;$$

换言之，

$$f(x)=\left(a_1+\sum_i \alpha_{1i}\lambda_i,\cdots,a_p+\sum_i \alpha_{pi}\lambda_i\right).$$

我们注意到，用下面的矩阵乘积也能得出同样的结果：

2.3.9

$$\begin{pmatrix}1\\ \lambda'_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda'_p\end{pmatrix}=M(f)\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_n\end{pmatrix}，其中我们置\ M(f)=\begin{pmatrix}1 & 0\ \ldots\ 0\\ a_1 & \\ \cdot & \\ \cdot & \boxed{M(\vec{f})}\\ \cdot & \\ a_p & \end{pmatrix}.$$

这就为所有的问题提供了实用的计算方法，譬如说计算 $f\in A(X;X')$ 和 $g\in A(X';X'')$ 的合成 $g\circ f$. 深入的解释将在 3.2.5 给出．最后，我们看到，$A(X;X')$ 的维数是 $M(f)$ 中参数的数目，也就是 $p+pn=p(n+1)=\dim X'(\dim X+1)$（参见 2.3.4）.

2.4 仿射子空间

仿射子空间是几何中最早引进的对象：平面上的直线，空间的直线和平面．从数学角度说，我们现在的做法则是在讲子空间之前先引进了态射的概念．

2.4.1 定义．命题． 设 X 是仿射空间，Y 是 X 的非空子集，则下列条件等价：

$\exists a\in Y\mid\Theta_a(Y)$ 是 $\vec{X}$ 的向量子空间；

$\forall a\in Y:\Theta_a(Y)$ 是 $\vec{X}$ 的向量子空间；

$\exists a \in Y \mid Y$ 是 X_a 的向量子空间；

$\forall a \in Y: Y$ 是 X_a 的向量子空间；

$\exists a \in X$ 和向量子空间 $\vec{V} \subset \vec{X}$，使 $Y = a + \vec{V}$。

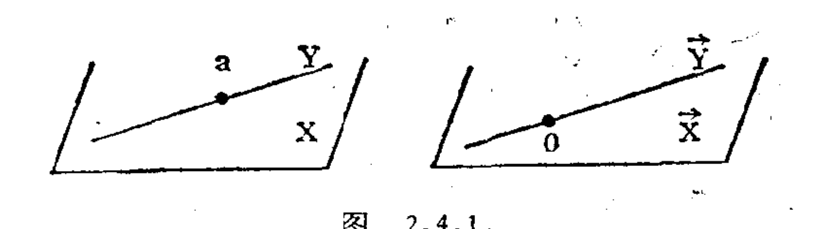


图 2.4.1.

满足上述条件之一的 Y 称为 X 的仿射子空间或子空间。向量空间 $\Theta(Y \times Y) = \Theta_a(Y) = \vec{V}(\forall a \in Y)$ 称为 Y 的方向，记作 $\vec{Y}$。另外 $(\vec{Y}, Y, \Theta|_{Y\times Y})$ 是仿射空间；而且单射 $i: Y \to X$ 属于 $A(Y; X)$。Y 的维数是上述自然形成的仿射空间的维数。

第五个条件反映了仿射空间的非内在特征：它们跟向量空间就差一个平移(参见 2.3.2)。

2.4.2 例

2.4.2.1 X 的 0 维子空间就是 X 的点。1 维(或 2 维)子空间称为 X 的仿射直线(或仿射平面)，或者就称作直线和平面。以 $\vec{X}$ 的超平面作为方向的子空间也称作 X 的(仿射)超平面。

2.4.2.2 设 $f \in A(X; X')$，Y 是 X 的子空间，Y' 是 X' 的子空间；则 $f(Y)$（只要非空）是 X' 的子空间，$f^{-1}(Y')$（只要非空)是 X 的子空间。另外，$\overrightarrow{f(Y)} = \vec{f}(\vec{Y})$，$\overrightarrow{f^{-1}(Y')} = (\vec{f})^{-1}(\vec{Y}')$。

2.4.2.3 在 E_H 中(参见 2.2.5)，E_H 的仿射子空间 Y 和 E 的向量子空间 $\hat{Y}$ 之间存在一个双射的对应，其中 $\hat{Y}$ 是由 $\bigcup_{W \subset Y} W$ 生成的 E 的向量子空间；注意到

$$\dim \hat{Y} = \dim Y - 1,$$

且 $\vec{Y} = L(E/H; \hat{Y} \cap H)$。相仿地，对例 2.2.3 来说，在 X 的子空间 Y 和 $\hat{Y}$ 之间存在一个双射，其中 $\hat{Y}$ 是由 Y 生成的 E 的向量子空间；因而 $\vec{Y} = \hat{Y} \cap F$。

2.4.2.4 设 $(Y_i)_{i\in I}$ 是 X 的任意一族子空间，则或者

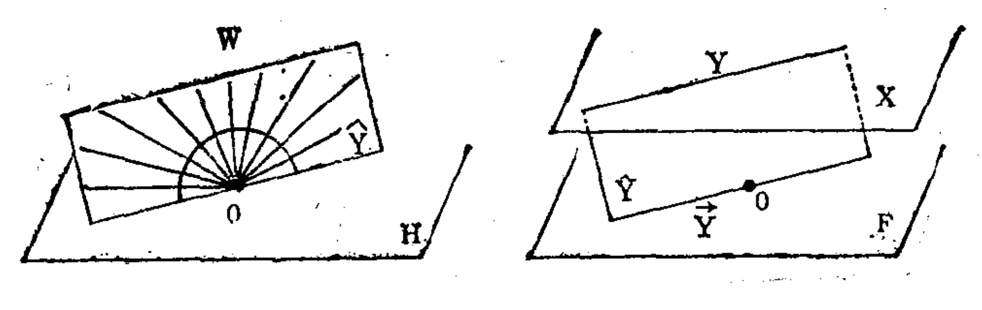


图 2.4.2.3.

$$\bigcap_i Y_i = \varnothing，\text{或者} \bigcap_i Y_i$$

是子空间；从而 $\overrightarrow{\bigcap_i Y_i} = \bigcap_i \vec{Y}_i$.

由此可得出经典的

2.4.2.5 命题. 设 $S \subset X$ 是仿射空间 X 的任一非空子集. 必存在一个包含 S 的最小的子空间，称作由 S 生成的子空间，记作 $\langle S\rangle$. 它也是所有包含 S 的子空间的交.

2.4.2.6 我们还看到(若 $\dim X = d < \infty$)，X 中 $d+1$ 个点的集合 $\{x_i\}_{i=0,\cdots,d}$ 是仿射标架的充要条件是

$$\langle x_0, x_1, \cdots, x_d\rangle = X.$$

2.4.3 定义. 命题. X 的点 $\{e_i\}_{i=0,\cdots,k}$ 称为(仿射)独立的，如果 $\dim\langle e_0, \cdots, e_k\rangle = k$. $\{e_i\}_{i=0,\cdots,k}$ 独立的充要条件是对所有的 $i = 0, \cdots, k$, $e_i \notin \langle e_0, \cdots, e_{i-1}, e_{i+1}, \cdots, e_k\rangle$.

2.4.4 举例: 两点 x, y 是独立的当且仅当 $x \neq y$. 它们决定一条包含这两点的唯一的直线: $\langle x, y\rangle$. 这样我们就有古老的欧几里得公理: 过不同的两点可作且仅可作一条直线.

2.4.5 命题. 设 X 是特征数 $\neq 2$ 的域上的仿射空间. 当且仅当对所有的 $x, y \in Y$ 有 $\langle x, y\rangle \subset Y$ 时，X 的非空子集 Y 成为 X 的子空间.

这里也涉及一个古老的公理: 空间中的一个平面是空间的一个子集，它包含其中任意两点的连线. 但若域的特征数是 2，则 2.4.5 不成立. 为证明 2.4.5，我们将 X 在 $0 \in Y$ 处向量化，然后在 X_0 中计算: 对所有 $x, y \in Y$:

$$\langle 0, x\rangle = Kx\subset Y,$$

且 $x+y\in\left\langle 0, \frac{x+y}{2}\right\rangle\subset Y$.

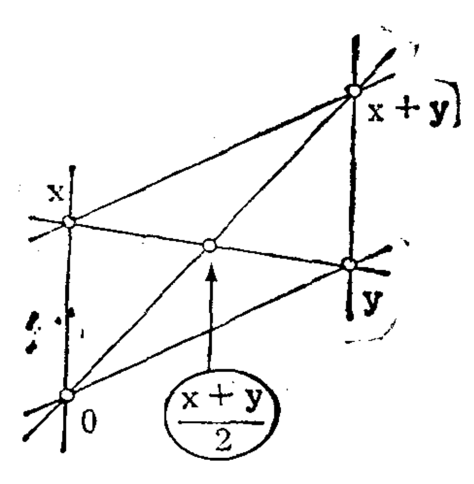
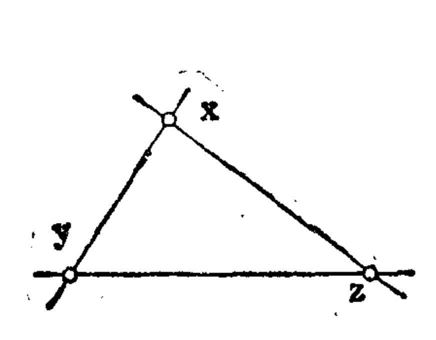


图 2.4.5.

2.4.6 附注. 设 a, b, c 是共线的三点（即有一直线包含这三点），$a\neq b$，则我们有

$$\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{ab}}\in K.$$

2.4.7 单形. d 维（有限）仿射空间 X 中 $d+1$ 个独立的点的集合，称为 X 的单形．$d=2$ 时称为三角形；$d=3$ 时称为四面体．三角形 $\{x, y, z\}$ 的三条直线 $\langle x, y\rangle$，$\langle y, z\rangle$，$\langle z, x\rangle$ 称为它的边．四面体 $\{x, y, z, t\}$ 的棱是直线 $\langle x, y\rangle$，$\langle x, z\rangle$，$\langle x, t\rangle$，$\langle y, z\rangle$，$\langle y, t\rangle$，$\langle z, t\rangle$；它的面是平面 $\langle x, y, z\rangle$，$\langle y, z, t\rangle$，$\langle z, t, x\rangle$，$\langle t, x, y\rangle$；有时也把任意维的 X 中的三个独立的点称为三角形．



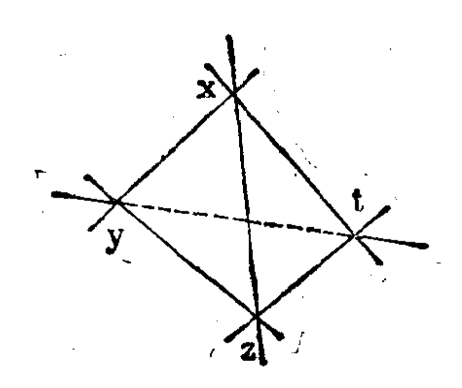


图 2.4.7.

2.4.8 解析几何：子空间的方程． 问题在于要如2.3.8那样有一些工具，来计算与子空间有关的所有问题．注意现在

$$\dim X = d < \infty$$

（参见2.2.8）．

2.4.8.1 线性代数的复习．设E是d维向量空间；其对偶空间E^*也是d维的．设F是E的任意子集，$[F]$是由F生成的E的向量子空间．记

$$F^{\perp} = \{f \in E^* : f(F) = 0\}$$

为F在E^*中的正交集；于是$F^{\perp} = [F]^{\perp}$且

$$\dim[F] + \dim F^{\perp} = d.$$

对E^*的子集S，仍用$S^{\perp}$记它在E中的正交集：

$$S^{\perp} = \{x \in E : f(x) = 0 \quad \forall f \in S\};$$

于是$[S]^{\perp} = S^{\perp}$且$\dim S^{\perp} + \dim[S] = d$．若$F$和$F'$是$E$的向量子空间，$S$是$E^*$的向量子空间，则总有：

$$F^{\perp\perp} = F, \ S^{\perp\perp} = S, \ (F \cap F')^{\perp} = F^{\perp} + F'^{\perp},$$
$$(F + F')^{\perp} = F^{\perp} \cap F'^{\perp}.$$

对$\dim X$无限的情形，有兴趣的读者可参看[BI5]，第II章，§2．

2.4.8.2 推论． 设$H \subset E$是超平面；则$\exists f \in E^* \setminus 0$使$H = f^{-1}(0)$，而且若$H = f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$，$f, g \in E^*$，则必有$g = \lambda f$，$\lambda \in K^*$．$F \subset E$是$p$维向量子空间的充要条件是存在线性独立的$f_1, \cdots, f_{d-p} \in E^*$使$F = \bigcap_{i=1}^{d-p} f_i^{-1}(0)$．

下面我们可以转入仿射空间的情形；我们预先指出，非零常数仿射形式的核是空的（线性形式则不然，这时0总是属于核的！）．

2.4.8.3 定义． 仿射空间X上的仿射形式，就是$f \in A(X;K)$，其中K上赋有自然的仿射结构（参见2.2.1）．我们将赋予$A(X;K)$典型的向量空间结构．

2.4.8.4 例如，若$\{x_i\}_{i=0,\cdots,d}$是X的一个基，则所有的仿射形式总可唯一地写为

$$x = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d) \longmapsto f(x) = a + \sum_i \alpha_i \lambda_i$$

(参见 2.3.8). 常数是仿射形式,若该常数不为 0,则 $f^{-1}(0) = \varnothing$.

2.4.8.5 命题. 设 X 是 d 维仿射空间, V 是 X 的非空子集, 则 V 是 X 的 p 维仿射子空间的充要条件是存在 $d-p$ 维向量子空间 $V' \subset A(X; K)$, 使 $V = V'^{\perp} = \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in V'\}$ 且 $1 \notin V'$ (这里沿用习惯的记法, 用 1 表示常数仿射形式 $x \longmapsto 1 \ \forall x \in X$).

将 X 在 $a \in V$ 向量化,然后考察 X_a. 必要性是显然的, 因为由 $1(x) = 1 \neq 0 \ \forall x$ 有 $1 \notin V'$. 充分性要困难些:所要证明的其实就是 $V'^{\perp} \neq \varnothing$, 因为这时,如同证必要性时一样, 对 $E = X_a$ 用 2.4.8.1 就得出结论. 我们现在对 $k = \dim V'$ 用归纳法; $k = 0$ 时显然成立. 设 $\{f_1, \cdots, f_k\}$ 是 V' 的一个基,

$$V_1' = Kf_1 + \cdots + Kf_{k-1};$$

由归纳假设 $V_1 = V_1'^{\perp} \neq \varnothing$, 只要再证明 $f_k | V_1$ 不是非零常数即可. 用反证法: 假设 f_k 在 V_1 上是常数,则

$$\overrightarrow{f_k(x_0)f_k(x)} = \vec{f}_k(\overrightarrow{x_0 x}) = 0 \quad \forall x_0, x \in V_1.$$

取 $\vec{V}_1$, $\vec{V}_1^{\perp} = K\vec{f}_1 + \cdots + K\vec{f}_{k-1}$, 则有

$$\vec{f}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \vec{f}_i,$$

由于 $f_k(x_0) = 0$ 时有 $f_i(x_0) = 0$, 从而有

$$f_k(x) = f_k(x_0) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f_i(x) \quad \forall x \in X.$$

2.4.8.6 例. 最重要的例子是超平面的情形: 若

$$\dim H = p = d - 1,$$

则从 2.4.8.5 清楚地看到, 存在仿射形式 $f \in A(X; K)$ 使 $H = f^{-1}(0)$, 而且反过来, 若 f 是非常数仿射形式, 则 $f^{-1}(0)$ 是超平面,最后就知道

$$f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$$

等价于 $f = kg$, $k \in K^*$.

最常见的实用情况是 $K = \mathbf{R}$, $d = 2$ 或 3,这就是我们日常生活的情形．例如，$d = 3$ 时，X 中的平面 Y 在任一标架下总可写成

$$Y = \{(x, y, z): ax + by + cz + d = 0\},$$

其中四实数 a, b, c, d 满足唯一的条件：a, b, c 不同时为零．在同一个 X 中,直线 D 写成:

$$D = \{(x, y, z): ax + by + cz + d = a'x + b'y + c'z + d' = 0\},$$

其中两组 (a, b, c),(a', b', c') 应都是非零数组且不成比例．

2.4.8.7　参数表示． 我们通过 Y 的一个标架 $\{x_i\}_{i=0,\cdots,k}$ 给出 X 的 k 维子空间 Y:

$$Y = \left\{x_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{x_0x_i} : \lambda_i \in K \quad \forall i = 1, \cdots, k\right\}.$$

这样，$\mathbf{R}^3$ 中的直线就是

$$\{(a + \lambda b, a' + \lambda b', a'' + \lambda b''): \lambda \in \mathbf{R}\},$$

平面就是

$$\{(a + \lambda b + \mu c, a' + \lambda b' + \mu c', a'' + \lambda b'' + \mu c''): \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}.$$

2.4.8.8　关于(向量、仿射、射影)子空间的计算，一个重要的工具是"Grassmann 坐标",参见 [HO-PE]，第 VII 章．

2.4.9　子空间的平行与相交

2.4.9.1　定义． 仿射空间 X 的两个子空间 S, T 称作:

——平行的,如果 $\vec{S} = \vec{T}$，记作 $S /\!/ T$;

——弱平行的,如果 $\vec{S} \subset \vec{T}$，记作 $S \lhd T$.

我们看到,$\cdot /\!/ \cdot$ 是等价关系，$\cdot \lhd \cdot$ 是半序关系．为了说明在考虑平面上的直线以及空间(即 3 维空间)中的直线和平面这两种情形时,上述的定义是跟欧氏几何的定义等价的,先得讨论一下子空间相交时的性质．

2.4.9.2　命题． 若 $S /\!/ T$，则 $S = T$ 或 $S \cap T = \emptyset$．若 $S \lhd T$，则 $S \cap T = \emptyset$ 或 $S \subset T$．$S \lhd T$ 的充要条件是存在 T 的子空间 S' 使 $S /\!/ S'$．设 $x \in X$ 而且 S 是子空间，则存在唯一的

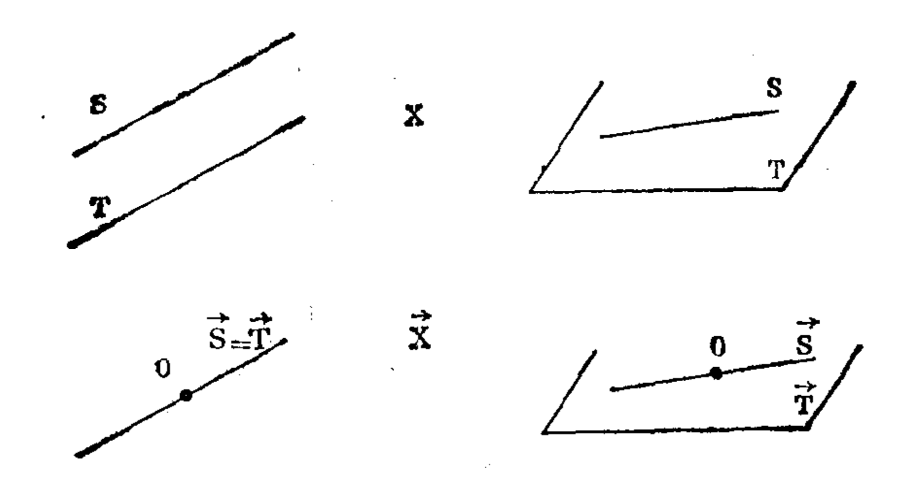


图 2.4.9.1.

子空间T使 $S/\!/T$ 而且 $x\in T$. 设 S, T 是X的两个子空间,则

(i) $S\cap T=\varnothing$时:

$$\dim S+\dim T<\dim X+\dim(\vec{S}+\vec{T}),$$

而且

$$\dim\langle S\cup T\rangle=\dim(\vec{S}+\vec{T})+1=\dim S+\dim T+1-\dim(\vec{S}\cap\vec{T}).$$

(ii) $S\cap T\neq\varnothing$ 时,

$$\dim\langle S\cup T\rangle=\dim S+\dim T-\dim(S\cap T).$$

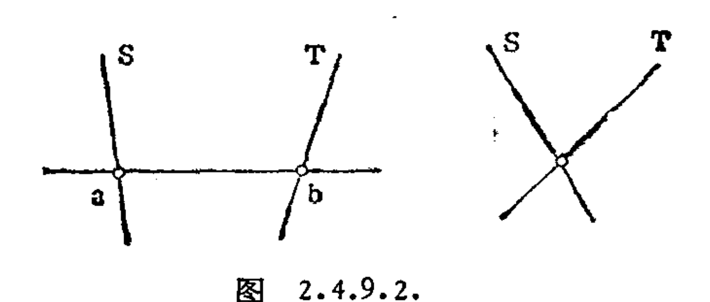


图 2.4.9.2.

由 Grassmann 等式和下面的引理直接就可证得命题. 这里,所谓 Grassmann 等式

$$\dim\vec{S}+\dim\vec{T}=\dim(\vec{S}+\vec{T})+\dim(\vec{S}\cap\vec{T})$$

适用于一个向量空间的任何两个向量子空间.

2.4.9.3 引理. 设 $a\in S$, $b\in T$, 则 $S\cap T\neq\varnothing$ 等价于 $\overrightarrow{ab}\in\vec{S}+\vec{T}$.

引用 X_a (参见 2.1.9)即可证得引理. 另外还可看出

$$\overrightarrow{\langle S \cup T \rangle} = \vec{S} + \vec{T} + K \cdot \overrightarrow{ab}.$$

2.4.9.4 推论. 若 $\vec{S}$ 和 $\vec{T}$ 是互补的，即 $\vec{X} = \vec{S} \oplus \vec{T}$，则 $S \cap T$ 只含一点．这时称子空间 S 和 T 是互补的．

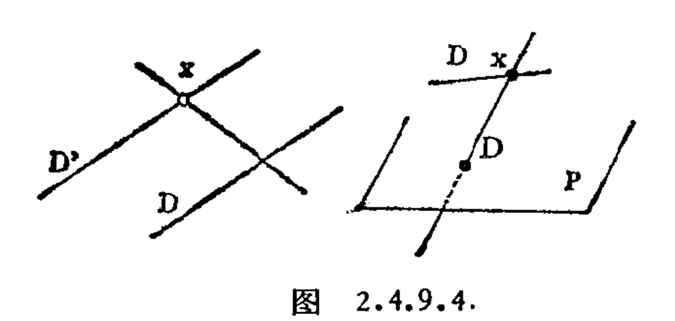


图 2.4.9.4.

2.4.9.5 例. 若 X 是平面，D 是其上直线且 $x \notin D$，则 X 上唯一地存在直线 D' 含有 x 并使 $D \cap D' = \emptyset$；这也就是使 $D' /\!/ D$ 的直线．这样，我们就又得到了著名的欧氏公设，这里的平行概念是定义为一种不相交性的．$d = 3$ 时，对于一条直线 D 和一个平面 P 来说，有三种可能：或 $D \subset P$，或 $D \cap P$ 只含一点，或 $D \cap P = \emptyset$；在最后一种情形时，$D \lhd P$．

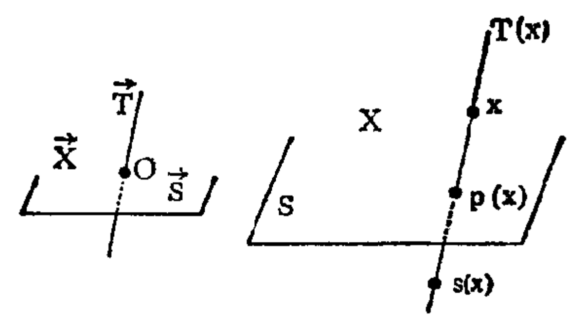


图 2.4.9.5.

2.4.9.6 射影和对称. 设 X 是仿射空间，S 是子空间，$\vec{T}$ 是 $\vec{S}$ 在 $\vec{X}$ 中的补空间，则由 2.4.9.2 和 2.4.9.4，对每一 $x \in X$，唯一地存在以 $\vec{T}$ 为方向的子空间 $T(x)$，而且 $S \cap T(x)$ 只含一点；以 $p(x)$ 来记这一点，我们就得到一个映射 $p: X \ni x \longmapsto p(x) \in S$，称为 X 在 S 上的平行于 T 的射影．我们记为 $p \in A(X;S)$． 所谓平行于 $\vec{T}$ 的、关于 S 的对称 s，是指

$$s: X \to X: \overrightarrow{xp(x)} = \overrightarrow{p(x)s(x)} \quad \forall x \in X;$$

我们有 $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_X$ 和 $s \in A(X;X)$．用 3.4.2 中的说法，我们

也可以说 $s(x)$ 是这么定义的: $p(x)$ 是 $\{x, s(x)\}$ 的中心. 关于 $s \in A(X;X)$ 和 $s^2 = \mathrm{Id}_X$ 的说明,可参见 2.8.5;关于使 $p^2 = p$ 的 $p \in A(X;X)$ 亦见同节.

2.4.9.7 关于子空间与 X 的自同态(即 $A(X;X)$ 的元素)的不动点之间的关系,可参见 [FL], 第 68 页.

2.5 几何: Thalès, Pappus, Desargues

2.5.1 命题(Thalès 定理). 设 H, H', H'' 是仿射空间 X 中三个不相同的平行超平面, $(D_i)_{i\in I}$ 是 X 中一族直线,其中每一直线都不跟 H 弱平行,则点

$$d_i = H \cap D_i,\ d_i' = H' \cap D_i,\ d_i'' = H'' \cap D_i (i \in I)$$

(参见 2.4.9.4 和 2.4.6)具有下述性质: 数量 $\overrightarrow{d_id_i''} / \overrightarrow{d_id_i'}$ 与 $i \in I$ 无关,而只依赖于 H, H' 和 H'' 的选取. 反之,若对某个 i 有

$$d''' \in \langle d_i, d_i' \rangle,$$

而且假定 $\overrightarrow{d_id_i'''} / \overrightarrow{d_id_i'}$ 等于上面的这个公共值,则

$$d_i''' = d_i'' = H'' \cap D_i.$$

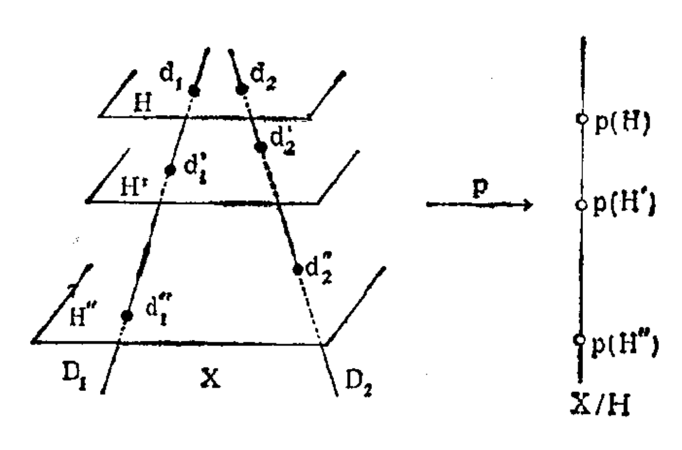


图 2.5.1.

我们引进商空间 $X/\vec{H}$ (参见 2.2.4)和规范投影 $p: X \to X/\vec{H}$; 容易看出 p 是射影映射. 根据 2.3.2,对任何 i 有:

$$\frac{\overrightarrow{d_id_i''}}{\overrightarrow{d_id_i'}} = \frac{\overrightarrow{p(H)p(H'')}}{\overrightarrow{p(H)p(H')}},$$

逆命题由直线 $\langle a, b\rangle(b\neq a)$ 上使 $\overrightarrow{ac}/\overrightarrow{ab}$ 是 K 中指定值的点 c 的唯一性即可证得.

在 6.5.4 中有 2.5.1 的另一种证明.

本节中下面的内容,都是从下述初等的结果推衍出来的.

2.5.2 引理. 设 $a, b\in X$, $a\neq b$, $f\neq \mathrm{Id}_X$ 是一个扩张, $a'=f(a)$, $D=\langle a, b\rangle$ 是经过 a, b 的直线; 设 D' 过 a' 点并平行于 D (参见 2.4.9.2).

则 $b'=f(b)$ 与下列命题等价:

(i) 若 $f\in T(X)$, 则 b' 是 D' 与过 b 点且平行于 $\langle a, a'\rangle$ 的直线的交点;

(ii) 若 f 是以 0 为中心的位似,则 $b'=D'\cap\langle 0, b\rangle$.

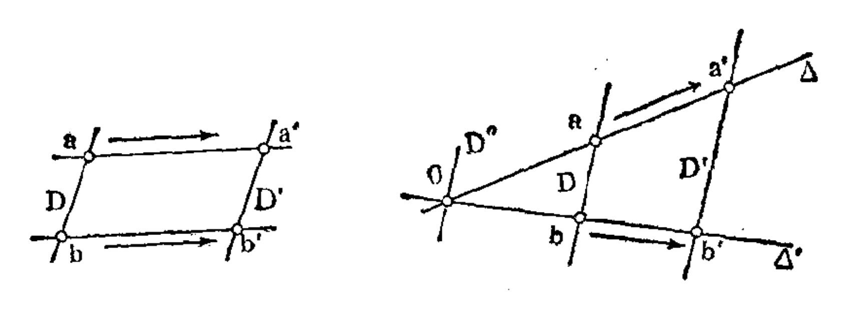


图 2.5.2.

在 f 是平移的情形,就有著名的"平行四边形法则"

$$\text{若 } \overrightarrow{ab}=\overrightarrow{cd}, \text{ 则 } \overrightarrow{ac}=\overrightarrow{bd},$$

它可从 $\vec{X}$ 的可交换性推出. 在 $f\notin T(X)$ 的情形,我们作 $0, a, b$ 所生成的平面, 并对 D, D', D'' 这三条直线应用 Thalès 定理, 其中 D'' 是过 0 点平行于 D 的直线; 这三条直线就是 2.5.1 中的超平面 H, H' 和 H'', 与它们相交的两条直线是 $\Delta=\langle 0, a\rangle$ 和 $\Delta'=\langle 0, b\rangle$.

2.5.3 命题 (Pappus 定理,仿射的情形;参见 5.4.2). 设 X 是仿射平面, D 和 D' 是 X 上两条不同的直线, $x, y, z\in D$ 和 $x', y', z'\in D'$ 都是不同的点,而且都不同于 $D\cap D'$, 则由

$$\langle x, y'\rangle /\!/ \langle x', y\rangle \text{ 和 } \langle y, z'\rangle /\!/ \langle y', z\rangle$$

就可推出 $\langle x, z'\rangle /\!/ \langle x', z\rangle$.

第一种情形：D 不平行于 D'，于是(由 2.4.9.5) $D\cap D'$ 只含一点 0. 设 f (相应地，g)是使 $f(x)=y$ (相应地，$g(y)=z$) 的以 0 为中心的位似. 由 2.5.2 并根据假设条件，就有 $x'=f(y')$，$g(z')=y'$. 但 $g\circ f=f\circ g$ (应用 2.3.3.11，注意到K是可交换的！)，因而 $z=h(x)$ 且 $x'=h(z')$，由此，根据 2.5.2 的逆命题可知 $\langle x, z'\rangle /\!/ \langle x', z\rangle$.

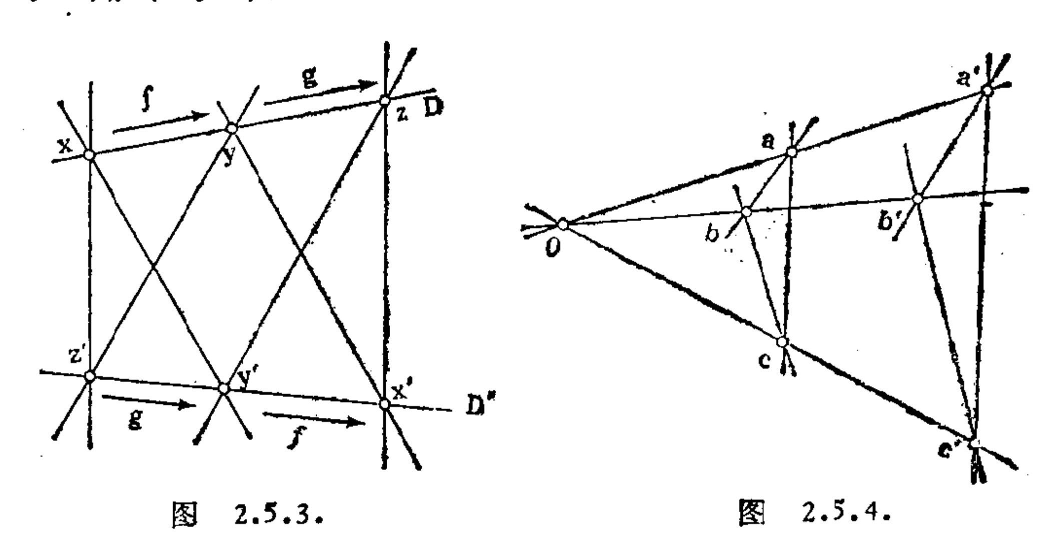


图 2.5.3. 图 2.5.4.

第二种情形：$D/\!/D'$；将上面的位似换成平移即可.

2.5.3 的逆命题也成立，参见 2.8.6.

2.5.4 命题 (Desargues 定理，仿射的情形；参见 5.4.7). 设

$$\langle a, b, c\rangle, \langle a', b', c'\rangle$$

是仿射空间中的两个三角形，它们没有相重的顶点，但三边各各平行：$\langle a, b\rangle/\!/\langle a', b'\rangle$，$\langle b, c\rangle/\!/\langle b', c'\rangle$，$\langle c, a\rangle/\!/\langle c', a'\rangle$，则 $\langle a, a'\rangle$，$\langle b, b'\rangle$，$\langle c, c'\rangle$ 这三条直线或者两两平行，或者相交于一点.

由 $\langle a, b\rangle/\!/\langle a', b'\rangle$ 可知，a, b, a', b' 这四点是在同一平面上的；于是(根据 2.4.9.5)，或者 $\langle a, a'\rangle/\!/\langle b, b'\rangle$，或者 $\langle a, a'\rangle$ 和 $\langle b, b'\rangle$ 相交于一点 0. 考虑第二种情形：设 f 是以 0 为中心的位似，且使 $f(a)=a'$. 根据 2.5.2，$f(b)=b'$. 再用两次 2.5.2 可知，若 $f(c)=c''$，就有

$$\langle b, c\rangle/\!/\langle b', c''\rangle \text{ 和 } \langle a, c\rangle/\!/\langle a', c''\rangle,$$

根据 2.4.9.2，由上式可得 $c'=c''$.

2.5.5 附注. 在仿射和射影几何的公理化理论中，Pappus 定理和 Desargues 定理起着重要的作用；有时候它们是作为公理提出的．我们特别注意到，Desargues 定理是建立在基域K的乘法满足结合律的基础上的，而 Pappus 定理则正是域K的乘法的可交换性的反映．有兴趣的读者可以参阅，譬如说本书第 2.8.9 节，[AN] 的第 73页—75 页，[DI] 的定理 2.1.9（第 158 页—160 页）以及本书的 2.6.7 和 4.8．

2.5.6 推论（位似的特征）. 设 $f\in \mathfrak{S}_X$ 是从仿射空间X到自身的一个双射，而且对X中任一直线 D, $f(D)$ 总是X中一条平行于D的直线，则 $f\in \mathrm{Dil}(X)$.

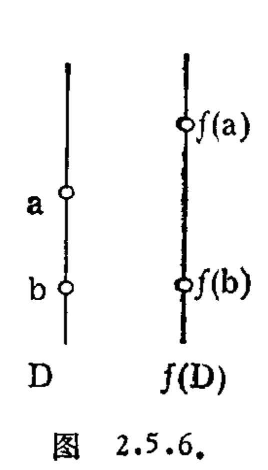
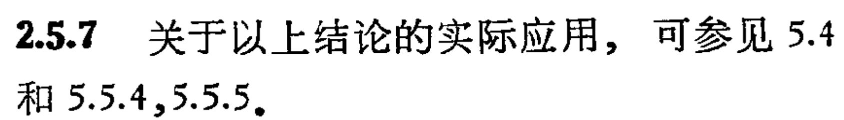


图 2.5.6.

逆命题是显见的，推论可由 2.5.4 的证明立即推出．因为，若作由 $a, b, f(a)$, $f(b)$ 定义的位似 f'，则从推论的条件可得 $f=f'$.



2.5.7 关于以上结论的实际应用，可参见 5.4 和 5.5.4，5.5.5．

2.6 仿射几何基本定理

这是本章中唯一的一个较费周折的结果，尽管结论本身很简单，但证明却相当困难，而且相当长．

2.6.1 引言. 我们看到(参见 2.4.2.2)，对 $f\in A(X;X')$，X中任一直线的象是X'中的一条直线(或一个点)．反之则不然；首先，若 $\dim X=\dim X'=1$，则任一映射 $X\to X'$（集论意义下的)都适用．其次，取 $X=X'=\mathbf{C}^2$ 和 $f:(z_1, z_2)\longmapsto(\bar z_1, \bar z_2)$（其中$\bar{\ }$表示共轭复数)．我们可以看出，$f$ 将 $\mathbf{C}^2$ 中每条直线映成 $\mathbf{C}^2$ 中的一条直线：若 $D=x+\mathbf{C}\cdot z$（见 2.4.8.7)，则 $f(D)=\bar x+\overline{\mathbf{C}\cdot z}$ 仍是直线．粗略地说起来，仿射几何基本定理就是说，上述的两个例子正好是使我们所需要的结论不能成立的仅有的两种情形；注意到，$z\longmapsto\bar z$ 是域 $\mathbf{C}$ 上的自同构．在叙述定理之前，先介绍：

2.6.2 定义. 设 V, V' 分别是 K, K' 上的两个向量空间，映射 $f: V \to V'$ 称为半线性的，如果存在两个域之间的同构 $\sigma: K \to K'$，使得对所有的 $x, y \in V$ 和 $\lambda, \mu \in K$ 有

$$f(\lambda x + \mu y) = \sigma(\lambda) f(x) + \sigma(\mu) f(y).$$

设 X, X' 分别是域 K, K' 上的两个仿射空间；映射 $f: X \to X'$ 称为半仿射的，如果存在 $a \in X$ 使 $f: X_a \to X'_{f(a)}$ 是半线性的.

我们已经碰到过半仿射映射的例子：

$$(z_1, z_2) \longmapsto (\bar{z}_1, \bar{z}_2).$$

读者作为练习，可以把 2.3 节中大部分内容推广到半仿射的情形. 当然还可以验证半仿射映射将共线的点映成共线的点.

2.6.3 仿射几何基本定理. 设 X, X' 是具有相同的有限维数 d 的两个仿射空间，$d \geqslant 2$. 设 $f: X \to X'$ 是双射并且有下述性质：若 a, b, c 是 X 中位于同一直线上的三点，则它们的象点 $f(a)$, $f(b), f(c)$ 在 X' 中也位于同一直线上，则 f 是半仿射的.

在 [FL] 中可以找到更细致的结果；也可参看 5.4.8 和 5.4.9. 为了约略看一下这个定理的作用，我们回顾下面的

2.6.4 命题. 域 $\mathbf{R}$ 不能容有 $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ 以外的任何自同构；域 $\mathbf{C}$ 不能容有 $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ 和 $z \longmapsto \bar{z}$ 以外的任何连续自同构. 但域 $\mathbf{C}$ 能容有除 $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ 和 $z \longmapsto \bar{z}$ 以外的自同构.

可参见，譬如说 [FL] 的第 88 页或本书 2.8.10，也可见 [PO] 的第 48 页. 关于非交换的四元数体的自同构，可参阅 8.12.11.

2.6.5 推论. 设 X, X' 是具有相同的有限维数($\geqslant 2$)的两个实(即在域 $\mathbf{R}$ 上的)仿射空间，$f: X \to X'$ 是将任意三个共线的点映成共线的三点的双射，则 $f \in A(X; X')$.

2.6.3 的证明是很长的. 我们下面只给出主要的步骤和思路，如果想了解证明的细节，可参阅 [FL] 中从第 83 页开始的内容.

2.6.6.1 第一步. 若 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,k}$ 在 X 中是独立的，则

$$\{f(x_i)\}_{i=0,1,\cdots,k}$$

在 X' 中独立. 我们先把 $\{x_i\}_{i=0,\cdots,k}$ 补充成 X 中的一个标架

$$\{x_i\}_{i=0,\cdots,d},$$

然后用反证法：假定 $\{f(x_i)\}_{i=0,\cdots,k}$ 不是独立的，那么 $\{f(x_i)\}_{i=0,\cdots,d}$ 也不是独立的，于是就有 $\langle f(x_0),\cdots,f(x_d)\rangle \neq X'$。由 2.4.5 的证明和定理的假设条件就有

$$f(X)\subset\langle f(x_0),\cdots,f(x_d)\rangle \neq X',$$

和 f 是满射矛盾。

2.6.6.2 第二步．$\forall X$ 中任一直线 D，$f(D)$ 也是 X' 中一条直线，而且，$\forall$ 平行直线 $D/\!/D'$，有 $f(D)/\!/f(D')$。

在 D 上取两点 a，b，从而 $D=\langle a,b\rangle$。令

$$D'=\langle f(a),\ f(b)\rangle;$$

设 $c'\in D'$，$x\in X$ 使 $f(x)=c'$（f 是满射！），则由 2.6.6.1，

$$x\in\langle a,b\rangle.$$

现在设 $D/\!/D'$ 是 X 中两条平行直线，P 是它们生成的平面（总可假设 $D\neq D'$，否则不必证明）。令 $P'=\langle f(P)\rangle$；就有 $f(D)$，$f(D')\subset f(P)\subset P'$。根据 2.4.9.5，只要

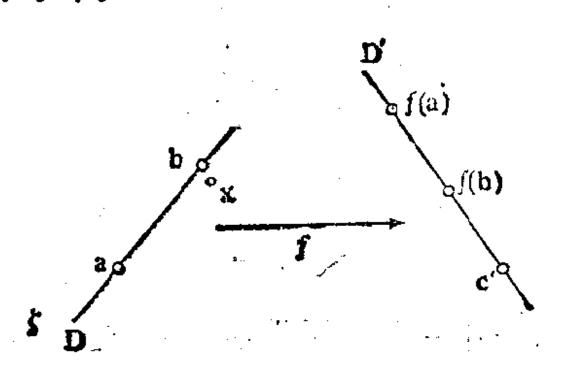


图 2.6.6.1.

$$f(D)\cap f(D')=\varnothing,$$

就有 $f(D)/\!/f(D')$。但 $f(D)\cap f(D')\neq\varnothing$ 是跟 f 的单射性矛盾的：设 $\gamma\in f(D)\cap f(D')$，则由 2.6.6.2 的开头部分可知，必存在 $c\in D$ 和 $c'\in D'$ 使得 $f(c)=f(c')=\gamma$，但 $D\cap D'=\varnothing$（参见 2.4.9.5）。

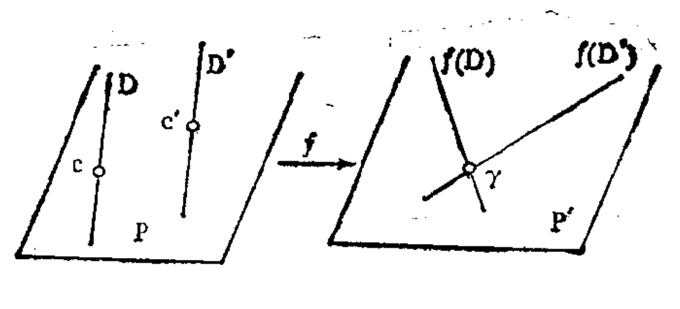


图 2.6.6.2.

2.6.3 第三步．映射 f 有可加性．这里指的是：若 $0\in X$，

则 f 关于两个向量化空间 X_0 和 $X'_{0'}=X'_{f(0)}$ 是可加的，亦即对任何 $x,y\in X_0$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$。为说明这一点，只须注意到以下的事实：若 $x,y\in X_0$ 是线性独立的，则 $x+y$ 在几何上可通过作平行线的一般方法得到：见图 2.6.6.3.但由 2.6.6.1，$f(x)$ 和 $f(y)$ 也是线性独立的，因而，根据 f 的假设条件，多次应用 2.6.6.2 即得

$$f(x)+f(y)=f(x+y),$$

参见图 2.6.6.3。若 $y=\lambda x$，$\lambda\in K$，则可加性可由下面看出。

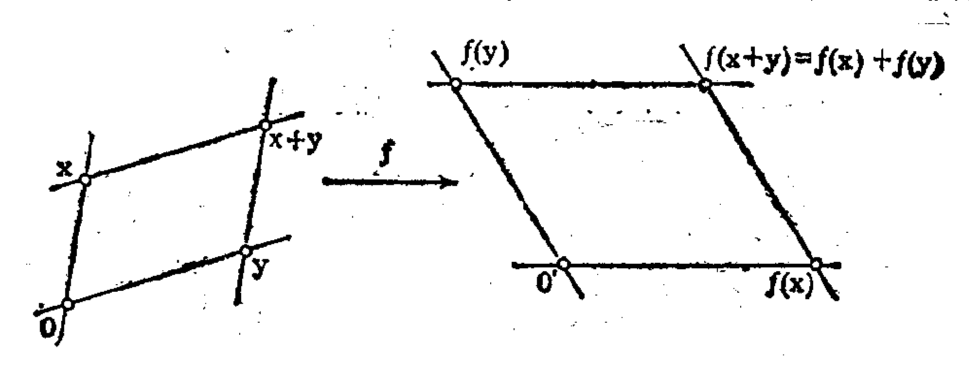


图 2.6.6.3.

2.6.6.4 第四步．构造同构 $\sigma:K\to K'$．固定 $0\in X$，$x\in X\setminus 0$，设 $D=K\cdot x$ 是 x 所生成的直线．设 $0'=f(0)$，

$$D'=f(D)=K'\cdot f(x).$$

在集合论的意义下，我们用图 2.6.6.4.2 来定义 $\sigma:K\to K'$：根据 2.6.6.2，$f_D:D\to D'$ 确是双射，至于双射 $K\to D$，$K'\to D'$，则分别是映射 $\lambda\longmapsto\lambda x$ 和 $\lambda'\longmapsto\lambda' f(x)$．还须说明 σ 是域的同态．这里的基本想法还是 $(\lambda+\mu)x$ 和 $(\lambda\mu)x$ 在几何上是可以用平行四边形法则从 λx 和 μx 出发作出来的，只要能有一点

$$y\in X\setminus D,$$

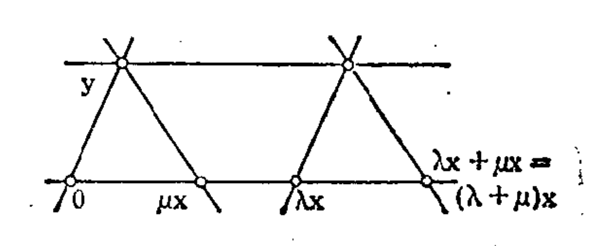


图 2.6.6.4.1.

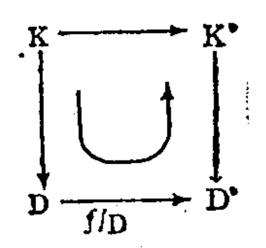


图 2.6.6.4.2.

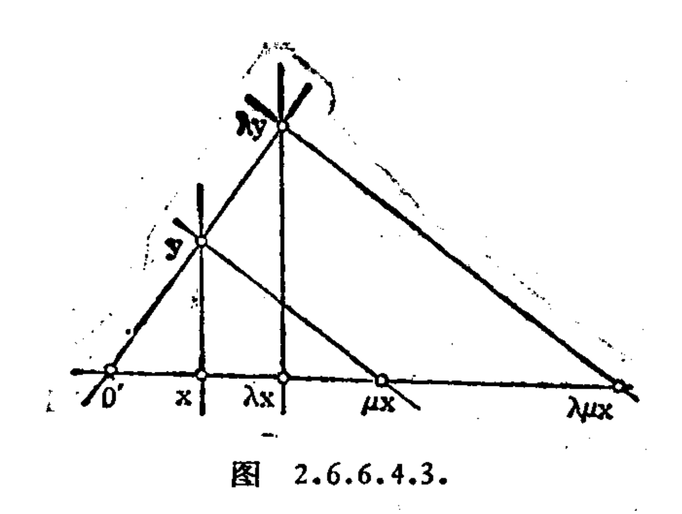


图 2.6.6.4.3.

而假设条件 $\dim X = d \geqslant 2$ 正保证了这一点；整个过程如图 2.6.6.4.1 和 2.6.6.4.3 所示. 在前一个图中，我们用了平行四边形法则（见 2.5.2 的证明）. 在后一个图中，我们用了 2.5.3 和 2.3.3.11 中的证明.

2.6.6.5 第五步. f 是半仿射的. 第四步中实际上已经证明了 f 限制在 X 中任一过 0 点的仿射直线上时，总是一个半仿射映射，但有个先决条件：同构 $\sigma_D: K \to K'$ 不依赖于 D. 所以只须证明 σ_D 与 D 无关这一点. 而这正是图 2.6.6.5 所说明的，图中 D, D_1 是两条过 0 点的直线.

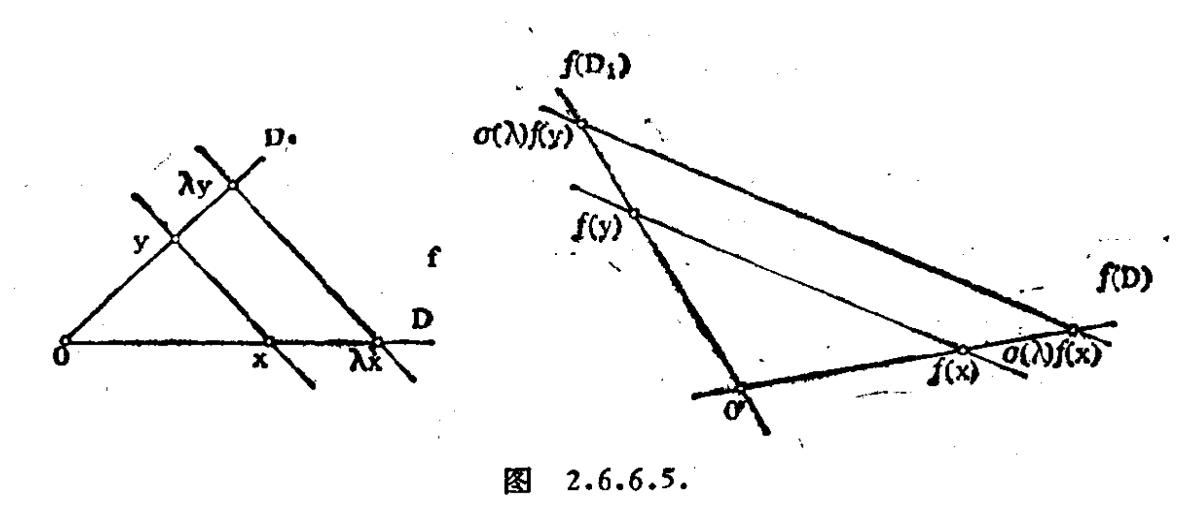


图 2.6.6.5.

2.6.7 仿射几何的公理化定义.

从某种意义上说，仿射几何基本定理说明了，一个仿射空间是由（或者说，几乎是由）其中的直线以及它们相交时的性质所决定的. 或者说，我们可以从集 X、其中的直线以及这些直线相交的

性质出发，完全构造出仿射空间$(\vec{X}; X, \Phi)$来。这种做法，部分地就是欧几里得的做法。从仿射空间的这种所谓公理化定义出发，我们把尽可能少的公理加在X及其子空间上，使之构成$(\vec{X}, X, \Phi)$；在欧几里得几何中，除了别的内容外，我们加上了度量空间的结构。关于公理化体系的文献是为数众多的，而且目前还有人在研究这些文献。其实，仿射空间的公理化理论和射影空间的公理化理论的研究是同时进行的。

这仍是一个可供探讨的研究领域，特别是二维的情形，因为这时 Desargues 定理不能从子空间相交公理推出（这一点可参见5.4.4）。粗略地说，在公理化的意义上，比之在 2.1.1 或 4.1.1 的意义上，有更多的仿射平面或射影平面，例如 Cayley 八元数射影平面，参见 [PO]，第 285 页，本书 4.8.3 和 [BES]，第 3 章。我们指出一些有关公理化理论的参考文献：[AN]，第 II 章，这是一本写得很清楚的入门书；[BR]，这本书写得很完备。[V-Y] 是一本早年的文献，但对讨论"现代数学"仍是有启发意义的。关于射影平面，较新的参考书是 [DI] 和 [H-P]。[FL]，第 319 页有一个简单的例子。

2.7 有限维实仿射空间

本节中所有的向量空间或仿射空间都是有限维(d维)的，而且都是实的，亦即是在实数域 $\mathbf{R}$ 上的空间。

$d=2$ 或 3 时，我们讨论的就是通常的希腊人的几何或者我们所生存的平面或空间的几何，虽然抽去了度量的结构。d 任意时的这些仿射空间就是本书的主要讨论对象，其中有时可能还被加上了欧氏结构。

2.7.1 X 和 $GA(X)$ 的规范拓扑。我们记得，实(或复)向量空间总具有一个规范拓扑(例如可参见 [CH1]，第 19 页)。因此，有限维 d 的向量空间 E 的线性群 $\mathrm{GL}(E)$ 也具有一个规范拓扑，即由 d^2 维向量空间 $L(E; E)$ 诱导出来的拓扑。

2.7.1.1 命题. 设 X 是仿射空间，$a \in X$，则 X 上由向量化空间 X_a 的规范拓扑所诱导出来的拓扑，是仅与仿射空间 X 有关的；这个拓扑称为 X 的规范拓扑.

事实上，注意到有限维向量空间中的平移是同胚，再用 2.1.8，即可证得命题.

2.7.1.2 例如，每个态射 $f \in A(X; X')$ 总是连续的；每个仿射子空间 Y 总是闭集；而且，当 $X \neq Y$ 时，$X \backslash Y$ 总是稠密的.

2.7.1.3 为了得出 $\mathrm{GA}(X)$ 上的规范拓扑，如果我们不用到 2.3.4 的一般性结果的话，可以应用 2.3.3.6，2.3.3.7 和 2.3.3.8 进行如下：对 $a \in X$，将 $\mathrm{GA}(X)$ 写成半直积 $T(X)\mathrm{GA}_a(X)$，这样就有同构 $T(X) \cong \vec{X}$ 和 $\mathrm{GA}_a(X) \cong \mathrm{GL}(\vec{X})$，由此可得 $T(X)$ 和 $\mathrm{GA}_a(X)$ 上的拓扑，然后就得到 $T(X)\mathrm{GA}_a(X)$ 上的拓扑，从而得到了 $\mathrm{GA}(X)$ 上的拓扑.

2.7.1.4 命题. $\mathrm{GA}(X)$ 上的这个拓扑只与 X 有关，因而称为规范拓扑.

事实上，若 $f = s \circ g = s' \circ g'$，其中 $g \in \mathrm{GA}_a(X)$，$g' \in \mathrm{GA}_b(X)$，则 s' 必为平移 $s' = t_{\overrightarrow{f(a)a}}$ 而且 $g' = s'^{-1} \circ f$；于是 s' 和 g' 显然对二元组 $(s, g) \cong f$ 来说是连续的.

例如，$\mathrm{GA}_a(X)$ 和 $T(X)$ 都是 $\mathrm{GA}(X)$ 中的闭集；它们还是 $\mathrm{GA}(X)$ 中的紧集，这一点则留待 2.7.5 中讨论.

2.7.2 仿射空间的定向. 简单回顾一下向量空间的定向的概念. 向量空间的方向有两种等价的定义方法，一种用了行列式，另一种用了基的同伦.

2.7.2.1 在第一种代数的定义方法中，我们注意到，d 维向量空间 E 上的 d 次交错多重线性形式全体所构成的向量空间 $\Lambda^d E^*$，是一个维数为 1 的实向量空间：$\dim(\Lambda^d E^*) = 1$；所以 $\Lambda^d E^* \backslash 0$ 恰有两个连通分支.

2.7.2.2 定义. E 的定向，就是取定 $\Lambda^d E^* \backslash 0$ 的两个连通分支中的一支 $\mathscr{O}$. 形式 $\omega \in \Lambda^d E^*$ 称为正形式，如果 $\omega \in \mathscr{O}$；E 中的基 $\mathscr{B} = \{e_i\}_{i=1,\cdots,d}$ 称为正向基（或正基），如果 $\omega(e_1, \cdots, e_d) > 0$

$\forall \omega \in \mathscr{O}$.

最后的那个定义是有意义的，因为由 $\omega, \omega' \in \mathscr{O}$ 就可推出存在 $k \in \mathbf{R}_+^*$ 使 $\omega' = k\omega$.

2.7.2.3 我们注意到，若 $\omega \in \mathscr{O}$ 且 $f \in \mathrm{GL}(E)$，则拉回形式 $f^*\omega \in \mathscr{O}$ 当且仅当 $\det f > 0$ 时成立. 因而，不管 E 是否定向，我们都引进下面的记号.

2.7.2.4 记号. 我们记 $\mathrm{GL}^+(E) = \{f \in \mathrm{GL}(E): \det f > 0\}$，$\mathrm{GL}^-(E) = \{f \in \mathrm{GL}(E): \det f < 0\}$.

2.7.2.5 于是，对 E 的任一方向 $\mathscr{O}$: $\forall \omega \in \mathscr{O} \quad \forall f \in \mathrm{GL}^+(E)$: $f^*\omega \in \mathscr{O}$，而且，对 E 的任一正向基 $\mathscr{B}$ 而言，$f(\mathscr{B})$ 是正向基的充要条件是 $f \in \mathrm{GL}^+(E)$. 因此，不管 E 是否定向，我们总可以说：$\mathrm{GL}^+(E)$ 的元素是保向的. 若 E, E' 是两个具有相同的有限维数的实向量空间，仅当 E 和 E' 都定向，我们才能定义 $\mathrm{Isom}^+(E; E)$（譬如说，定义为 $f^*\omega' \in \mathscr{O} \quad \forall \omega' \in \mathscr{O}'$，其中 $\mathscr{O}$ 和 $\mathscr{O}'$ 分别定义了 E 和 E' 的方向）.

2.7.2.6 定向的第二种定义方式，是几何的，甚至是力学的；简单地说起来，如果两个基可以相互通过形变达到，那么它们有相同的方向.

2.7.2.7 定义. 向量空间 E 中的两个基 $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ 称为**同伦的**，如果存在连续映射 $F: [0, 1] \to E^d$，使得 $F(0) = \mathscr{B}$，$F(1) = \mathscr{B}'$ 且对每一 $t \in [0, 1]$，$F(t)$ 是一个基. E 的定向，就是对 E 中的基的全体的集合，在等价关系"相互同伦"下取定一个等价类.

2.7.2.8 本节唯一的新内容是证明定义 2.7.2.2 和 2.7.2.7 的等价性，也即说明基的集合里恰有两个等价类，而且，如果 E 是在 2.7.2.2 的意义下定向的，那么正向基的集合正好就是其中的一个等价类. 为此，先注意到，若在 E 中取定一个基 $\mathscr{B}_0$，则通过

$$\varphi(f) = f(\mathscr{B}_0)$$

决定了一个映射 $\varphi: \mathrm{GL}(E) \to E^d$，这个映射的象集是 E 中的基的集合，它是一个连续映射，而且还是到象集上的一个同胚. 因此由

下述命题即可推得两种定义的等价性：

2.7.2.9 命题. 空间 $\mathrm{GL}(E)$ 恰好有两个连通分支，即 $\mathrm{GL}^+(E)$ 和 $\mathrm{GL}^-(E)$，而且它们都是弧连通的.

$\mathrm{GL}(E)$ 至少有两个通连分支可由下列事实推出：行列式 $\det(\cdot)$ 是一个 $\mathrm{GL}(E)\to\mathbf{R}^*$ 的连续函数，且是满射.

$\mathrm{GL}^+(E)$ 的弧连通性将在 8.4.3 中证明.

现在，我们可以来考虑仿射空间的定向了.

2.7.2.10 定义. 仿射空间 X 的定向，就是指它的底向量空间 $\vec{X}$ 的定向. 定向仿射空间 X 中的仿射标架 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,d}$ 称为正向标架，如果 $\{\overrightarrow{x_0x_i}\}_{i=1,\cdots,d}$ 是 $\vec{X}$ 的正向基. 记

$$\mathrm{GA}^+(X)=\{f\in\mathrm{GA}(X):\vec{f}\in\mathrm{GL}^+(\vec{X})\},$$

$$\mathrm{GA}^-(X)=\{f\in\mathrm{GA}(X):\vec{f}\in\mathrm{GL}^-(\vec{X})\}.$$

2.7.2.11 对两个都已定向的仿射空间，也可定义 $\mathrm{Isom}^+(X,X')$. 仿射标架间也可以定义同伦（不管 X 是否定向）. 为了说明从同伦关系出发仍得到相同的定向概念，只须说明 $\mathrm{GA}^+(X)$ 仍是弧连通的就可以了.

然而，对 $a\in X$，$\mathrm{GA}^+(X)$ 就是半直积 $T(X)\mathrm{GA}^+(X)$（参见 2.7.1.3），其中 $T(X)$ 是与弧连通空间 $\vec{X}$ 同胚的，$\mathrm{GA}_a^+(X)$ 同胚于 $\mathrm{GL}^+(\vec{X})$，根据 2.7.2.9，后一空间也是弧连通的.

2.7.3 超平面与半空间

2.7.3.1 设 H 是仿射空间 X 的一个超平面；根据 2.4.8.6，必存在 X 上的仿射形式 $f\in A(X;\mathbf{R})$，使 $H=f^{-1}(0)$. 于是很自然地我们要来讨论 X 的子集 $f^{-1}(\mathbf{R}_+)$，$f^{-1}(\mathbf{R}_-)$ 以及 $f^{-1}(\mathbf{R}_+^*)$，$f^{-1}(\mathbf{R}_-^*)$；前两个是 X 中的闭集，后两个是开集，分别以 $f^{-1}(\mathbf{R}_+)$ 和 $f^{-1}(\mathbf{R}_-)$ 为闭包.

2.7.3.2 命题. $f^{-1}(\mathbf{R}_+)$ 和 $f^{-1}(\mathbf{R}_-)$（相应地，$f^{-1}(\mathbf{R}_+^*)$ 和 $f^{-1}(\mathbf{R}_-^*)$）只与超平面 H 有关；它们称为由 H 决定的闭（相应地，开）半空间. 每个半空间都是弧连通的. 空间 $X\backslash H$ 恰有两个连通分支：由 H 决定的开半空间 $f^{-1}(\mathbf{R}_+^*)$ 和 $f^{-1}(\mathbf{R}_-^*)$.

第一个结论可由 2.4.8.6 的开头一段推出．第二个结论可由半空间的凸性推出．由于仿射形式是连续的（参看 2.7.1.2）；而且 $\mathbf{R}^*$ 有两个连通分支，所以 $X\backslash H$ 至少应有两个连通分支，由此即可推出最后的结论．

半空间将在第 11 章和第 12 章中起重要的作用．

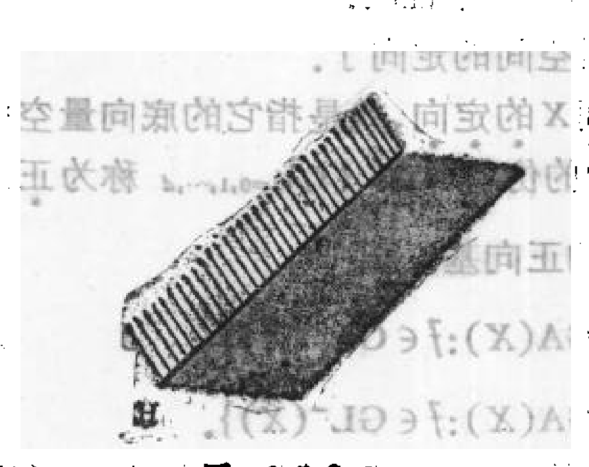


图 2.7.3.2．

图 2.7.3.3．

2.7.4 仿射空间上的 Lebesgue 测度

2.7.4.1 我们将随意使用积分理论中的经典结论，参见 0.6．

2.7.4.2 设 E 是向量空间，$f:\mathbf{R}^d\to E$ 是同构（例如，是在 E 中取定一个基后得到的）；设 μ_0 是 $\mathbf{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度，$f(\mu_0)$ 是 μ_0 在 f 下的象测度；若 $g:\mathbf{R}^d\to E$ 是另一个同构，我们要比較一下 $g(\mu_0)$ 和 $f(\mu_0)$．

变量替换法则（参见 [GT]，第 33 页）表明

$$g(\mu_0)=|\det(g^{-1}\circ f)|f(\mu_0),$$

其中 $|\det(g^{-1}\circ f)|$ 现在是非零正实数．于是，一个向量空间尽管本身并没有规范测度，却总在不计数量差别的意义下具有一个这样的测度；或者说，它总有一族自然测度，即 $f(\mu_0)$ 全体的集合，这里 $f\in \operatorname{Isom}(\mathbf{R}^d;E)$．

这样的测度，称为 E 上的 Lebesgue 测度．讨论仿射空间时，只要注意到，在 $\mathbf{R}^d$ 上 μ 是在平移下不变的．由此即得

2.7.4.3 命题． $\vec{X}$ 上的一个 Lebesgue 测度在任一双射

$$\Theta_a^{-1}:\vec{X}\to X,\quad a\in X$$

下的象测度，称为仿射空间 X 上的 Lebesgue 测度. X 上的两个 Lebesgue 测度总是成比例的. 若 μ 是 X 上的一个 Lebesgue 测度，我们把生成该测度的 $\vec{X}$ 上的 Lebesgue 测度记为 $\vec{\mu}$，对任一 X 上的 Lebesgue 测度 μ 和任一 $f \in GA(X)$，象测度 $f(\mu)$ 为

$$f(\mu) = |\det \vec{f}|\,\mu.$$

在 9.12 中我们会看到，欧氏仿射空间具有一个规范 Lebesgue 测度.

2.7.4.4 附注. 仿射空间上在任何平移下不变的测度，必为 Lebesgue 测度. 证明这一结论的基本思想，是修改性态不佳的测度，修改后的测度仍是不变测度，然而是连续的，因而与某个 Lebesgue 测度成比例. 由于在平移下不变，这个比例因子又必须是一个常数.

2.7.5 紧集的中心. $GA(X)$ 的紧子群

本节的目的是依据 Lebesgue 测度在仿射空间 X 的任一紧子集 K 中决定一点，它在任何使 $f(K)=K$ 的 $f \in GA(X)$ 下都是不动的. 这一性质将在 2.7.5.10 中起实质性的作用.

2.7.5.1 先在 X 上固定一个 Lebesgue 测度 μ，并假设 K 的内部非空：$\mathring{K} \neq \emptyset$. 于是特别就有

$$\mu(K) = \int_X \chi_K \mu > 0$$

(其中 χ_K 是 K 的特征函数，参见 0.6). 我们记得，对任一测度 μ，总可定义在向量空间 E 中取值的测度如下:

对 $f: X \to E: \varphi\left(\int_X f\mu\right) = \int_X \varphi(f)\mu \quad \forall \varphi \in E^*$，或者，在任一坐标系下也可写为

$$\int_X f\mu = \left(\int_X f_1\,\mu, \cdots, \int_X f_d\mu\right),\ 这里\ f = (f_1, \cdots f_d).$$

对紧子集 K 和任一点 $a \in X$，令

$$I_\mu(a) = \int_{x \in X} \chi_K \overrightarrow{ax}\,\vec{\mu}.$$

若 $b \in X$ 是另一点，则有

$$I_\mu(b) = \int \chi_K \overrightarrow{bx}\mu = \int \chi_K\left(\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ax}\right)\mu = \mu(K)\overrightarrow{ba} + I_\mu(a).$$

由此即得

2.7.5.2 命题. 对 X 的紧子集 $K(\mathring{K} \neq \emptyset)$ 来说，点

$$a + (\mu(K))^{-1} I_\mu(a)$$

与 $a \in X$ 和 X 上的 Lebesgue 测度 μ 都是无关的；这一点记为 cent$'(K)$，或在必要时记为 cent$'_X(K)$.

2.7.5.3 注. 若 X 是欧氏仿射空间，$d = 2$ 或 3，而且我们把 K 看作一块板或一个各向同性的（即有常数密度 1 的）固体，则 cent$'(K)$ 就是在力学或物理意义下 K 的重心．但要注意到，$\mathring{K} = \emptyset$ 时情况不然：见下面的 2.7.5.5 以及 3.4.2，3.7.14.

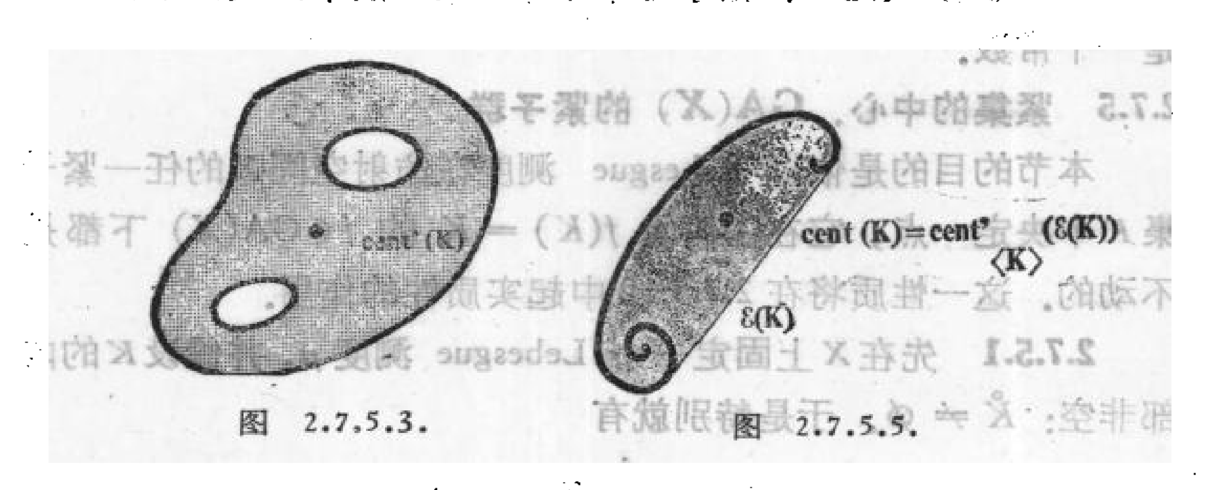


图 2.7.5.3.　　　　图 2.7.5.5.

2.7.5.4 在紧集 K 的内部可能是空集的情形，我们采用下述建立在第 11 章的基础上的方法：设 K 是 X 的任一紧子集，$\mathscr{E}(K)$ 是它的凸闭包，$\langle K\rangle$ 是 K 所生成的仿射子空间，则由 11.2.7，$\mathscr{E}(K)$ 在 $\langle K\rangle$ 中的内部是非空的；因此我们给出下面的定义.

2.7.5.5 定义. 设 K 是仿射空间的一个紧子集，点

$$\text{cent}(K) = \text{cent}'_{\langle K\rangle}(\mathscr{E}(K))$$

称为 K 的中心.

2.7.5.6 注. 因而，一般地说 K 的中心并不与匀质线段 K 的力学意义的重心重合．例如 K 是欧氏仿射空间 X 的曲线段时就不重合．此外，这个中心也不跟我们在 9.8.6 中将碰到的别的不动点相

重合。

2.7.5.7 命题. 设K是仿射空间X的一个紧子集；则对任何使 $f(K)=K$ 的 $f\in \mathrm{GA}(X)$，总有 $f(\mathrm{cent}(K))=\mathrm{cent}(K)$。换言之，

$$\mathrm{GA}_K(X)=\{f\in \mathrm{GA}(X):f(K)=K\}\subset \mathrm{GA}_{\mathrm{cent}(K)}(X).$$

而且，若 $\mathring{K}\neq\emptyset$，则 $|\det\vec{f}|=1\quad \forall f\in \mathrm{GA}_K(X)$。

后一结论可从 2.7.4.3 的最后一段推出：

$$f(\mu)(K)=\mu(f^{-1}(K))=\mu(K)=|\det\vec{f}|\mu(K).$$

从 2.7.5.4 和 2.7.5.5 可看出，前一结论可仅对 $\mathring{K}\neq\emptyset$ 的情形加以证明．于是：

$$\begin{aligned}f(\mathrm{cent}(K))&=f(a+(\mu(K))^{-1}I(a))\\&=f(a)+\vec{f}((\mu(K))^{-1}I(a))\\&=f(a)+(\mu(K))^{-1}\vec{f}(I(a)),\end{aligned}$$

其中 $a\in X$ 是任意一点．应用 2.7.5.1 就可得到

$$\begin{aligned}\vec{f}(I(a))&=\vec{f}\left(\int_{x\in X}\chi_K\overrightarrow{ax}\,\vec{\mu}\right)=\int_{x\in K}\chi_K\vec{f}(\overrightarrow{ax})\vec{\mu}\\&=\int_{x\in K}\chi_K\overrightarrow{f(a)f(x)}\vec{\mu}=I(f(a)),\end{aligned}$$

因此，

$$f(\mathrm{cent}(K))=f(a)+(\mu(K))^{-1}I(f(a))=\mathrm{cent}(K).$$

2.7.5.8 附注. 如果知道X是欧氏仿射空间，就可以证明，使 $f(K)=K$ 的每个 $f\in \mathrm{Is}(X)$（X 的同构所成的群）必使X的一个不动点只依赖于K，这个证明并不用到积分的理论：见 9.8.6．另外还可证明，对 $\mathring{K}\neq\emptyset$ 的紧集 K，总存在一个X上的欧氏结构在 $\mathrm{GA}_K(X)$ 下不变，这样，对这个结构来说特别就有

$$\mathrm{GA}_K(X)\subset \mathrm{Is}(X);$$

见 2.7.5.10 和 8.2.5。

最后注意到，一般说来 $\mathrm{GA}_{\mathscr{E}(K)}\neq \mathrm{GA}_K(X)$，正如图2.7.5.8所说明的。

2.7.5.9 命题. 设K是仿射空间X中内部非空的紧子集；则

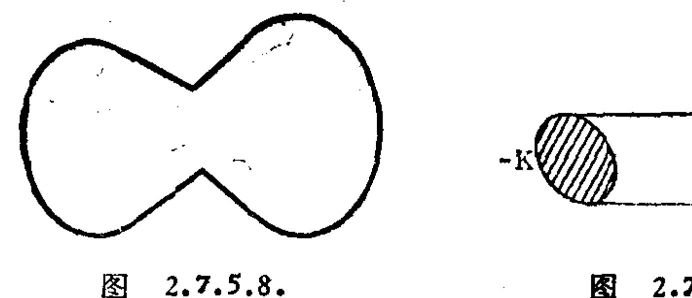


图 2.7.5.8.

-K •0 K
ℰ(K∪(-K))

图 2.7.5.9.

对 GA(X) 的拓扑 2.7.1.3 而言，这个群的子群 GA$_K(X)$ 是紧的。

$\mathring{K} \neq \varnothing$ 的条件是必要的：若取 $K = \{a\}$，$a \in X$，则 GA$_a(X)$ 同胚于非紧的 GL$(\vec{X})$。

我们应用 2.7.5.7 在 cent(K) 将 X 向量化；这就又回到了 X 是向量空间的情形；因为 cent$(K) \in \mathring{K}$，还可以假设它的原点 $0 \in \mathring{K}$（参见 2.8.11）。不过，为了避免证明这一点，我们注意到，若 $f(K) = K$，$f \in$ GL(X)，则

$$f(-K) = -K, \text{ 其中 } -K = \{-x; x \in K\},$$

另外，$\mathscr{E}(K \cup (-K))$ 是包含 0 作为内点的。在 X 上加上任一欧氏结构，并设 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(0,\varepsilon) \subset K$；设

$$M = \sup\{\|x\|; x \in K\}, \text{ 则由 } f(K) = K,$$

就有

$$\|f(x)\| \leqslant M \quad \forall x \mid \|x\| \leqslant \varepsilon;$$

这就是说，对 $L(X;X)$ 上的普通范数来说，$\|f\| \leqslant \varepsilon^{-1}M$。这样，GL$_K(X)$ 就是 $L(X;X)$ 的一个有界闭集，因而是紧集。

反过来，有

2.7.5.10 命题. 设 G 是 GA(X) 的一个紧子群；则存在 $x \in X$ 使 $G \subset$ GA$_x(X)$。而且，存在一个 X 上的在 G 下不变的欧氏结构，也就是说在这结构下 $G \subset$ Is(X)。

因为，设 $a \in X$ 是任意一点，则 $G(a)$ 是 a 在 G 的作用下的轨道；这是 x 中的紧集，而且我们所要的点就是 $x =$ cent$(G(a))$（参见 2.7.5.7）。"而且"云云，我们以后将用三个方法加以证明，参见 8.2.5 和 9.8.6。

2.7.5.11 推论. $GA(X)$ 的所有极大紧子群都是(在 $GA(X)$ 中关于内自同构)相互共轭的.

在由 $\vec{X}$ 上二次形式 q 所定义的 X 的欧氏结构下使 a 不动的同构全体所成的群 $Is_a(X, q)$ 是紧的，从 2.7.5.10 可知，$GA(X)$ 的任一极大紧子群都是某个 $Is_a(X, q)$，这里 a 和 q 都是适当取定的. 由 8.1.6 和公式 1.5.3，推论得证.

2.7.5.12 附注. 上述推论是按历史上的面貌叙述的. 事实上，一个很一般也很基本的结论是，任一李群的所有极大紧子群都是相互共轭的，例如可参见 [HN]，第 218 页和第 240 页的注.

2.7.5.10 在一般情形下不一定成立，即使给定的是一个性态很好的空间的同构群；举例来说，设 X 是球面，$G = Is(X)$ 是球面上同构全体所成的群(参见 18.5)，则 G 没有任何不动点. 关于这方面的一个很一般的结论，可见 9.8.6.5.

2.7.6 等仿射几何. 在 2.7.5.7 的结尾，我们很自然地碰到过子群

$$SA(X) = \{f \in GA(X) : |\det \vec{f}| = 1\},$$

这个子群有时称为 X 的幺模群或特殊仿射群. 于是，这个群的元素使 X 上的每个 Lebesgue 测度不变；但这个群不是紧的，事实上对 X 上给定的一个欧氏结构来说，这个群要比 $Isom(X)$ 大得多. 然而，有一种内容丰富的几何学却正是从讨论 $SA(X)$ 下不变的性质发展而成的，这种几何曾经有过相当的发展：一般性的文献是 [SK]，第 1-50 到 1-56 页，[FT1] 第 40 到 52 页，[BLA2] 和 [DE6] 第 340 页的练习 12. 譬如说，我们可以对 X 中可微分的曲线来定义长度的概念和仿射曲率的概念，它们都是在 $SA(X)$ 下不变的；参见 2.8.12.

2.7.7 仿射空间中的微分学. 设 X, X' 是两个仿射空间，U 是 X 的开集而 $f: U \to X'$. "f 是可微分的，是 C^p 类的……" 之类的概念是很容易建立起来的. 只不过要注意到，f 的导数 f' 是属于 $L(\vec{X}; \vec{X}')$ 的. 我们可以用两种方式建立起这种微分运算来. 一种方式的依据是 X 和 X' 的不同的向量化之间只相差平移，而平移是 C^∞ 类的；另一种方式则着眼于：可微性的定义只涉及考察差

式

$$f(x)-f(a)-g(x-a),\ g\in L(\vec{X};\vec{X}'),$$

但因

$$x-a=\overrightarrow{ax}\in\vec{X}\quad 且\ f(x)-f(a)=\overrightarrow{f(a)f(x)}\in\vec{X}',$$

所以前面的差式确是属于 $\vec{X}'$ 的.

关于微分学的一本比较全面的参考书是 [CH1].

2.8 练　　习

2.8.1 Ceva 定理. 设 $\{a, b, c\}$ 是仿射平面上的一个三角形, $a'\in\langle b, c\rangle$, $b'\in\langle c, a\rangle$, $c'\in\langle a, b\rangle$ 是三边上的三点. 三条直线 $\langle a, a'\rangle$, $\langle b, b'\rangle$ 和 $\langle c, c'\rangle$ 共点的充要条件是(参见 2.4.6)

$$\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}}\cdot\frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}}\cdot\frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}}=-1.$$

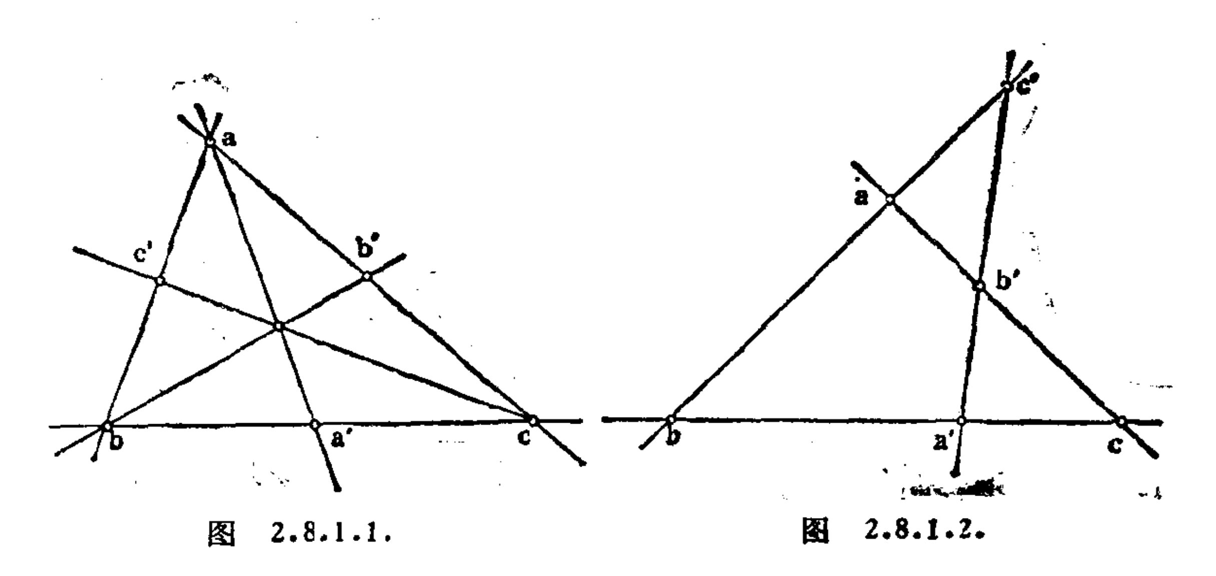


图 2.8.1.1.　　　　图 2.8.1.2.

2.8.2 Menelaüs 定理. 在 2.8.1 的假设条件下,证明 a', b', c' 三点共线的充要条件是 (参见 2.4.6)

$$\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}}\cdot\frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}}\cdot\frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}}=1.$$

2.8.3 设 X 是 k 个元素的有限域上的 n 维仿射空间. 计算 $\#X$,

$\#GA(X)$ 以及X中p维子空间的数目.

2.8.4 证明：当X是向量空间时，$GL(X)$ 的中心化为$K^* \cdot \mathrm{Id}_X$.

2.8.5 设X是仿射空间，讨论使$f^p = \mathrm{Id}_X$ 或 $f^2 = f$ 的 $f \in GA(X)$.

2.8.6 叙述并证明 2.5.3 和 2.5.4 的逆命题.

2.8.7 设X是复(即域$\mathbf{C}$上的)仿射空间；证明它容有一个规范拓扑. 在这个拓扑下，讨论 $X \backslash H$ 的连通性，其中H是超平面.

2.8.8 证明：若X是有限维实仿射空间，Y是子空间，则当

$$\dim Y \leqslant \dim X - 2$$

时 $X \backslash Y$ 必是连通的. 讨论 $X \backslash Y$ 的单连通性(参见 18.2.2).

2.8.9 **Pappus 定理与可交换性**. 设X是一个仿射平面，其底空间是非交换的体上的向量平面，而且X中任意六点都满足定理 2.5.3. 证明X的基域是可交换的.

2.8.10 证明$\mathbf{R}$除 $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ 外不可能容有其它的域自同构，$\mathbf{C}$除 $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ 和 $z \longmapsto \bar{z}$ 外不可能容有其它的连续的域自同构.

2.8.11 设K是有限维实仿射空间的紧子集，而且 $\mathring{K} \neq \emptyset$；设$H$是$X$的超平面，$X'$ 和 X'' 是X的两个闭的半空间. 又假定H满足下述条件：若 $K \cap X' = K'$，$K \cap X'' = K''$，则 $\mathring{K}' \neq \emptyset$，$\mathring{K}'' \neq \emptyset$.

证明(参见 2.7.5.2)：当 $\mathrm{cent}'(K')$ 和 $\mathrm{cent}'(K'')$ 处分别作用有质量 $\mu(K')$ 和 $\mu(K'')$ 时，它们的重心就是 $\mathrm{cent}'(K)$. 并由此推出，若K还是凸集，则总有

$$\mathrm{cent}(K) \in \mathring{K}.$$

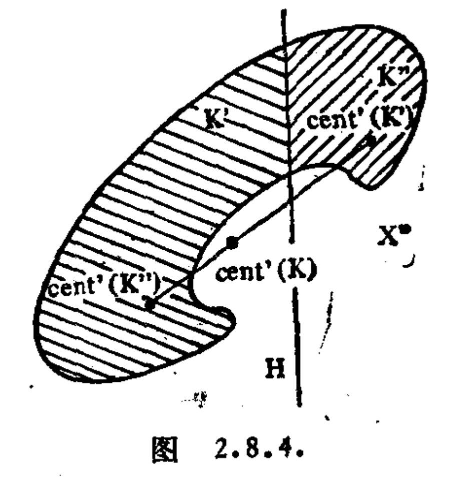


图 2.8.4.

2.8.12 **等仿射长度与等仿射曲率**. 设X是实仿射平面；我们在 $\vec{X}$ 中*取定一个基*，于是可以定义 $\vec{X}$ 中任意两个向量的行列式 $\det(\vec{u}, \vec{v})$ (当然，是关于这个基的). 设 $c:[a,b] \to X$ 是X中一条 C^3 类可微曲线. 称实数

$$\int_a^b \sqrt[3]{\det(\vec{c}'(t),\ \vec{c}''(t))}\,dt$$

为c(在取定基的X中)的*等仿射长度*.

证明：$\forall f \in SA(X)$，c 的等仿射长度等于 $f \circ c$ 的等仿射长度（参见 2.7.6）．证明：若 c 使得 $\det(\vec{c}'(t), \vec{c}''(t)) \neq 0$，则可重新将 c 的参数取为等仿射长度．设 c 是以等仿射长度为参数的曲线，则称 $K = \det(\vec{c}'', \vec{c}''')$ 为 c 的等仿射曲率；证明这曲率也是在 $SA(X)$ 下不变的．分别对 X（已取定一基）中的椭圆、双曲线和抛物线计算它们的等仿射长度和等仿射曲率．在欧氏平面上，在不计同构差别的情况下，曲线是由作为弧长的函数的曲率所决定的（例如可参见 [B-G]，第 323 页），证明：与此相仿地，在不计相差 $SA(X)$ 中某一元素的情况下，X 中的一条曲线是由作为等仿射弧长的函数的等仿射曲率所决定的．关于等仿射几何的其它结果，可参见 2.7.6 中的参考书目．

第3章 泛空间及其应用

在这技巧性较强的一章中，我们对每个仿射空间X作出相应的向量空间 $\hat{X}$;X 嵌入 $\hat{X}$ 中成为一个不含原点的仿射超平面，而 $\vec{X}$ 则是一个以 X 嵌入后所成的仿射超平面作为方向的 $\hat{X}$ 的超平面(第 3.1 节). $\hat{X}$ 的构造也许看上去有些突如其来，但我们希望读者慢慢看下去会发觉引进这个构造是确有补益的. 以后在讲到一些古典的理论时，将多次用到泛空间；这些理论是：重心（第 3.4 节)，重心坐标(第 3.6 节)，齐次化变量在非齐次多项式上的作用(第 3.3 节)，仿射空间以自然的方式射影完备化(第 5 章)，仿射二次曲面的讨论(第 15 章).

3.1 泛 空 间

在仿射空间X中，由于没有特殊点(参见第 2 章引言及2.1.9)，不存在内在的向量运算的问题；但是我们可以在X中建立起X上向量场的内在运算，因为我们知道，从任一集合到一个向量空间E中的映射全体的集合，总有一个从E承继而来的向量空间结构.

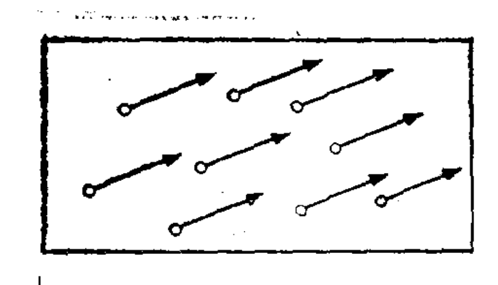
3.1.1 定义. 仿射空间 $(X, \vec{X})$ 上的向量场，就是一个映射

$$f: X \to \vec{X};$$

向量场的集合记为 $\mathscr{V}(X)$，其上赋有规范的向量空间结构.

3.1.2 两个例子. 我们并不考虑很广泛的意义下的向量场，而只考虑下面两种类型的向量场：

3.1.2.1 $\vec{\xi} \in \vec{X}$ 连带的常向量场，亦即 $f \in \mathscr{V}(X)$ 定义为 $f(x) = \vec{\xi}$ $\forall x \in X$，记为 $f_{\vec{\xi}}$. 实用上，这种场的轨迹是平行于 $\vec{\xi}$ 的直线. 几何上，$x \longmapsto x + f(x)$ 就是平移 $t_{\vec{\xi}}$. 在图上把 f 画成 $(x, x + f(x))$ 的集合，就更直观了.



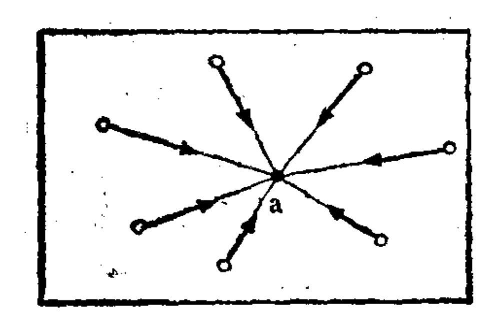


图 3.1.2.1.

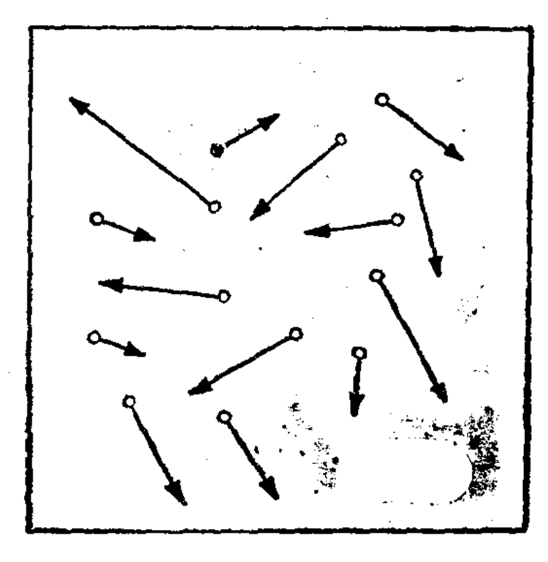


图 3.1.2.2.

3.1.2.2 中心场. $(k, a)\in K^*\times X$ 连带的中心场定义为 $x\longmapsto k\overrightarrow{xa}$ $\forall x\in X$, 记为 $f_{(k,a)}$. 这种场跟位似 $H_{a,1-k}$ 的关系是 $x+f(x)=H_{a,1-k}(x)$ $\forall x\in X$; 轨迹是通过 a (不包括 a 在内)的直线。参见 3.7.6.

3.1.3 记号. 把 $\mathscr{V}(X)$ 分成两部分:

$\mathscr{C}(X)=\{f_{\vec{\xi}}: \vec{\xi}\in\vec{X}\}$, $\mathscr{C}'(X)=\{f_{(k,a)}: (k, a)\in K^*\times X\}$.

3.1.4 注意: $\vec{X}\ni\vec{\xi}\longmapsto f_{\vec{\xi}}\in\mathscr{C}(X)$ 是 $\vec{X}$ 与 $\mathscr{V}(X)$ 的向量子空间 $\mathscr{C}(X)$ 之间的一个线性同构; $\mathscr{C}'(X)$ 不是 $\mathscr{V}(X)$ 的向量子空间,但 $K^*\times X\ni(k, a)\longmapsto f_{(k,a)}\in\mathscr{C}'(X)$ 是一个双射, 而且在 $\mathscr{V}(X)$中有: $\lambda f_{(k,a)}=f_{(\lambda k,a)}$ $\forall(k, a)\in K^*\times X$ 和 $\forall\lambda\in K^*$; 于是 $\mathscr{C}(X)\cap\mathscr{C}'(X)=\emptyset$.

3.1.5 定理(初等的,然而是基本的).

并集 $\mathscr{D}(X)=\mathscr{C}(X)\cup\mathscr{C}'(X)$ 是 $\mathscr{V}(X)$ 的向量子空间. 由 $\varphi(f_{(k,a)})=k$ 和 $\varphi(f_{\vec{\xi}})=0$ $\forall\xi\in\vec{X}, \forall(k, a)\in K^*\times X$定义的映射 $\varphi:\mathscr{D}(X)\to K$ 是 $\mathscr{D}(X)$ 上的一个线性形式;映射

$$X\ni x\longmapsto f_{(1,x)}\in\mathscr{D}(X)$$

在X与 $\mathscr{D}(X)$ 的仿射超平面 $\varphi^{-1}(1)$ 之间诱导出一个仿射空间

的同构．(参见 2.2.3.)

3.1.6 我们有 $f_{(k,a)}+f_{(k',a')}:x\longmapsto k\overrightarrow{xa}+k'\overrightarrow{xa'}$；若 $k+k'=0$，则 $k\overrightarrow{xa}+k'\overrightarrow{xa'}=k(\overrightarrow{xa}-\overrightarrow{xa'})=k\overrightarrow{a'a}$，因此 $f_{(k,a)}+f_{(k',a')}=f_{k\overrightarrow{a'a}}$，若 $k+k'\neq 0$，则存在 b 使 $\overrightarrow{ab}=\dfrac{k'}{k+k'}\overrightarrow{aa'}$，由此可得

$$k\overrightarrow{xa}+k'\overrightarrow{xa'}=(k+k')\overrightarrow{xb},\ 即\ f_{(k,a)}+f_{(k',a')}=f_{(k+k',b)}$$

(当然这个 b 不是随意给出的，在等式 $f_{(k,a)}+f_{(k',a')}=f_{(k+k',b)}$ 中把 b 作为未知数，令 $x=a$ 即可求得)．于是就有

$$f_{(k,a)}+f_{\xi}:x\longmapsto k\overrightarrow{xa}+\xi=k\overrightarrow{xa'},$$

其中 a' 使得 $\overrightarrow{aa'}=k^{-1}\xi$，因此 $f_{(k,a)}+f_\xi=f_{(k,a')}$．从前面的计算

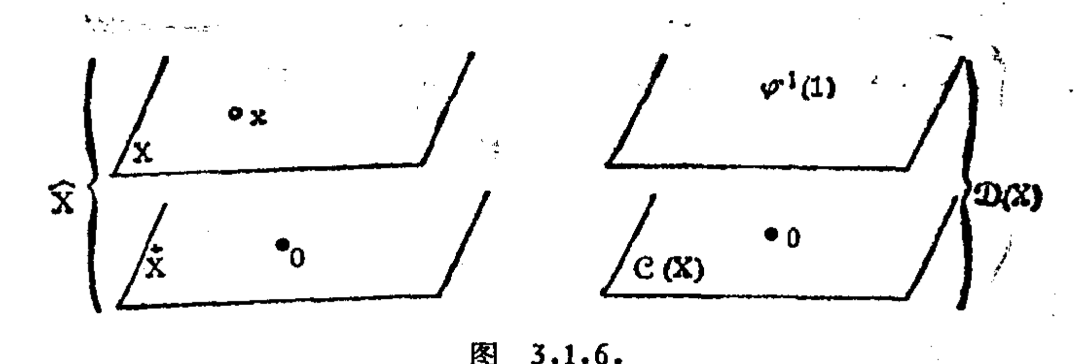


图 3.1.6.

中可看出 φ 是线性的．为了证明 $\Sigma:x\longmapsto f_{(1,x)}$ 是一个仿射映射，我们取定一点 $a\in X$；若 Σ 是仿射映射，则应存在(参见 2.3.1)

$$\vec{\Sigma}:\vec{X}\to\mathscr{C}(X),\quad 使得\ \overrightarrow{\Sigma(a)\Sigma(b)}=\Sigma(b)-\Sigma(a)$$

(在向量空间 $\mathscr{D}(X)$ 的意义下)，但由定义：

$$\Sigma(b)-\Sigma(a):x\longmapsto\overrightarrow{xb}-\overrightarrow{xa}=\overrightarrow{ab},$$

因此必有 $\Sigma(b)-\Sigma(a)=f_{\overrightarrow{ab}}$，从而 $\vec{\Sigma}$ 就是

$$\vec{X}\ni\xi\longmapsto f_\xi\in\mathscr{C}(X).$$

这样就反过来证明了 Σ 是仿射映射．

我们暂时离开向量场的讨论，插进下面这么一个注记．

3.1.7 注． 设 $(X,\vec{X})$ 是仿射空间，$\hat{X}$ 是不相交并集 $\vec{X}\cup(K^*\times X)$，在 $\hat{X}$ 中把 X 和 $1\times X$ 看作等同的，则 $\hat{X}$ 关于下述运算成为一个向量空间：

$\times$：$k(h,x)=(kh,x)=(kh)x$，$0(kx)=0$，特别有 $(k,x)=$

kx,

$$
\begin{cases}
+: & 若\ k+k'\neq 0:\ kx+k'x'=(k+k')x'',\ 其中\ x''=x+\dfrac{k'}{k+k'}x, \\
-: & 若\ k+k'=0:\ kx+k'x'=k\overrightarrow{x'x}, \\
 & kx+\vec{\xi}=k(x+k^{-1}\vec{\xi}),
\end{cases}
$$

其中用到了 $\vec{X}\subset X$ 上的×和+的性质． 在 $\hat{X}$ 中，$\vec{X}$ 是一个超平面．若定义 $M:\hat{X}\to K$ 为 $M(kx)=k$, $M(\vec{\xi})=0\quad\forall\vec{\xi}\in\vec{X}$，则 M 是 X 上的一个线性形式，而且 $M^{-1}(1)=X\not\ni 0$． 仿射超平面 $M^{-1}(1)$（作为仿射空间）同构于 X．另外，对每个 $a\in X$，$\hat{X}$ 就是直和 $\hat{X}=\vec{X}\oplus Ka$；若 $q:\hat{X}\to\vec{X}$ 是关于这个直和的首项射影，则由于 X 与 $1\times X\subset\hat{X}$ 是等同的，$q|_X$ 就是 Θ_a（参见 2.1.5）．

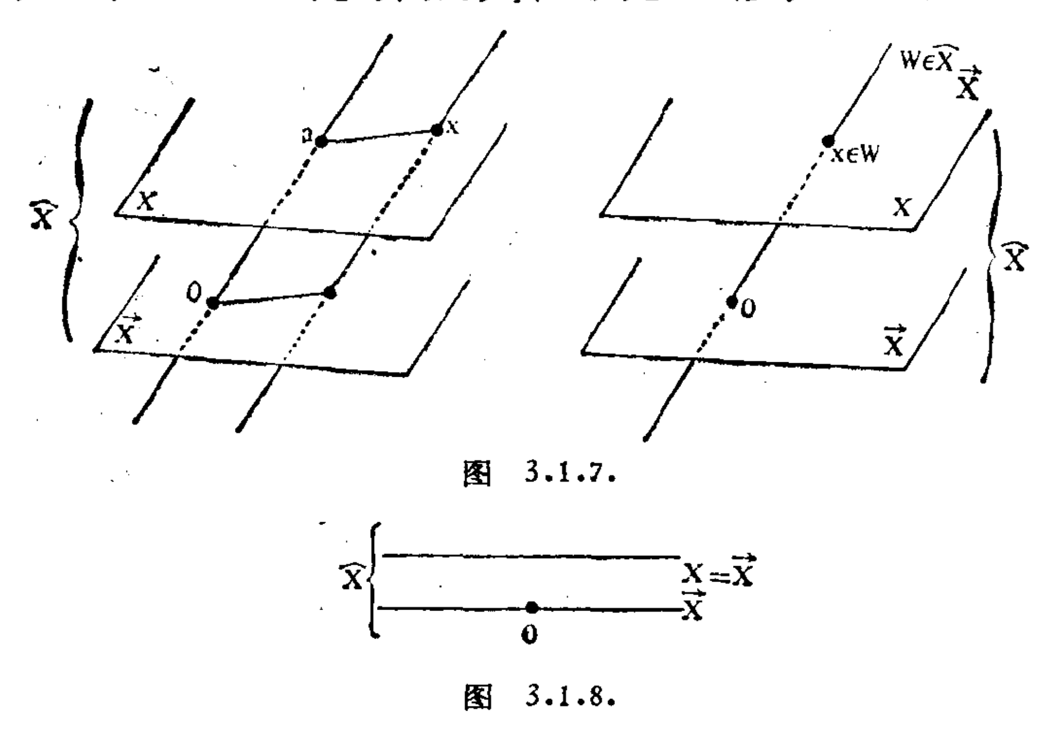


图 3.1.7.

图 3.1.8.

3.1.8 附注． 首先，我们在 3.1.7 中完全证实了 2.1.3.1 所引进的 $xy=y-x$ 的写法是合理的． 要注意到把不同对象等同的做法有时会是危险的；一个原则是，在可能混淆的情况下，一开始就要重新区分开不同的对象．一个典型的例子是：将仿射空间 X 取成 $X=\vec{X}$ (2.2.1)；这时，在 $\hat{X}$ 中，记号 $\vec{X}$ 同时表示仿射子空间

$$\vec{X}=X=M^{-1}(1)$$

和向量子空间（超平面）$\vec{X}$；因此，在这种场合不应该写 $X = \vec{X}$，而必须把 X 和 $\vec{X}$ 区分清楚(图 3.1.8)。

3.1.9 许德拉咬住闪光的尾巴[1]。从 X 出发，我们作出了泛向量空间 $\hat{X}$，它包含 $\vec{X}$ 作为超平面。因此，根据 2.2.5，我们可以讨论仿射空间 $\hat{X}_{\vec{X}}$；于是 2.2.7 和 3.1.7 证明了 X 通过下面的两个同构自然同构于 $\hat{X}_{\vec{X}}$：$X \cong M^{-1}(1)$ 和 $M^{-1}(1) \cong \hat{X}_{\vec{X}}$。

3.2 泛空间与仿射映射

现在，设 X, X' 是两个仿射空间；我们作出 $\hat{X}$，$\hat{X}'$ 并找出 $A(X; X')$ 和 $L(\hat{X}; \hat{X}')$ 之间的关系。3.1.7 和 2.3.7 已说明了从 $L(\hat{X}; \hat{X}')$ 到 $A(X; X')$ 的关系；反之亦然(可直接证明)：

3.2.1 命题。设 X, X' 是两个仿射空间，$f \in A(X; X')$。定义映射 $\hat{f}: \hat{X} \to \hat{X}'$ 为 $\hat{f}|_{\vec{X}} = \vec{f}$，$\hat{f}(kx) = k\hat{f}(x)$（分别根据 $X \subset \hat{X}$ 和 $X' \subset \hat{X}'$ 的等同关系），则 $\hat{f} \in L(\hat{X}; \hat{X}')$，并且 $\hat{f} \in L_{\vec{X}, \vec{X}'}(\hat{X}; \hat{X}')$；在 2.3.6 的意义下，由 3.1.8 还有 $\tilde{\hat{f}} = f$。若 $g \in A(X'; X'')$，其中 X'' 是第三个仿射空间，则 $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$。

3.2.2 这个命题说明了给 $\hat{X}$ 冠以"泛"字的理由；在更确切的意义上说，3.2.1 证明了 $X \to \hat{X}$ 是一个"函子"对应。

3.2.3 推论。对每个仿射空间 X，X 的仿射群 $\mathrm{GA}(X)$ 自然同构于 $\mathrm{GL}_{\vec{X}}(\hat{X}) = \{f \in \mathrm{GL}(\hat{X}) : f(\vec{X}) = \vec{X}\}$ 关于 $\mathrm{GL}(\vec{X})$ 的中心 $K^* \cdot \mathrm{Id}_{\vec{X}}$ 的商群 $\mathrm{GL}_{\vec{X}}(\hat{X}) / K^* \cdot \mathrm{Id}_{\vec{X}}$（参见 2.3.3.12）。

3.2.4 例。根据 2.3.3.1 2 的定义，$f \in \mathrm{Dil}(X)$ 的充要条件是

$$f|_{\vec{X}} = \mathrm{Id}_{\vec{X}}.$$

3.2.5 2.3.8的解释。为此，让我们看一下 2.3.8 的条件和记号。给定 X 的标架 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$ 后，我们可以作出 X 的两个基，第一个是 $\{x_0, \overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_n}\}$，其中 $x_0 \in X \subset \hat{X}$，$\overrightarrow{x_0x_i} \in \vec{X} \subset \hat{X}$，第二个是 $\{x_0, x_1, \cdots x_n\} \subset X \subset \hat{X}$；我们在 3.6 中还将用到第二个基。两个

---

1) 许德拉 (Hydre)：希腊神话中的九头怪物，中间一头能砍而复生。这里，"咬住尾巴"比喻从 X 出发仍可回到与其同构的空间。——译者注

第一种类型的标架，即 $\hat{\mathcal{X}}$ 的 $\{x_0, \overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_n}\}$ 和 $\hat{\mathcal{X}}'$ 的

$$\{x'_0, \overrightarrow{x'_0x'_1}, \cdots, \overrightarrow{x'_0x'_p}\},$$

可用来解释 2.3.8。2.3.9 中记为 $M(f)$ 的矩阵，就是 3.2.1 中的 $\hat{f}$ 关于上述两个基的矩阵；因为，若 $x=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 本身是在 X 中的，则这个 x 在 $\hat{\mathcal{X}}$ 中关于标架 $\{x_0, \overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_n}\}$ 的坐标显然是 $(1, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，然而，由 2.3.9 可知，$\overline{X}\subset\hat{\mathcal{X}}$ 的元素就是第一个坐标是零的那些元素。

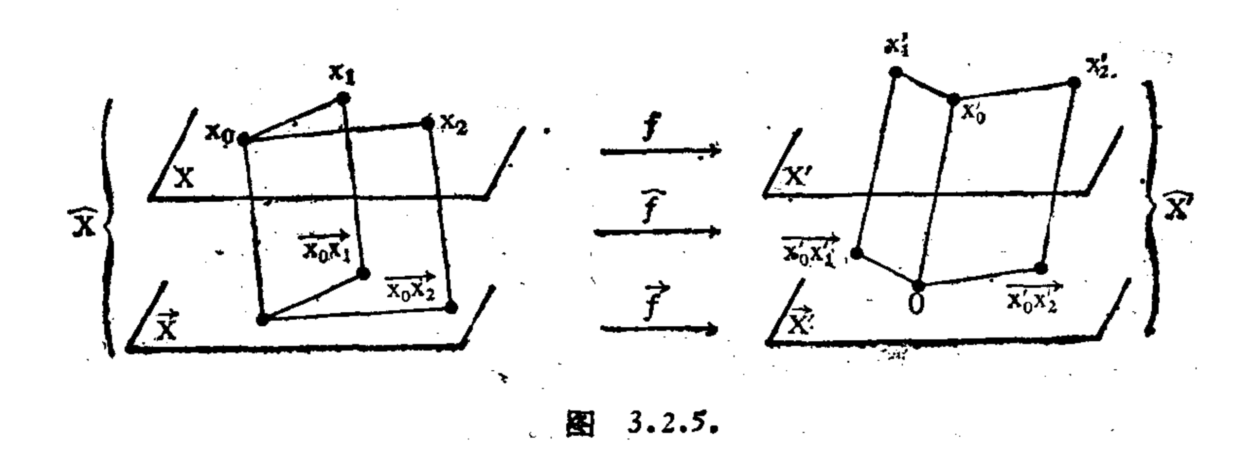


图 3.2.5.

3.3 仿射空间上的多项式

本节中，所有的域都假定是特征数为 0 的。

我们先回顾一下向量空间上的多项式以及多项式映射的定义和性质；[CH1]的第 79 页是很好的参考材料。

3.3.1 复习．设 V, W 是两个向量空间；映射 $f: V\to W$ 称为 k 阶齐次多项式映射，如果存在一个对称 k 重线性映射 $\varphi: V^k\to W$，使 $f=\varphi\circ\Delta$，其中 Δ 是对角映射 $\Delta: V\ni x\longmapsto(x, \cdots, x)\in V^k$。把 V 到 W 中的 k 阶齐次多项式映射的集合记为 $\mathscr{P}^{\bullet}_k(V; W)$；当 $W=K$(V 的基域)时，简称为 k 阶齐次多项式，并记

$$\mathscr{P}^{\bullet}_k(V)=\mathscr{P}^{\bullet}_k(V; K).$$

若 f 是齐次多项式映射，则使 $f=\varphi\circ\Delta$ 的映射 φ 是唯一的，也就是说 φ 是由 f 所确定的．映射 $f: V\to W$ 称为阶数小于或等于 k

的多项式映射，如果存在 $f_i \in \mathscr{P}_i^{\bullet}(V; W)$ $(i = 0, 1, \cdots, k)$，使 $f = \sum_{i=0}^{k} f_i$（规定以 $\mathscr{P}_0^{\bullet}(V; W)$ 来记 V 到 W 中的常值映射的集合）．若 $W = K$，仍简称为阶数小于或等于 k 的多项式．若 f 是阶数小于或等于 k 的多项式映射，则 $f = \sum_i f_i$ 的写法是唯一的，亦即 $f_i \in \mathscr{P}_i^{\bullet}(V; W)$ 都是由 f 所确定的．阶数小于或等于 k 的多项式映射的集合记为 $\mathscr{P}_k(V; W)$，$\mathscr{P}_k(V) = \mathscr{P}_k(V; K)$．

3.3.2 注．借助于 $f: V \to W$，可以写出 $\varphi: V^k \to W$ 的具体算式来，详见 [CH1] 第 85 页 (6.3.5) 式． $k = 2$ 的情形是我们熟知的，$\mathscr{P}_2^{\bullet}(V)$ 的元素 f 称为二次形式；使 $f = \varphi \circ \Delta$ 的 φ 称为 f 的极形式，且有

3.3.2.1

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[f(x + y) - f(x) - f(y)] \quad \forall x, y \in V.$$

我们假定域的特征数为 0，是为了保证给定 f 后 φ 是唯一的．但我们看到，对二次形式来说，只要假定特征数不是 2 就足够了（更一般地，只要知道域的特征数严格地大于所考察的多项式的阶数就可以了）．

向量空间 $\mathscr{P}_1^{\bullet}(V)$ 就是 V 的对偶空间 V^*，即 V 上线性形式的集合．更一般地，$\mathscr{P}_k^{\bullet}(V; W)$ 赋有自然的(在向量空间中取值的映射全体所构成的)向量空间的结构．

我们有 $f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \quad \forall f \in \mathscr{P}_k^{\bullet}(V) \quad \forall x \in V$，这就是我们称之为 k 阶"齐次"的原因，但这一条件不足以使 f 成为一个多项式（除非 f 是足够次可微分的，参见 3.7.12）．至于为什么称为"多项式"，则正是下面要说明的．

3.3.3 坐标．假设 V 是有限维的，维数为 n，设 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 是 V 的一个基，$x = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 是 x 关于这个基的坐标，则对

$$f \in \mathscr{P}_k^{\bullet}(V; W),$$

$f(x)$ 有两种可能的写法，每一种都很有用．第一种写法是

$$f(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k} a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}\lambda_1^{\alpha_1}\cdots\lambda_n^{\alpha_n},$$

和式是对所有以 k 为和的 $\geqslant 0$ 的整数来作的，其中 $a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}$ 是 W 中一些取定的向量（$W = K$ 时则是一些数量）. 第二种写法是

$$f(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k} a_{i_1,\cdots,i_k}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k},$$

其中 $a_{i_1,\cdots,i_k}$ 是在 W 中取定的，和式遍取所有在 $1, \cdots, n$ 中取值且可重复的递增整数。在这两种写法中，出于习惯都把右端记成 W 上的数量乘法，以使当 $W=K$ 时得到通常的多项式记法。

3.3.4 为了在仿射空间 X 上定义多项式，最简捷的方法是利用 X 连带的泛空间 $\hat{X}$；在 3.7.11（参见 3.3.14）中有一个更初等的定义。

3.3.5 定义. 设 X 是仿射空间，W 是向量空间. 映射

$$f: X \to W$$

称为 X 上 k 阶多项式映射，如果存在 $\hat{f} \in \mathscr{P}_k^{\bullet}(\hat{X})$ 而 $\hat{f}|_X = f$；它们的集合(自然地成为向量空间)记为 $\mathscr{P}_k(X; W)$. 若 $W = K$，就称为 k 阶多项式，它们的集合记为 $\mathscr{P}_k(X) = \mathscr{P}_k(X; K)$. f 的符号记为 $\vec{f}$，指 k 阶齐次多项式映射：$\vec{f} = \hat{f}|_{\vec{X}}$.

3.3.6 例. $\mathscr{P}_0(X; W)$ 的元素是常值映射，$\mathscr{P}_1(X; W)$ 的元素跟 $A(X; W)$ 的元素是一样的，特别地，$\mathscr{P}_1(X)$ 就是 X 的仿射形式的集合(要说明这一点，可直接验证或利用 3.3.14). 这说明(参见 3.3.2)我们把 $\mathscr{P}_2(X)$ 的元素称为二次仿射形式是合适的.

3.3.7 定义 3.3.5 是简捷明瞭的，但常常并不实用；而且，我们想研究限制映射 $\mathscr{P}_k^{\bullet}(\hat{X}) \to \mathscr{P}_k(X)$，根据定义它是满射，但它是单射吗？我们还要写出有限维情形的具体算式，看一下跟 $\mathscr{P}_k(X_a)$ 的关系，其中 X_a 是 X 在 a 点的向量化空间. 于是，我们取定 $a \in X$ 并利用直和关系 $\hat{X} = \vec{X} \oplus Ka$（参见 3.1.6)；为简便起见，我们在 $\mathscr{P}_k(X)$ 中讨论. 设 $\hat{\varphi}: \hat{X}_k \to K$ 使得 $\hat{f} = \hat{\varphi} \circ \Delta$；我们有

3.3.8

$$\hat{\varphi}(\vec{\xi}_1 + t_1 a, \cdots, \vec{\xi}_k + t_k a)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\sum_{l_1<\cdots<l_i}\prod_{s\neq l_1,\cdots,l_i} t_s\hat{\varphi}(\vec{\xi}_{l_1},\cdots,\vec{\xi}_{l_i},a,\cdots,a)$$

(这里用到了φ的对称性)．对 $i=0,1,\cdots,k$，令:

3.3.9

$$\varphi_i:X_a^i\ni(\vec{\xi}_1+a,\cdots,\vec{\xi}_i+a)\longmapsto\binom{k}{i}\hat{\varphi}(\vec{\xi}_1,\cdots,\vec{\xi}_i,a,\cdots,a).$$

每个映射 φ_i 都是 i 重线性的对称映射，因此可定义

$f_i=\varphi_i\circ\Delta:X_a\to K$，而 $f_i\in\mathscr{P}_i^{\bullet}(X_a)(i=0,1,\cdots,k)$，由 3.3.8 就有:

3.3.10

$$f=\sum_{i=0}^{k}f_i.$$

因而，若 $f\in\mathscr{P}_k(X)$，只要 $a\in X$，f 就是 X_a 上一个阶数小于或等于 k 的多项式．我们可以看到逆命题也成立，而且 3.3.8 式使我们能从 f 唯一地作出 $\hat{f}$．事实上，若

$$a\in X,\ f_i\in\mathscr{P}_i^{\bullet}(X_a)(i=0,1,\cdots,k),$$

$f=\sum_{i=0}^{k}f_i$，若 $f_i=\varphi_i\circ\Delta$ 而 $\varphi_i:X_a^i\to K$，则令

3.3.11

$$\hat{\varphi}(\vec{\xi}_1+t_1a,\cdots,\vec{\xi}_k+t_ka)$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}^{-1}\sum_{l_1<\cdots<l_i}\prod_{s\neq l_1,\cdots,l_i}t_s\varphi_i(\vec{\xi}_{l_1}+a,\cdots,\vec{\xi}_{l_i}+a).$$

若 $\hat{f}=\hat{\varphi}\circ\Delta$，则有: $\hat{f}|_X=f$; 可以验证 $\hat{\varphi}$ 是 k 重线性的对称映射．于是，若 $t\neq0$，就有:

3.3.12

$$f(\vec{\xi}+ta)=\sum_{i=0}^{k}t^{k-i}f_i(\vec{\xi}+a)=t^k\sum_{i=0}^{k}f_i(t^{-1}\vec{\xi}+a)$$

$$=t^k\sum_{i=0}^{k}f_i(t^{-1}(\vec{\xi}+a))=t^kf(t^{-1}(\vec{\xi}+a)),$$

由此可知，当把 X_a 和 $\vec{X}$ 通过 Θ_a 等同起来时，有：

3.3.13 $\hat{f}(\vec{\xi}, t) = t^k f(t^{-1}\vec{\xi}) \quad \forall x \in X \quad \forall t \in K^*$ 和 $\hat{f}|_{\vec{X}} = \bar{f}$.

根据这个式子，我们说："$\hat{f}$ 是通过变量 t 将 f 齐次化后得到的"，或者"$\hat{f}$ 是通过引进一个齐次化变量 t 而得到的"，再根据 3.3.12，就可从 f_i 具体算出 $\hat{f}$. 因此，由上述论证推得下面的

3.3.14 命题. 限制映射

$$\mathscr{P}_k^\bullet(\hat{X}) \ni \hat{f} \longmapsto \hat{f}|_X \in \mathscr{P}_k(X)$$

是双射；其逆映射由 3.3.13 式表出. $\mathscr{P}_k(X)$ 的元素有以下特征：$f: X \to K$，使对任一 $a \in X$ 有 $f \in \mathscr{P}_k(X_a)$，或存在 $a \in X$ 使 $f \in \mathscr{P}_k(X_a)$. 通过 Θ_a 的作用可以看到，f 的 k 阶部分就是 f 的符号 $\bar{f}$.

3.3.15 例. 设 X 是有限维的，维数为 n，$\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$ 是 X 的一个标架，$(\lambda_i)_{i=0,\cdots,n}$ 是这个标架下的坐标，则 $f \in \mathscr{P}_2(X)$ 的充要条件是存在 $a_{ij}, b_i, c \in K(i, j = 1, \cdots, n)$ 使得

$$f(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{i,j} a_{ij}\lambda_i\lambda_j + \sum_i b_i\lambda_i + c,$$

从而 $\hat{f}$ 为：

$$\hat{f}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, t) = \sum_{i,j} a_{ij}\lambda_i\lambda_j + \sum_i b_i\lambda_i t + ct^2.$$

3.4 重　　心

将仿射空间 X 嵌入向量空间 $\hat{X}$ 后，就可计算 $\sum_i \lambda_i x_i$ 这样的线性组合，其中 $x_i \in X$，$\lambda_i \in K$；如果(参见 3.1.6)

$$M\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \sum_i \lambda_i M(x_i) = \sum_i \lambda_i = 1,$$

前述组合的结果(当然在 $\hat{X}$ 中)是在 X 中的. 由此有：

3.4.1 定义. 设 $\{x_i\}_{i\in I}$ 是仿射空间 X 中点的集合，$\{\lambda_i\}_{i\in I} \subset K$，这里除有限个 i 外 $\lambda_i = 0$，而且 $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$. X 中的点 x 称为承

载质量λ_i的点 x_i 的重心：$x=\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$。

3.4.2 例. 若除 $\lambda_1=1$ 外所有的 $\lambda_i=0$，则重心 x 就是 x_1；若 $I=\{1,2\}$，$\lambda_1=\lambda_2=1/2$ (从而K的特征数不为 2)，就有

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},$$

称为 $\{x_1x_2\}$ 的中心。更一般地，若在K中 $I=\{1,\cdots,n\}$，$n\neq 0$，$\lambda_i=\frac{1}{n}$ $\forall i$，则点 $x=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ 称为 x_i 的质心.

要注意到，若 X 是欧氏仿射平面，三角形 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的质心 $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ (参见 2.4.7) 是跟这个三角形所决定的均匀薄板的质心(参见 2.7.5.3)重合的，然而，

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$$

一般不再是这四点所决定的均匀薄板的质心。

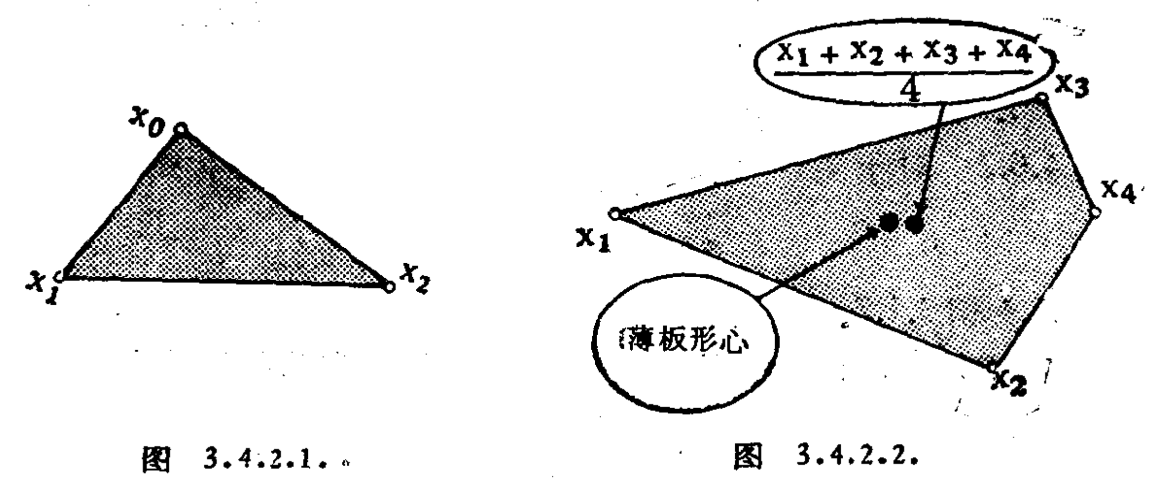


图 3.4.2.1.　　　　图 3.4.2.2.

请参阅第 171 页上为数众多的重心的例子.

3.4.3 一个基本的例子是 $K=\mathbf{R}$，X是实仿射空间而 x, y 是X的两点的情形. X的子集 $[x,y]=\{\lambda x+(1-\lambda)y:\lambda\in[0,1]\}$ 称为以 x, y 为端点的线段. 这是引进凸性概念的起点：参见第 11 章和第 12 章.

3.4.4 现在假定 $\sum_i\lambda_i\neq 1$，则重心落在 $\hat{X}\backslash X$ 中；这一点是很

有用的，尤其是因为我们注意到，有时会在 X 中碰到将 $\sum_i \lambda_i x_i$ 乘以数量 $\left(\sum_i \lambda_i\right)^{-1}$（如果它不是零）的情形。

3.4.5 定义. 把 $\hat{X}=\vec{X}\cup(K^*\times X)$ 的元素称为 X 的承重点。如果 $\{(\lambda_i, x_i)\}_{i=1,\cdots,n}$ 是一族有限多个承重点，就把承重点 $\left(\sum_i \lambda_i, x\right)$ 称为重心，其中，当 $\sum_i \lambda_i=0$ 时 x 是向量 $\sum_i \lambda_i x_i \in \vec{X}$，当 $\sum_i \lambda_i \neq 0$ 时 x 是点

$$\left(\sum_i \lambda_i x_i\right)\Big/\left(\sum_i \lambda_i\right) \in X.$$

y

[x, y]

x

图 3.4.2.3.

3.4.6 注

3.4.6.1 我们注意到，$\sum_i \lambda_i \neq 0$ 时，重心的概念是跟力学上的概念一致的；具有单位质量的三个点 x_i 的质心就是 $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$，不过这一点应承载 3 个单位的质量，即 x_i 处质量之和。

3.4.6.2 对于两点 $\{(1, x),\ (-1, y)\}$，我们又看到

$$\overrightarrow{yx}=x-y,$$

参见 2.1.4 和 3.1.7。

3.4.6.3 当然，我们的定义跟更古典的定义也是呼应的；那种定义研究的是和式 $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{yx_i}$，而不是向量场。若 x 是 $\{(\lambda_i, x_i)\}$ $\left(\sum_i \lambda_i \neq 0\right)$ 的重心，我们甚至从定义直接就有：

3.4.6.4 $$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{yx_i}=\left(\sum_i \lambda_i\right)\overrightarrow{yx} \quad \forall y \in X,$$

x 则满足下列方程：

3.4.6.5 $$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{xx_i}=0.$$

3.4.6.6 最后,通过将X在任一点 $a\in X$ 处向量化,我们就得到了 $\{(\lambda_i, x_i)\}\left(\sum_i \lambda_i\neq 0\right)$的重心 x 的具体计算公式:

$$x=a+\frac{\sum_i \lambda_i \overrightarrow{ax_i}}{\sum_i \lambda_i}.$$

如果 X 还是有限维的, 且 x_i 在某个给定的仿射标架中的坐标为 $(x_{i1},\cdots,x_{in})$, 那么在同一标架中, $\{(\lambda_i, x_i)\}\left(\sum_i \lambda_i\neq 0\right)$的重心坐标为

$$\left(\frac{\sum_i \lambda_i x_{i1}}{\sum_i \lambda_i},\cdots,\frac{\sum_i \lambda_i x_{in}}{\sum_i \lambda_i}\right).$$

3.4.7 向量空间(现在是 X)中的加法满足结合律这一事实, 可以从重心的性质来推出;这些性质在力学上有直观的解释,并且在几何上有很多有趣的应用.

3.4.8 命题(承重点的重心的结合性). 设 I 是有限集,

$$I=I_1\cup\cdots\cup I_p$$

是 I 的一个划分, $\{(\lambda_i,x_i)\}_{i\in I}$ 是一族承重点,则这族点的重心就是 $\{(\mu_l, \xi_l)\}_{l=1,\dots,p}$ 的承重点重心, 其中,对每一l,承重心 (μ_l,ξ_l) 是 $\{(\lambda_i, x_i)\}_{i\in I_l}$ 的重心.

3.4.9 命题 (X中重心的不可结合性). 设 I 是有限集,

$$I=I_1\cup\cdots\cup I_p$$

是 I 的一个划分, $\{x_i\}_{i\in I}$ 是X中的点集, $\{\lambda_i\}_{i\in I_l}$ 是K中点集并使 $\sum_{i\in I_l}\lambda_i=1\quad \forall l=1,\cdots,p$. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p\in K$ 且 $\sum_l \alpha_l=1$, ξ_l 是承载 λ_i 的点 $x_i(i\in I_l)$ 的重心, ξ 是承载 α_l 的点

$$\xi_l(l=1,\cdots,p)$$

的重心,则 ξ 是承载 $\alpha_l\lambda_i(i\in I_l)$ 的点 $x_i(i\in I)$ 的重心.

3.4.10 经典几何学的结论. 首先,设 x_1, x_2, x_3 是X中三点,

$$I = \{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2, 3\}, \ \lambda_1 = 1,$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}, \ \alpha_1 = \frac{1}{3}, \ \alpha_2 = \frac{2}{3}$$

(从而K的特征数不为 2 或 3)，则 $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = \frac{x_2 + x_3}{2}$是$\{x_2, x_3\}$ 的中心，因而承载质量$\{1/3, 1/3, 1/3\}$ 的点 x_1, x_2, x_3 的重

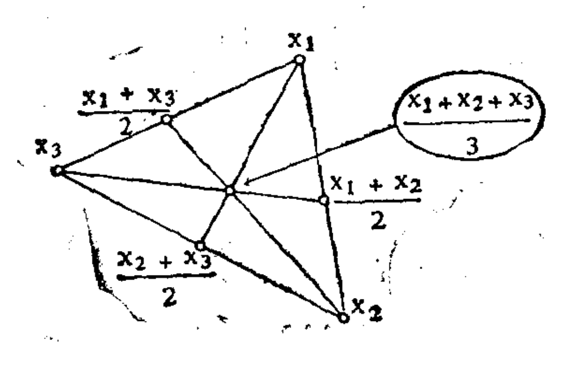


图 3.4.10.1.

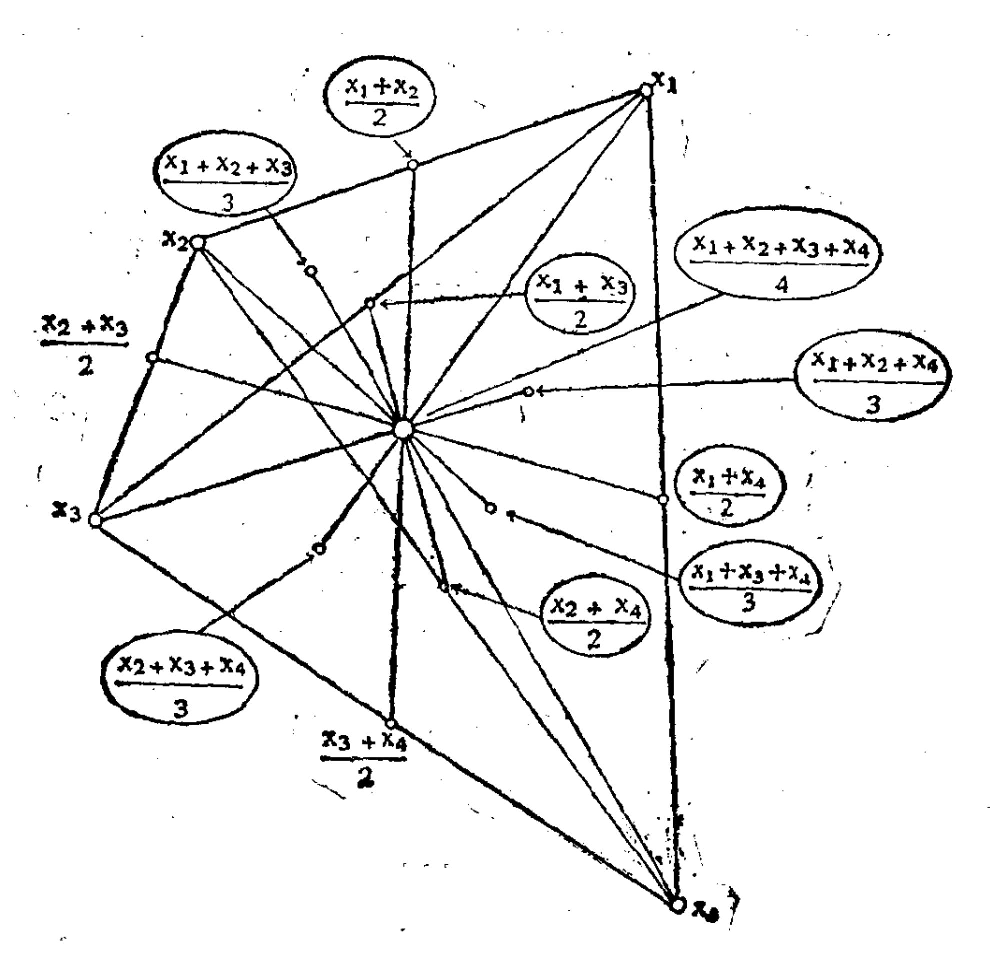


图 3.4.10.2.

心 x,即这三点的质心,就是承载质量 1, 2 的点 x_1, $\frac{x_2+x_3}{2}$ 的重心; 几何上的结论是三条中线 $\left\langle x_1, \frac{x_2+x_3}{2}\right\rangle$, $\left\langle x_2, \frac{x_3+x_1}{2}\right\rangle$, $\left\langle x_3, \frac{x_1+x_2}{2}\right\rangle$ 交于一点,这一点就是三角形 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的质心,它将每条中线分成分比为{1, 2}的线段. 其次,在四点的情形,我们就得到(假定K的特征数不是 2 或 3) 七线共点, 这七条线是三组对边的中心连线和各点与其余三点所成三角形的质心的连线.

3.5 重心与仿射映射,重心与仿射子空间

3.5.1 命题. 设X,X'是两个仿射空间, $f:X \to X'$ 是一个映射(目前仅仅是在集论意义下的). 则 f 成为仿射映射的充要条件是 f 保持重心,也就是说,对任意两个有限点集 $\{x_i\}_{i\in I}\subset X$, $\{\lambda_i\}_{i\in I}\subset K$, 其中 $\sum_i \lambda_i = 1$, 有

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \sum_i \lambda_i f(x_i).$$

必要性由 3.2.1 和 3.4.1 可得. 为证充分性,要证 $f:X_a \to X'_{f(a)}$ 线性. 为此, 只须注意到, 若 $x, x' \in X$, λ, $\mu \in K$, 则 X_a 中使 $x'' = \lambda x + \mu x'$ 的点 x'' 正是承载质量 $\{1-\lambda-\mu, \lambda, \mu\}$ 的 $\{a, x, x'\}$ 的重心(对 $f(a)$, $f(x)$, $f(x')$ 有相仿的结论)!

上述证明过程还证明了:

3.5.2 命题. 设X是仿射空间, $S\subset X$ 是X的子集. 则S是X的子空间的充要条件是S中任何点集的重心落在S中,也就是说,对任何两个有限点集 $\{x_i\}_{i\in I}\subset S$ 和 $\{\lambda_i\}_{i\in I}\subset K$, 其中 $\sum_i \lambda_i = 1$, 总有 $\sum_i \lambda_i x_i \in S$.

3.5.3 推论. 对X的一个子集S来说, 由S所生成的子空间, 即 $\langle S\rangle$, 就是S中所有的点(关于所有可能承载的质量)的重心的集

合。

这样，由相互独立的两点 x, y 所生成的直线 $D=\langle x, y\rangle$，就是 $D=\langle x, y\rangle=\{\lambda x+(1-\lambda)y: \lambda\in K\}$。

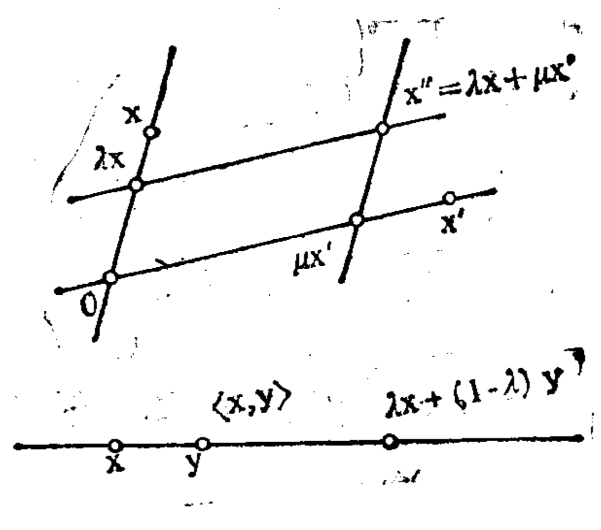


图 3.5.2.

3.5.4 命题．设 X 是特征数为 0 的域上的仿射空间．若 $F\subset X$ 是任一子集，则存在一点 $x\in X$，使 $GA_F(X)\subset GA_x(X)$，也就是说，对任一使 $f(F)=F$ 的 $f\in GA(X)$ 总有 $f(x)=x$。

若 $K=\bigcup_{i=1}^{n} x_i$，取 $x=\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ 并应用 3.5.1。

将 3.5.4 推广到紧集 F 的情形，参见 2.7.5.7 和 9.8.6． 一个有趣的推论是 3.7.3。

3.6 重心坐标

3.6.1 我们现在要用到 3.2.5 中引进的概念，即在有限 n 维的仿射空间 X 中给定一个仿射标架 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$ 后，$\hat{X}$ 中有对应的基 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$． 由此就有：

3.6.2 命题． 设 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$ 是仿射空间 X 的一个标架． 只要 $x\in X$，总存在 K 中的 $\lambda_i(i=0,1,\cdots,n)$，使

$$\sum_i \lambda_i=1 \text{ 且 } x=\sum_i \lambda_i x_i;$$

这些 x_i 是唯一确定的，称为 x 在该标架中的重心坐标。

事实上，$x=\sum_i \lambda_i x_i$ 在 X 中，但由于 $x\in X\subset \hat{X}$，就有 $\sum_i \lambda_i = 1$（参见 3.1.6）。

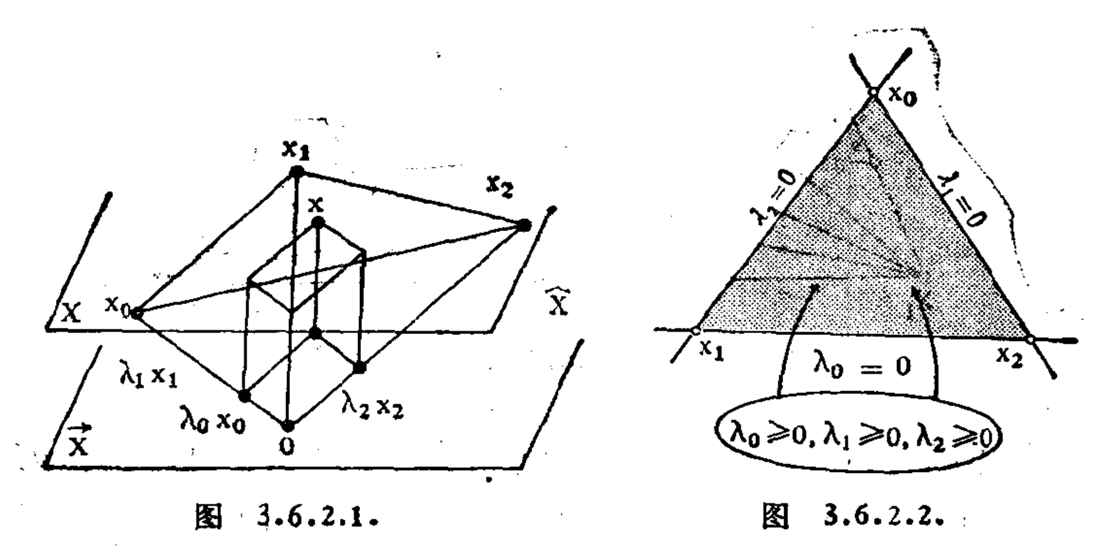


图 3.6.2.1.　　　　图 3.6.2.2.

3.6.3 例如，若 $n=2$，标架 $\{x_0, x_1, x_2\}$ 中坐标 $\lambda_0=0$ 的点，就是属于三角形 $\{x_0, x_1, x_2\}$ 的边 $\langle x_1, x_2\rangle$ 的那些点。若还有 $K=\mathbf{R}$，则 $\lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i=0,1,2$ 的点就是图 3.6.2.2 中加网点部分的点；在讨论凸性时，我们还会用到这个重要的注脚：参见 11.1.8.4。

3.6.4 在 10.6.8 中将用到重心坐标。

3.6.5 **重心重分.** 重心在代数拓扑中有很重要的应用；有关内

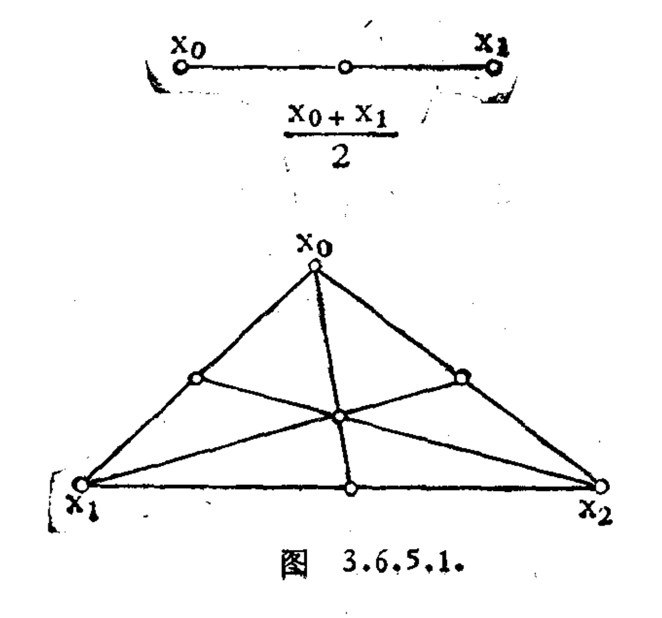


图 3.6.5.1.

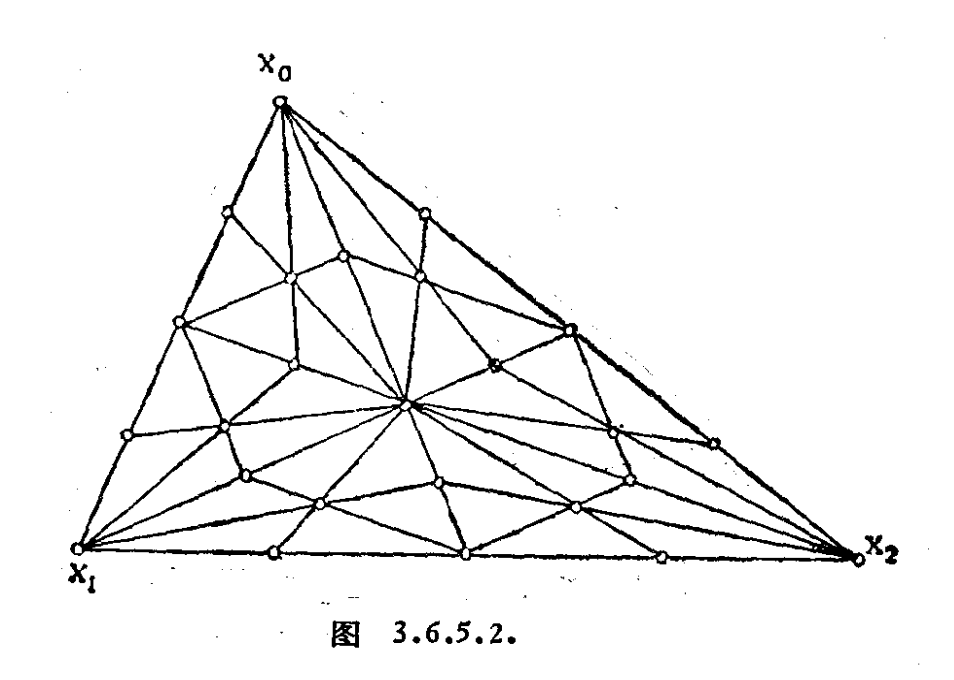


图 3.6.5.2.

容例如可详见 [GG]，第 63 — 68 页和 60 — 63 页，[H-Y]，第 206—209 页或 [CA]，第 82—86 页. 一个单形的**重心重分**是通过对所讨论的实仿射空间的维数进行归纳法来定义的：若 $d=1$，$\{x_0, x_1\}$ 的重心重分是两个单形 $\left\{x_0, \frac{x_0+x_1}{2}\right\}$，$\left\{\frac{x_0+x_1}{2}, x_1\right\}$ 的集合. 若 $d=2$，重心重分就是六个三角形的集合，这六个三角形有一个公共顶点 $\frac{x_0+x_1+x_2}{3}$，而且各有一边就是三边 $\langle x_0,x_1\rangle$，$\langle x_1, x_2\rangle$，$\langle x_2, x_0\rangle$ 所代表的三个一维单形的重心重分；依次类推.

图 3.6.5.2 画出了 $\{x_0, x_1, x_2\}$ 的重心重分的重心重分，共有 $6\times 6=36$ 个三角形. 参见练习 3.7.8.

3.7 练　　习

3.7.1 如果基域特征数不为 0，命题 3.5.4 是否还能成立?

3.7.2 将 3.4.10 的几何结论分别推广到五个点和六个点的情形.

3.7.3 设 X 是特征数为 0 的域上的仿射空间. 证明 GA(X) 的任一有限子群必容有一个不动点

3.7.4 我们用 2.7.5.2 中引进的记号. 设 X 是有限维实仿射空

间，K 是 X 中内部非空的紧子集，而且 $K=\bigcup_{i=1}^{n} K_i$，其中所有的 K_i 内部非空，且所有的交集

$$K_i \cap K_j \quad (i \neq j)$$

都是零测度的．证明 $\mathrm{cent}'(K)$ 是承载质量 $\mu(K_i)$ 的点 ξ_i 的重心，其中 $\xi_i=\mathrm{cent}'(K_i)$．

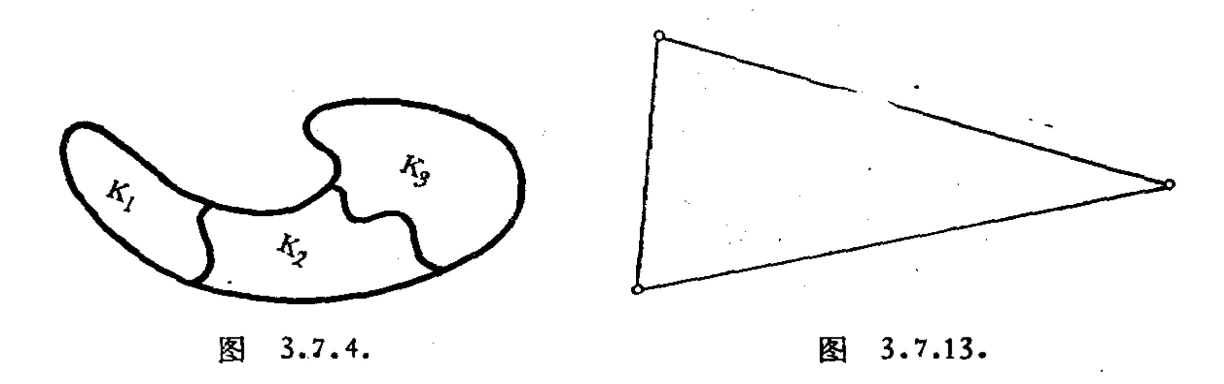


图 3.7.4.　　　　图 3.7.13.

3.7.5 设 X 是仿射空间．分别给出 $\mathscr{P}_1(X)$ 和 $\mathscr{P}_2(X)$ 中元素 f 的内在定义(也就是说，既不用到向量化空间 X_a，也不用到 $\hat{X}$)；再给出一个计算 f 的符号 $\bar{f}$ 的公式．

3.7.6 为什么在定义 3.1.2.2 中采用场

$$x \longmapsto k\overrightarrow{xa}$$

而不采用场 $x \longmapsto k\overrightarrow{ax}$？

3.7.7 设 X 是仿射空间，$a, b \in X$，$f \in \mathscr{P}_k(X)$．在 X_a 中记

$$f=\sum_{i=0}^{k} f_i \quad 其中\ \forall i \quad f_i \in \mathscr{P}_i^{\bullet}(X_a),$$

在 X_b 中同样有 $f=\sum_i g_i$．对 $k=1$ 和 2 的情形，具体地把 g_i 写成 f_i 和 $\xi=\overrightarrow{ab}$ 的函数式．讨论 X 赋有仿射标架的情形．

3.7.8 设 Σ 是 n 维欧氏仿射空间的一个单形；d 表示它的直径(参见 0.3)．证明 Σ 的重心重分的所有单形的直径都小于或等于

$$\frac{nd}{n+1};$$

由此推出，当反复进行重心重分时，所有单形的直径趋向于零．

3.7.9 给出 $k=3$ 时的 3.3.2.1 的一般式。

3.7.10 证明 $\dim E=n$ 时,对任何的 k 有:

$$\dim\mathscr{P}_k^\bullet(E)=\binom{n+k-1}{k},\ \dim\mathscr{P}_k(E)=\binom{n+k}{k}.$$

3.7.11 直接证明: 若对集 $a\in X$, $f:X\to W$ 属于 $\mathscr{P}_k(X_a;W)$, 则 $f\in\mathscr{P}_k(X_b;W)\quad\forall b\in X$.

3.7.12 设 X 是实向量空间, $f:X\to\mathbf{R}$ 是 C^1 类的并使

$$f(\lambda x)=\lambda^k f(x)\quad\forall x\in X\quad\forall\lambda\in\mathbf{R}.$$

证明 f 的导数 f' 满足 Euler 恒等式: $f'(x)(x)=\lambda f(x)\quad\forall x\in X$. 在 f 是 C^p 类且 k 阶齐次的情形下,写出并证明类似的关于 f 的 p 阶导数的公式. 由此推出,若 f 是 C^k 类且 k 阶齐次的, 则 f 一定是一个多项式.

3.7.13 一个三角形的三边各是具有相同密度的均匀细杆,试决定这个力学构件的质心。说明该点的几何作图法.

3.7.14 说明一个四边形(图 3.4.2.2)所代表的均匀薄板的质心的几何作图法。

3.7.15 在 3.3.1 的记号下,证明对任一 $f\in\mathscr{P}_k^\bullet(V;W)$, 有

$$\varphi(v_1,\cdots,v_r)=\frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{r-h}\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant r}f(v_{i_1}+\cdots+v_{i_k}).$$

3.7.16 在一个实仿射空间中给定 p 个点 $x_{1,1},\cdots,x_{1,p}(p\geqslant 2)$. 对 $i=1,2,\cdots,p$, $x_{2,i}$ 表示 $(x_{1,j})_{j\neq i}$ 的质心. 然后,用归纳法对所有的 $k\geqslant 1$ 定义 $(x_{k,j})_{j\neq i}$ 的质心 $x_{k+1,i}$. 证明每个序列 $(x_{k,i})_{k\in\mathbf{N}}$都是收敛的;若极限为 m_i,试比较这些 m_i。

第4章 射影空间

本章是讲射影空间的，先有一段引言(4.0)，旨在说明 4.1 中何以会引进一个看似突兀的定义；后一节中还有不少例子.接下去的两节 4.2 和 4.3 都很长，其中描述了射影空间的性态，以使读者能形成一个比较具体的概念，并且理解到射影空间在今天所起的作用，已经比它当初脱胎而来的纯初等几何大得多了. 4.2 节描述了自然坐标图；4.3 节讲了有限维的实或复的射影空间以及它们的拓扑. 作为一本有意写得比较初等的书，我们仅限于证明一些点集拓扑的性质；但对这些射影空间的代数拓扑性质，也作了一定的叙述. 根据这些提示，也许再借助于书中提到的参考文献，希望读者能领会到现代的数学中引进射影空间究竟意义何在(尽管自这些空间诞生以来，关于它们的讨论的重心已有所转移).

接下去的几节，又回到经典的内容，因而讲得较快：射影空间的态射与子空间以及它们的初等性质. 最后一节(4.8)从非交换体的角度作了讨论.

4.0 引 言

下面从几个方面来说明为什么要引进射影几何以及定义 4.1.1 何以会那么突兀地给出.

4.0.1 仿射几何在有些方面是不够完善的：特别是子空间的交有很多例外情形，在 2.4.2.4，2.4.9.2 和 2.4.9.4 各节都可以看到这个问题. 所以我们希望有一种几何，在这种几何里，两个子空间的交总是一个子空间，而且 2.4.9.2 中关于维数的最后一个关系式总是成立的.

4.0.2 历史上，Desargues 领先大约两个世纪，第一个在实仿射平

面中补加进无穷远点，亦即对每族平行直线给出无穷远处的一个点，使这族直线在射影意义下相交于这一点，从而构造出射影空间(图 4.0.2)．这种构造是第五章的讨论内容．

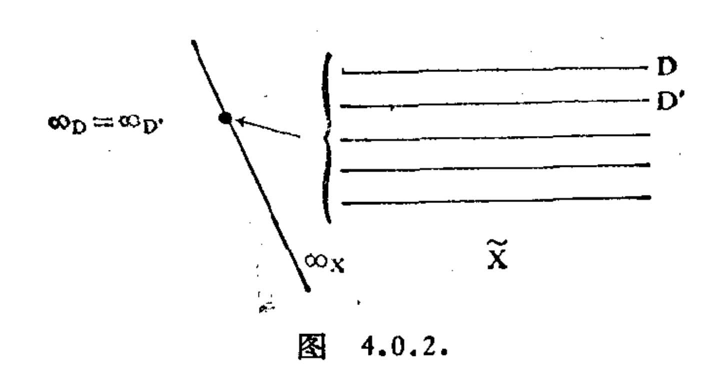


图 4.0.2.

4.0.3 在几何上我们很自然地会对经过一个定点的直线的集合，或者等价地说，对一个给定的向量空间 E 中一维向量子空间的集合 $G_{E,1}$，发生兴趣；这种集合，举例来说，在研究曲线上一点处的切线时是会遇到的：见 4.3.4．我们在 4.1.1 中将给出的射影空间的定义恰恰就是 $G_{E,1}$ 的定义．

4.0.4 我们的视野不是平面的，而是以眼睛为中心伸展出去的圆锥体．因此，应该知道怎样来调整从两个不同的中心点(比如说是在同一平面上的)出发的两个视象之间的关系；这是跟透视的概念相关的，也涉及航空摄影的内容，参见第 4.7 节．

4.0.5 通过(比如说)把二次曲面跟二次形式联系起来，我们可以看到射影几何跟线性代数之间的有趣的(在历史上也是很重要的)对照(例如可参见 14.1)；除此之外，实数域或复数域上的射影空间在微分几何、代数拓扑(参见配边理论)中，当然也在代数几何中，起着根本的作用．它们的好处之一在于，它们是球面以外最简单的紧流形． 关于这方面的现代的参考文献，举例来说有 [GG]，[HU]，[B-H]．

4.0.6 射影空间很自然地在量子力学中有所应用，例如可参见 [C-D-L]，第 219 页．

4.1 定义和例子

4.1.1 定义. 设 E 是向量空间. 关于等价关系 $\mathfrak{R}: x\mathfrak{R}y$ 当且仅当 $y = \lambda x \quad \forall\lambda \in K$ 所作的商空间 $(E\backslash 0)/\mathfrak{R}$ 称为由 E 导出或生出的射影空间, 记为 $P(E)$. 一个射影空间 (简称), 就是指一个 $P(E)$. $P(E)$ 的维数定义为 $\dim E - 1$. 规范投影是 $p: E\setminus 0 \to P(E)$.

4.1.2 注意. 在 4.2.1 和 5.1.3 中我们要说明上述维数的定义是合理的; 这个定义也是很自然的, 因为 $P(E)$ 作为以直线为元素的集合, 要减少一维.

有些读者也许会不喜欢 4.1.1 的定义, 因为这样定义射影空间, 总得先有一个导出它的向量空间, 在 [BI5], AII138 页可以找到射影空间的另一种定义, 也许会比较使人满意, 不过代价是太累赘; 也可参见 4.8.3.

最后, 跟仿射空间的情形一样, 也可用公理化体系来研究射影空间; 我们在 2.6.7 中已经给出有关的参考文献.

4.1.3 例

4.1.3.1 对任一 $n \geqslant 1$, 令 $P^n(K) = P(K^{n+1})$, 称之为域 K 上的 n 维标准射影空间.

4.1.3.2 $K = \mathbf{R}$ 时射影空间称为实的, $K = \mathbf{C}$ 时称为复的.

4.1.3.3 射影空间为 0 维时, 称为一点; 为 1 维 (相应地, 2 维) 时, 称为一条射影直线 (相应地, 一个射影平面).

4.1.3.4 射影空间 $P(E)$ 与 $G_{E,1}$ (参见 1.2.5) 之间有一个自然的双射, 必要时, 我们将两者视为等同的.

4.1.3.5 根据 2.4.8.1 和 2.4.8.6, 向量空间 E 的所有超平面与 $P(E^*)$ 之间有一双射, 这里 E^* 是 E 的对偶空间. 将 E 的超平面的集合记为 $\mathscr{H}(E)$, 这个双射就是 (以后有需要时将双方视为等同)

$$\mathscr{H}(E) \to P(E^*).$$

4.1.3.6 设 $\mathscr{P}_k(X)$ 是仿射空间 X 上所有 k 阶多项式所成的向量空间(参见 3.3.5)，N 是核映射

$$N:\mathscr{P}_k(X)\to X \text{ 的子集全体},$$

它将 $f\in\mathscr{P}_k(X)$ 映成 f 的核 $f^{-1}(0)\subset X$. 因为对所有的 $\lambda\in K^*$ 有 $(\lambda f)^{-1}(0)=f^{-1}(0)$, 我们就得到一个因子分解

$$\begin{array}{ccl}
\mathscr{P}_k(X)\setminus 0 & \xrightarrow{N} & \\
\downarrow p & & X \text{ 的子集全体}. \\
P(\mathscr{P}_k(X)) & \xrightarrow{\underline{N}} &
\end{array}$$

以后我们会看到，在有些情形下 $\underline{N}$ 是单射(参见 14.1.6); $k=2$ 时这个单射的象就定义为 X 的二次曲面. 现在，如果 V 是一个向量空间，我们注意到(参见 3.3.2) $f(\lambda x)=\lambda^k f(x)$ $\forall f\in\mathscr{P}^\bullet_k(V)$, 就很自然地会对核映射 $\mathscr{P}^\bullet_k(V)\to V$ 的子集全体来考虑下面的交换图:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{P}^\bullet_k(V)\setminus 0 & \xrightarrow{N} & V \text{ 的子集全体} \\
\downarrow p & \nearrow N & \downarrow \\
P(\mathscr{P}^\bullet_k(V)) & \xrightarrow{\underline{N}} & P(V) \text{ 的子集全体},
\end{array}$$

因为每个 $f^{-1}(0)$ 实际上是 V 中的一个锥. 在第 14 和 15 章里还会碰到上面的两个图.

4.1.3.7 设 K 是有 $k=\#K$ 个元素的有限域，$P(E)$ 是 K 上的 n 维射影空间. 则 $\#P(E)=\dfrac{k^{n+1}-1}{k-1}$, 因为 $\#K^{n+1}=k^{n+1}$, 而每条直线(除去原点后)有 $k-1$ 个元素. 例如，$\mathbf{Z}_2$ 上每条射影直线有三个点，每个平面有七个点(参见 4.6.16).

4.2 射影空间的性状：坐标图

4.2.1 设 $P(E)$ 是射影空间；若 $H\subset E$ 是一个超平面，根据 2.2.5, 我们可以说，$E_H=G_{E,1}\setminus G_{H,1}=P(E)\setminus P(H)$ 是 $P(E)$ 的一个子集，甚至几乎就是 $P(E)$ 本身. 但 $E_H\subset P(E)$ 自然是一个仿射空

间;换句话说，如果我们用一个仿射空间的点来代表 $P(E)$ 的点，只不过是漏掉 $P(H)$ 的点而已；而这样一来，计算也好，取标架也好，…，都要方便得多．我们说，双射 $P(E)\backslash P(H)\to E_H$ 是 $P(E)$ 的一个**坐标图**．倘若想得到整个 $P(E)$，就得以所有的坐标图域来覆盖 $P(E)$；假设 $P(E)$ 是 n 维的，设 $H_i(i=0,\cdots,n)$是 E 中 $n+1$ 个超平面，且

$$\bigcap_i H_i=\varnothing,\ \text{则}\ \bigcap_i E_{H_i}=\varnothing,$$

从而 $P(E)=\bigcup\limits_i (P(E)\backslash P(H_i))$ 就是所有坐标图域的并集；这样，我们就用仿射空间覆盖了 $P(E)$．这时我们说，我们有一个 $P(E)$ 的**图集**．

4.2.2 不过，要让图集真的有用，还得知道图与图之间的联系，这就是说，要计算由下图所定义的映射$\dashrightarrow$:

$$\begin{array}{ccc} & P(E)\backslash(P(H_i)\cup P(H_j)) & \\ \swarrow & & \searrow \\ E_{H_i} & \dashrightarrow & E_{H_j}\end{array}$$

$(i\neq j)$，其中箭头$\dashrightarrow$表示这个映射实际上仅定义在 E_{H_i} 的一个子集上．这个计算留在 4.2.4 中去做．

4.2.3 为了在 $P(E)$ 中进行计算，假使 $\dim E<\infty$，一个更简单的想法是取 E 的一个基 $\{e_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$，于是，每一 $m\in P(E)$ 都可在取定的基中写为 $m=p(x)=p(x_0,\cdots,x_n)$，这里假定 $x=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$．称 $(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 为 x 的（关于取定的基的）一个**齐次坐标组**．所以称为“齐次”，是因为当 x 给定时，所有这样的坐标组的集合正是 $(\lambda x_0,\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)$ 的集合，其中 λ 取遍 K^*．

4.2.4 我们取定 E 的一个基 $\{e_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$，使对超平面 H_i 都有 $H_i=x_i^{-1}(0)$，并把前述两种观点结合起来进行讨论．$P(E)\backslash P(H_i)$ 的点就是齐次坐标组 $(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 满足 $x_i\neq 0$ 的那些点；另一方面，根据 2.2.7，E_{H_i} 同构于 E 中(平行于 H_i)的仿射超平面

$x_i^{-1}(1) = H_i + e_i$，于是我们可以在 $x_i^{-1}(1)$ 中取仿射标架

$$\{e_i\} \cup \{e_i + e_j\}_{j \neq i},$$

这样，就得到一个双射 $\pi_i: P(E) \backslash P(H_i) \to K^n$ 如下：

4.2.4.1

$$\pi_i: P(E) \backslash P(H_i) \ni p(x_0, x_1, \cdots, x_n)$$
$$\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}\right) \in K^n,$$

这就是 $P(E)$ 的一个坐标图的具体表达式，其中各项都在标准向量空间 K^n 中取值.

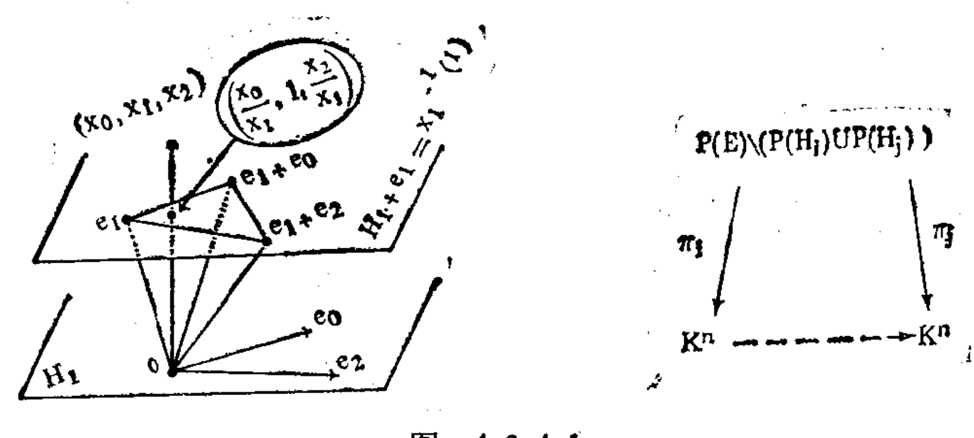


图 4.2.4.1.

现在，$\pi_j \circ \pi_i^{-1}$ 立即可以算出了；首先有

4.2.4.2

$$\pi_i^{-1}: (v_1, \cdots v_n) \longmapsto p(v_1, \cdots, v_{i-1}, 1, v_i, \cdots, v_n),$$

其次

$$p(v_1, \cdots, v_{i-1}, 1, v_i, \cdots, v_n)$$
$$= p\left(\frac{v_1}{v_{j-1}}, \cdots, \frac{v_{i-1}}{v_{j-1}}, \frac{1}{v_{j-1}}, \frac{v_{i+1}}{v_{j-1}}, \cdots, \frac{v_{j-2}}{v_{j-1}}, 1, \frac{v_j}{v_{j-1}}, \cdots, \frac{v_n}{v_{j-1}}\right),$$

因此

4.2.4.3

$$\pi_j \circ \pi_i^{-1}: (v_1, \cdots, v_n)$$
$$\longmapsto \left(\frac{v_1}{v_{j-1}}, \cdots, \frac{v_{i-1}}{v_{j-1}}, \frac{1}{v_{j-1}}, \frac{v_{i+1}}{v_{j-1}}, \cdots, \frac{v_{j-2}}{v_{j-1}}, \frac{v_j}{v_{j-1}}, \cdots, \frac{v_n}{v_{j-1}}\right),$$

其中 $\pi_j\circ\pi_i^{-1}$ 实际上只定义在 $K^n\backslash\pi_i(P(H_j)) = v_{j-1}^{-1}(0)$ 上.

4.2.5 例: $E = K^2$. 这是一种重要的情形,因为 $P(K^2) = P^1(K)$ 是最简单的非平凡的射影空间, 亦即K上的标准射影直线. 我们当然取 $\{e_0, e_1\}$ 为 K^2 的规范基;这时 4.2.4.2 就化为映射

$$K^* \ni v \longmapsto 1/v \in K^*.$$

首先我们可以说, $P^1(K)$ 是将K通过 $v\longmapsto 1/v$ 在K^*上映成的两叶粘合而成的; 如果读者能看出这就是 $K = \mathbf{C}$ 时黎曼球面的一种定义, 那就不会感到惊奇了, 这种情形今后还会多次遇到: 4.3.6, 10.8, 16.3.9, 20.6. 其次,我们可以说, $P^1(K)$ 是点 $p(1, 0)$ 与K的并集, 这里K已通过 $\pi_0^{-1}: v\longmapsto p(v, 1)$ 嵌入在 $P^1(K)$中; 在这种观点下, $P^1(K)$ 就显得是在K中补充上无穷远点 $p(1, 0)$ 后所得的完备化集合了. 我们在 5.2.3 中将充分地从这种观点进行讨论.

4.2.6 附注. 映射 $\pi_j\circ\pi_i^{-1}: v_{j-1}^{-1}(0) \to K^n$, 既不是线性的也不是仿射的,但它是尽可能正则的映射,它是有理分式映射. 若$K = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$, 我们看到这些映射甚至是 C^∞ 类以上连续的(这样说是有意义的,因为 $v_{j-1}^{-1}(0)$ 是 K^n 中一个开集); 若 $K = \mathbf{C}$, 这些映射是 C^ω 类的(即复解析的). 因而我们看到,在有限维的实或复的射影空间上,可以定义拓扑的、微分几何的或复解析几何的许多概念. 或者, 如果我们熟悉流形的语言, 就可以说: 这些射影空间都是 C^∞ 类或 C^ω 类的拓扑流形. 当 $K = \mathbf{C}$ 时, 有限维复射影空间是代数几何中自然的模型. [TM], 第 190—191 页和 [DE8] 是很有趣的参考文献.

关于可定向性问题,见 4.9.4 和 [FL], 第 228 页.

关于拓扑,见下节 4.3.

4.3 射影空间的性状: 拓扑与代数拓扑

本节中限于讨论有限维实或复的射影空间.

若 E 是 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 上的有限维向量空间，则它有一个规范拓扑，参见 2.7.1．由此就有：

4.3.1　定义． 射影空间 $P(E)$ 上的规范拓扑，是 $E\backslash 0$ 的拓扑在定义 $P(E)$ 的等价关系 $\mathfrak{R}$ 下的商拓扑．我们对 $P(E)$ 总赋以这个拓扑．

4.3.2　引理． 若 H 是 E 的超平面，则双射（参见 2.2.5）

$$E_H \to P(E)\backslash P(H)$$

是 E_H（参见 2.7.1.1）到赋有诱导拓扑的 $P(E)\backslash P(H)$ 上的一个同胚．

取坐标后，这个双射就是 4.2.4.2 中的 π_n^{-1}，显然连续；由商拓扑的性质可知映射

$$\pi_n: p(v_1, \cdots, v_n, 1) \longmapsto (v_1, \cdots, v_n)$$

也是连续的．

由此可知，对 $P(E)$ 来说，拓扑 4.3.1 和流形拓扑是一样的（参见 4.2.6）．

4.3.3　命题． 空间 $P(E)$ 是可分的、弧连通的，并且是紧的．

4.3.3.1　几何上，设 m, n 是 $P(E)$ 中不同的两点；则存在 E 的超平面 H，使 $m, n \in P(E)\backslash P(H)$．由于 4.3.2，我们只要注意到每个仿射空间总是可分的就可以了．下面是另一个更代数化的证明：称 $\Lambda^2 E$ 是 E 的外代数 ΛE 的 2 次向量空间，并引进映射

$$\alpha: (E\backslash 0) \times (E\backslash 0) \ni (x, y) \longmapsto x\Lambda y \in \Lambda^2 E.$$

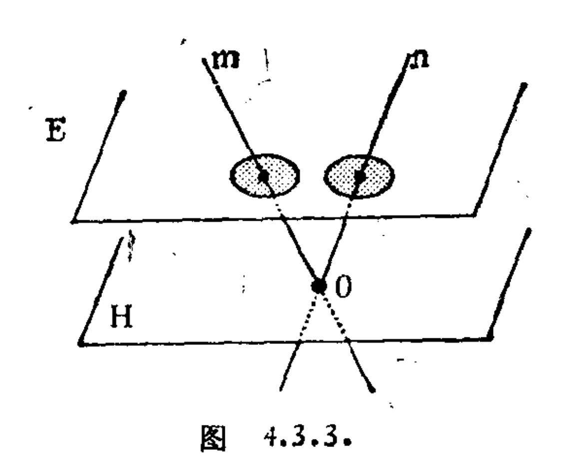


图　4.3.3.

这映射是连续的，因为它是双线性的；它的核 $\alpha^{-1}(0)$ 正好是定义 $P(E)$ 的等价关系的图. 然而 $\alpha^{-1}(0)$ 作为闭集在连续映射下的逆象，应是一个闭集，因此商集 $P(E)=(E\backslash 0)/\mathfrak{R}$ 是分离的. 如果读者不熟悉外代数，也可换一种说法：在 E 中取一个基 $\{e_i\}$，按坐标来定义 α：

$$\alpha((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n))$$
$$=(x_1y_2-x_2y_1,\cdots,x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})\in K^{n(n+1)/2}.$$

4.3.3.2 为了证明后两个结论，我们将 E 看作 K ($K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$) 上的向量空间，并赋予 E 欧氏向量空间结构；然后，设

$$S(E)=\{x\in E:\|x\|=1\}$$

是 E 中单位球面. 由于 $p(x)=p(x/\|x\|)\quad\forall x\in E\backslash 0$，有

$$p(S(E))=P(E).$$

我们知道 $S(E)$ 是紧的(参见 18.2.1)，因而 $P(E)$ 作为可分空间也一定是紧的；$\dim E\geqslant 2$ 时 $S(E)$ 是弧连通的，因此 $P(E)$ 也弧连通；上面的推论是将 $\dim E=1$ 的情形排除在外的，然而实际上 $P(E)$ 这时只含一点. 另外，我们也可以象前面证明可分性时那样来进行证明.

4.3.3.3 注. 上述证明还说明了 $P(E)$ 同胚于球面 $S(E)$ 关于等价关系 $x\mathfrak{R}y: y=\pm x$ 的商拓扑空间.

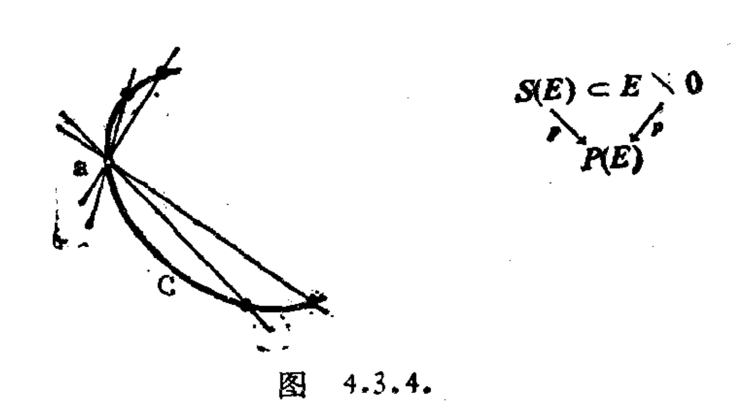


图 4.3.4.

4.3.4 应用. 既然 $P(\vec{X})$ 是与经过实仿射空间 X 中定点 a 的直线的集合等同的，从 4.3.3 我们就看到，若 C 是经过 a 的一条连续曲线，则 X 中连接 a 与 C 上不同于 a 的点的直线的集合至少含有一个极限元；把它定义成 C 在 a 处的切线，是很自然的.

4.3.5 附注. 我们可以在比 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 更一般的情形来定义射影空间 $P(E)$ 上的拓扑，譬如说，当 K 是一个局部紧域的情形。在这种情形，4.3.3 仍然成立。

4.3.6 命题. 空间 $P^1(\mathbf{R})$ 同胚于球面 S^1，空间 $P^1(\mathbf{C})$ 同胚于球面 S^2。

4.3.6.1 将 $\mathbf{R}^2$ 等同于 $\mathbf{C}$，设 $S^1=S(\mathbf{R}^2)=S(\mathbf{C})$；就有

$$P^1(\mathbf{R})=p(S^1).$$

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{c} & S^1 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \nearrow_{\underline{c}} & \\ P^1(\mathbf{R}) & & \end{array}$$

设 $c: S^1\ni z\longmapsto z^2\in S^1$，它将 S^1 上的复数 z 映成 z 的平方，由于 $|z|=1$，映射后模仍为 1. 由于 $p(-z)=p(z)$，$(-z)^2=z^2$，这就是说 c 可以推衍到商空间，从而有 $\underline{c}: P^1(\mathbf{R})\to S^1$，它仍是连续的。但 $\underline{c}$ 是双射而 S^1 是紧空间(参见 4.3.3)，因此 $\underline{c}$ 是同胚（参见点集拓扑有关内容)。

4.3.6.2 将 $\mathbf{C}^2$ 等同于 $\mathbf{R}^4$，并赋予 $\mathbf{R}^4$ 规范欧氏结构，即

$$\|z,z'\|^2=|z|^2+|z'|^2 \quad \forall (z,z')\in\mathbf{C}^2=\mathbf{R}^4.$$

我们引进球面 $S^3=S(\mathbf{R}^4)=S(\mathbf{C}^2)$ 和球面 $S^2=S(\mathbf{R}^3)$，这里 $\mathbf{R}^3$ 等同于 $\mathbf{C}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^3$. 跟 4.3.3.2 中一样：

$$p(S^3)=P^1(\mathbf{C})=P(\mathbf{C}^2).$$

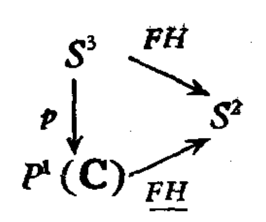
我们引进一个映射 $FH: S^3\to S^2$，定义为：

4.3.6.3 $FH((z,z'))=(2z\bar{z}',\ |z|^2-|z'|^2)$

(只须验证 $|2z\bar{z}'|^2+(|z|^2-|z'|^2)^2=1 \quad \forall (z,z')\in S^3$)。然而 $m, m'\in S^3$ 使 $p(m)=p(m')$ 当且仅当有 $\lambda\in\mathbf{C}$ 使 $m'=\lambda m$（从而 $|\lambda|=1$)时成立。但 $|\lambda|=1$ 时

$$FH((\lambda z,\lambda z'))=FH((z,z')),$$

因而 FH 可推衍到商空间，并定义了 $\underline{FH}: P^1(\mathbf{C})\to S^2$，它显然连续，容易看出它是双射。由于 $P^1(\mathbf{C})$ 是紧空间，$\underline{FH}$ 就是我们所需要的同胚。



4.3.7 附注. 映射 $FH:S^3\to S^2$ 在几何中是很基本的,称为 Hopf 纤维化. 每点 $s\in S^2$ 的逆象 $FH^{-1}(s)$ 都同胚于圆周 S^1, 这是 4.3.6.2 的推论并且在 1.2.9 中已提到过. S^3 中的所有这些圆周,形成一个与 Clifford 平行相应的结构, 我们在 18.8 中将用很多篇幅讨论这种平行性. 另一方面, $FH:S^3\to S^2$ 以及它的各种推广, 实质上都是代数拓扑的内容, 例如可参见 [GG], 第 151 页, [H-W], 第 387 页, [HU], 第 14 章.

4.3.8 关于 4.3.6.3 的背景的解释. 沿用 4.2.5 和 5.2.3 的记法, 记 $P^1(\mathbf{C})=\mathbf{C}\cup\infty$, 其中 ∞ 是点 $p(1,0)$, $\mathbf{C}$ 是 $p(x,1)$ 的集合. 我们猜想 $\mathbf{C}\cup\infty=\mathbf{R}^2\cup\infty$, 即 $\mathbf{C}$ 中加入无穷远点所得的一点紧化空间, 是同胚于 S^2 的. 具体证实这一结论, 要用到球极射影 (详见 18.1.4); 通常记 $S^2\subset\mathbf{R}^3=\mathbf{C}\times\mathbf{R}$, 射影公式为:

4.3.8.1

$$\mathbf{C}\ni z\longmapsto\left(\frac{2}{|z|^2+1}z,\ \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)\in S^2\subset\mathbf{C}\times\mathbf{R}.$$

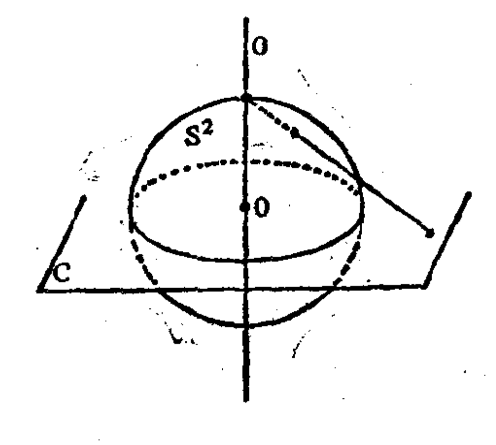


图 4.3.8.

但在齐次坐标 (参见 4.2.3 和 4.2.5)中有

$$z=p\left(\frac{u}{v},\ 1\right)=p(u,v),$$

于是可令 $z=u/v$; 若在上面公式中以 u/v 代 z, 同时注意到对 $(u,v)\in S^3$ 有 $|u|^2+|v|^2=1$, 我们就恰好得出 4.3.6.3.

4.3.9 $n\geqslant 2$ 时 $P^n(\mathbf{R})$ 和 $P^n(\mathbf{C})$ 在拓扑上是怎样的,这是个更困难的问题, 属于代数拓扑的研究范围. 我们仅限于讨论一些特

殊的情形并给出参考文献.

4.3.9.1 我们要看的第一种情形是 $P^2(\mathbf{R})$; 然而,因为 $P^2(\mathbf{R})$ 不可定向(参见 4.9.4 和 4.9.5),我们知道(参见 [GG],第 179 页)它不能无奇性地嵌入 $\mathbf{R}^3$ 作为子流形. 因此,不能指望在我们的视觉所能体验到的 $\mathbf{R}^3$ 中"看到" $P^2(\mathbf{R})$.

在 [H-C], 第 313—319 页, 读者可以看到图 4.3.9.1 和 4.3.9.2 所表示的 $P^2(\mathbf{R})$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中的带有奇性的嵌入的有关细节; 图 4.3.9.2 称为 Boy 曲面.

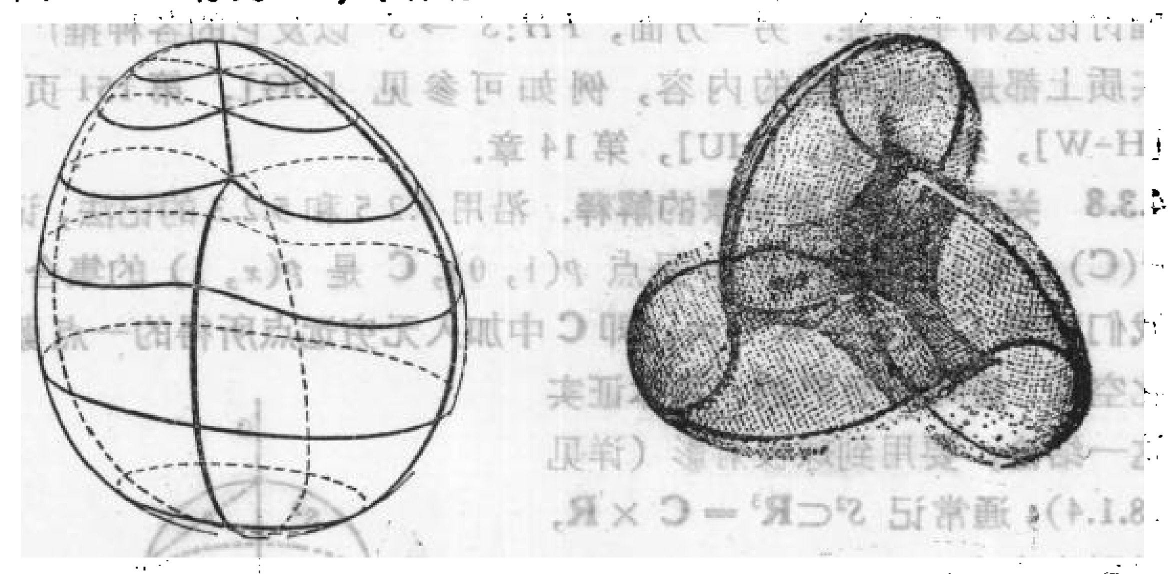


图 4.3.9.1. 图 4.3.9.2.

Hilbert (D.) 和 Cohn-Vossen (S.), «直观几何» Chelsea 出版社.

$P^2(\mathbf{R})$ 可以很漂亮地无奇性地嵌入 $\mathbf{R}^5$, 称为 Véronèse 曲面; 它是通过映射

$$\mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \longmapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}\,yz, \sqrt{2}\,zx, \sqrt{2}\,xy) \in \mathbf{R}^6$$

构造起来的,这个映射在 S^2 上的限制在 $\mathbf{R}^6$ 的 (5 维) 仿射超平面 $\sum_{i=1}^{3} u_i = 1$ 中取值,并且推衍到商集,得到一个单射 $P^2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^6$; 因此它是到象集上的一个同胚.

有些读者也许喜欢把 $P^2(\mathbf{R})$ 看成一个 Möbius 带,这个带的同胚于圆周的边缘曲线 Γ, 是等同于一点的,或者不如说,是跟一个圆盘的圆周边缘 Γ' 粘合在一起的,见图 4.3.9.3.

4.3.9.2 射影空间 $P^3(\mathbf{R})$ 同胚于 $\mathbf{R}^3$ 的旋转群 $O^+(3)$: 见

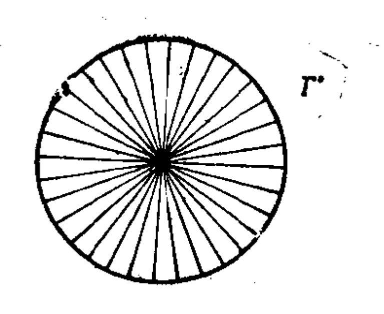
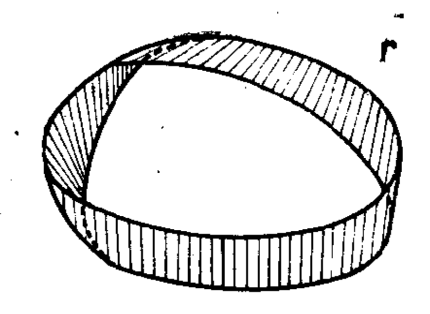



图 4.3.9.3.

8.9.3.

4.3.9.3 $P^n(\mathbf{R})$ 不是单连通的，其实它们的基本群同构于 $\mathbf{Z}_2$ $\forall n \geqslant 2$，因为 4.3.3.3 证明了 $p: S^n \to P^n(\mathbf{R})$ 是一个二叶覆盖；而 S^n 是单连通的，参见 18.2.2. 有时就这样把 $P^n(\mathbf{R})$ 看作 S^n 关于对径映射（即 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的映射 $x \longmapsto -x$ 在 S^n 上的限制）的商空间，这是很方便的；我们以后还会讨论这一点，特别是在 19.1 中. 但上面的结论已经说明了 $P^n(\mathbf{R})$ 在 $n \geqslant 2$ 时是不会同胚于 S^n 的.

4.3.9.4 $P^n(\mathbf{C})$ 总是单连通的. $n \geqslant 2$ 时 $P^n(\mathbf{C})$ 不会同胚于 S^{2n}. 得出这个结论，要用到代数拓扑中关于 $P^n(\mathbf{C})$ 和 $P^n(\mathbf{R})$ 的一些熟知的内容：胞腔剖分，Betti 数，上同调环；例如可参见 [GG]，第 90 页，[SR]，第 264—265 页.

$P^n(\mathbf{R})$ 在 $\mathbf{Z}_2$ 上的上同调环和 $P^n(\mathbf{R})$ 在 $\mathbf{Z}$ 上的上同调环的结构，都是特别简单的：这种上同调环是由一个元素生成的，这元素在 $P^n(\mathbf{R})$ 的情形是 1 阶的，在 $P^n(\mathbf{C})$ 的情形是 2 阶的.

4.4 射影标架

n 维向量空间的标架是 n 个点组成的基，n 维仿射空间的标架是 $n+1$ 个点组成的仿射标架；我们下面会看到，n 维射影空间的标架要用 $n+2$ 个点. 一个理由是：在 4.2.3 的记号下，$P(E)$ 的 $n+1$ 个点 $m_i = P(e_i)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$ 不能确定齐次坐标，因为任何 $\lambda_i e_i (\lambda_i \in K^*)$ 会有同一投影 $m_i = p(\lambda_i e_i)$；因此没

有任何理由认为 λ_i 一定是相等的. 但添加第 $(n+2)$ 个点后，这一结论就得到保证了.

4.4.1 定义. 设 $P(E)$ 是 n 维射影空间. $P(E)$ 中 $n+2$ 个点的系统 $\{m_i\}_{i=0,1,\cdots,n+1}$ 称为 $P(E)$ 的**射影标架**，如果存在 E 的一个基 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n+1}$ 使得 $m_i=p(e_i)\quad \forall i=1,\cdots,n+1$ 而 $m_0=p(e_1+\cdots+e_{n+1})$. 在不致引起混淆时，也简称为**标架**.

最后的条件表明，在取定的基所相应的齐次坐标系中，点 m_0 的齐次坐标为 $(1,\cdots,1)$. 一个对以后的内容来说很基本的、虽然也是很初等的结论是:

4.4.2 引理. 设 m_i 是 $P(E)$ 的射影标架；则满足定义 4.4.1 要求的两个基 $\{e_i\}$, $\{e_i'\}$ 一定是成比例的，即 $\exists\lambda\in K^*$, 使

$$e_i'=\lambda e_i\quad \forall i=1,\cdots,n+1.$$

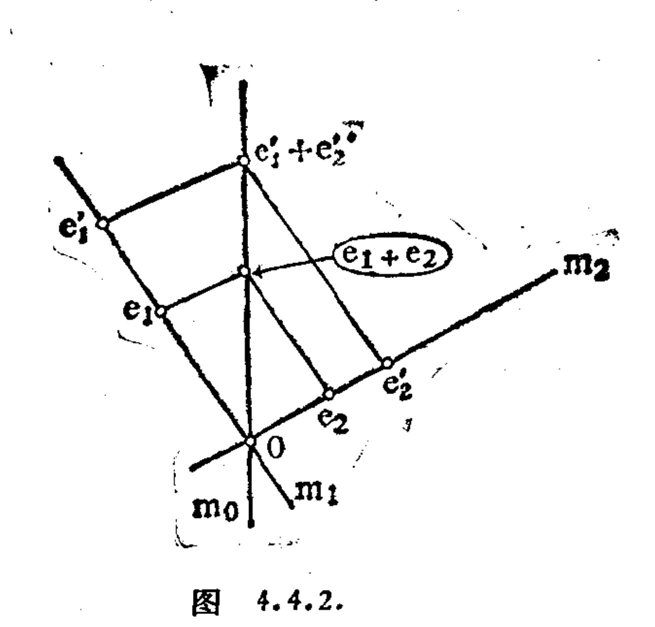


图 4.4.2.

证明可以几何地由图 4.4.2 和 Thalès 定理(参见 2.5.1)得出. 如果喜欢计算，那么我们有 $p(e_i)=p(e_i')\quad \forall i=1,\cdots,n+1$, 因此存在 $\lambda_i\in K$ 使

$$e_i'=\lambda_i e_i\quad \forall i=1,\cdots,n+1.$$

但 $p(e_1'+\cdots+e_{n+1}')=p(e_1+\cdots+e_{n+1})$, 因此有 $\lambda\in K$ 使 $e_1'+\cdots+e_{n+1}'=\lambda(e_1+\cdots+e_{n+1})=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_{n+1}e_{n+1}$, 因此，由于 $\{e_i\}$ 是基，可知 $\lambda=\lambda_i\quad \forall i=1,\cdots,n+1$.

4.4.3 因此，$P(E)$ 中取定标架后，就连带决定了齐次坐标，因为确切地说选取一个适当的基仅与位似比率有关．点 $m\in P(E)$ 的齐次坐标（$x_1,\cdots,x_{n+1}$）称为 m 关于所取定标架的射影坐标．

4.5 射 影 映 射

4.5.1 设 E, E' 是两个向量空间，$f\in L(E;E')$；则应有 $f(\lambda x)=\lambda f(x)\quad \forall x\in E$，因此 f 跟定义 $P(E)$ 和 $P(E')$ 的两个等价关系是相容的．不过有一点颇伤脑筋：象集 $f(E\backslash 0)$ 一般并不含于 $E'\backslash 0$ 中，因而我们只能定义一个映射 $P(E)\backslash P(f^{-1}(0))\rightarrow P(F)$．但按习惯我们仍写成 $P(E)\rightarrow P(F)$，并讨论下面的几种映射．

4.5.2 定义． 设 $P(E)$，$P(E')$ 是两个射影空间．映射

$$g:P(E)\rightarrow P(E')$$

称为一个**态射**或**射影映射**，如果存在 $f\in L(E;E')$，使得 g 是由 f 经过向商空间的推衍得到的：$g\circ p=p\circ f$，从而实际上 g 就是一个映射

$$P(E)\backslash P(f^{-1}(0))\rightarrow P(F).$$

态射的集合**记为** $M(P(E);P(E'))$；与 f 相关的 g 记为 $\underline{f}$．如果 f 是向量空间的同构，就称 $g=\underline{f}$ 是**同构**或**射影变换**；射影变换是真正的映射 $P(E)\rightarrow P(E')$；射影变换全体记为 $\mathrm{Isom}(P(E);P(E'))$．

$$\begin{array}{ccc}
E\backslash f^{-1}(0) & \xrightarrow{\ f\ } & E'\backslash 0\\
{\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p}\\
P(E)\backslash P(f^{-1}(0)) & \xrightarrow[\underline{f}]{} & P(E')
\end{array}$$

4.5.3 问题． 首要的问题是讨论对应关系 $f\longmapsto \underline{f}$；结论是：对 $f,f'\in L(E;E')$，有

4.5.4 $\underline{f}=\underline{f'}\Longleftrightarrow \exists\lambda\in K^*:f'=\lambda f.$

首先我们注意到，给定 $g=\underline{f}$ 后，核 $f^{-1}(0)$ 就决定了．其次，若 x，y 是线性无关的，且都不在 $f^{-1}(0)$ 中，则 $f(x)$ 和 $f(y)$ 也

线性无关且 $\underline{f}(p(x))=\underline{f'}(p(x))$ (对 $x+y$ 和 y 也一样) 表现为存在数量 $\lambda(x)$, $\lambda(y)$, $\lambda(x+y)$ 使

$$f'(x)=\lambda(x)f(x),\ f'(y)=\lambda(y)f(y),$$
$$f'(x+y)=\lambda(x+y)f(x+y).$$

由于 $f(x)$ 和 $f(y)$ 是无关的,就推出 $\lambda(x)=\lambda(y)=\lambda(x+y)$. 当 x 和 y 越来越靠近时,我们就得到一个 λ 使 $f'=\lambda f$.

性质 4.5.4 可通过下面的双射反映出来:

4.5.5 $M^{\bullet}(P(E);P(E'))\cong P(L(E;E'))$,

其中 $M^{\bullet}(P(E);P(E'))$ 表示 $M(P(E);P(E'))$ 中除去 E 到 E' 中的零映射所相关的平凡射影映射后的集合，这个零映射是唯一在 $P(E)$ 中处处无定义的映射!

4.5.6 注. 4.5.4 中在证明充分性时实质上用到了基域的可交换性;因为,在不可交换体的情形,当 $f\in L(E;E')$ 时,映射 λf 一般不再是线性的.

4.5.7 若 $f\in L(E;E')$, $f'\in L(E';E'')$, 照 4.5.1 的做法，就有

$$\underline{f'\circ f}=\underline{f'}\circ\underline{f}.$$

4.5.8 任一K上的 n 维射影空间同构于 $P^n(K)$. 由此，譬如说再加上连续性的条件，就说明了在 4.3 节中为什么只讨论 $P^n(\mathbf{R})$ 和 $P^n(\mathbf{C})$.

由 4.5.5 和 4.5.7 有:

4.5.9 命题. 射影变换 $P(E)\to P(E')$ 关于合成运算构成群,记为 $\mathrm{GP}(E)$ 或 $\mathrm{PGL}(E)$, 称为 E 的**射影群**. 我们有群同构

$$\mathrm{GP}(E)\cong \mathrm{GL}(E)/K^*\mathrm{Id}_E.$$

4.5.10 命题(射影几何第一基本定理). 设 $P(E)$, $P(E')$ 是两个维数相同的有限维射影空间, $\{m_i\}$, $\{m'_i\}$ 分别是 $P(E)$, $P(E')$ 的射影标架,则唯一地存在射影变换 $g:P(E)\to P(E')$ 使

$$m'_i=g(m_i)\quad \forall i.$$

设 $\{e_i\}$, $\{e'_i\}$ 分别是 4.4.1 中所说的跟 $\{m_i\}$, $\{m'_i\}$ 相关连的基. 定义 $f\in\mathrm{Isom}(E;E')$ 为 $e'_i=f(e_i)\quad\forall i$, 则 $\underline{f}=g$ 就是所需的射影变换. 若 g, g' 都满足命题,则仿射变换

$$g'^{-1}\circ g: P(E) \to P(E)$$

在每点使标架 $\{m_i\}$ 不变，因此根据引理 4.4.2，这个射影变换可写为 $\lambda \mathrm{Id}_E$.

4.5.10.1 附注. 对不可交换体的情形，上述结论不成立：4.9.8.

4.5.11 推论. 群 $\mathrm{GP}(E)$ 是 $P(E)$ 上的可迁群，并且是 $P(E)$ 的标架集合上的单可迁群.

4.5.12 4.5.10 这么一个很容易的命题却冠以“射影几何第一基本定理”的名称，在你要从射影空间的公理出发通过冗长的演绎来证明它时，就会明白其中原因了，例如可参见 [V-Y]，第 1 卷，第 95 页.

4.5.13 射影映射的具体运算. 设 $\{e_i\}$, $\{e'_j\}$ 分别是 E, E' 的基，$f\in L(E; E')$，$M(f) = (a_{ij})$ 是 f 关于这两个基的矩阵. 对于 $P(E)$ 和 $P(E')$ 中跟这两个基相关连的齐次坐标（参见 4.2.3），有

$$f((x_1, \cdots, x_{n+1})) = \left(\sum_i a_{1i}x_i, \cdots, \sum_i a_{n+1i}x_i\right).$$

我们对 $P(E)$ 和 $P(E')$ 采用跟取定的基相应的坐标图，并在运算中不计等式两端相差一个数量的差别. 例如，可采用坐标图 π_{n+1}, π_{m+1} ($n = \dim(P(E))$, $m = \dim(P(E'))$)；由 4.2.4.1 和 4.2.4.2 可推出 $\pi_{m+1}\circ f\circ\pi_{n+1}^{-1}$ 为：

$$(v_1, \cdots, v_n) \longmapsto \left(\frac{\sum_i a_{1i}v_i + a_{1,n+1}}{\sum_i a_{p+1,i}v_i + a_{p+1,n+1}}, \cdots, \frac{\sum_i a_{pi}v_i + a_{p,n+1}}{\sum_i a_{p+1,i}v_i + a_{p+1,n+1}}\right),$$

当然，它只定义在 $\sum_i a_{p+1,i}v_i + a_{p+1,n+1} \neq 0$ 处.

4.5.14 特殊情形 $n = m = 1$. 取 K^2 的规范基（参见 4.2.5），考虑 $f\in \mathrm{GP}(K^2)$，即 $f\in \mathrm{GL}(K^2)$ 的情形；设

$$M(f)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

我们看出 $\pi_2\circ f\circ\pi_2^{-1}$ 就是

$$v\longmapsto\frac{av+b}{cv+d}\quad\left(v\neq-\frac{d}{c}\right),$$

在 $P^{-1}(K)$ 上就有:

$$(v,\ 1)\longmapsto\left(\frac{av+b}{cv+d},\ 1\right)\quad\left(v\neq-\frac{d}{c}\ \text{时}\right).$$

对 $P^1(K)$ 的两个坐标图 π_1, π_2 的所有可能的组合都相仿地进行考察,就得到下面的结论:

4.5.15

$$c\neq 0\begin{cases}(v,\ 1)\longmapsto\left(\dfrac{av+b}{cv+d},\ 1\right) & \text{当}\ v\neq-\dfrac{d}{c}\ \text{时}\\ \left(-\dfrac{d}{c},\ 1\right)\longmapsto(1,\ 0) & \\ (1,\ 0)\longmapsto\left(\dfrac{a}{c},\ 1\right) & \end{cases}$$

$$c=0\begin{cases}(v,\ 1)\longmapsto\left(\dfrac{av+b}{d},\ 1\right)\\ (1,\ 0)\longmapsto(1,\ 0).\end{cases}$$

我们注意到, $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时:

$$\frac{a}{c}=\lim_{v\to\infty}\frac{av+b}{cv+d},\quad\lim_{v\to-d/c}\frac{av+b}{cv+d}=\infty,$$

这样就证实了 4.2.5 末尾的结论,即 $p(0,\ 1)$ 的作用相当于 ∞. 在 5.2.5 中我们还将详细地讨论这个问题.

4.5.16 射影变换的构造. 仍假定 $P(E)$ 是有限维的. 鉴于 4.5.4, 我们在"不计数量差别"的前提下来讨论 $f\in GL(E)$ 的构造. 至少在 K 是代数闭域的情形下,我们可以通过 Jordan 分解得出 $GL(E)$ 中元素的几何构造;然后就不难转到 $P(E)$ 上去. 对这一问题,我们不作详细讨论;有兴趣的读者可以在 [FL] 的附录 1 中看到用现代语言作的阐述,如果把它跟不明显用到线性代数

的古典论述(例如 [V-Y], 第 I 卷)对照起来看,是很有意思的.

我们仅仅在第 6 章中对 1 维的情形作详细的讨论; 此外我们给出下面的几个结果.

4.5.17 命题. 设 $g=\underline{f}\in \mathrm{GP}(E)$, $m\in P(E)$, 则 m 是 g 的不动点(即 $m=g(m)$) 的充要条件是 $p^{-1}(m)$ 是 f 的特征直线.

这个命题的意义在于: 为了在 $P(E)$ 中讨论 $\underline{f}$, 首先要在 E 中考虑的是 f 的特征子空间,而不是它们的特征值(但这些特征值本身也是很有意思的,参见 6.6.3).

4.5.18 推论. 若 $K=\mathbf{C}$, 则每个射影变换至少有一个不动点. 当 $K=\mathbf{R}$ 且 $\dim(P(E))$ 是偶数时,结论仍成立.

例如, 当 $f\in \mathrm{GL}(E)$ 的特征值都不相同时, $\underline{f}$ 恰有 $n+1$ 个不同的不动点 ($n=\dim(P(E))$), 老的书上称它们为"重点"; 这是由 4.4.2 直接可知的.

4.5.19 $\mathrm{GP}(E)$ 的对合. 若 $f\in \mathrm{GL}(E)$ 是对合的,即

$$f^2=f\circ f=\mathrm{Id}_E,$$

则 $\underline{f}$ 也是对合的;在 6.4.6 中我们还会看到在这种情形下 f 的一个绝妙的几何结构. 若 $g\in \mathrm{GP}(E)$ 是对合的, $g^2=\mathrm{Id}_{P(E)}$, 我们注意到, g 不一定在前述意义下对合,例如,当

$$E=\mathbf{R}^2,\ M(f)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\text{ 时,我们有 }\underline{f}^2=\mathrm{Id}_{P^1(\mathbf{R})},$$

而 $f^2=-\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$. 确切地说, 若 $\underline{f}^2=\mathrm{Id}_{P(E)}$, 则必有 $f^2=\lambda\mathrm{Id}_E$, 这里 $\lambda\in K^*$; 若 K 是代数闭域,则可写 $\lambda=\mu^2$, 从而 $g=\underline{f}=\underline{\mu^{-1}f}$, 这里 $(\mu^{-1}f)^2=\mathrm{Id}_E$.

4.5.20 $\mathrm{GP}(E)$ 的拓扑. 若 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$, E 是有限维的,则射影群 $\mathrm{GP}(E)$ 容有一个规范拓扑,即 $\mathrm{GP}(E)=\mathrm{GL}(E)/K^*\mathrm{Id}_E$ 的商拓扑(参见 2.7.1). $\mathrm{GP}(E)$的连通性与 $P(E)$ 的可定向性有关; 对此,可见 4.9.4 和 4.9.5,或 [FL], 第 228—230 页.

4.5.21 相互关系. 由同构 $P(E)\to P(E^*)$ 可导出很多几何结果;在 14.5, 14.8.12 中我们会很自然地碰到它们;也可参见 [FL], 第 260 页以后.

4.6 子 空 间

注意到若 $F \subset E$ 是一个向量子空间，$F \neq \{0\}$，则F关于4.1.1 的等价关系 $\mathfrak{R}$ 是稳定的，因而就可以把 $P(F)$ 等同于

$$p(F) \subset P(E);$$

特别是，内射 $i: F \to E$ 导出 $i \in M(P(F); P(E))$，$i: P(F) \to P(E)$ 是自然内射.

4.6.1 定义. 射影空间 $P(E)$ 的子集 V 称为子空间，或射影子空间，如果存在 E 的一个向量子空间 F，使 $P(F) = V$. 我们赋予 $P(F)$ 自然的射影空间结构. $\dim V = \dim F - 1$ 称为子空间 V 的维数.

4.6.1.1 于是我们看到，在 $P(E)$ 的射影子空间的全体与 E 的向量子空间全体之间，有一个双射.

4.6.2 -1 维子空间是空集. 0 维子空间是 $P(E)$ 的点；1 维(相应地，2 维)子空间称为 $P(E)$ 的直线(相应地，平面). 由 E 的向量超平面得出的$P(E)$的射影子空间也称为 $P(E)$ 的(射影)超平面；超平面全体记为 $\mathscr{H}(P(E))$，于是有双射(参见 4.1.3.5)：

4.6.3 $\mathscr{H}(P(E)) \cong \mathscr{H}(E) \cong P(E^*)$.

4.6.4 设 $\{V_i\}_{i\in I}$ 是射影空间的任意一族子空间，则 $\bigcap_{i\in I} V_i$ 仍是一个子空间. 由此推出(跟 2.4.2.5 中一样)：

4.6.5 命题. 设 S 是一个射影空间的任一子集；包含 S 的最小子空间称为由 S 生成的子空间，记为 $\langle S\rangle$；它等于所有包含 S 的子空间的交.

4.6.6 定义. 一个射影空间中的点 $m_i (i = 1, \cdots, k+1)$ 称为无关的或射影无关的，如果

$$\dim(\langle m_1, \cdots, m_{k+1}\rangle) = k.$$

4.6.7 例. 一点总是无关的；两点无关的充要条件是它们不相同，这时它们定义了唯一的一条直线. 三个点 a, b, c 无关的充要条

件是它们各不同，而且每点不在经过另两点的直线上：

$$a \notin \langle b, c\rangle,\ b \notin \langle c, a\rangle,\ c \notin \langle a, b\rangle;$$

这时它们定义了唯一的一个平面 $\langle a, b, c\rangle$. 这样，我们看到，经过不同的两点有且仅有一条直线，对三点也有类似的结论；这些都是建立射影空间公理体系时开宗明义的公理. 参见 [V-Y]，第 I 卷，第 95 页.

4.6.8 命题. 点 $m_i(i=1,\cdots,k+1)$ 无关的充要条件是

$$m_i \notin \langle m_1,\cdots,\hat{m}_i,\cdots,m_{k+1}\rangle \quad \forall i=1,\cdots,k+1,$$

其中 $\hat{}$ 表示抽去小帽下的这个元素. 若空间是 n 维的，则

$$\{m_i\}_{i=0,1,\cdots,n+1}$$

是标架的充要条件是 $n+1$ 个点 $\{m_j\}_{j\neq i}$ 是无关的 $\forall i=0,1,\cdots,n+1$.

第一个结论只不过是把线性代数中一个熟知的性质用射影几何的语言来说罢了. 为证第二个结论，我们取 $e_i \in E$ 使

$$p(e_i)=m_i\ (i=0,1,\cdots,n+1);$$

由于 $\{m_i\}_{i=1,\cdots,n+1}$ 是无关的，$\{e_i\}_{i=1,\cdots,n+1}$ 就是 E 的一个基. 令 $e_0=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i e_i$；由 $\lambda_i\neq 0(i=1,\cdots,n+1)$ 即可推出 $\{m_j\}_{j\neq i}$ $(i=1,\cdots,n+1)$ 是无关的，因此 $\{\lambda_i e_i\}_{i=1,\cdots,n+1}$ 是 E 的一个基，这个基满足 4.4.1.

4.6.9 推论. 设 D, D' 是两条射影直线，$\{a, b, c\}$ 是 D 上不同的三点，$\{a', b', c'\}$ 是 D' 上不同的三点，则有且仅有一个射影变换 $f: D\to D'$ 使得

$$f(a)=a',\ f(b)=b',\ f(c)=c'.$$

事实上，4.6.7 和 4.6.8 说明了 $\{a, b, c\}$ 是 D 的射影标架，而 $\{a', b', c'\}$ 是 D' 的射影标架；因此用 4.5.10 即得结论.

4.6.10 射影几何的公理体系还包括关于子空间的交的公理；现在我们可从 4.6.1.1 和经典的线性代数关系式

$$\dim(F+G)+\dim(F\cap G)=\dim F+\dim G$$

得出：

4.6.11 命题. 设 V, W 是同一个射影空间的两个子空间；则有

$$\dim(\langle V \cup W \rangle) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W.$$

4.6.12 推论.

(i) 若 $\dim V + \dim W \geqslant \dim(P(E))$，则 $V \cap W \neq \varnothing$；

(ii) 若 $\dim(P(E)) = n$，则 $P(E)$的 n 个超平面至少有一个公共点；

(iii) 设H是一个超平面，一点 $m \notin H$；则经过m的每条直线D与H交于且仅交于一点；

(iv) 一个射影平面上两条不同的直线交于且仅交于一点.

4.6.13 这些推导显示了射影几何比仿射几何优越之处：射影子空间无例外地具有相交性质，而不存在平行的情况（参见 2.4.9）.

在第 19 章中我们会碰到一种几何，其中有几种平行，见 19.3.2.

4.6.14 子空间方程. 子空间上的计算问题已由 2.4.8.1 和 4.6.1.1 所解决.

4.6.15 子空间与拓扑. 这节中 $K = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，并考虑有限维的射影空间；我们赋予这些空间 4.3.1 中所说的拓扑. 一个向量子空间 $F \subset E$，$F \neq E$，的补空间 $E \backslash F$ 是在E中处处稠密的，由此可推出在 $P(E)$ 中，一个子空间 $P(F)$ 的补空间 $P(E) \backslash P(F)$ 是在 $P(E)$ 中处处稠密的；这也就说明了 4.5.14. 这一性质类似于 2.7.1.2；而且，任一子空间都是 $P(E)$ 的闭子集. 相反地，2.7.3.2 却不成立了：对 $P(E)$ 的任一超平面 $P(H)$，空间 $P(E) \backslash P(H)$ 总是弧连通的；要看出这一点，只要注意到（参见 4.3.3.1）$P(E) \backslash P(H)$同胚于一个仿射空间，或者直接作出连接 $P(E) \backslash P(H)$ 中两点的弧：图 4.6.15.

4.6.16 有限域的情形. 若 $P(E)$ 是在具有 k 个元素的有限域上的有限维射影空间，它的直线和子空间形成各种有趣的结构. 例如，在每条直线上有相同个数的点，经过每点有相同条数的直线；若 $k = 2$ （$K = \mathbf{Z}_2$）而 $P(E)$ 是一个平面，图 4.6.16 中的七

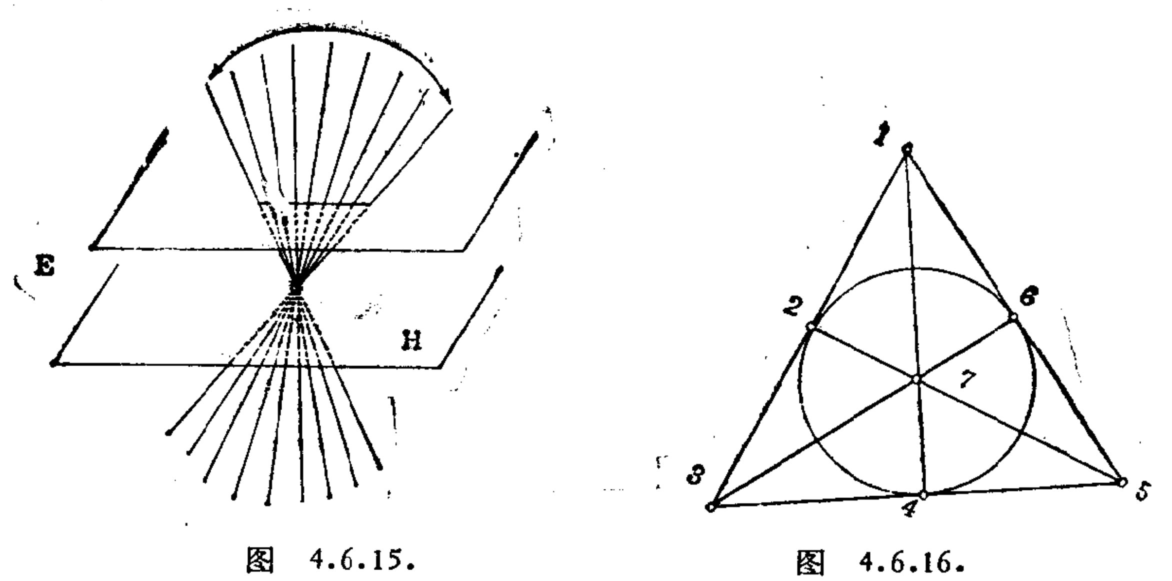


图 4.6.15.　　　　图 4.6.16.

个点就表示了这个情况，$P(E)$ 中的七条直线就是图中画出的六条直线和那个圆周. 关于射影几何结构问题的详细讨论，可参见 [H-C]，第 94—143 页，书中附有插图，论述也是初等的. 另外，[DI] 一书是较新的文献. 也可参见 4.9.11.

4.7 透视，航空摄影

4.7.1 设 H, H' 是一个射影空间 $P(E)$ 的两个超平面，m 是 $P(E)$ 中既不属于 H 也不属于 H' 的一点；根据 4.6.7 和 4.6.12，若 $x \in H$，则存在唯一的直线 $\langle m, x\rangle$，它与 H' 总有唯一的交点

$$g(x) = H' \cap (\langle m, x\rangle),$$

这样就有了一个映射 $g: H \to H'$.

4.7.2 命题. 我们有 $g \in \mathrm{Isom}(H; H')$.

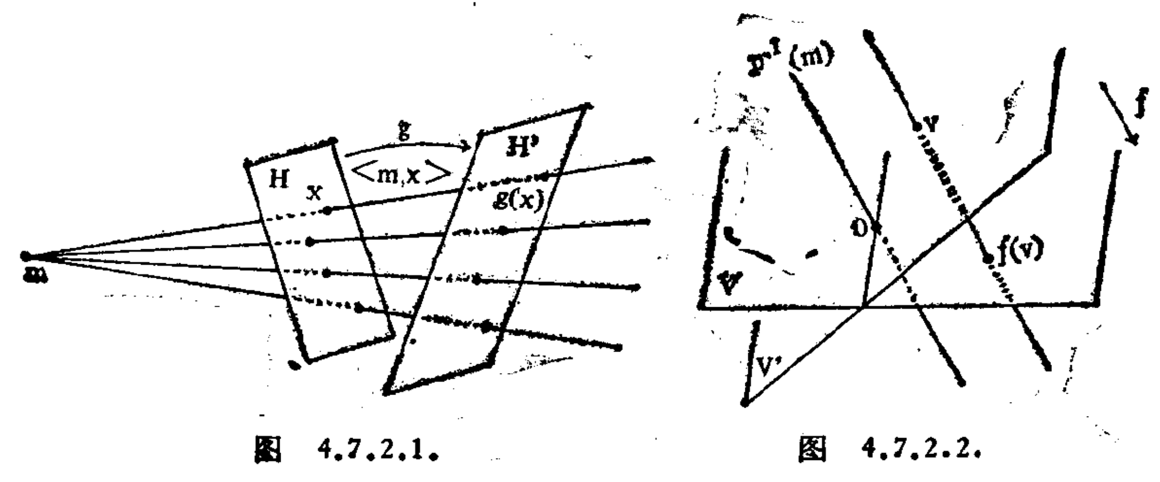


图 4.7.2.1.　　　　图 4.7.2.2.

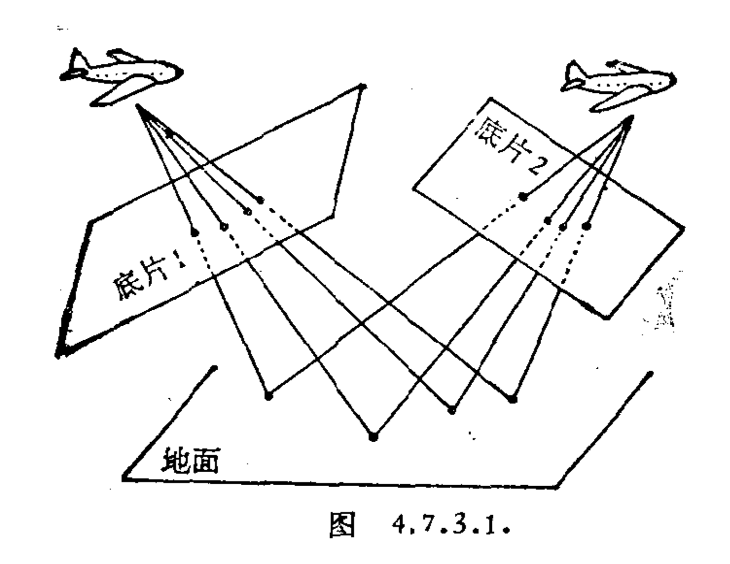


图 4.7.3.1.

设 V, V' 是E的超平面且使 $H = p(V)$, $H' = p(V')$;我们要找 $f \in L(V; V')$, 使 $\underline{f} = g$ (参见 4.5.2), 然而 V' 上的线性射影是平行于向量直线 $p^{-1}(m)$ 的(亦即有直和 $E = p^{-1}(m) \oplus V'$), 限制在V上就是我们所考虑的映射了.

4.7.3 我们可以称 g 是以m为中心的从H到H'上的透视. 若限制在H和H'的局部范围来看,这情形是跟我们把两个平面置于我们的视野中的情形相应的,也是跟拍摄一片平地的情形相应的,H是要拍摄的平面部分,H'就是底片. 如果我们要用航空摄影来制作一块假定是平坦的地面的地图,尤其是当每张底片都太小,不能摄进整块地面,而必须把它们拼接起来的时候,就应该知道怎样来调整底片,这是应用透视的室内作业;而且还应该知道怎样把公共

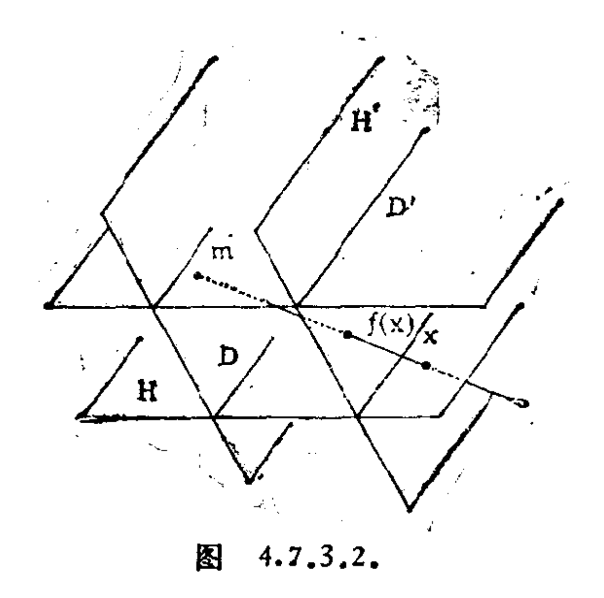


图 4.7.3.2.

部分完整地重迭起来．而两张底片上反映所摄地面同一区域的两部分之间的对应，是一个由两种摄影透视所合成的射影变换．命题 4.5.10 证明只要能把四点迭合起来，底片的迭合就大功告成了。

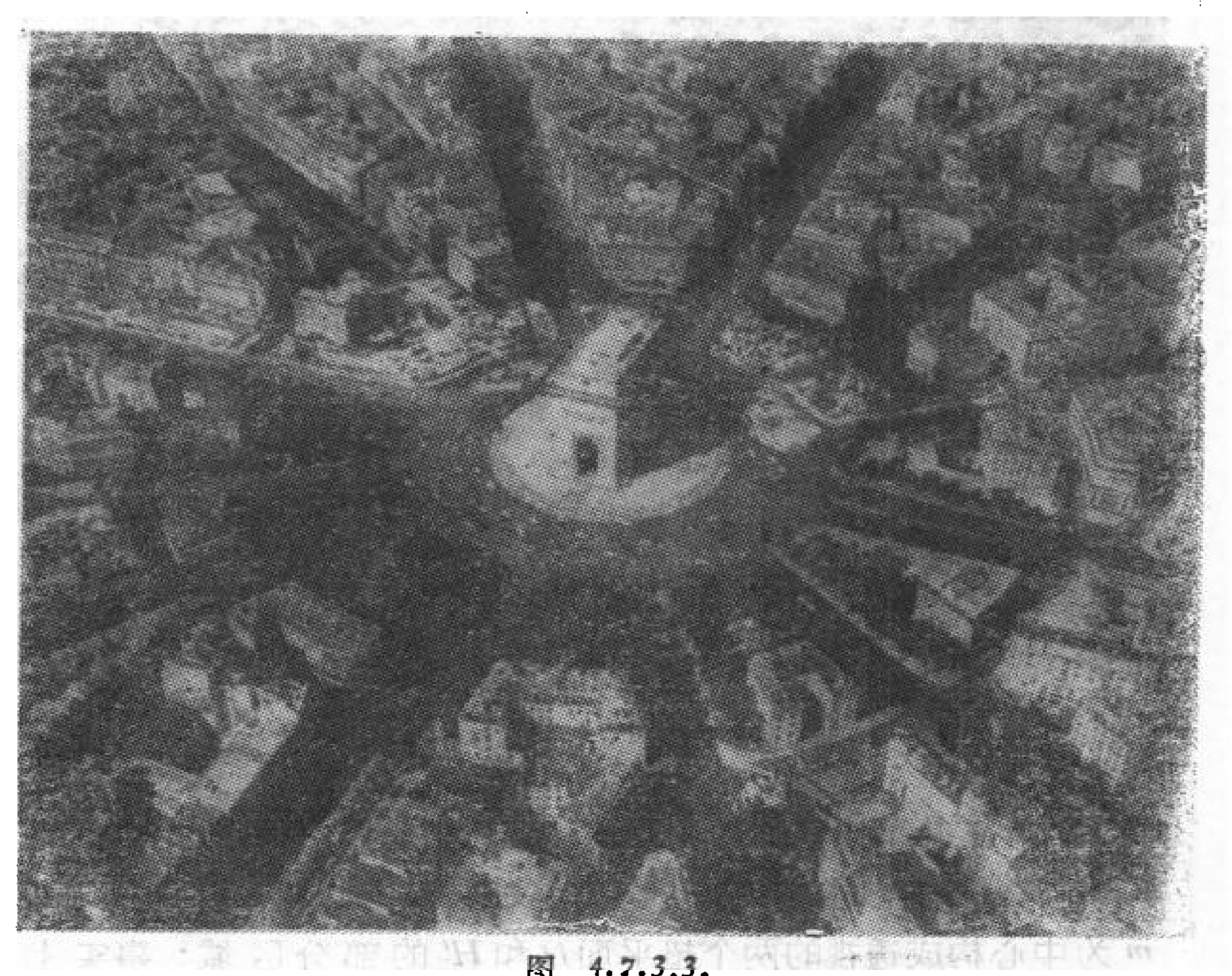


图 4.7.3.3.

4.7.4 作为实用的练习，读者可以在 4.7.3.3 和 4.7.3.4 两张照片上各找四点，并在一张纸上画出它们迭合而得的格局，验证它们并非通过仿射变换得到的．

4.7.5 航空摄影与地图绘制．现在要提醒读者注意：当我们要通过航空摄像的拼接来制作一幅地图时，靠四点的重迭是不能实现拼接的，我们在 4.7.3.3 和 4.7.3.4 所看到的情况就说明了这一点．其实，即使在理想的条件下，地球表面也并非平面，而是球面，或者更确切地说，是椭球面，参见 18.1.5.3．现在，拼接的办法在理论上是完善的，也就是说是在三维空间中进行的；拼接用的工具是价格昂贵的立体比较仪，参见［BV］；关于地图绘制，我们将在 18.1.5

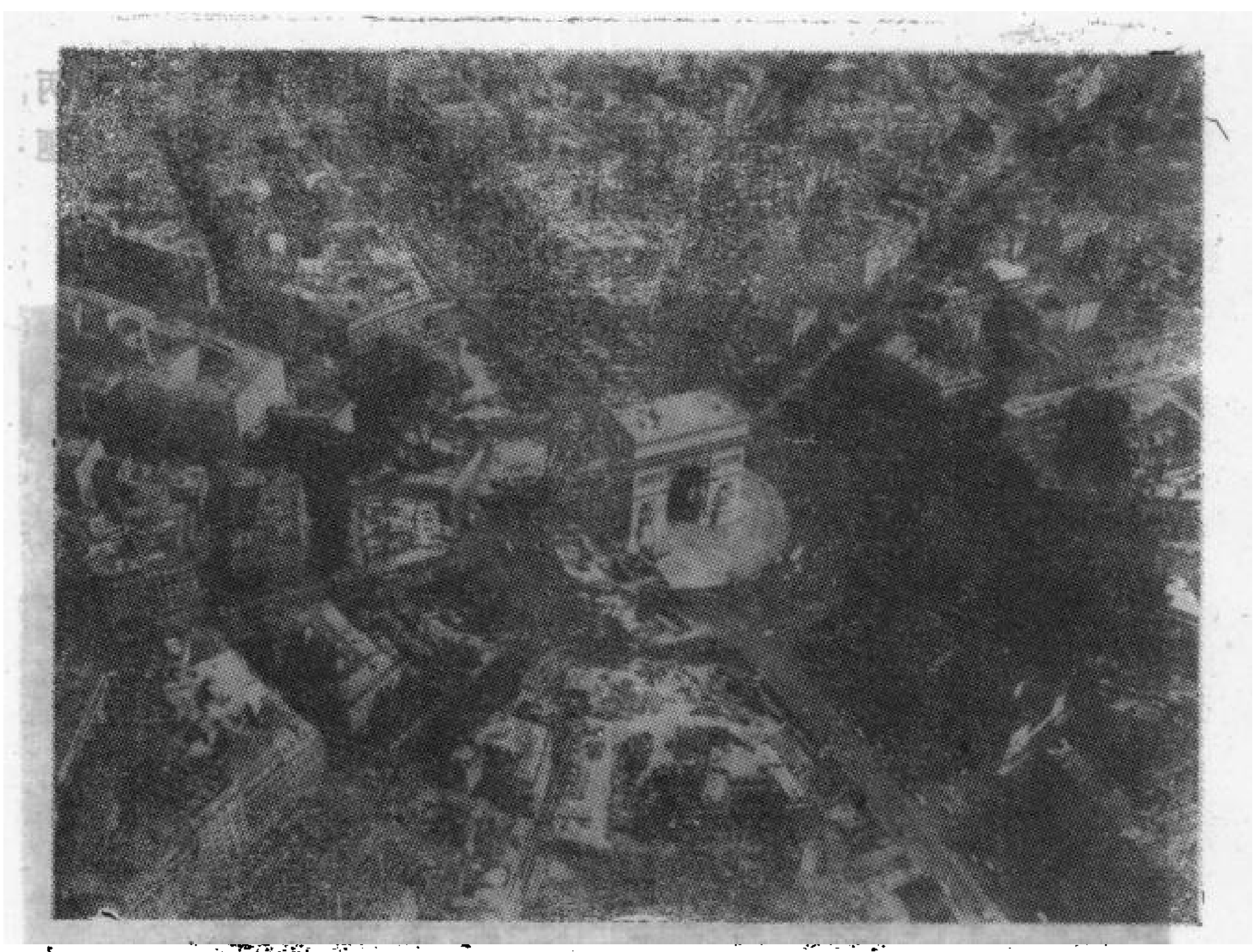


图 4.7.3.4.

到 18.1.8 这几节中花相当大的篇幅进行讨论.

4.7.6 在仿射空间中，仍然可以定义透视，但只限于定义在以 m 为中心构成透视的两个超平面 H 和 H' 的部分区域；事实上，$g:H \to H'$ 只能定义在 $H \backslash D$ 上，其中 D 是 H 和平行于 H' 且过 m 点的超平面的交集．而 $g:H\backslash D \to H'$ 则是 $H\backslash D$ 到 $H'\backslash D'$ 的一个双射，其中 D' 是 H' 和平行于 H 且过 m 点的超平面的交集．这种仿射透视常被用来引进射影几何的概念，特别是一个仿射空间的射影完备化的概念，后者是下一章的讨论对象．也可参见第 174 和 175 页．

4.8 非交换的情形

4.8.1 对非交换的体的情形，我们也可以定义射影空间、射影变换

和子空间；前面有几个地方(4.5.6, 4.5.10.1)我们已经提到过非交换性带来的影响．读者可以仔细看一下本章中哪儿是确实用到交换性的，并举出反例来，这是一个很好的讨论题目．

4.8.2 例如，对四元数体 $\mathbf{H}$ (参见8.9)，我们可以对任一整数 n 来定义标准四元数射影空间

$$P^n(\mathbf{H}) = P(\mathbf{H}^{n+1});$$

它在它的自然拓扑下是可分的、紧的．射影直线 $P^1(\mathbf{H})$ 同胚于球面 S^4 (参见 4.9.7)．$P^n(\mathbf{H})$的代数拓扑结构也是完全清楚的；例如可参见 [SR]，第 265 页；有一篇很有趣的文章，即 [E-K]．

4.8.3 甚至可以在比体更一般的结构上来定义射影空间；一个重要的例子是 Cayley 八元数空间 $\mathbf{Ca}$，即定义有非结合的乘法的八维实向量空间．在 $\mathbf{Ca}$ 上可以构造同胚于球面 S^8 的射影直线 $P^1(\mathbf{Ca})$ 以及一个射影平面 $P^2(\mathbf{Ca})$，即 Cayley 八元数射影平面；关于这些构造和这个射影平面的性质，可见 [PO]，第 XIV 章，[BOR2]，第 199 页，[E-K]，第 12 页，尤其是 [BES] 的第 3 章．

在 $\mathbf{Ca}$ 上之所以不能定义维数 ≥ 3 的射影空间，是因为这样的一个(满足子空间交集标准公理的)射影空间自然而然地会满足 Desargues 定理(见 5.4.3 和 5.4.4)，而这一定理是用到基域的结合性的；参见 [PT]，第 3 章或 [HA]，第 374 页(此书最后一章关于射影平面的内容很精采)．

4.9 练　　习

4.9.1 设 $P(E)$ 是有限维的实或复的射影空间；证明对任一超平面H来说，双射 $P(E)\backslash P(H) \to E_H$ (参见 4.2.1)是一个同胚．

4.9.2 证明 4.3.9.1 的最后一段．

4.9.3 证明 $P^n(\mathbf{R})$ 同胚于 $\mathbf{R}^n$ 中闭球 $B(0, 1)$ 关于等价关系 $\mathfrak{R}$ 所作的商集，其中 $\mathfrak{R}$ 定义为：对 $x \neq y$，当且仅当

$$x \in S(0, 1) = S^{n-1} \text{ 和 } y = -x$$

时 $x\Re y$，该商集取商拓扑结构. 特别讨论 $n=1$ 和 $n=2$ 的情形(参见 4.3.6 和 4.3.9.1).

4.9.4 对一个有限维 n 的实射影空间，讨论映射 4.2.4.3 的 Jacobi 矩阵的符号，从而推出：n 为奇数时，$P^n(\mathbf{R})$ 是可定向微分流形，n 为偶数时 $P^n(\mathbf{R})$ 不可定向.

4.9.5 讨论射影群 $GP(P^n(\mathbf{R}))$ 的连通性，并从而讨论 $P^n(\mathbf{R})$ 何时可定向.

4.9.6 讨论子空间在射影映射下的象和逆象.

4.9.7 证明 $P^1(\mathbf{H})$ 同胚于球面 S^4，其中 $\mathbf{H}$ 是四元数体(参见4.8.2).

4.9.8 准确地分析并说明在4.5.10 的证明中，"基域是交换的"这一假设条件用在哪里. 举出一个非交换体情形下的反例；我们还可以在 $P^n(\mathbf{H})$ (参见 4.8.2)中找出一个无限点集，其中任何 $n+1$ 个元素都是无关的，并有一个异于恒等映射的射影变换使这些点不动.

4.9.9 在普通空间里画出 $P^3(\mathbf{Z}_2)$ 中的点、直线和平面的示意图.

4.9.10 设 $\{H_i\}$ 是一个有限维 n 的射影空间 $P(E)$ 的一族超平面；讨论 $P(E)$ 中 $\dim(\bigcap_i H_i)$ 与 $P(E^*)$ 中 $\dim\left(\left\langle \bigcup_i H_i\right\rangle\right)$ 的关系.

4.9.11 设 K 是一个 k 个元素的体，$P(E)$ 是 K 上 n 维射影空间. 证明 $P(E)$ 中 p 维子空间的集合的基数是

$$\frac{(k^{n+1}-1)(k^{n+1}-k)\cdots(k^{n+1}-k^p)}{(k^{p+1}-1)(k^{p+1}-k)\cdots(k^{p+1}-k^p)}.$$

证明射影群 $GP(E)$ 的阶是

$$(k^{n+1}-1)(k^{n+1}-k)\cdots(k^{n+1}-k^{n-1})k^n.$$

4.9.12 Möbius 四面体. 在三维射影空间中作出两个四面体 $\{a, b, c, d\}$ 和 $\{a', b', c', d'\}$，使得第一个四面体的每个顶点落在第二个四面体的一个面上，同时第二个四面体的每个顶点又落在第一个四面体的一个面上，亦即：

$$a\in\langle b', c', d'\rangle, \cdots, a'\in\langle b, c, d\rangle, \cdots,$$

关于这种构造的解释以及它的推广，可见 14.5.5 和 14.8.12. 关于一类由铰接杆系作出的 Möbius 四面体（其上的点描出挠率为常数的曲线）的讨论，可见 [BA].

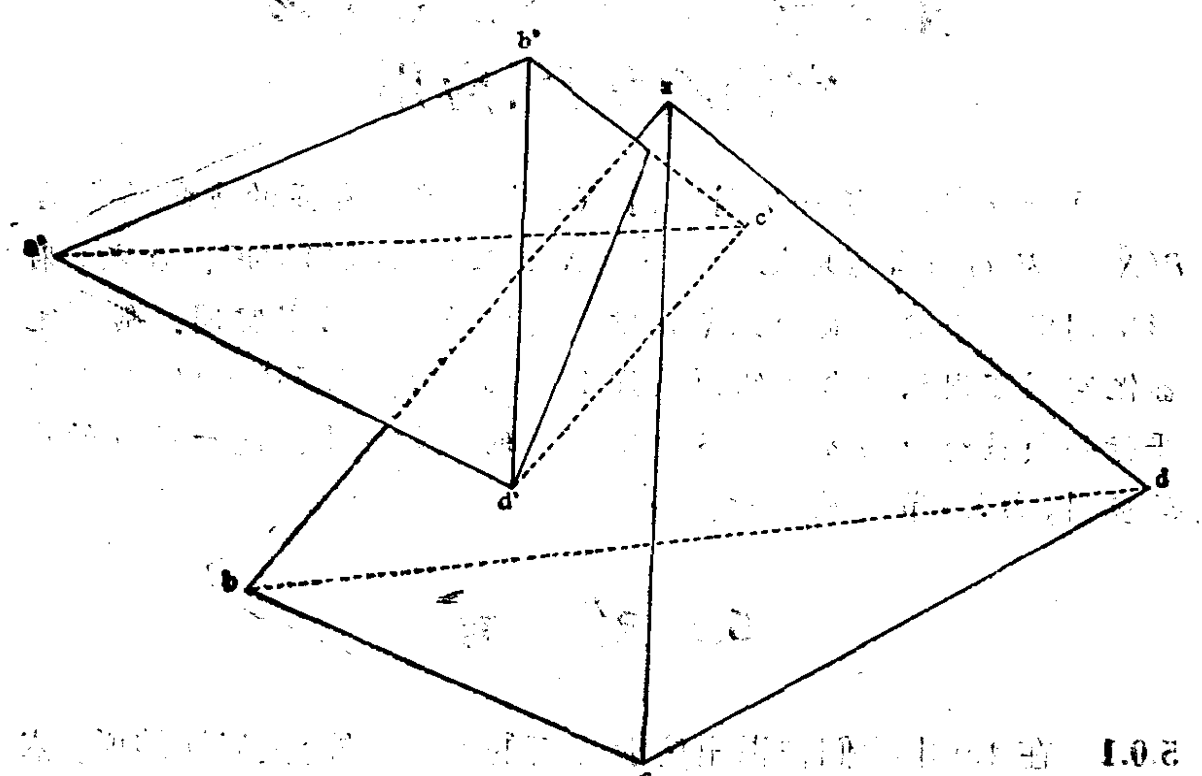


图 4.9.12.

第5章　仿射空间和射影空间的联系.应用

这一章中,对任一仿射空间 X, 作出其中直线的方向的集合 $P(\vec{X})$, 从而很自然地把仿射空间 X 嵌入一个射影空间. 反之, 射影空间中一个超平面的完备化空间自然是一个仿射空间. 射影完备化空间可用相当自然的方式作出 (5.0 节). 在 5.3 节中, X 中的平行性质被对应为 X 的完备化空间中的相交性质. 这一对应的广泛应用, 由 5.4 节可见一斑.

5.0　引　　言

5.0.1　在 4.0 中我们曾指出仿射几何的不足之处;更确切地说, 依照 Desargues 的做法, 我们想把一个仿射空间 X 扩充成一个射影空间 $\tilde{X}$, 它是 X 和 X 的无穷远点, 即 X 的 (直线的) 方向的集合 ∞_X 的并集, 其中后一集合也就是 $P(\vec{X})$; 也就是说,

$$\tilde{X} = X \cup \infty_X = X \cup P(\vec{X}).$$

这样, 只要作出不相交并集 $X \cup P(\vec{X})$, 上面所说的扩充在集合论意义下就总是能做到的; 困难在于使 $\tilde{X}$ 成为一个射影空间. 有一条途径是建立公理化体系; 但我们对此不作阐述, 以使本书保持不涉及系统的公理化观点的初衷(参见 4.1.2 和 [AN], [HA], [DI], [H-P], [PT]). 下面来叙述给出所需结构的三种代数方法.

5.0.2　最直接的做法是假设 X 是有限 n 维仿射空间, 而

$$\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$$

是 X 的一个仿射标架. 我们所要找的射影空间就是

$$P^n(K) = P(K^{n+1}),$$

嵌入 $X \to P^n(K)$ 由

5.0.2.1 $$x=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\longmapsto p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n,1)$$

给出(参见 2.2.9 和 4.2)；可以看出，X 在 $P^n(K)$ 中的象集的余集就是超平面 $P^{n-1}(K)=P(K^n\cong K^n\times\{0\})$，由于 5.0.2.1 式，这个余集与 $P(\vec{X})$ 等同.

5.0.3 稍细巧一些的做法是在 5.0.2 的基础上提出的：作 X 在 $a\in X$ 处的向量化空间，考察射影空间 $P(X_a\times K)$，其中 $X_a\times K$ 是两个向量空间 X_a 和 K 的直积；将 X 等同于 $X_a\times K$ 的子集 $X_a\times\{1\}$，并利用相应的坐标图(参见 4.2)即

5.0.3.1 $$x\longmapsto p(x,1),$$

我们就把 X 嵌入了 $P(X_a\times K)$. X 在 $P(X_a\times K)$ 中的象集的余集是 $P(X_a)\cong P(\vec{X})$.

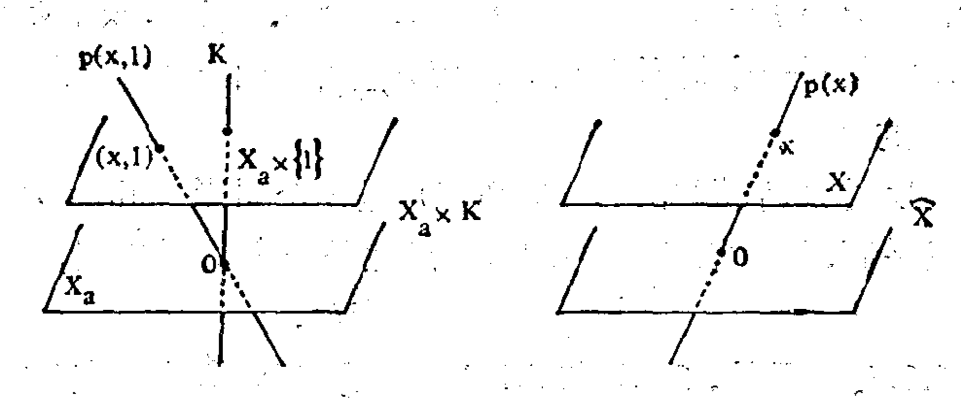


图 5.0.3.

5.0.4 最后一种做法要用到 X 所对应的泛向量空间 $\hat{X}$；只要取 $\widetilde{X}=P(\hat{X})$，X 由

5.0.4.1 $$x\longmapsto p(x)$$

嵌入了 $P(\hat{X})$，其中 X 已被看作嵌入在 $\hat{X}$ 中的仿射超平面(参见 3.1.6).

5.0.5 前两种做法的缺点是它们不是内在的：如果照 5.0.2 那样做，我们事先就不知道所得到的射影空间是否自然地跟 X 联系在一起(简言之，可以不很精确地说成它"只依赖于" X). 5.0.3 的情形也一样，其实在这种情形我们已经看到所有的 $P(X_a)$ 都是 $P(\vec{X})$，因为 a 的选取只会影响到 X 的一个平移，而平移是不改变方向的(参见 2.3.3.4). 不过，5.0.2 和 5.0.3 (尤其是 5.0.2) 也有两个优

点： 一是它们明显地提供了进行运算的基础． 二是它们比较初等；特别是我们可以很快地由它们引出复化的问题来，这些问题我们留待第 7 章讨论．

5.1 仿射空间的射影完备化

5.1.1 设 X 是一个仿射空间，$\hat{X}$ 是它的泛向量空间（参见 3.1）：

$$\hat{X} = \vec{X} \cup (K^* \times X).$$

作射影空间 $\tilde{X} = P(\hat{X})$． 注意到 X 是通过 $x \longmapsto (x, 1)$ 嵌入 $\hat{X}$ 的，而且规范射影 $p: \hat{X} \to \tilde{X} = P(\hat{X})$ 在 X 上的限制是单射，就可以把 X 等同于 $\tilde{X}$ 的一个子集． 于是 $\tilde{X}$ 分成两部分： $\tilde{X} = X \cup P(\vec{X})$． 令 $P(\vec{X}) = \infty_X$，就有 $\tilde{X} = X \cup \infty_X$． 这样，我们就把仿射空间 X 嵌入了一个射影空间 $\tilde{X}$，使得 X 是一个超平面（即 $\infty_X = P(\vec{X})$）的余集．

5.1.2 反过来，我们知道，若 $P(E)$ 是一个射影空间而 $P(H)$ 是任一超平面，则余集 $P(E)\backslash P(H)$ 自然是一个仿射空间，即

$$E_H = P(E)\backslash P(H),$$

参见 2.2.6． 另外，2.2.7 和 3.1.6 说明了 X 到 $\tilde{X}$ 的对应和 $P(E)\backslash P(H)$ 到 E_H 的对应互为逆对应．

可以将第 2 章和第 3 章中的结论概括为：

5.1.3 定理． (i) 设 X 是仿射空间，$\tilde{X} = P(\hat{X})$； 这个 X 通过 $x \longmapsto p(x, 1)$ 等同于 $\tilde{X}$ 的一个子集，仍记为 X； 这个子集 X 是 $P(\vec{X}) = \infty_X$ 在 $\tilde{X}$ 中的余集． $\tilde{X}$ 称为 X 的**射影完备化空间或完备化空间**，$\infty_X = P(\vec{X})$ 称为 X 的**无穷远处的超平面**． 若 X, X' 是两个仿射空间，$\tilde{X}, \tilde{X}'$ 是它们的完备化空间，$f \in A(X; X')$ 是仿射映射，则唯一地存在射影映射 $\tilde{f} \in M(\tilde{X}; \tilde{X}')$，使 $\tilde{f}|_X = f$． 而且 $\tilde{f}(\infty_X) \subset \infty_{X'}$，$\tilde{f}|_{\infty_X} = \vec{f}$（参见 2.3.1 和 4.5.2）．

(ii) 设 (E, H) 是向量空间 E 和 E 的超平面 H 的拓扑对；则 $E_H = P(E)\backslash P(H)$（参见 4.1.3.4）容有一个 $L(E/H; H)$ 上的自然的仿射空间结构． 设 (E', H') 是另一个这种拓扑对，并设

$$g \in M(P(E); P(E'))$$
使得 g 的定义域包含 E_H（参见 4.5）且 $g(E_H) \subset E'_{H'}$；则限制映射 $g|_{E_H} \in A(E_H; E'_{H'})$.

(iii) 对应 $X \rightsquigarrow (\hat{X}, \widetilde{X})$ 和 $(E, H) \rightsquigarrow E_H$ 互为逆对应，而且具有函子性质.

上述定理主要来自 2.2.6, 2.3.7, 3.1.6 和 4.5. 对 (ii)，应证明 $g|_{E_H} \in A\ (E_H; E'_{H'})$. 事实上，设 $f \in L(E; E')$ 使 $\underline{f} = g$；应证明 $f \in L_{H,H'}(E; E')$（参见 2.3.6）.

根据假设，g 定义在整个 E_H 上，换句话说（参见 4.5.2）有 $f^{-1}(0) \subset H$；而由 $g(E_H) \subset E_{H'}$ 可推出 $f(x) \notin H'$ $\forall x \notin H$；由此可知 $f(H) \subset H'$ 而且映射 $\underline{f}: E/H \to E'/H'$ 是单射. 函子性质可由 3.2.1 得出. 为了严格地说清楚 (iii) 中的两个对应是互逆的，必须用范畴的语言. 定理 5.1.3 说明 $(E, H) \rightsquigarrow E/H$ 是"完全一意的函子".

对实用而言，(i) 和 (ii) 已足够了，(iii) 是使理论上完美一些. 其实，应用的时候，即便只有 5.0.2.1 和 4.2.4.1 也就够了.

5.2 例 子

5.2.1 扩张的特征. 根据 2.3.3.12 和 4.5.9，仿射空间的扩张的特征是：
$$f \in \mathrm{Dil}(X) \Longleftrightarrow \tilde{f}|_{\infty_X} = \mathrm{Id}_{\infty_X};$$
也就是说，扩张是这样的 f 的集合，其中每个 f 相应的 $\tilde{f}$ 都使无穷远处的 X 的超平面点点不变.

5.2.2 仿射群与射影群. 至于使 ∞_X 整体不变的 $g \in \mathrm{GP}(\widetilde{X})$，就恰好是 $g = \tilde{f}$，其中 f 取遍 $\mathrm{GA}(X)$. 如果愿意，可以把 $\mathrm{GA}(X)$ 等同于 $\mathrm{GP}(X)$ 的一个子群，即 $\mathrm{GP}_{\infty_X}(\widetilde{X})$. Cayley 发现的原则是，任何经典几何群都可表示为一个适当的射影空间的射影群的子群：例如可参见 9.5.5.2, 18.10.1.5.

5.2.3 $X = K$ 的情形. 这时 $P(\widetilde{X}) = P(K) = P^0(K)$ 仅有一点

$\infty=\infty_K$，即K的唯一的无穷远点；于是$\tilde{K}=K\cup\infty$。若$K=\mathbf{R}$，应该将$\tilde{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\infty$跟我们在分析中碰到的完备化数轴

$$\bar{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$$

区分开来；在射影几何中，"趋于$+\infty$"和"趋于$-\infty$"是没有区别的。另外，我们仍回到任意域K的情形，这时很自然地可以把$\hat{K}$等同于K^2，从而$\tilde{K}$等同于$P^1(K)$；在这种等同关系下，$x\in K$等同于$p(x,1)$，∞等同于$p(1,0)$。记$\tilde{K}=K\cup\infty$，则关于射影映射f，其中$M(f)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$的 4.5.15 成为：

5.2.4

$$c\neq 0\begin{cases} t\longmapsto \dfrac{at+b}{ct+d} & \left(t\neq -\dfrac{d}{c}\right)\\ -\dfrac{d}{c}\longmapsto\infty & \\ \infty\longmapsto\dfrac{a}{c} & \end{cases}\qquad c=0\begin{cases} t\longmapsto\dfrac{at+b}{d}\\ \infty\longmapsto\infty. \end{cases}$$

5.2.5 若$K=\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$，且若维数有限，则 4.3.2 说明X在$\tilde{X}$中的嵌入是到象集上的同胚；4.6.1 说明X是开集并且在$\tilde{X}$中处处稠

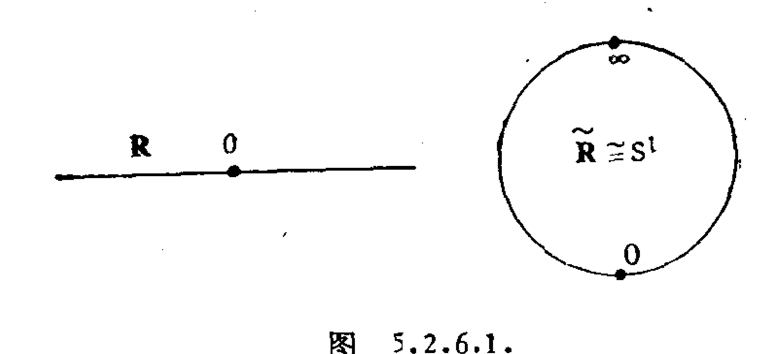


图 5.2.6.1.

图 5.2.6.2.

密．这一点再加上 5.2.3，就说明了 4.5.15 的最后一段．

在以上讨论中我们也注意到，对规范拓扑而言，$A(X; X')$ 中或 $M(P(E); P(E'))$ 中所有的映射都是连续的．而且在维数任意的情形下，$\tilde{f}$ 总是 f 凭借 $f\in A(X; X')$ 的连续性所作的延拓．

5.2.6 对 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，4.3.2 和 4.3.3 证明了 $\tilde{K}$ 就是 K 的 Alexandroff 紧化空间．

5.3 仿射子空间和射影子空间的联系；平行性

我们会看到，我们的结构保证了两条平行直线在完备化空间中有公共的无穷远点．

5.3.1 设 $S\subset X$ 是仿射空间 X 的仿射子空间；则 S 是嵌入 $\tilde{X}$ 的：$S\subset\tilde{X}$．根据 2.4.2.3，由 $\tilde{X}$ 的子集 S 所生成的 $\tilde{X}$ 的射影子空间 $\langle S\rangle$，是等同于 S 的射影完备化空间 $\tilde{S}$ 的；因而有 $\langle S\rangle=\tilde{S}=S\cup\infty_S$，其中 ∞_S 是 $\tilde{X}$ 的一个子集，即 $\infty_S=\infty_X\cap\langle S\rangle=\infty_X\cap\tilde{S}$．记 $\infty_S=P(\vec{S})\subset P(\vec{X})=\infty_X$．由定义 2.4.9.1 就有：

5.3.2 命题． 映射 $S\longmapsto\tilde{S}$ 是从 X 的仿射子空间的集合到 $\tilde{X}$ 中不含于 ∞_X 的射影子空间的集合的双射；有 $\tilde{S}=\infty_S\cup S$，其中 $\infty_S=\infty_X\cap\tilde{S}$．而且，若 S, S' 是两个仿射子空间，则：

$$\infty_S=\infty_{S'}\Longleftrightarrow S/\!/S',\quad \infty_S\subset\infty_{S'}\Longleftrightarrow S\triangleleft S'.$$

5.3.3 附注． 若 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，且若维数是有限的，则 5.2.5 证明

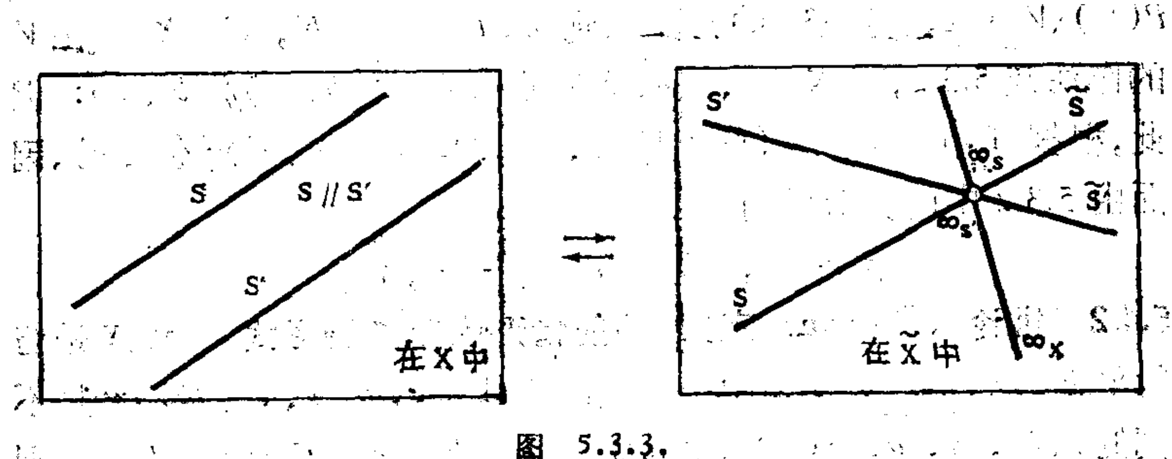


图 5.3.3.

了 $\tilde{S}$ 是 S 在 $\tilde{X}$ 中的拓扑闭包。

5.4 无穷远处的讨论;应用

5.4.1 命题 (Pappus 定理,射影的情形). 设 $P(E)$ 是射影平面, D 和 D' 是 $P(E)$ 上两条不同的直线, a, b, c, a', b', c' 是不同的六个点, $a, b, c \in D \setminus (D \cap D')$ 而 $a', b', c' \in D' \setminus (D \cap D')$, 则 $\langle a, b' \rangle \cap \langle a', b \rangle$, $\langle b, c' \rangle \cap \langle b', c \rangle$ 和 $\langle c, a' \rangle \cap \langle c', a \rangle$ 三点共线。

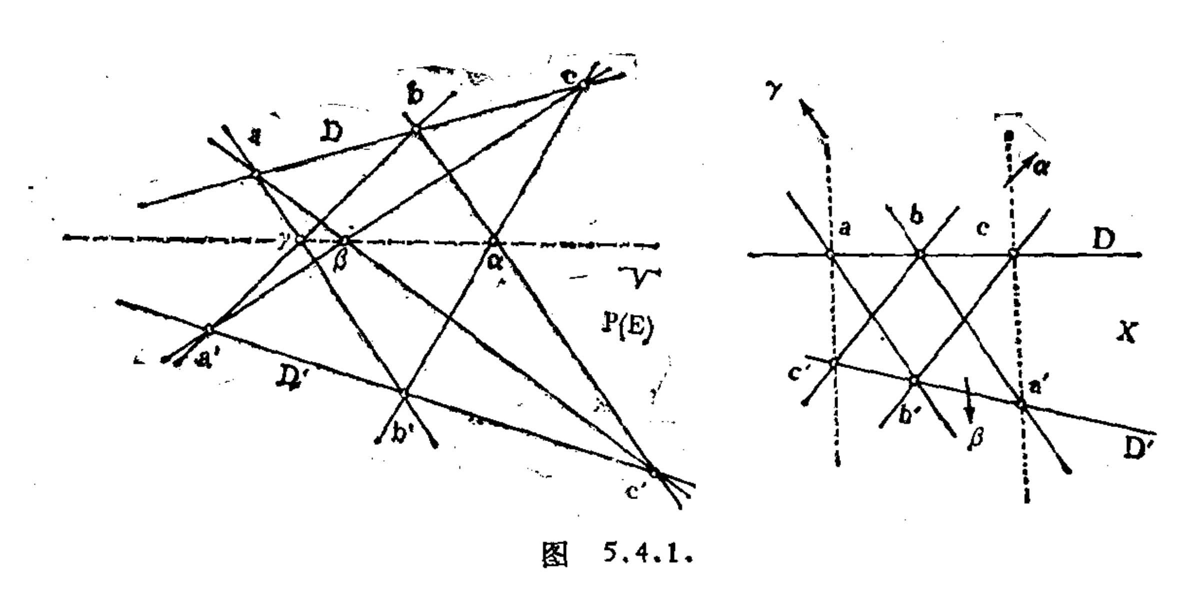


图 5.4.1.

首先注意到,根据 4.6.12, 这三点总是存在的;置

$$\gamma = \langle a, b' \rangle \cap \langle a', b \rangle, \quad \alpha = \langle b, c' \rangle \cap \langle b', c \rangle,$$

并设 $V = \langle \alpha, \gamma \rangle$ 是连接这两点的射影直线. 作仿射平面 $X = P(E) \setminus V$ (参见 5.1.3 (ii));注意到 $a, b, c, a', b', c' \in X$. 由 V 的作法及 5.3.2, 在 X 中有 $\langle a, b' \rangle /\!/ \langle a', b \rangle$ 和 $\langle b, c' \rangle /\!/ \langle b', c \rangle$; 因此,根据 Pappus 定理(仿射情形, 2.5.3)有: $\langle a, c' \rangle /\!/ \langle a', c \rangle$,因而由 5.3.2 中的充分性有

$$\beta = \langle a, c' \rangle \cap \langle a', c \rangle \in \langle \alpha, \gamma \rangle.$$

5.4.2 推论 (Pappus 定理,仿射情形的第二种形式). 设 X 是仿射平面, D 和 D' 是 X 中两条不同的直线, a, b, c, a', b', c' 是不同的六点, $a, b, c \in D \setminus (D \cap D')$, $a', b', c' \in D' \setminus (D \cap D')$, 则

$\langle a, b' \rangle \cap \langle a', b \rangle$，$\langle b, c' \rangle \cap \langle b', c \rangle$ 和 $\langle c, a' \rangle \cap \langle c', a \rangle$ 三点在下述意义下共线：若这三点都存在，则它们共线；若只有其中两点存在，则连接这两点的直线跟决定第三点的那两条直线都平行（若一点都不存在，则就是 2.5.3 中的情形）.

由 5.4.1，再应用 X 的完备化空间 $\tilde{X}$ 就可得证．我们看到，由于没有例外的情况，射影几何的命题要比仿射几何来得简洁．也可参见 16.8.19.

5.4.3 命题（Desargues 定理，射影的情形）. 设 $P(E)$ 是射影空间，s, a, b, c, a', b', c' 是 $P(E)$ 中七个不同的点，而且 s, a, b, c 和 s, a', b', c' 射影无关，$a' \in \langle s, a \rangle$，$b' \in \langle s, b \rangle$，$c' \in \langle s, c \rangle$；则 $\langle a, b \rangle \cap \langle a', b' \rangle$，$\langle b, c \rangle \cap \langle b', c' \rangle$，$\langle c, a \rangle \cap \langle c', a' \rangle$ 三点共线．换言之，若连接两个三角形的对应顶点的直线是共点的，则它们的对应边的交点共线.

5.4.4 在 $\dim(P(E)) \geqslant 3$ 和 $\dim(P(E)) = 2$ 这两种情形下，证明是不同的．若 $\dim(P(E)) \geqslant 3$，只须用到子空间的交的性质，因而结论对任何公理化体系都适用（参见 2.6.7）；若 $\dim(P(E)) = 2$，就要用到定理 2.5.4，其中涉及基域，从而涉及基域的结合性：见 2.5.5，4.8.3.

5.4.5 首先，假设由这七个点所生成的射影子空间 Z 确是三维的；这时由 4.6.12 很容易得出我们的结论，因为所考虑的三点都同时属于平面 $\langle a, b, c \rangle$ 和 $\langle a', b', c' \rangle$，而这两个平面的交是一条

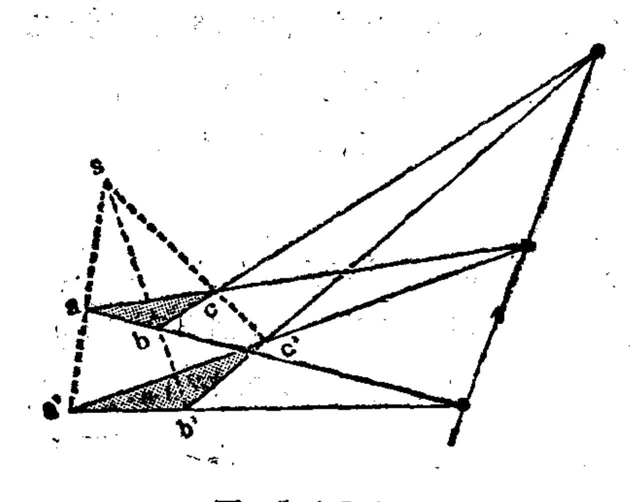


图 5.4.5.1.

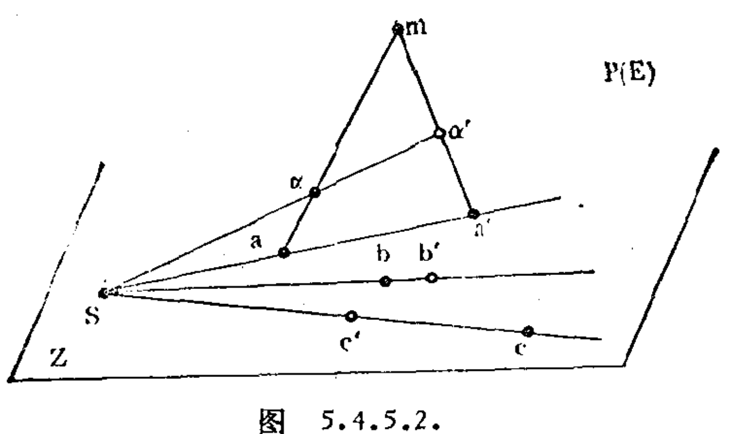


图 5.4.5.2.

直线(否则 Z 将成为二维的).

现在假设 $\dim(P(E)) \geqslant 3$ 但 $\dim Z = 2$；任取一点 $m \notin Z$，在直线 $\langle m, a\rangle$ 和 $\langle m, a'\rangle$ 上分别取点 α 和 α'，使 $s \in \langle \alpha, \alpha'\rangle$ 且 $\alpha \neq a$，$\alpha' \neq a'$（这样的点 m，α 和 α' 总是可以找到的，因为一条射影直线至少包含三点，参见 4.1.3.7).

这样，$s, \alpha, \alpha', b, b', c, c'$ 七点就生成了一个三维子空间，因而由前段可知它们满足 Desargues 定理的条件. 但若从 m 出发将 $P(E)\backslash\{m\}$ 投影到 Z 上，这一投影是保留交及共线的性质的；以上取点时可知 α 和 α' 分别投影到 a 和 a'，于是命题对 s, a, a', b, b', c, c' 成立.

5.4.6 若 $\dim(P(E)) = 2$，证明与 5.4.1 类似；我们在无穷远处考察 $\langle a, b\rangle \cap \langle a', b'\rangle$ 和 $\langle b, c\rangle \cap \langle b', c'\rangle$ 这两点. 于是从 2.5.4 的逆命题可得结论(参见 2.8.6).

5.4.7 推论（Desargues 定理，仿射情形的第二种形式）. 设 X 是仿射空间，X 中有七个点满足与 5.4.3 中类似的假设条件，则相应的三个交点共线，当有的点不存在时共线的意义有如 5.4.2 中所说明的那样.

5.4.8 定理（射影几何第二基本定理）. 设 $P(E)$，$P(E')$ 分别是在域 K 和 K' 上的两个维数有限、相同且≥2 的射影空间. 设

$$f: P(E) \to P(E')$$

是双射且使 $\forall$ 共线的 $a, b, c \in P(E)$ 有 $f(a), f(b), f(c)$ 在 $P(E')$ 中共线，则存在半线性双射 $\hat{f}: E \to E'$ 使 $f = \hat{f}$.

跟 2.6.6 中的证明一样，我们证明 f 是 $P(E)$ 的超平面到 $P(E')$ 的超平面的双射. 然后固定 $P(E)$的超平面 $P(H)$,其象为超平面 $P(H')\subset P(E')$. 限制映射 $g=f|_{P(E)\setminus P(H)}: E_H\to E'_{H'}$ 是从仿射空间 E_H 到仿射空间 $E'_{H'}$ 的映射并满足 2.6.3 的假设条件. 因此 g 是半仿射映射；根据 5.1.3 中半仿射情形的讨论，g 很容易延拓成半射影映射 $\tilde{g}:P(E)\to P(E')$, 由以上讨论可知 $\tilde{g}$ 在 E_H 上与 f 是一样的,由 $\tilde{f}|_{P(H)}=\tilde{g}$ (参见 5.1.3)可知 $\tilde{g}$ 在 $P(H)$ 上也与 f 一样.

5.4.9 与 5.4.8 有关的详细论述，可见 [FL]，第 83 页以后和第 267 页以后；也可见 [BI 5]，AII，第 203—204 页的练习 16 和 17. 关于 5.4.8 的一个推广,可见 [TS]，第 VIII 页.

5.4.10 这种在无穷远处考察的方法，以后还经常会用到：参见 5.5.3,6.4.4,6.4.8,6.4.10 以及第 17 章相当大的篇幅.

5.5 练　习

5.5.1 叙述并证明 5.4.1 和 5.4.3 的逆命题.

5.5.2 作出 5.4.2 和 5.4.7 中各种不同的平行情况的图形.

5.5.3 考察若干无穷远点，证明 Möbius 四面体的存在性（参见 4.9.12).

5.5.4 纸上有两条不在纸内相交的直线. 只用直尺，作出连接纸上一点到这两条直线的交点的直线.

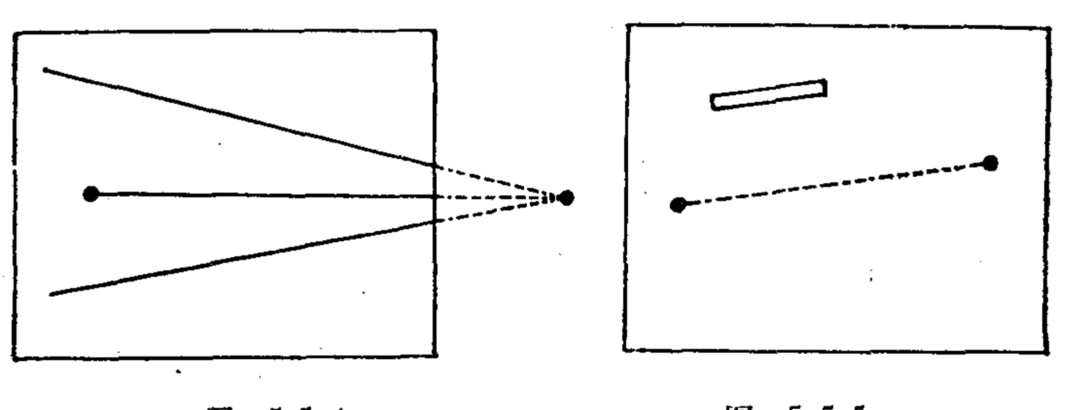


图 5.5.4.　　　　图 5.5.5.

5.5.5 只用一把很短的直尺，作出纸上两点的连线.

5.5.6 研究并评论［DX］第 28 页起关于射影几何基本定理的证明.

5.5.7 讨论在什么条件下，5.4.1 中的直线$\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$经过 $D\cap D'$.

5.5.8 **六边形织图.** 所谓实仿射平面 P 上的织图，就是在 P 上给定一个开集 A，并在 A 上每点 a 处给定 P 中过 a 点的、连续依赖于 a 的三条相异直线 $d_i(a)(i=1, 2, 3)$. 证明：若 b 在 $d_1(a)$ 上足够靠近 a，则可定义六个点 $(b_i)_{i=1,\cdots,6}$ 如下：

$$b_1=d_3(b)\cap d_2(a),\ b_2=d_1(b_1)\cap d_3(a),\ b_3=d_2(b_2)\cap d_1(a),$$
$$b_4=d_3(b_3)\cap d_2(a),\ b_5=d_1(b_4)\cap d_3(a),\ b_6=d_2(b_5)\cap d_1(a).$$

如果对任何足够邻近的 a 和 b 总有 $b_6=b$，就称这样的织图为六边形织图.

设 $(p_i)_{i=1,2,3}$ 是 P 上不共线的三点，A 是两两连接点 p_i 所得三直线的并集在 P 中的余集. 对每点 $a\in A$，定义织图

$$d_i(a)=\langle a, p_i\rangle.$$

证明这是六边形织图.

关于织图的进一步的内容，可见［BL-BO］和［CH-GR］，也可参见 5.5.9 和第 172 页的图.

5.5.9 **六边形织图（续）.** 证明第 172 页的图 172.2 上的织图是六边形织图. 更一般地，证明若对圆锥曲线 C 和不在 C 上的 p 点，过任一点 x 作 C 的两条切线和直线 xp，这样得到的织图必是六边形织图.

第6章　射影直线;交比，射影变换，对合

这一章介绍射影空间中共线的四点的一个（射影变换）不变量，即交比。这个不变量以射影变换下相互变换的共线的四点作为特征，在射影几何中起着本质的作用。一个重要的特例是调和分割。

本书中几乎经常碰得到交比，有时还会在颇出人意料的情形下碰到它：Laguerre 公式(8.8.7)，双曲几何(第 19 章)，Ricatti 方程(6.8.12)，微分几何(6.8.20)以及 Cayley 原则的说明(5.2.2)。

6.1　交比的定义

6.1.1　对 4.6.9 可作如下解释：单从射影群的观点来看，一条射影直线上不同三点构成的点组彼此都是一样的；或者，还可以这么说：射影群 $GP(E)$ 在 $P(E)$ 中所有共线的相异三点所构成的点组的集合上是可迁的，也即它是三重可迁的，参见 1.4.5。

这个结论对四个点的情形是否还能成立呢？下面就借助于一个在 $\tilde{K}$ 中取值的数量，即四点的交比，来对共线的四点组在 $GP(E)$ 下的轨道进行分类。

6.1.2　定义．设 D 是 K 上的射影直线，$\{a, b, c, d\}$ 是 D 上四点，其中 a, b, c 各不相同．$\tilde{K}=K\cup\infty$ 中的元素 $f_{a,b,c}(d)$ 称为这四个点的交比，记作 $[a, b, c, d]=f_{a,b,c}(d)$；其中 $f_{a,b,c}$ 表示使 $f(a)=\infty$，$f(b)=0$，$f(c)=1$ 的唯一的同构

$$f_{a,b,c}\in \mathrm{Isom}(D;\tilde{K})$$

(参见 4.6.9)．若

$$\{a, b, c, d\}=\{a_i\}\quad i=1, 2, 3, 4,$$

有时也记为 $[a_1, a_2, a_3, a_4]=[a_i]$. 若 $\{a, b, c, d\}$ 是射影空间中共线四点,而且前三点各不相同,则它们的交比定义为在它们所决定的直线上的交比. 若 a, b, c, d 是K上仿射空间X中共线四点,而且前三点各不相同,则它们的交比定义为它们在X的射影完备化空间 $\tilde{X}$ 中的交比.

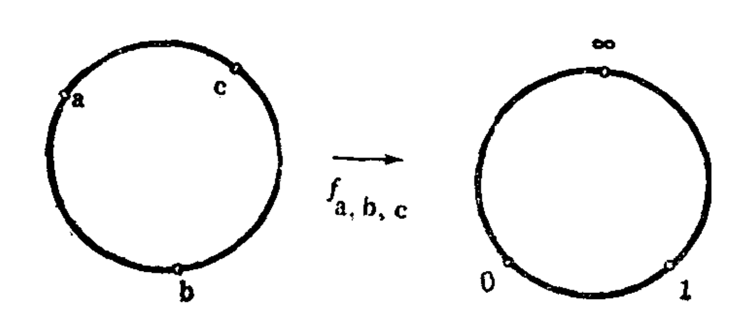


图 6.1.2.

由 4.6.9 可推出以下结论:

6.1.3 若 $[a, b, c, d]=\infty$ (相应地, 0, 1), 则 $d=a$ (相应地, $d=b, d=c$), 反之亦然. 若 $[a, b, c, d]\in K\backslash\{0, 1\}$, 则 $d\neq a, b, c$, 反之亦然(因为 $K\backslash\{0, 1\}=\tilde{K}\backslash\{\infty, 0, 1\}$).

6.1.4 推论. 设 D, D' 是两条射影直线,

$$(a_i)_{i=1,2,3,4}\subset D \text{ 且 } (a'_i)_{i=1,2,3,4}\subset D',$$

a_i 和 a'_i 的前三点又分别是各不相同的,则

$$\exists f\in \mathrm{Isom}(D;D')\,|\,f(a_i)=a'_i \quad \forall i \iff [a_i]=[a'_i].$$

6.1.5 推论. 设D是射影直线, a, b, c 是D上相异三点. 只要 $k\in\tilde{K}$, 就唯一地存在一点 $d\in D$ 使 $[a, b, c, d]=k$.

6.1.6 命题. 设 $D=P(E)$ 是射影直线, a, b, c是D上相异三点,而且(参见 4.4.1) $x, y\in E$ 使

$$a=p(x), \ b=p(y), \ c=p(x+y),$$

则 (参见 5.2.3):

$$d=p(kx+hy)\iff[a, b, c, d]=p(k, h)\in P(K^2)\sim\tilde{K}.$$

根据 5.2.3, 若 $\{e_1, e_2\}$ 是 K^2 中的规范基,则

$$p(e_1)=p(1, 0)=\infty, \ p(e_2)=p(0, 1)=0,$$
$$p(e_1+e_2)=p(1, 1)=1.$$

因此 $f_{a,b,c}=f$，其中 $f\in L(E;K^2)$ 由 $f(x)=e_1$，$f(y)=e_2$ 所定义，因为

$$f(x+y)=f(e_1+e_2),$$

从而

$$f(d)=f(p(kx+hy))=p(f(kx+hy))=p(k,h).$$

6.1.7 附注. 命题 6.1.6 的结论常被用作交比的定义. 而且，在 K 为非交换的情形，这是唯一可能的定义方法，参见 6.8.13.

我们也可以用 6.2.3 直接定义交比，只要我们先验证那个式子在线性群 GL(2; K) 下不变；这一点是很容易的. 但要说明反过来也对，就得系统地找出 GL(2; K) 的"不变量". 关于这一点，可参见 [DI-CA]，第 23 页. 也可参见 [SF1]，[SF2] 和 18.10.7.

6.2 交比的具体计算

6.2.1 问题是计算 $[a_i]$，这里 a_i 在 $E(D=P(E))$ 的一个任取的基 $\mathscr{B}$ 下的齐次坐标(参见 4.2.3)已经给出：

$$a_i=p(x_i)=p(\lambda_i,\mu_i)\ (i=1,2,3,4).$$

我们有

$$x_3=\alpha x_1+\beta x_2,\quad x_4=\gamma x_1+\delta x_2,$$

因此

$$x_4=\frac{\gamma}{\alpha}(\alpha x_1)+\frac{\delta}{\beta}(\beta x_2),$$

于是(参见 6.1.6) $[a_i]=p\left(\dfrac{\gamma}{\alpha},\dfrac{\delta}{\beta}\right)$. 根据 Cramer 法则，对在基 $\mathscr{B}$ 下的行列式有

$$\alpha=\frac{\det(x_3,x_2)}{\det(x_1,x_2)},\qquad \beta=\frac{\det(x_1,x_3)}{\det(x_1,x_2)},$$

$$\gamma=\frac{\det(x_4,x_2)}{\det(x_1,x_2)},\qquad \delta=\frac{\det(x_1,x_4)}{\det(x_1,x_2)},$$

由此即得

6.2.2

$$[a_i]=p\left(\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \mu_1 & \mu_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_2\\ \mu_3 & \mu_2\end{vmatrix}},\quad \frac{\delta}{\beta}=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_4\\ \mu_1 & \mu_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_3\end{vmatrix}}\right),$$

通常我们约定，当分母为零时比式表示点 $\infty\in\widetilde{K}$（跟 5.2.4 一致），并将上式写成

6.2.3

$$[a_i]=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1\\ \mu_3 & \mu_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_2\\ \mu_3 & \mu_2\end{vmatrix}}\Bigg/\frac{\begin{vmatrix}\lambda_4 & \lambda_1\\ \mu_4 & \mu_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_4 & \lambda_2\\ \mu_4 & \mu_2\end{vmatrix}}.$$

设 D 是仿射直线，其上四点 (a_i) 的前三点各不相同；在任一仿射坐标下，若 a_i 的坐标为 $x_i(i=1,2,3,4)$，则在 $\widetilde{D}$ 中有 $a_i=p(x_i,1)$，因而 6.2.3 式证明了（参见 2.4.6）：

6.2.4

$$[a_i]=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}\Big/\frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}=\frac{\overrightarrow{x_3x_1}}{\overrightarrow{x_3x_2}}\Big/\frac{\overrightarrow{x_4x_1}}{\overrightarrow{x_4x_2}}.$$

特别当 a,b,c 是仿射空间 X 中直线 D 上共线的三点时，在 $\widetilde{X}$ 中有：

6.2.5

$$[a,b,c,\infty_D]=\frac{\overrightarrow{ca}}{\overrightarrow{cb}}.$$

6.2.4 式在仿射的背景上给出了交比的初等定义.

6.2.6 小结. 6.2.5 式从几何上帮助我们看到：射影空间中一个超平面的余集 $P(E)\backslash P(H)=E_H=\hat{X}$（参见 5.1.3 和 2.2.6）必有一个自然的仿射结构. 其实，如果情况真是这样，就理应可以定义一些几何上的概念，譬如说落在 X 的一个向量化空间 X_a 中的和 $b+c$，以及共线四点的商 $\overrightarrow{ca}/\overrightarrow{cb}$. 6.2.5 式解决了第二个问题，而对 $P(E)$ 用平行四边形法则（参见 2.6.6.3）则可解决第一个问题.

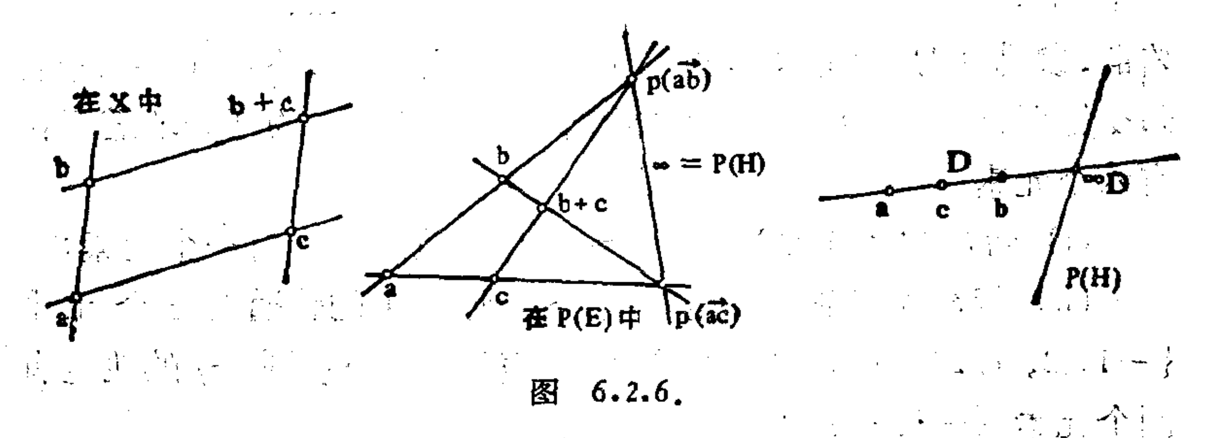


图 6.2.6.

6.2.7 交比的几何运算. 见 6.5.6, 6.5.10, $K=\mathbf{C}$ 的情形见 9.6.5.

6.3 置换的作用

设 (a_i) 是射影直线 D 上相异四点(这就假定了 $K\neq \mathbf{Z}_2$!);它们的交比实质性地与次序有关,确切地说,首先有:

6.3.1 命题

$$[a,b,c,d]=[b,a,c,d]^{-1}=[a,b,d,c]^{-1},$$
$$[a,b,c,d]+[a,c,b,d]=1.$$

前两式可由 6.2.3 得出. 为证第三式,记

$$a=p(x),\ b=p(y),\ c=p(x+y),\ d=p(kx+y);$$

则 $[a,b,c,d]=k$.

若将基 $\{x,y\}$ 换成基 $\{-x,x+y\}$, 就有

$$y=-x+(x+y),\ kx+y=(1-k)(-x)+(x+y),$$

因此 $[a,c,b,d]=1-k$ (参见 6.1.6).

由于 6.3.1 的三个式子对应着 $\{a,b,c,d\}$ 的三个对换, 而它们生成了这四点的全体置换所成的群,所以,任何一个置换的作用就清楚了. 为了说得更透彻,我们稍稍将问题提得复杂一些.

6.3.2 命题. 设 $K^\bullet=K\backslash\{0,1\}$, $\mathfrak{S}_4$ 是$\{1,2,3,4\}$ 的对称群;设 D是射影直线, (a_i) 是 D 上相异四点, $k=[a_i]$ 是它们的交比. 则交比 $\sigma(k)=[a_{\sigma(i)}]\in K^\bullet$ 只依赖于 k 和 $\sigma\in\mathfrak{S}_4$, 而与 D 或 a_i 都无关. 映射 $\varphi:\mathfrak{S}_4\ni\sigma\longmapsto k\longmapsto\sigma^{-1}(k)\in\mathfrak{S}_{K^\bullet}$ 是 $\mathfrak{S}_4$ 到 $K^\bullet$ 中的一个作用. 群 $\mathfrak{S}_4$ 的作用不是一意的;其核 $\mathrm{Ker}\varphi$ 是 Klein 群 $\mathscr{K}_4$ (矩

阵群,参见 0.2),除非K是四个元素的体 F_4, 那时 $\mathrm{Ker}\ \varphi = \mathscr{A}_4$,即交错群. 除了以下三种例外情形, $\mathfrak{S}_4$ 在 $K^\bullet$ 中的任一轨道都含有六个元素:

(i) 若K的特征数为 3, $k = -1$ 的轨道只含有一个元素;

(ii) 若K的特征数不是 2 和 3, 则 -1 的轨道有三个元素 $\{-1, 2, 1/2\}$, 而若K包含 1 的立方根 j 和 j^2, 则 $-j$ 的轨道有两个元素 $\{-j, -j^2\}$;

(iii) 若 $K = F_4$, 只有一个轨道,它有两个元素.

由 6.3.1, 我们知道 $\mathrm{Ker}\varphi \supset \mathscr{V}_4$; 现在来求 k 的轨道: 应用 6.3.1 即知唯一的可能是:

$$k,\ \frac{1}{k},\ 1-k,\ 1-\frac{1}{k},\ \frac{1}{1-k},\ \frac{k}{k-1}.$$

应讨论这六项是否 $K^\bullet$ 中的不同元素;而它们两两相等, 就等价于下列方程:

$$k^2-1=0,\ k^2-k+1=0,\ 2k-1=0,\ k-2=0.$$

于是 6.3.2 就已得证, 因为: $X^2-1=0$ 的除 1 以外的根是 -1, $X^3-1=0$ 的除 1 以外的根由 $X^2+X+1=0$ 给出, 于是, $\mathbf{Z}_2$ 再加上 $X^2+X+1=0$ 的两个根就得到了四个元素的体.

6.3.3 附注. 有些书上把交比(英文中称为 cross-ratio)记作

$$[a, b, c, d] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

这种记法的优点是容易使我们想起核 $\mathrm{Ker}\varphi = \mathscr{V}_4$是怎样作用的, 因为它的作用是跟矩阵几何群, 即关于原点和两轴的对称所成的群一样的:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}.$$

K非交换的情形可见 6.8.13.

在 $K = \mathbf{R}$ 的情形, 我们作出一个和交比很自然地相联系的代数函数

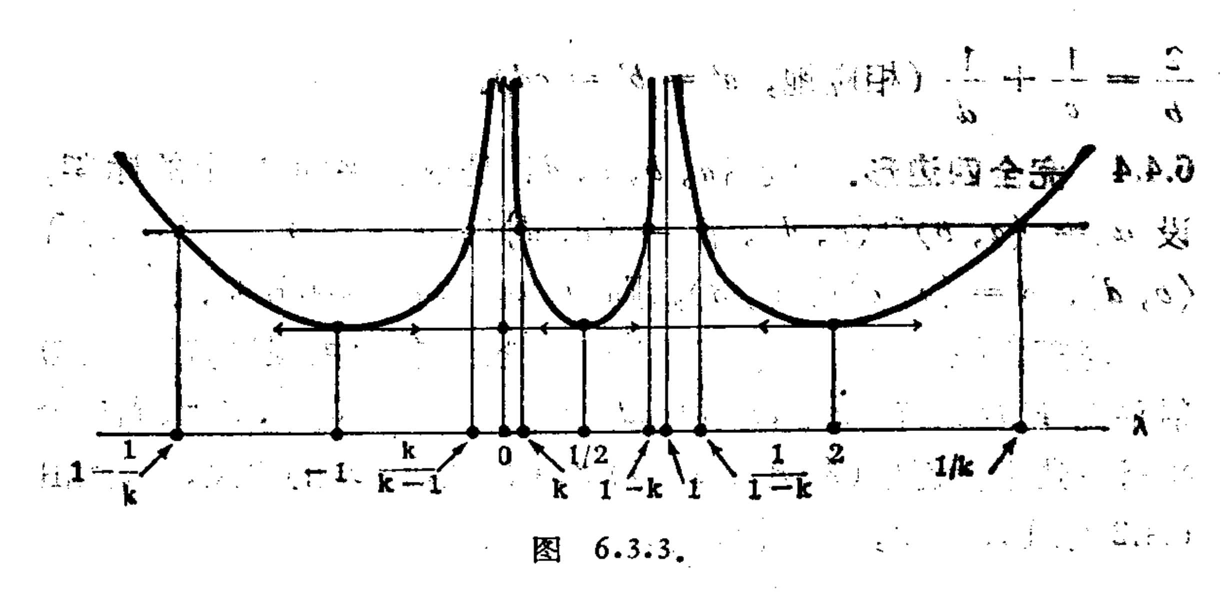


图 6.3.3.

$$k \longmapsto \frac{4}{27}\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$$

的图象.

这个函数在同一轨道所有的点上取相同的值；有关交比与这个函数的一些有趣的结论，可见 [DX]，第 43—51 页和 6.8.11.

6.4 调和分割（特征数 $\neq 2$ 的域）

交比的定义中允许所讨论的四点中有两点是重合的；倘若允许两个以上的点重合，势必引起一大堆麻烦，除非考虑的是 6.3.2 中碰到过的轨道 $\{-1, 1/2, 2\}$ 的情形. 由此给出:

6.4.1 定义. 射影空间或仿射空间中的四点 a, b, c, d 称为**调和分割的**，如果它们满足下列条件之一：其中三点重合而第四点与之不同，或者四点都不同、共线且 $[a, b, c, d] = -1$.

我们注意到，次序是重要的：若 a, b, c, d 是调和分割的，则 b, a, c, d 不是调和分割的.

6.4.2 若 a, b, c 是仿射空间中直线 D 上共线的三点，6.2.5 证明了 a, b, c, ∞_D 调和分割的充要条件是 c 是 $\{a, b\}$ 的中点.

6.4.3 在一条仿射直线的任一仿射坐标系中，坐标为 a, b, c, d 的四点调和分割的充要条件是 $2(ab+cd)=(a+b)(c+d)$，这可从 6.2.4 推出. 当 $a=0$（相应地，$b=-a$）时，上式化为

$\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$ (相应地，$a^2=b^2=cd$)。

6.4.4 完全四边形. 设 $\{a, b, c, d\}$ 是射影平面 P 上的标架，设 $\alpha=\langle a, b\rangle\cap\langle c, d\rangle$，$\beta=\langle a, d\rangle\cap\langle b, c\rangle$，$\gamma=\langle a, c\rangle\cap\langle b, d\rangle$，$\delta=\langle a, c\rangle\cap\langle \alpha, \beta\rangle$，则 a, c, γ, δ 调和分割.

考察直线 $D=\langle\alpha, \beta\rangle$ 在无穷远处的情形；由假设，在新的仿射平面 $P\backslash D$ 上有 $ab/\!/cd$ 和 $ad/\!/bc$，因而 a, b, c, d 组成一个平行四边形，而且（参见图 2.4.5）γ 现在是 a, c 的中点，因此由 6.4.2 有 $[a, c, \gamma, \delta=\langle a, c\rangle_\infty]=-1$.

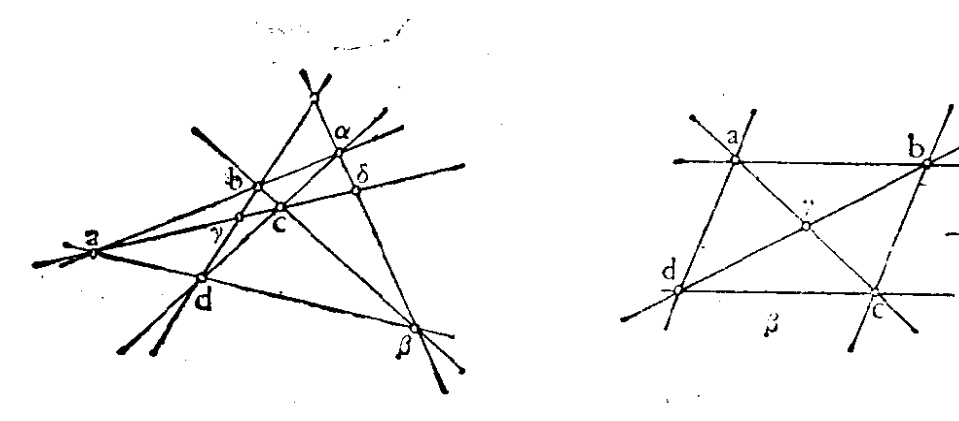


图 6.4.4.

6.4.5 根据上述结果，可作出一点 m 关于两点 a, b 的调和共轭点 n（即点 n 使 $[a, b, m, n]=-1$）的几何构造．为此，我们把射影或仿射直线 $\langle a, b\rangle$ 嵌入一个平面并作图如 6.4.4 所示.

6.4.6 由对称诱导的射影映射的几何构造. 设 E 是向量空间，S，T 是两个子空间，且有直和 $E=S\oplus T$；设 f 是关于 S 平行于 T 的对称，即若 $q: E\to S$ 表示直和 $E=S\oplus T$ 相应的投影，则 f 由

$$q(x)=\frac{x+f(x)}{2}\quad \forall x\in E$$

所定义．通过调和分割可构造射影映射 $g=\underline{f}\in \mathrm{GP}(E)$ 如下：设 $V=p(S)$，$W=p(T)$ 是由 S 和 T 导出的射影子空间，而且 $m\in P(E)$，则存在唯一的一条射影直线 $D(m)$ 经过 m 且与 V, W 相交，$g(m)$ 是 $D(m)$ 上的点而且

$$[m, g(m), D(m)\cap V, D(m)\cap W] = -1.$$

事实上，$D(m)$ 是由一个被 x 和 $q(x)$ 完全确定的向量空间（除非 $x = q(x)$，但这时 $g(m) = m$，已合 6.4.1 条件）导出的，这向量空间是一个包含 $f(x)$ 的平面．如果把 x 和 $f(x)$ 取作这个平面的基，就有 $p(x + f(x)) = p(2q(x)) = V\cap D(m)$，$p(-x + f(x)) = p(W\cap D(m))$，因此，由 6.1.6 即得

$$[m, g(m), V\cap D(m), W\cap D(m)] = -1.$$

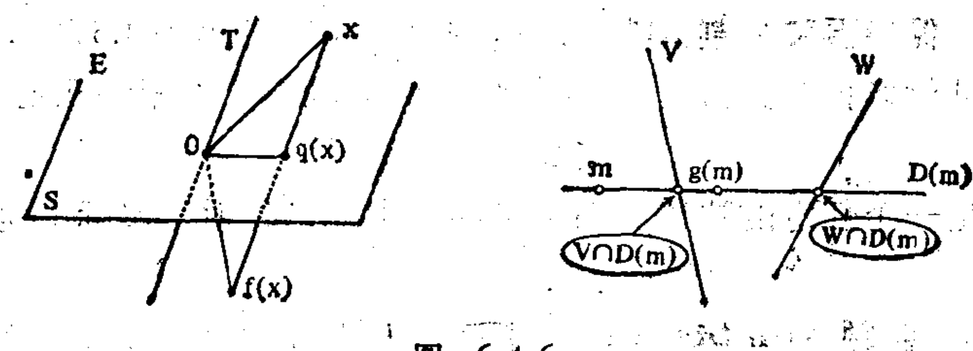


图 6.4.6.

6.4.7 附注. 一种常见的情形是 S 为超平面，这时 V 是 $P(E)$ 中一点，而 $D(m)$ 是经过这一点和 m 的直线．参照 4.5.19 可知，若 K 是代数闭域，则 $GP(E)$ 的所有对合都如上所述，因而几何结构是很简单的．

6.4.8 交比与域的结构. 怎样从一条射影直线上看出域的结构？更确切地说，如果譬如说已经给定射影直线 D 上的五点 a, b, c, d, e，使 $[a, b, c, d] + [a, b, c, e] = [a, b, c, f]$（相应地，

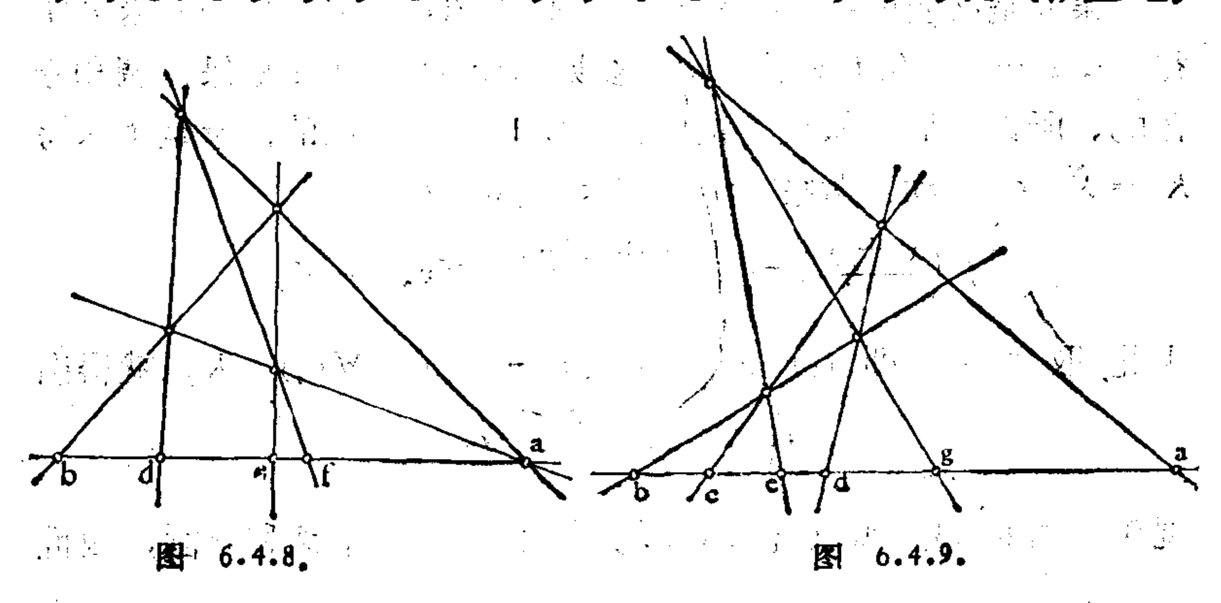


图 6.4.8.　　　　图 6.4.9.

$[a, b, c, d][a, b, c, e] = [a, b, c, g]$) 的第六个点 f(相应地，g)在哪儿？仿射几何基本定理(参见 2.6.3)启示我们，根据仅有的几种直线相交结构，是可以找到 f 和 g 的. 其实即便从 2.6.6.4 的证明也能看出这一点；这只须把 a 放在无穷远处并如 2.6.6.4.1 和 2.6.6.4.3 那样作图，看看在距离有限处图6.4.8和 6.4.9 是怎样的就行了. 当然这时得把D嵌入一个仿射平面，由 2.6.1 可知这一嵌入是不可或免的.

6.4.9 保持调和分割的映射. 根据同样的思想，由 6.4.5 和 5.4.8 可知：从射影直线到自身的、保持任意四点的调和分割的双射

$$f: D \to D,$$

不会是一个任意的映射，而很可能是半射影映射. 实际上也确实如此.

6.4.10 命题(von Staudt). 设 $D = P(E)$是射影直线，$f: D \to D$ 是双射. 在D上使 $[a, b, c, d] = -1$ 的任意四点 a, b, c, d 总有 $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = -1$ 的充要条件是存在半线性映射 $\hat{f}: E \to E$ 使 $\underline{\hat{f}} = f$.

条件是充分的：若 $\sigma: K \to K$ 是K上任一自同构，$\hat{f}$ 关于 σ 半线性，则对D的任意四点有：

$$[\underline{\hat{f}}(a), \underline{\hat{f}}(b), \underline{\hat{f}}(c), \underline{\hat{f}}(d)] = \sigma([a, b, c, d]);$$

但从 σ 是自同构即得 $\sigma(-1) = -1$.

条件是必要的：设 $\tilde{K} = D$，取 $GP(\tilde{K})$ 中适当的元素 g 使得 $0, 1$ 和 ∞ 在 $f \circ g$ 下不动（参见 4.6.9）；但 $f \circ g$ 是保持调和分割的，所以最后可假设 f 是保持 $0, 1, \infty$ 不动的. 于是 f 保持 $K = \tilde{K} \backslash \infty$ 不动. 考察 $f: K \to K$；由 6.4.2 有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \forall x, y \in K,$$

由此，取 $y = 0$ 即 $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in K$，就得出

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2} \quad \forall x.$$

现在应用 6.4.3：四点 $\{1, x^2, x, -x\}$ 构成一个调和分割，因而

$\{f(1)=1, f(x^2), f(x), f(-x)=-f(x)\}$ 亦然；于是由 6.4.3 有 $f(x^2)=(f(x))^2$. 把 x 换成 $x+y$，就得 $f(xy)=f(x)f(y)$. 这样，$f:K\to K$ 就是域自同构.

6.4.11 推论(参见 2.6.4). 实射影直线上保持调和分割的双射必是射影变换；若它是复射影直线上的这样的连续双射，则必是射影变换或反射影变换(参见 18.10.2.4).

6.5 交比与对偶；应用

一条 $P(E^*)$ 的直线，即一条"超平面的直线"是什么？2.4.8.1 的结论给出了回答(参见 4.1.3.5)：

6.5.1 命题. $P(E^*)$ 的一条射影直线 Δ 称为 $P(E)$ 的一束超平面 ($\dim(P(E))=2$ 时称为直线束，$\dim(P(E))=3$ 时称为平面束). 存在 $P(E)$ 的一个余维数为 2 的子空间 V，使

$$\Delta=\{H\in\mathscr{H}(E):H\supset V\};$$

反之，对任何这样的 V，子集 $\{H\in\mathscr{H}(E):H\supset V\}\subset P(E^*)$ 是一条直线. 而且，$\forall x\in P(E)\setminus V$，唯一地存在一个包含 x 的 $H\in\Delta$.

一个简单而有广泛应用的结论是：

6.5.2 命题. 设 $(H_i)_{i=1,2,3,4}$ 是四个超平面(前三个各不相同)，构属于余维数为 2 的子空间 V 所对应的 $P(E)$ 的一个超平面束，D 是 $P(E)$ 中一条直线，$D\cap V=\varnothing$，则 $\forall i$，集合 $D\cap H_i$ 仅含一点 h_i，而且有交比的等式 $[h_i]=[H_i]$，其中左端在直线 D 上计算，右端在定义该超平面束的 $P(E^*)$ 的直线上计算.

由这一命题推出的结论之一是：

6.5.3 引理. 设 Δ 是一束超平面，V 是相应的子空间，D 是一条与 V 不相交的直线，则映射

$$\Delta\ni H\longmapsto H\cap D\in D$$

属于 $\operatorname{Isom}(\Delta;D)$.

设 $H,K\in\Delta$ 是不同的超平面，$a=D\cap H$，$b=D\cap K$，

$\varphi, \psi \in E^*$ 使$H = p(\varphi^{-1}(0))$, $K = p(\psi^{-1}(0))$；则可将 φ, ψ 法

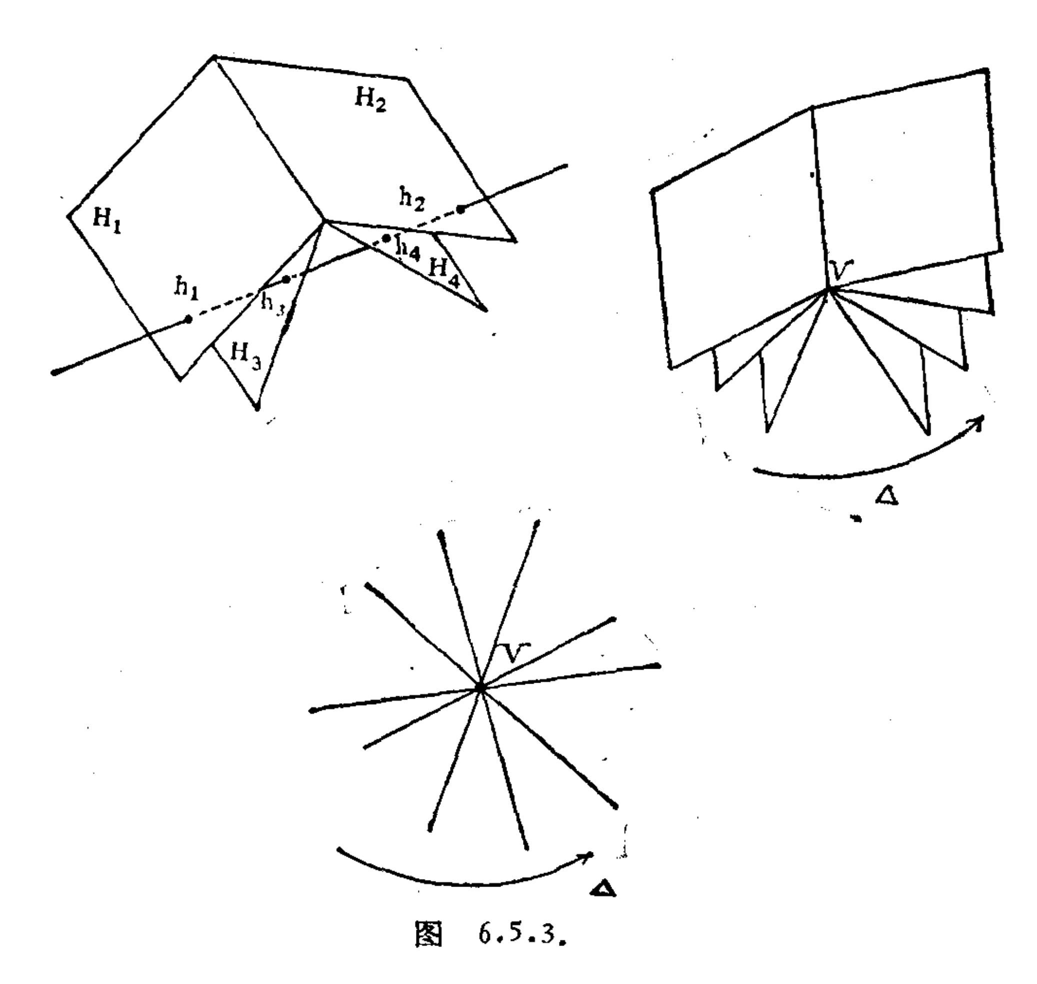


图 6.5.3.

化，使得对适合 $p(x) = a$ 和 $p(y) = b$ 的 x, y 都有

$$\varphi(x) = -\psi(x) = 1.$$

这样就有

$$D = \{p(\lambda x + \mu y) : (\lambda, \mu) \in K^2 \backslash 0\},$$

$$\Delta = \{p((\xi\varphi + \eta\psi)^{-1}(0)) : (\xi, \eta) \in K^2 \backslash 0\}.$$

当 $\xi\mu = \eta\lambda$ 时，Δ的一个元素与D的交集可写为

$$(\xi\varphi + \eta\psi)(\lambda x + \mu y) = 0;$$

而在 $P(K^2)$ 上，$\xi\mu = \eta\lambda$ 就是 $p(\lambda, \mu) = p(\xi, \eta)$，因而是恒等式！

6.5.4 推论. H_i 和D的四个交点的交比不依赖于 D.

6.5.5 Thalès 定理：第二种证明(参见 2.5.1).

现在X是一个仿射空间，H, H', H'' 是三个平行超平面；在X的射影完备化空间$\tilde{X}$中，我们得到四个超平面 $\tilde{H}, \tilde{H}', \tilde{H}'', \infty_X$,

它们构成一个超平面束．由 6.5.2 和 6.2.5，就可推得定理．

6.5.6 类似地，可以计算仿射空间中共线四点 a, b, c, d 的交比如下：作出图示的结构(它们应是平面图形)．直线 a', b', c' 应与直线 $\langle m, d\rangle$ 平行；于是

$$[a, b, c, d] = \frac{\overrightarrow{c'a'}}{\overrightarrow{c'b'}}.$$

对两直线 a, b, c, d 和 a', b', c' 应用 6.5.4，再由 6.2.5 即可得到上式．由此可以引出一个关于交比的纯仿射的(即度量的)初等的定理．

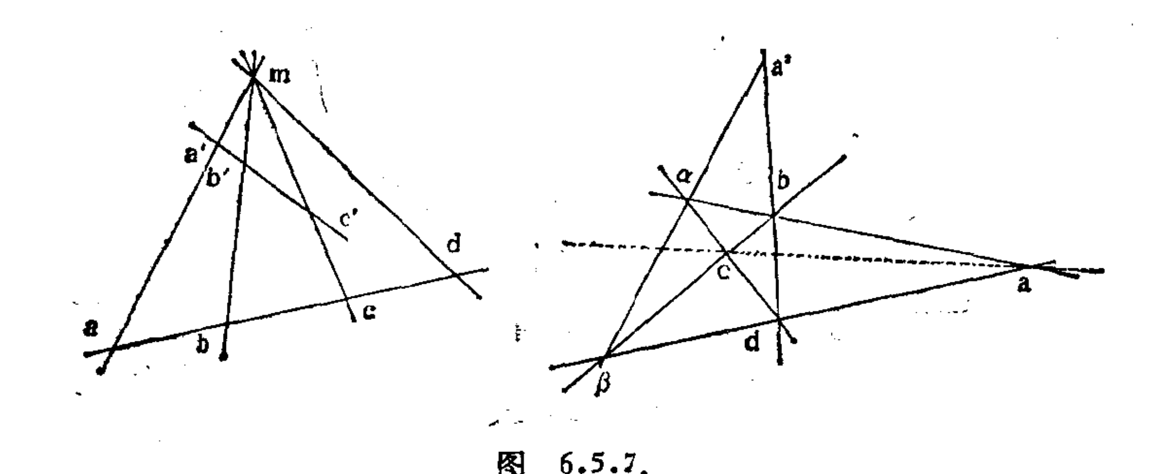


图 6.5.7.

6.5.7 一点关于两直线的极线． 设 D 和 D' 是射影平面上两条相异直线，$x \notin D \cup D'$ 是平面上一点，则经过 x 的一条直线交 D, D' 于 m, m'；x 关于 m, m' 的调和共轭点决定一条经过 $D \cap D'$ 的直线，即 $P(E^*)$ 中使 $[D, D', F, \langle x, D\cap D'\rangle] = -1$ 的直线 F，称为 x **关于** $\{D, D'\}$ **的极线**（这一名称的由来可见 14.5.6）．根据极线的概念，我们可以重新证明 6.4.4，因为，a' 关于 $\{\langle \alpha, d\rangle, \langle \beta, b\rangle\}$ 的极线是相同的，从而它经过 a 和 c（图 6.5.7）．

6.5.8 下面两个对偶的结论，其证明是相仿的：

设 $\{a, b, c, d\}$，$\{a, b', c', d'\}$ 分别是两个由共线的相异四点构成的点组；则直线 $\langle b, b'\rangle$，$\langle c, c'\rangle$，$\langle d, d'\rangle$共点$\Longleftrightarrow [a, b, c, d] = [a, b', c', d']$．对偶的结论：设射影平面上有两个四点组，分别由属于超平面束 $\{D, E, F, G\}$ 和 $\{D, E', F', G'\}$

的相异四点所构成；则点 $E\cap E'$，$F\cap F'$ 和 $G\cap G$ 共线的充要条件是

$$[D, E, F, G] = [D, E', F', G'].$$

6.5.9 6.5.8 可以换一种说法．现仅叙述其中一个结论：设 m, m' 是射影平面上两点，它们生成两个直线束 Δ, Δ'，设 $f:\Delta\to\Delta'$ 是射影变换，$f\in \mathrm{Isom}(\Delta;\Delta')$，并使

$$f(\langle m, m'\rangle) = \langle m, m'\rangle,$$

则 $\{D\cap f(D): D\in\Delta\}$ 由直线 $\langle m, m'\rangle$ 和另一直线 S 构成．在 16.1.4 中我们将会看到，当 $f(\langle m, m'\rangle) \neq \langle m, m'\rangle$ 时，

$$\{D\cap f(D): D\in\Delta\}$$

是过 m 和 m' 的圆锥曲线．

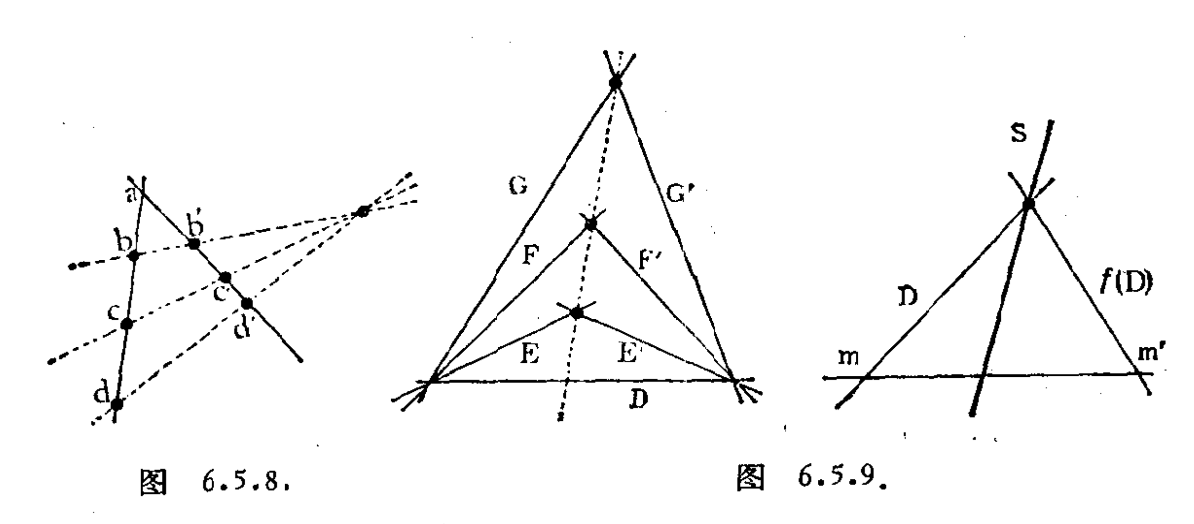


图 6.5.8.　　　　图 6.5.9.

6.5.10 交比与射影坐标． 设 $\{m_i\}_{i=0,1,\cdots,n+1}$ 是一个射影标架，x 是任意一点；根据 4.4.3，这点在标架下有坐标 $(x_1,\cdots,x_{n+1})$，在不计纯量的差别的情况下，坐标是定义好的．因此，它们是由两两之比 x_i/x_j 所确定的，这些比值在几何上表示什么呢？

6.5.11 命题． 设已给定两个指标 $i, j(i\neq j)$，H_0 和 H 是两个超平面：

$$H_0 = \langle m_1,\cdots,\hat{m}_i,\cdots,\hat{m}_j,\cdots,m_{n+1},m_0\rangle,$$
$$H = \langle m_1,\cdots,\hat{m}_i,\cdots,\hat{m}_j,\cdots,m_{n+1},x\rangle;$$

则

$$\frac{x_i}{x_j} = [m_i, m_j, \langle x_i, x_j\rangle \cap H_0, \langle x_i, x_j\rangle \cap H].$$

在所取标架相应的基 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n+1}$ (参见 4.4.2)下，直线 $\langle x_i,$ $x_j\rangle$ 上的点的坐标为 (λ, μ)，经射影变换后

$$(\lambda, \mu) \longmapsto p(\lambda e_i + \mu e_j).$$

我们有

$$(1, 0) \longmapsto p(e_i) = m_i, \ (0, 1) \longmapsto p(e_j) = m_j,$$
$$(1, 1) \longmapsto p(e_i + e_j) = \langle x_i, x_j\rangle \cap H_0,$$
$$(x_i, x_j) \longmapsto p(x_i e_i + x_j e_j) = \langle x_i, x_j\rangle \cap H,$$

这样就证明了 6.5.11 (用到 6.1.6).

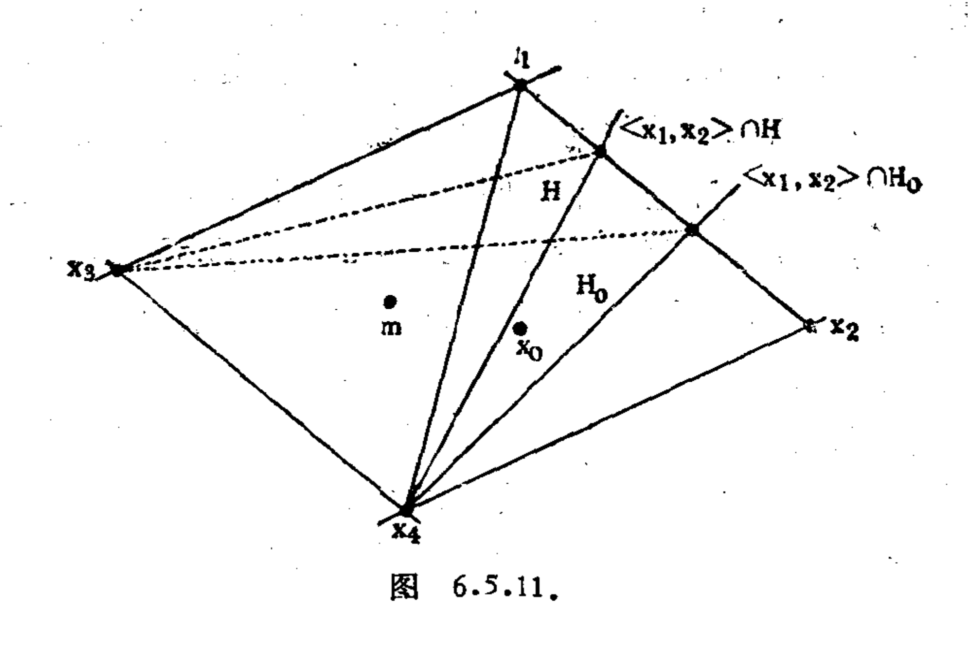


图 6.5.11.

6.6 射影直线的射影变换

有关群 GP(K) (或 GP(D)，其中 D 是射影直线，这两个群是同构的)和 GP($\tilde{K}$) 的子空间以及 GP($\tilde{K}$) 中元素的研究，已进行得很深入，尤其是在 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 的情形；其中涉及的群都很简单，但与大量的分析、数论和微分几何的概念有着联系．我们在这里只给出几个很初等的结果，它们是很不全面的；若想作更系统的研究，[GN] 是一本很好的参考书，可参阅其中第 IV 章．我

们尽管不作详细讨论，但还是给出了为数众多的参考书目，尤其是新近应用这些群所做工作的有关文献.

6.6.1　命题. 设 D 是代数闭域 K 上的射影直线，

$$f \in \mathrm{GP}(D),\ f \neq \mathrm{Id}_D,$$

则 f 有一个或两个不动点. 若 a, b 是 f 的两个相异的不动点，则交比 $[a, b, m, f(m)]$ 在 $D\backslash\{a, b\}$ 上是属于 $K\backslash\{0, 1\}$ 的常数，反之，对每一 $k \in K\backslash\{0, 1\}$，等式 $[a, b, m, f(m)] = k$ 在 D 上定义了相异不动点 a, b 的一个射影变换. 若 f 只有一个不动点 a，则 f 必为仿射直线 $D\backslash\{a\}$ 的平移.

6.6.2　根据 4.5.17，我们知道 f 至少有一个不动点（有些古典文献中也称为重点），由 4.6.9 又可知 f 不能有两个以上的不动点. 现在把一个重点 $a \in D$，$f(a) = a$，放在无穷远处，f 就限制为仿射直线 $D\backslash\{a\}$ 的一个仿射同构；在一维的情形它必定是一个扩张（参见 2.3.3.12），因而是一个位似或平移；若是以 b 为中心的位似，就有 $\overrightarrow{bf(m)} = k\overrightarrow{bm}$　$\forall m \in D\backslash\{a\}$，由此根据 6.2.5 就证得命题结论. 在有两个相异重点的情形，交比 $[a, b, m, f(m)]$ 的常值由下述引理给出.

6.6.3　引理. 设 $D = P(E)$，且 $g \in \mathrm{GL}(E)$ 使 $f = g$；若 $a, b \in D$ 是 D 的两个相异的不动点，又设 λ 和 μ 是与特征值 $x, y \in E$ 相应并使 $p(x) = a$，$p(y) = b$ 的 g 的特征值，则 $\forall m \in D$：$[a, b, m, f(m)] = \lambda/\mu$.

取射影标架 $\{a, b, m\}$ 为 $a = p(e_1)$，$b = p(e_2)$，$m = p(e_1 + e_2)$. g 的矩阵必为 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$，于是有

$$f(m) = p(\lambda e_1 + \mu e_2),$$

因此由 6.1.6 即得结论.

6.6.3.1　若基域不是代数闭域，只要有一个重点，6.6.1 仍成立. 因此命题只是在没有重点时才不成立，例如

$$K = \mathbf{R},\ M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

时，用 5.2.4 的写法就是：

$$t \longmapsto -\frac{1}{t},\ \infty \longmapsto 0,\ 0 \longmapsto \infty.$$

6.6.4 象焦点与物焦点. 在没有重点的这种一般情形，总可将射影变换表述如下. 把射影直线写为 $D = X \cup \infty$，其中 X 是仿射直线（或者等价地，在 D 上取一点称为 ∞）. 点 $a = f^{-1}(\infty)$（相应地，$b = f(\infty)$）称为 $f \in GP(D)$ 的象焦点（相应地，物焦点）；若 ∞ 不是重点，就有 $a, b \in X$. 由 6.1.4，有

$$[\infty, a, m, n] = [b, \infty, f(m), f(n)] \quad \forall m, n \in D.$$

应用 6.2.5 和 6.3.1 即得：

6.6.5 当 $\overline{am} \cdot \overline{bf(m)} =$ 常值时，$\dfrac{\overrightarrow{an}}{\overrightarrow{am}} = \dfrac{\overrightarrow{bf(m)}}{\overrightarrow{bf(n)}}$.

如果知道两个焦点和两个象点 $(n, f(n))$，由上式即可确定 f. 另外还可有 $a = b$.

"焦点"这个名称来自几何光学；射影变换是这样的变换，它在一个符合 Gauss 近似条件的有心光学系统中，把系统的轴上的一点映成它的光学象点. 为了说明这个映射正是在轴上补充无穷远点所得直线的射影变换，还可以这么考虑：经典公式已说明这个映射是关于平面或球面的屈光面或镜面的射影变换，而有心光学系统根据定义系由有限多个屈光面或镜面（或：屈光面和镜面）合成；有限多个射影变换的合成仍是射影变换，参见 4.5.9. 有关几何光学，例如可参见 [A-B]，第 4 章.

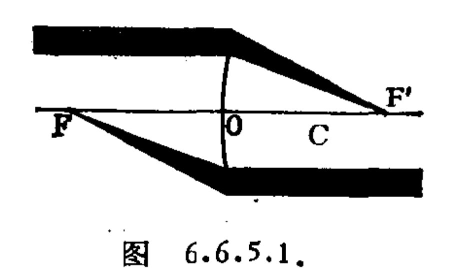


图 6.6.5.1.

6.6.6 几何结构. 关于直线的射影变换的几何结构，可见 16.3.10.1.

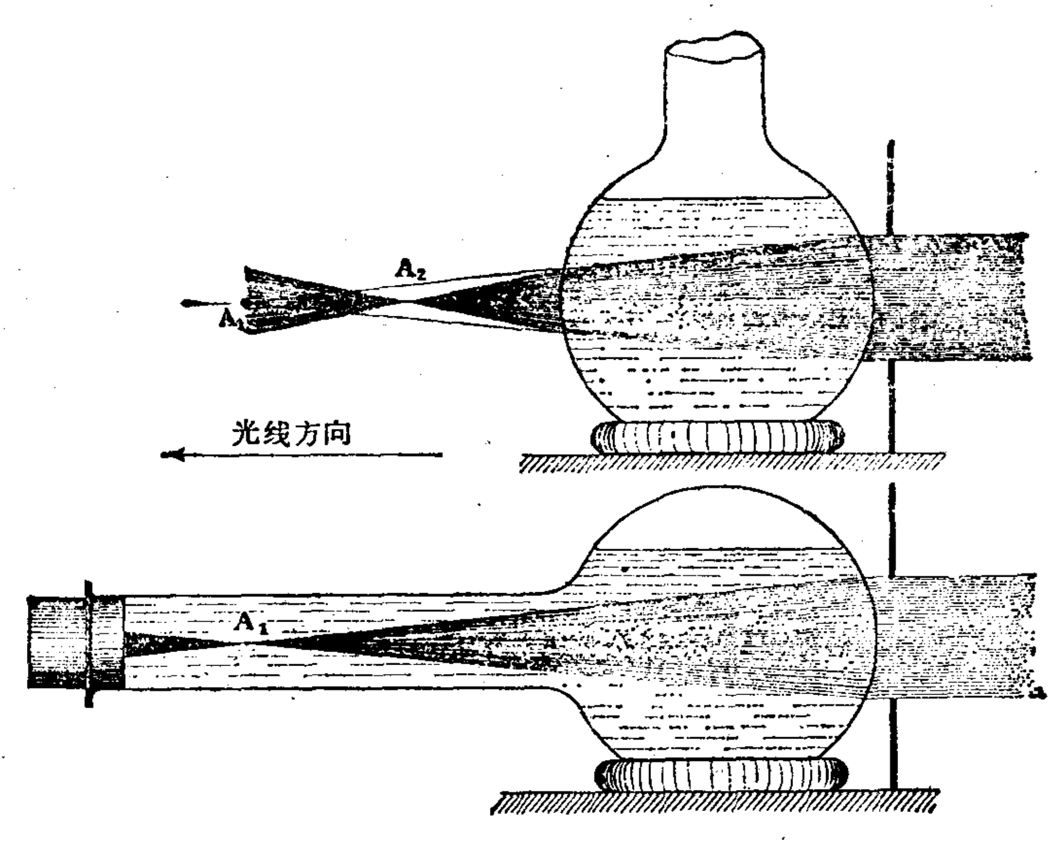


图 6.6.5.2.
引自 H. Bouasse, «初等几何光学», 巴黎 Delagrave 出版社, 1917 年.

6.6.7 附注. 在下节讨论对合射影变换之前，先列出一些讨论射影变换及其在不同数学分支中应用的一般参考条目:

[GN],第 IV 章;

微分方程: 见 6.8.12;

自守函数: 见 [SA];

双曲几何: 见第 19 章;

各种有趣的几何应用: [VL];

作为球面 S^2 实现的复射影直线的射影变换: 见 18.10.2.2 和 [CH2], 第 183 页.

6.7 对　　合

6.7.1 定义. 射影直线 D 的射影变换 f 若是对合的,即 $f^2 = \mathrm{Id}_D$, 而且 $f \neq \mathrm{Id}_D$, 则称为射影直线 D 的**对合**.

下面会看到，这个定义跟通常的对合定义稍有些不符，通常 $f=\mathrm{Id}$ 的情形是可以允许的. 由 6.6 即可得出:

6.7.2 命题. 若对合 f 有一个不动点，则它必有两个相异不动点 a, b，而且对每点 m, f 是通过 $[a, b, m, f(m)]=-1$ 来定义的;在一般情形下，f 可用仿射的方式写为

$$\overline{am}\cdot\overline{af(m)}=\text{常值},$$

其中 a 同时是 f 的象焦点和物焦点. 尤其,当 K 是代数闭域时，f 总可写为 $[a, b, m, f(m)]=-1$; 当 $K=\mathbf{R}$ 时，或者 f 有不动点,或者它在某个仿射标架下可写为 $\overline{am}\cdot\overline{af(m)}=-1$.

对合的一些简单的性质可归纳为下述命题:

6.7.3 命题. 任何射影变换是至多三个对合的乘积. 射影变换 f 是对合的充要条件是存在 m 使 $f^2(m)=m$ 且 $f(m)\neq m$. 矩阵为 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 的射影变换是对合的充要条件是 A 的迹 $=a+d=0$.

考虑对合的合成时,可以只考虑 f 有一个不动点的情形,并将这点取为 ∞;根据 6.6.2, f 就是一条仿射直线的平移 $x\longmapsto x+t$ 或位似 $x\longmapsto \lambda x$. 在第一种情况，将 $x\longmapsto -x$ 和 $x\longmapsto t-x$ 这两个对合合成起来,在第二种情况，将 $x\longmapsto \lambda/x$ 和 $x\longmapsto 1/x$ 合成起来.

取 $m=0$ 和 $f(m)=\infty$，则 $f(\infty)=0$; 根据 5.2.4 的式子，就有 $c\neq 0$, $d=0$ 和 $a=0$，因此 f 是 $t\longmapsto b/ct$，这是一个对合.

若

$$M(f)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

$$M(f^2)=\begin{pmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & bc+d^2\end{pmatrix},$$

如果要 $f^2=\lambda\mathrm{Id}$, 则 $b(a+d)=c(a+d)=0$, 因而 $a+d=0$

或 $b=c=0$. 后一种情形下 $a^2=d^2$,而由于 $f\neq \mathrm{Id}$, $a=d$ 是应排除的.

6.7.4 注. 读者容易验证下列论断: 一个对合可由两对象点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ $(a\neq b)$ 确定,两个不同的对合有一对公共的象点, 而且当 K 是代数闭域时这对公共象点是唯一的. 这些论断也可从相应的几何构造中推出, 这些构造将在 16.3.10.1 中给出. 在关于锥束的 Desargues 定理中也将碰到对合: 见 16.5.4. 最后,请参阅 [GN] 的第 IV 章,若无此书也可参看 14.8.16.

6.8 练 习

6.8.1 设 a, b, m, n, p 是射影直线上相异五点;证明

$$[a, b, m, n][a, b, n, p][a, b, p, m]=1.$$

6.8.2 利用 6.5.8 证明 Pappus 定理和 Desargues 定理(参见5.4.1 和 5.4.3).

6.8.3 考察实数轴 $\mathbf{R}$ 的射影变换 $x\longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, 讨论有否不动点与函数 $x\longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}\left(x\neq -\dfrac{d}{c}\right)$ 的增减性两者之间是否有联系.

6.8.4 找一本几何光学的书(例如,[A-B], 第 4 章), 讨论与下列对象相应的射影变换的性质: 平面镜, 凸或凹的球面镜, 平面屈光镜,球面屈光镜,薄透镜,厚透镜;并讨论该书中给出的各种化简公式.

6.8.5 对 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$, 根据射影直线的射影变换 f 的性质, 讨论重复 n 次的变换 f^n $(n\in\mathbf{Z})$ 的性态.

6.8.6 $K=\mathbf{C}$ 时,每个射影变换是两个对合的乘积吗? $K=\mathbf{R}$ 时呢?

6.8.7 设 f 是有两个相异重点 a, b 的射影变换;证明 $\{k, 1/k\}$, 其中 $k=[a, b, m, f(m)]$ $\forall m$, 只依赖于 f 而与 a, b 的次序

无关。若 f 的矩阵是 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，证明 $\{k, 1/k\}$ 是下列方程的根：

$$(ad-bc)k^2-(a^2+2bc+d^2)k+(ad-bc)=0.$$

6.8.8 在 6.8.7 的题设条件中再加上 $K=\mathbf{C}$. 若复数 k (或 $1/k$) 的模是 1，则称 f 是椭圆型的，若 k 是正实数，则称 f 是双曲型的，在其它情形下称 f 是斜驶型的. 证明：若将 $M(f)$ 法化，即置 $ad-bc=1$，则由 f 的迹 $=a+d$，可将上述三种情形分别表述为

f 是椭圆型 $\Longleftrightarrow a+d$ 是实数且 $|a+d|<2$,

f 是双曲型 $\Longleftrightarrow a+d$ 是实数且 $|a+d|>2$,

f 是斜驶型 $\Longleftrightarrow a+d$ 不是实数.

在三种情形下，分别讨论 f^n $(n\in\mathbf{Z})$ 的性态.

为了说明"斜驶"这个词的由来，以后将证明在 Riemann 球面 $\mathbf{C}\cup\infty$ 上同一点 z 处，$f^n(z)$ 都属于该球面的一条斜驶线（参见 18.1.8.2 和 18.11.3）.

6.8.9 设 f 是 $\mathbf{C}\cup\infty$ 的射影变换；证明：设 f 的矩阵为 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则 f 使上半平面 $H=\{z\in\mathbf{C}:\mathrm{Im}(z)>0\}$ 稳定的充要条件是 a, b, c, d 都是实数而且 $ad-bc>0$. 作为 6.8.8 的特例，在这种情形下讨论 f 以及 f^n 的不动点的性态. 证明：若 f 和 g 都使 H 不动，而且可交换，则它们必有相同的不动点.

6.8.10 沿用 6.3.2 的记号. 证明 $\{4\}$ 的稳定群同构于 $\mathfrak{S}_3$，而且当 $K\neq F_4$ 时这个稳定群的作用是一意的.

6.8.11 设 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 是 $\mathbf{C}$ 上的四次方程. a, b, c, d 满足什么条件时这个方程四个根的交比在 $\{-j, -j^2\}$ 中（参见 6.3.2 (ii)）？若要四根成调和分割，条件又如何？（结论相当复杂.）最后，将四根交比的六个值都写成 a, b, c, d, e 的函数（非常繁复；参见 [DX]，第 43—51 页）.

6.8.12 **Ricatti 方程.** 对连续函数 a, b, $c:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$，考虑称为 Ricatti 方程的下列微分方程：

$$y'(t) = a(t)y^2 + b(t)y + c(t);$$

证明这个方程的四个根 $y_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 的交比 $[y_i(t)]$ 与 t 无关.

6.8.13 设K是非交换的,E是K上的二维向量空间,a, b, c, d是射影直线 $P(E)$ 上相异四点. 若存在 $u, v \in E$ 使 $a = p(u)$, $b = p(v)$, $c = p(u + v)$, $d = p(\xi u + v)$, 则称这样的 $\xi \in K$ 的集合为 (a, b, c, d) 的交比,记为 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. 证明 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是交换群 K^* 的元素(关于内自同构)的共轭元素的集合. 叙述并证明逆命题. 讨论这两个命题与本章中关于交比的内容的联系.

6.8.14 设K是紧凸集,从而边界点集是由有限维实仿射空间的端点组成的, 而且内部非空. 定义函数 $d:\mathring{K} \times \mathring{K} \to \mathbf{R}$ 如下: $d(m,m) = 0 \quad \forall m \in \mathring{K}$, 当 $m \neq n$ 且 $m, n \in \mathring{K}$ 时

$$d(m, n) = \frac{1}{2}\left|\log([m, n, \alpha, \beta])\right|,$$

其中 α, β 表示直线 m, n 与K的边界的两个交点. 证明 d 是定义好的,并使 $\mathring{K}$ 成为度量空间. 证明: 只要 $m, n \in \mathring{K}$, 总存在唯一的一条从m到n的最短路径,即线段 $[m, n]$ (参见 9.9.5).

6.8.15 讨论非交换的体上的射影直线的射影变换.

6.8.16 证明$\mathbf{C} \cup \infty$ 中任何使单位圆盘 $D = \{z \in \mathbf{C}: |z| \leqslant 1\}$ 整体稳定的射影变换都有下述形式:

$$z \longmapsto e^{i\theta}\,\frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}$$

(θ 是实数, $|z_0| < 1$); 证明这些射影变换所成的群在 $\mathring{D}$ 上双重可迁(参见 1.4.5)且保持 6.8.14 中定义的 $\mathring{D}$ 上的距离. 试与 19.6.9 比较.

6.8.17 设 $(a_i)_{i=1,\cdots,5}$ 是射影平面上相异五点,其中前四点构成射影标架. 记直线 $\langle a_i, a_j\rangle$ 为 d_{ij}. 证明恒有

$$[d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{15}][d_{23}, d_{21}, d_{24}, d_{25}][d_{31}, d_{32}, d_{34}, d_{35}] = 1.$$

证明: 存在射影变换将 $(a_i)_{i=1,\cdots,5}$ 变到 $(a'_i)_{i=1,\cdots,5}$ 的充要条

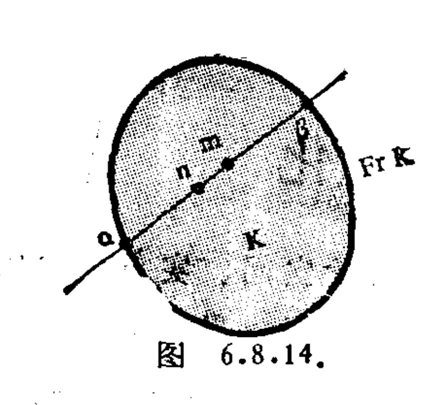


图 6.8.14.

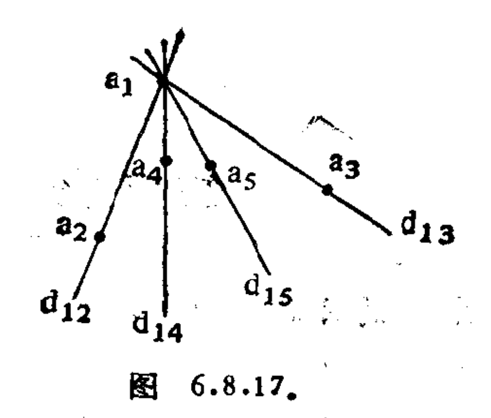


图 6.8.17.

件是下列两式成立:

$$[d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{15}] = [d'_{12}, d'_{13}, d'_{14}, d'_{15}],$$

$$[d_{23}, d_{21}, d_{24}, d_{25}] = [d'_{23}, d'_{21}, d'_{24}, d'_{25}],$$

其中 $d'_{ij} = \langle a'_i, a'_j \rangle$. 推广到任意有限维射影空间的情形.

6.8.18 讨论非交换体情形下的调和分割概念. 这时 6.4.10 会变成怎样?

6.8.19 为什么在图 6.4.8 中没有画出 c 点?

6.8.20 **直纹面.** 设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个直纹面, 即 $\mathbf{R}^3$ 中一族以 t 为参数 (t 取遍 $\mathbf{R}$ 的开区间 I) 的直线的并集 $\bigcup_{t\in I} D(t)$. 假设在 $D(t_0)$ ($t_0 \in I$) 的每点 m 处, 曲面 S 是 $\mathbf{R}^3$ 的微分子流形, 并记 m 处的切平面为 $T(m)$; 证明 $m \longmapsto T(m)$ 是射影变换或常映射. 试与 14.4.4 比较.

6.8.21 设 $\mathscr{C}$ 是三维射影空间中的一个四面体, D 是一条直线. 证明 D 与 $\mathscr{C}$ 的各面的四个交点的交比等于分别经过 D 和 $\mathscr{C}$ 的各顶点的四个平面的交比.

6.8.22 见练习 14.8.16.

第7章 复 化

本章的目的是以内在的方式定义实向量空间、实射影空间和实仿射空间的复化空间。然后讨论仿射和射影映射以及子空间的复化问题。最后证明(第7.6节),从一个实仿射空间出发,先将它射影完备化,再将这个射影空间复化,跟先将它复化再将复仿射空间射影完备化是一回事。在以内在的方式引进欧氏仿射空间的虚圆点概念时,将要用到上面的结果(参见9.5.5)。

只要知道X的泛向量空间$\hat{X}$(第3章和第5章)的存在,在我们的论述中就不会有什么实质性的困难;但因这种构造性的论证很冗长,在引言中先作了一番很初等、很简捷、但并非内在的概述。

i 表示 $\mathbf{C}$ 的点$(0,1)$.

7.0 引 言

7.0.1 我们需要复化各种不同的对象,举例来说:复化实向量空间及其自同态,以找出特征平面(7.4.3),复化欧氏空间及定义这些欧氏空间的二次形式,以得到迷向元素并找出相似性的特点(8.8.6.4),复化射影空间,以得到虚圆点(9.5.5). 这里要用到数学上的一个基本原理:正如 Hadamard 所说的,“两个实的情形的结论之间的最短路径往往要经由复的情形.”

7.0.2 一种最简单的,对于本书亦已敷用的做法如下:若要复化有限n维向量空间E,先取E的一个基,并通过

$$E \ni x=(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{C}^n$$

将E嵌入$\mathbf{C}^n$,其中x_i是x在所取基下的坐标. 对有限n维的实仿射空间,做法也是一样的: 先取仿射标架,再在$\mathbf{C}^n$上引进自

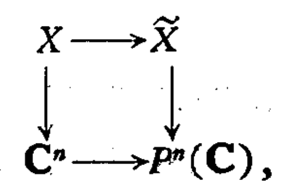
然的仿射结构（参见 2.2.1）．若要复化欧氏空间并同时复化定义该欧氏空间的二次形式，则可如上所述地取基并作嵌入 $E\to\mathbf{C}^n$，如果原来的二次形式在所取基下表为 $\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j$，现在就在 $\mathbf{C}^n$ 上引进二次形式 $\sum_{ij}a_{ij}z_iz_j\ \forall(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n$．至于复化实射影空间，则可从定义该射影空间的向量空间的复化向量空间出发，以得出复化的射影空间．

最后，我们所要遇到的最复杂的情形是：X 是实仿射空间，$\tilde{X}$ 是它的射影完备化空间（参见 5.1），而我们要同时复化 X 和 $\tilde{X}$，使所得的复射影空间是所得的复仿射空间的射影完备化空间．不过，取 X 的仿射标架后，这问题不难解决；沿用 5.0.2 的记号，我们将 X 在 $\mathbf{C}^n$ 中复化，并作嵌入 $X\to\mathbf{C}^n$ 如 7.0.2. X 的射影完备化空间 $\tilde{X}$ 等同于 $P^n(\mathbf{C})$，嵌入 $X\to P^n(\mathbf{R})$ 则是

$$(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto(x_1,\cdots,x_n,1).$$

但 $P^n(\mathbf{R})$ 的复化空间自然是 $P^n(\mathbf{C})$，因为 $P^n(\mathbf{R})\subset P^n(\mathbf{C})$ 显然是一个包含关系；这样，由 $(z_1,\cdots,z_n)\longmapsto p(z_1,\cdots,z_n,1)$ 给出的嵌入 $\mathbf{C}^n\to P^n(\mathbf{C})$，就是从 $\mathbf{C}^n$ 到它的射影完备化空间的嵌入（$\mathbf{C}^n$ 是复仿射空间），因而下图是交换的：

7.0.2.1



$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{C}^n & \longrightarrow & P^n(\mathbf{C}), \end{array}$$

其中竖箭头表示复化，横箭头表示射影完备化．

7.0.3 上面的做法对本书来说已经够用．不过，7.0.2 中的构造过程有一个根本的缺陷，就是作为前提地涉及到了坐标的选取；这种美中不足或许可以说成有违于数学思维上的探索精神、形式上的完美典雅和构造上的内在性要求． 这个问题并非自今日始；关于 7.0.2 的构造，围绕着“Poncelet 连续性原理”，在历史上引起过长久的论战．下面摘引两段文字．第一段引自 [GX]，第 72 页，是阐述上述原理的：“假想有一个由点、直线和曲线组成的图形 F，并假定图形 F 通过连续变形改变位置．假定在这个图形到达的

某个位置 F' 处，它的某些元素成为虚元素，那么，原先运用这些元素建立起来但与这些元素本身无关的 F 的性质在 F' 中仍保持。”这一原理涉及代数几何，已超出复化空间的讨论范围，而我们在这里摘引它，一方面是由于它在历史上的作用，另一方面则是因为它与 7.0.2 有某些联系。第二段引文摘自[DX]，第 15 页，原书写于在几何中刚开始使用复数到用内在方式进行复化的过渡时期："然而，在此先回答一种反对意见是不无裨益的，这种意见是由 Von Staudt 对复数的解析理论提出的，但同样也适用于上文阐述的内容。这位博学的几何学家声称，虚点(如同我们所定义过的)可以说只是一种依赖于坐标轴的存在。这种责难可以针对用到这样的轴的一切讨论。为了回答这种责难，只须证明当一个虚点属于一个或几个曲面时，坐标改变后它仍属于这些曲面。如果对实点已证妥的坐标变换公式对虚点和无穷远点仍适用的话，上述结论就是不言而喻的了。”

7.0.4 于是，一种折衷的办法是：用 7.0.2，但在每一步，只要有必要，都验证一下在复化空间所讨论的对象只与原空间的这些对象有关，而与所取的基无关。举例来说，在同时复化一个欧氏向量空间及其二次形式时，我们可以验证复化空间的迷向锥只与这个欧氏结构有关。

7.0.5 以上的分析说明，对 7.0.2 所说的构造给出一种内在的表述是不无好处的；这正是这一章的目标。但是，为了得到那点裨益，最终要花费相当大的代价；正因如此，我们一则在 7.0.2 就具体说明了复化的结构（不是内在的，但很清楚），二则将本章写得很简约。第一，未给出非关键的证明的细节，有些内容的阐述也很简略。第二，为了写起来方便，读起来又不费神，我们只定义具体的规范复化，而没定义更好的(然而代价也更高的)复化概念(定义这个概念必须证明在不计同构差别情形下的存在性和唯一性)。关于这种漂亮的定义方法，可见［FL］，第 144—155 页。

7.0.6 **附注**．读者可能会想，复化的概念是否还能推广呢？对此，例如可参阅［GN］，第 IV 章中关于二次扩张的内容(扩张 $\mathbf{C}\supset\mathbf{R}$

的推广)。

7.1 实向量空间的复化

复化一个实向量空间，就是将它嵌入到一个尽可能小的复向量空间中去，就象将 $\mathbf{R}$ 嵌入 $\mathbf{C}$ 那样。现在给出一种很自然的复化定义：

7.1.1 定义. 设 E 是实向量空间，E 的复化空间，记为 E^C，就是带有下述 $\mathbf{C}$ 上向量空间结构的乘积空间 $E \times E$:

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y'),$$
$$(\lambda + i\mu)(x,y) = (\lambda x - \mu y, \lambda y + \mu x).$$

我们通过 $x \longmapsto (x, 0)$ 将 E 嵌入 E^C. E^C 到自身中的对合映射

$$\sigma:(x,y) \longmapsto (x,-y)$$

称为 E^C 中的共轭映射. 我们有

$$E = \operatorname{Ker}(\sigma - \mathrm{Id}_{E^C}) = \{z \in E^C : \sigma(z) = z\}.$$

7.1.2 注

7.1.2.1 共轭映射 σ 是半线性的: $\sigma(\lambda z) = \bar{\lambda}\sigma(z)$.

7.1.2.2 有了7.1.1之后，我们看到 $i(y,0) = (0,y) \cong iy$，因此可以写 $(x,y) = x + iy$ 和 $E^C = E \oplus iE$（实直和）；从而

$$\sigma(x+iy) = x - iy,$$

这就说明了它何以叫共轭映射.

7.1.2.3 复化空间的其它定义例如有:

$$E^C = L_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}; E) = \{f: \mathbf{C} \to E,\ f \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上线性}\},$$
$$E^C = E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}.$$

一般的定义请参阅 [FL]，第 146 页.

7.1.3 基. 设 $\{e_s\}_{s=1,\cdots,n}$ 是 E 的一个基；则 $\{e_s\} \subset E^C$ 仍是 E^C 的一个 $\mathbf{C}$ 上(而不是 $\mathbf{R}$ 上!)的基. 这就递推地证实了 7.0.2 中的构造的合理性. 反过来，若 $\{e'_s\}_{s=1,\cdots,n}$ 是 E^C 的任何一个 ($\mathbf{C}$ 上的)基，则关键所在是: $2n$ 个向量

$$\{e'_s + \sigma(e'_s)\} \cup \left\{\frac{1}{i}(e'_s - \sigma(e'_s))\right\}$$

都在 E 中,因为它们在 σ 下不变; 因而这 $2n$ 个向量可取作 E 的一个 $\mathbf{R}$-基。

7.2 $\bullet^C$ 的函子性质或态射的复化

7.2.1 命题. 设 E, E' 是两个实向量空间, $f \in L(E;E')$, 则唯一地存在 $f^C \in L_{\mathbf{C}}(E^C; E'^C)$ 使 $f^C|_E = f$. 而且对 E 和 E' 中的共轭映射 σ 有 $\sigma \circ f^C = f^C \circ \sigma$. 最后, $\bullet^C$ 是有函子性质的,即

$$(\mathrm{Id}_E)^C = \mathrm{Id}_{E^C},$$

而且若 $f \in L(E;E')$, $g \in L(E';E'')$, 则 $(g \circ f)^C = g^C \circ f^C$.

证明 7.2.1,只须注意到 f^C 必为:

$\forall x, y \in E$,

$f^C(x + iy) = f(x) + if(y)$ (参见 7.1.2.2).

$$\begin{array}{ccc} E^C & \xrightarrow{f^C} & E'^C \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ E^C & \xrightarrow[f]{} & E'^C \end{array}$$

7.2.2 若 $M(f)$ 是 f 在 E 和 E' 的两个基下的转移矩阵, 则在这两个基被看作 E^C 和 E'^C 的基时(参见 7.1.3), $M(f^C) = M(f)$.

7.3 多项式的复化

7.3.1 命题. 设 $\varphi: E \times \cdots \times E \to \mathbf{R}$ 是一个实向量空间 E 上的 k 重线性映射,则存在唯一的($\mathbf{C}$ 上的) k 重线性映射

$$\varphi^C: E^C \times \cdots \times E^C \to \mathbf{C}$$

使 $\varphi^C|_{E \times \cdots \times E} = \varphi$. 而且,当 φ 对称时, φ^C 也对称.

φ^C 应为:

7.3.2 $\varphi^C(x_1 + iy_1, \cdots, x_k + iy_k) = \sum_P i^{\#P} \varphi(X_1^P, \cdots, X_k^P)$,

其中 P 取遍 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的 2^k 个子集，$\# P$ 表示 P 的基数，X_s^P 在 $s \in P$ 时等于 x_s，在 $s \notin P$ 时等于 y_s. 可验证 φ^C 满足命题要求.

7.3.3 例. $k = 2$ 时，

$$\varphi^C(x + iy, x' + iy') = \varphi(x, x') - \varphi(y, y') + i(\varphi(x, y') + \varphi(x', y)).$$

7.3.4 命题. 若 $f \in \mathscr{P}_k(E)$；则存在唯一的 $f^C \in \mathscr{P}(E^C)$ 使

$$f^C|_E = f.$$

由 3.3.1，我们可以假定 f 是 k 次齐次的；因而可设 $f = \varphi \circ \Delta$，其中 $\varphi: E^k \to \mathbf{R}$ 是多重线性、对称的. 令 $f^C = \varphi^C \circ \Delta^C$，其中 φ^C 是 7.3.1 中的映射，$\Delta^C: E^C \to E^C \times \cdots \times E^C$ 是对角映射，则 f^C 满足命题要求；而且它是唯一的，因为根据 3.3.1 的唯一性和 7.3.1 的唯一性，φ^C 是完全确定的.

7.3.5 要在 E 的一个基下将 f^C 写成坐标形式，只须在 3.3.3 的两个表达式中将实数 λ_s 换成复数.

7.4 子空间与复化

7.4.1 命题. 设 E 是实向量空间，F 是 E 的向量子空间，则由 E^C 的子集 F 所生成的 E^C 的（$\mathbf{C}$ 上的）向量子空间为

$$F^C = F + iF = \{x + iy: x, y \in F\};$$

称之为 F（在 E^C 中）的**复化空间**. 我们有 $\sigma(F^C) = F^C$. 反过来，若 $S \subset E^C$ 是 E^C 的（复）向量子空间且使 $\sigma(S) = S$，则 $S \cap E$ 是 E 的（实）向量子空间，其实维数 $\dim_{\mathbf{R}}(S \cap E)$ 等于 S 的复维数 $\dim_{\mathbf{C}} S$；而且 $S = (S \cap E)^C$.

仅逆命题部分不很显然. 我们有：$S \cap E$ 是 E 的向量子空间，$(S \cap E)^C \subset S$；为证由 $\sigma(S) = S$ 推出 $(S \cap E)^C = S$，只须用到 7.1.3 中的思想：对任一 $x \in S$，$x + \sigma(x)$ 和 $(1/i)(x - \sigma(x))$ 都在 $S \cap E$ 中. 而

$$x = \frac{1}{2}\left[(x+\sigma(x)) + i\left(\frac{1}{i}(x-\sigma(x))\right)\right]$$
$$\in (S\cap E) + i(S\cap E) = (S\cap E)^C.$$

7.4.2 附注. 首先,很难作出图形来,因为最起码的非平凡情形是 $\dim_{\mathbf{C}} S = 1$, $\dim_{\mathbf{C}} E = 2$, 因而 $\dim_{\mathbf{R}} E = 4$! 其次, $\sigma(S) \neq S$ 时 7.4.1 不成立;例如在 $E = \mathbf{R}^2$, $E^C = \mathbf{C}^2$ 时取

$$S = \{(z, iz): z \in \mathbf{C}\};$$

就有 $S\cap \mathbf{R}^2 = 0$, 因此 $(S\cap E)^C = 0$!

图 7.4.2.

以后我们会看到 σ (参见 7.1.1, 7.2.1 和 7.4.1) 的系统的应用;总的原则是对 E^C 经常要想到用共轭映射 σ. 事实上可以证明,给定 E^C 和 σ, 与给定 E 和 E^C 是等价的: 参见 [FL], 第 146 页,其中以此作为复化空间的定义.

7.4.3 推论. 设 $f \in L(E; E)$ 是有限维实向量空间中的一个自同态;则至少存在一个关于 f 的特征向量子空间 P,即 $f(P)\subset P$, 且其维数为 1 或 2.

设 V 是 E^C 的关于 E^C 中自同态 f^C 的一条特征直线,相应的特征值是 λ;则 $\sigma(V)$ 是一条相应于 $\bar\lambda$ 的特征直线(参见 7.1.2.1),因而复向量子空间 $S = V + \sigma(V)$ 在 σ 下稳定 (且维数为 1 或 2). 推论中的 E 的子空间就是 $E\cap S$.

7.4.4 推论 7.4.3 是复自同态的特征向量存在性命题在实的情形下的说法,它有很广泛的应用: 参见 8.2.15, 13.5.

7.5 射影空间的复化

7.5.1 定义. 设 $\mathscr{P} = P(E)$ 是实射影空间; $\mathscr{P}$ 的复化空间 $\mathscr{P}^C$ 就是复射影空间 $\mathscr{P}^C = P(E^C)$. 在包含映射 $E\backslash 0 \to E^C\backslash 0$ 所诱导的商空间的映射下,我们把 $\mathscr{P}$ 等同于 $\mathscr{P}^C$ 的一个子集. $\mathscr{P}^C$ 中的共轭映射 σ,就是 σ: $E^C\backslash 0 \to E^C\backslash 0$ 在商空间所诱导的映射

$$\mathscr{P}^C \to \mathscr{P}^C.$$

7.5.2 我们注意到，$\mathscr{P}$ 不是 $\mathscr{P}^C$ 的射影子空间，正如 E 不是 E^C 的(复)向量子空间一样．同时也注意到，$\sigma: \mathscr{P}^C \to \mathscr{P}^C$ 保持几点共线的性质，事实上 σ 是一个半射影映射，参见 5.4.8．最后，($\mathbf{R}$ 上的)$\mathscr{P}$ 和($\mathbf{C}$ 上的) $\mathscr{P}^C$ 的维数相同，正如 E 和 E^C 的情形一样．

7.5.3 命题． 对任一 $f \in \mathrm{GP}(E)$ (E 是向量空间)，存在唯一的 $f^C \in \mathrm{GP}(E^C)$，使 $f^C|_{P(E)} = f$.

7.5.4 命题． 设 $\mathscr{P}$ 是实射影空间，$S \subset \mathscr{P}$ 是一个射影子空间，则 $\mathscr{P}^C$ 中由 $\mathscr{P}^C$ 的子集 S 所生成的(复)射影子空间 S^C 满足

$$\sigma(S^C) = S^C, \quad S = S^C \cap \mathscr{P},$$

并称为 S (在 $\mathscr{P}^C$ 中)的**复化空间**．反过来，设 T 是 $\mathscr{P}^C$ 的复射影子空间且使 $\sigma(T) = T$，则 $T \cap \mathscr{P}$ 是 $\mathscr{P}$ 的(实)射影子空间，其维数等于 T 的复维数，而且 $(T \cap \mathscr{P})^C = T$.

7.5.5 具体计算． 利用在 E 的基或 $P(E)$ 的射影标架下的齐次坐标，即可进行计算；这种基或标架仍是 E^C 的基或 $P(E^C)$ 的(复)射影标架，只须将实坐标换成复坐标就可以了（这证实了 7.0.2 的合理性.）

7.6 仿射空间的复化

7.6.1 设 $(X, \vec{X})$ 是实仿射空间；将 X 嵌入泛向量空间 $\hat{X}$ 并考察包含关系 $X \subset \hat{X} \subset (\hat{X})^C$，其中 $\hat{X}^C$ 表示实向量空间 $\hat{X}$ 的复化．我们记得（参见 3.1.7）：$X = M^{-1}(1)$，其中 M 是 $\hat{X}$ 上的线性形式．根据 7.2.1，存在一个线性形式 $\hat{X}^C \to \mathbf{C}$ 是 $M: \hat{X} \to \mathbf{R}$ 的复化，记之为 M^C，它是定义好的(参见 7.2.1)；最后，令

$$X^C = (M^C)^{-1}(1) \subset \hat{X}^C.$$

这个 X^C 是复仿射空间 $\hat{X}^C$ (取自然结构，参见 2.2.1)的(复)仿射超平面，因而是复仿射空间.

7.6.2 定义．命题． 作为定义，实仿射空间 X 的**复化空间**就是复

仿射空间 $X^C=(M^C)^{-1}(1)$. X^C的底空间是 $\vec{X}^C=\vec{X}^C$ 且很自然地有 $X\subset X^C$. 而且 X^C 的共轭映射 σ 使 X^C 不动: $\sigma(X^C)=X^C$, $X=\{z\in X^C:\sigma(z)=z\}$. σ 在 X^C 上的限制仍记为 σ 并称为 X^C 的**共轭映射**. 对任一点 $a\in X$ 处的向量化空间,有 $(X^C)_a=(X_a)^C$; 且有自然同构 $(\hat{X})^C=\widehat{(X^C)}$. X^C 的底向量空间是 $(M^C)^{-1}(0)$, 由于 $M^{-1}(0)=\vec{X}$, 上面的空间就是 $\vec{X}^C$. 另外由 7.2.1 有

$$\sigma(X^C)=\sigma((M^C)^{-1}(1))=(M^C)^{-1}(\sigma(1))=(M^C)^{-1}(1)=X^C.$$

而且 $\sigma(z)=z$, $z\in X^C$ 等价于 $z\in X^C\cap\hat{X}=X$. 等式 $(X^C)_a=(X_a)^C$ 可由 3.1.7 最后一段推出. 关于同构 $(\hat{X})^C\cong\widehat{(X^C)}$, 只须注意泛空间 $\widehat{\bullet}$ 的定义.

7.6.3 命题. 设 X, X' 是两个实仿射空间, $f\in A(X;X')$ 是仿射映射,则存在唯一的 $f^C\in A_C(X^C;X'^C)$ 使 $f^C|_X=f$. 这个 f^C 称为 f 的**复化**. 而且, $\sigma\circ f^C=f^C\circ\sigma$.

对向量化空间 X_a 和 $X'_{f(a)}$ 用 7.2.1 并利用 7.6.2 的最后部分,即得命题.

7.6.4 对实仿射空间 X 及其复化空间 X^C 和共轭映射 σ, 也有关于 X 的仿射子空间的跟 7.4.1 相似的结论. 而且关于方向有:

$$\vec{S}^C=\overrightarrow{S^C}.$$

7.6.5 同样,我们将 7.3 推广到 X 上的多项式;这只要用到 3.3.14, 7.6.2 和 7.3.4.

7.6.6 现在我们可以转到讨论 7.0.2 的结构和 7.0.2.1 的图了, 它们是本章的主要目标,而且在 9.5.5 和第 17 章中将被广泛地应用. 设 X 是实仿射空间,其射影完备化空间(参见第 5 章)为

$$\tilde{X}=P(\hat{X})=X\cup P(\vec{X})=X\cup\infty_X;$$

作出 X^C, $\hat{X}^C$ 以及实射影空间 $P(\hat{X})=\tilde{X}$ 的复化射影空间 $(\tilde{X})^C=P(\hat{X}^C)$. 于是在 $(\tilde{X})^C$ 中有实子空间 ∞_X 的复化空间,即 ∞_X^C (参见 7.5.4). 我们有包含关系 $X^C\subset P(\hat{X}^C)=(\tilde{X})^C$; 于是:

7.6.7 引理. $X^C = (\tilde{X})^C \backslash \infty_X^C$.

事实上，$\infty_X = P(\vec{X})$，因此 $\infty_X^C = P((\vec{X})^C)$，而 $\overrightarrow{(X^C)} = (\vec{X})^C$（参见 7.6.4）.

7.6.8 命题. 包含映射 $X^C \subset P(\hat{X}^C) = (\tilde{X})^C$ 等同于 X^C 到其(复)射影完备化空间中的自然包含映射. 因而 $(\tilde{X})^C = \widetilde{(X^C)}$.

7.6.9 若 $f \in \mathrm{GA}(X)$，则存在唯一的 $\tilde{f}^C \in \mathrm{GP}_{\tilde{X}^C}(X^C)$ 使

$$\tilde{f}^C|_{X^C} = f^C.$$

用 5.2.2 即可得证.

7.6.10 关于子空间可有相应的结论.

7.6.11 用命题 7.6.8 可递推地证实 7.0.2 中的构造和交换图.

7.7 练　　习

7.7.1 写出并证明 7.2.1 中公式 $\sigma \circ f^C = f^C \circ \sigma$ 的逆命题.

7.7.2 对 $f \in L(E; E')$，讨论是否存在一个嵌入 $\bar{f}: E^C \to E'^C$，使得 $\bar{f}$ 关于 $\mathbf{C}$ 的自同构—(共轭映射)是半线性的(参见 2.6.2).

7.7.3 讨论 7.5.3 如何推广到任意的射影映射

$$f \in M(P(E); P(E')).$$

7.7.4 写出 7.6.4，7.6.5 和 7.6.10 的细节.

7.7.5 证明张量积 $E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ 是 E 的自然复化空间；$\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}; E)$ 亦然.

补 充 图 形

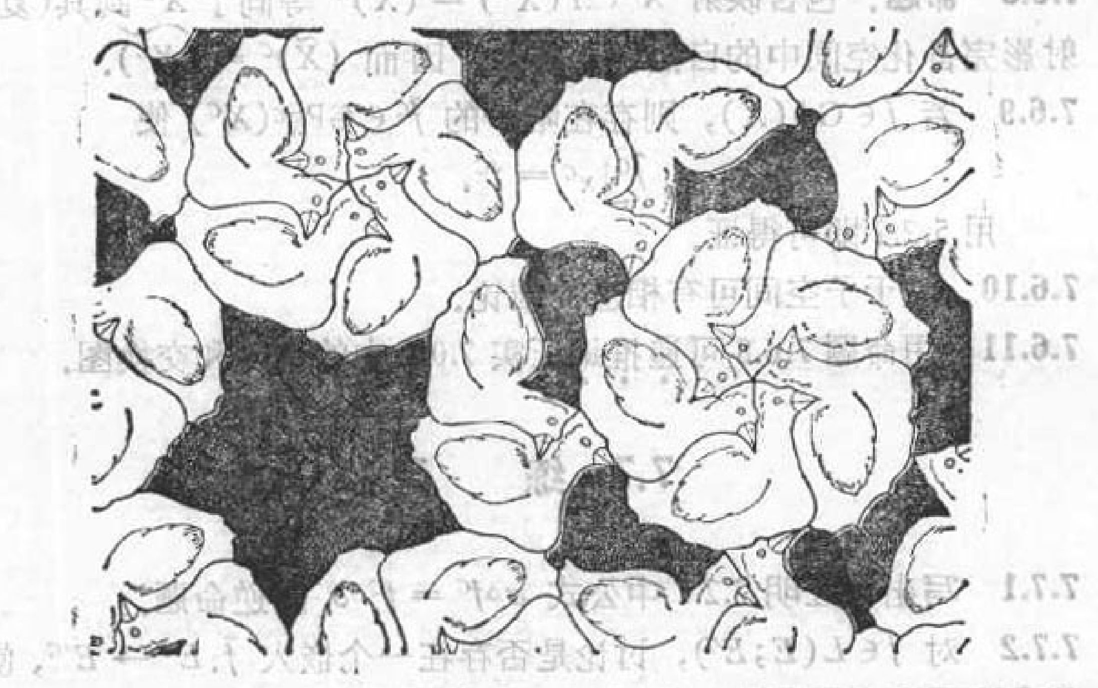


图 170.1.

两种母鸡：它们可以拼满平面，但拼嵌方式不可能是周期性的（见 1.9.16）.

.8.3.2.

图 170.2.



图 171.

Charles Dupin 男爵,《美术与工艺美术中的几何与力学》, Bachelier, 1825 年.

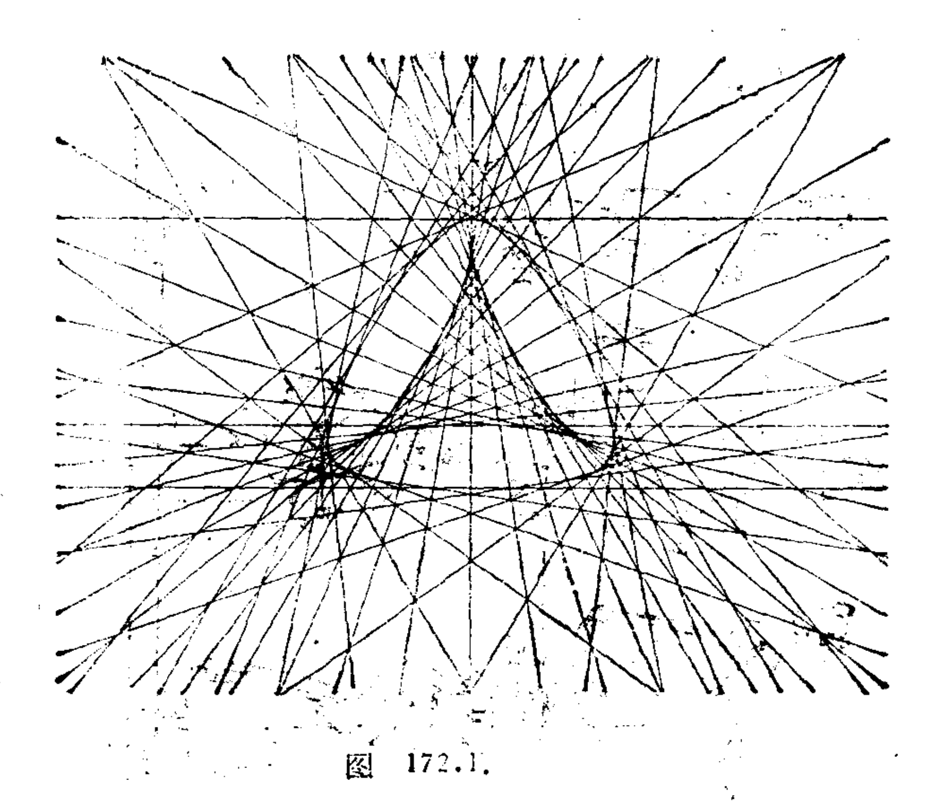


图 172.1.

图 172.2.

LA
PERSPECTIVE
SPECVLATIVE
ET
PRATIQVE

OV SONT DEMONSTREZ LES FONDEMENS de cet Art, & de tout ce qui en a esté enseigné jusqu'à present.

Ensemble la maniere vniverselle de la pratiquer, non seulement sans Plan Geometral, & sans Tiers poinct, dedans ni dehors le champ du Tableau.

Mais encores par le moyen de la Ligne, communément appellée Horisontale.

De l'invention du feu Sieur ALEAVME, Ingenieur du ROY.

MISE AV IOVR

Par ESTIENNE MIGON, Professeur ès Mathematiques.

A PARIS,

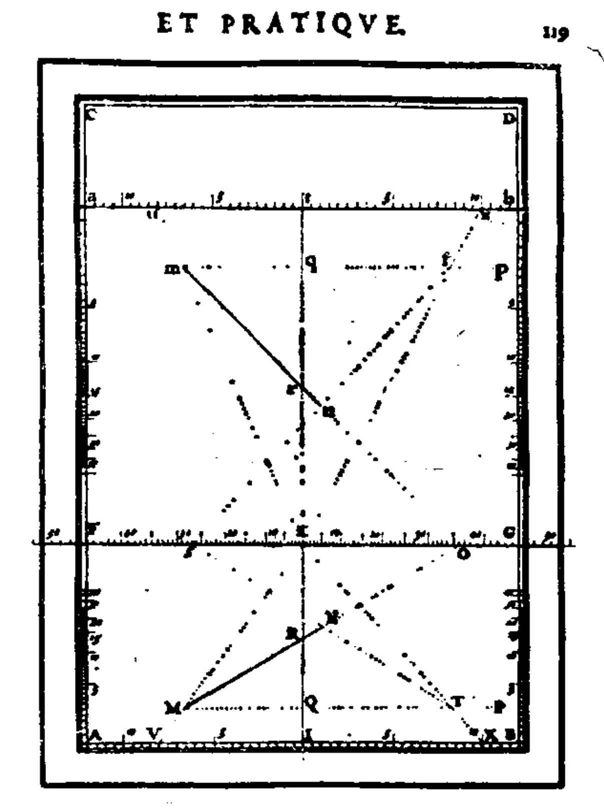
Chez MELCHIOR TAVERNIER, Hydrographe, Graveur, & Imprimeur du Roy, pour les Cartes Geographiques, & autres Tailles douces, sur le Quay qui regarde la Megisserie, à la Sphere.

ET

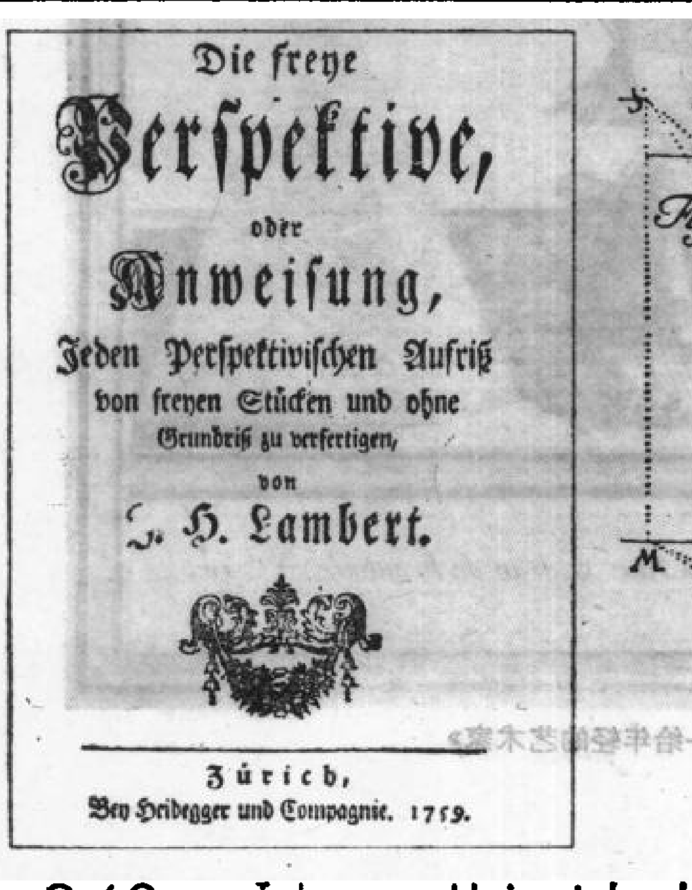
Chez FRANCOIS LANGLOIS, dit CHARTRES, en la rue Sainct Iacques, aux Colonnes d'Hercules, proche le Lion d'Argent.

M. DC. XLIII.

AVEC PRIVILEGE DV ROY.



8.45 Estienne Migon



Die freye

Perspektive,

oder

Anweisung,

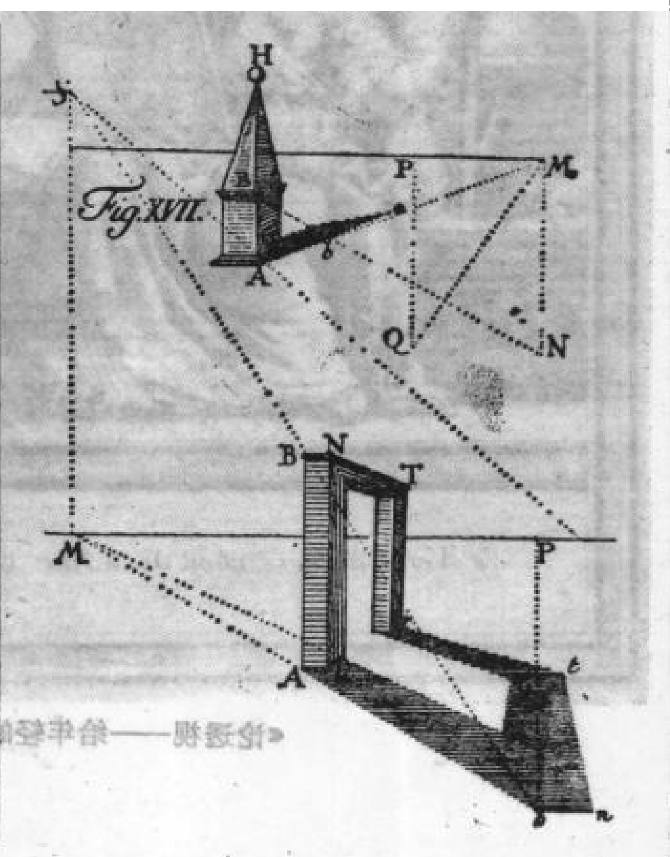
Jeden Perspektivischen Aufriß von freyen Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen,

von

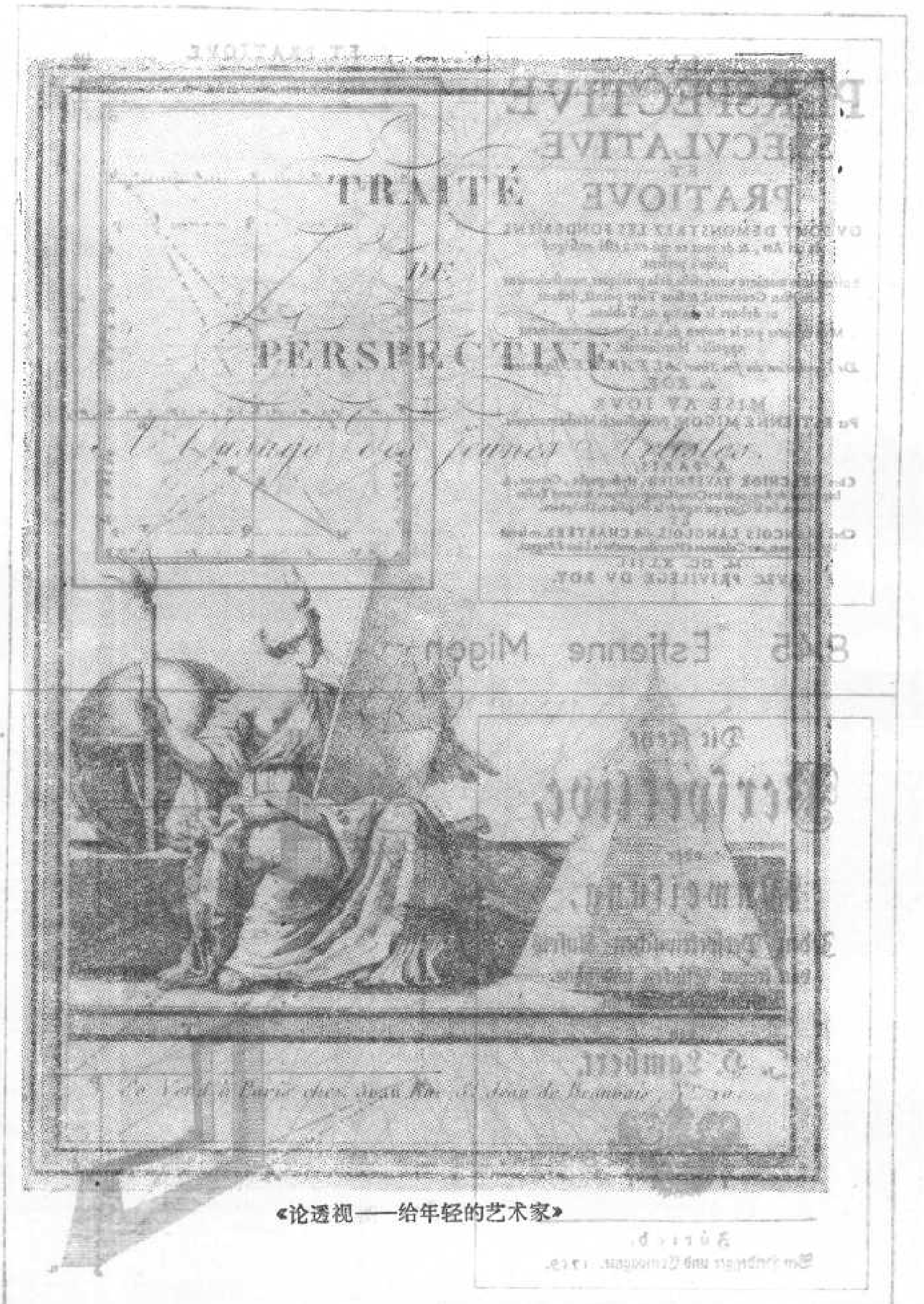
J. H. Lambert.

Zürich,

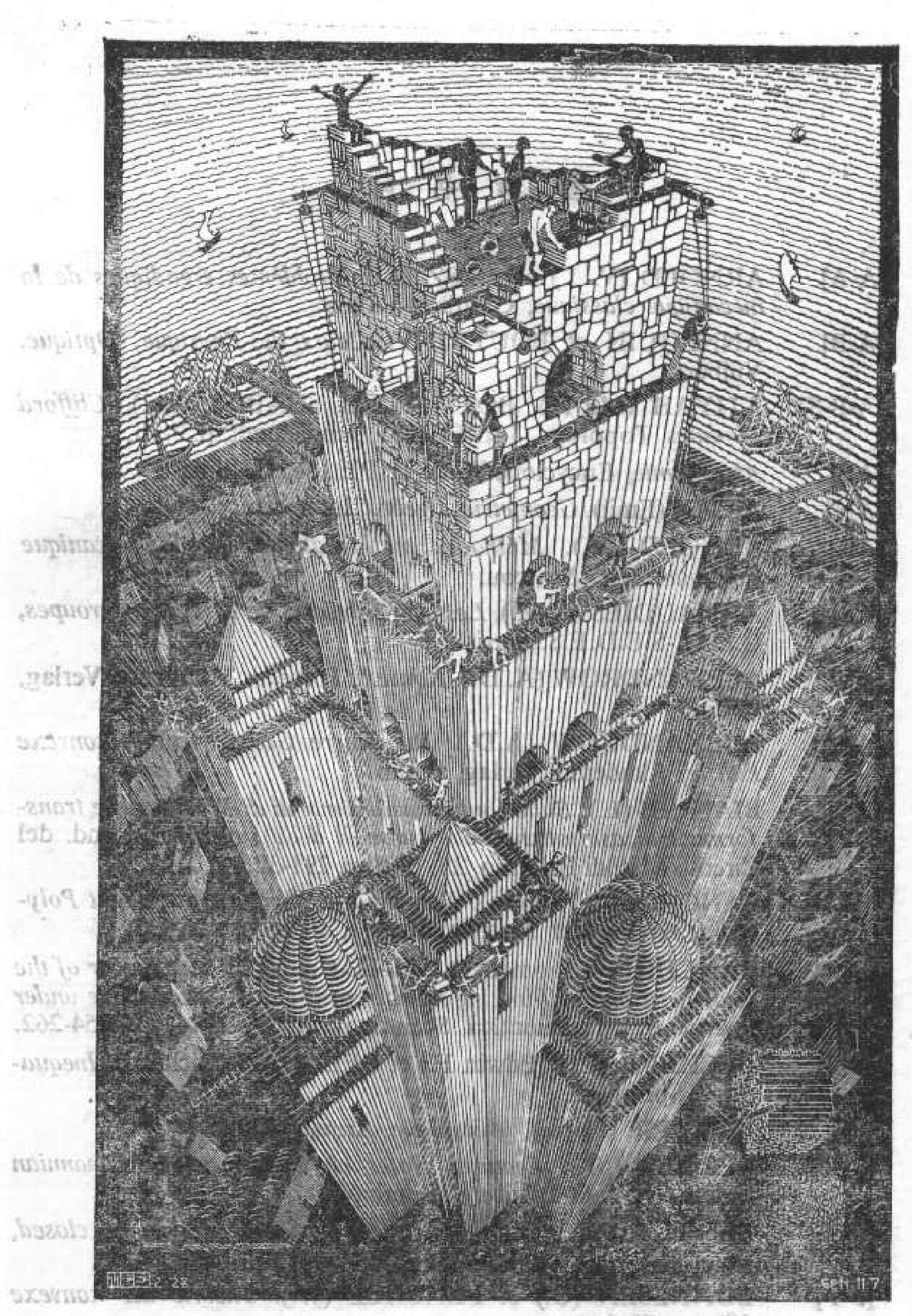
Bey Heidegger und Compagnie. 1759.



8.46 Johann Heinrich Lambert



《论透视——给年轻的艺术家》



M. C. Escher, "Babel 塔",木刻, 1928 年;海牙 Escher 纪念馆.

参考书目

[A-A] ARNOLD (V. I.) et AVEZ (A.). *Problèmes ergodiques de la mécanique classique,* Gauthier-Villars.

[A-B] ANNEQUIN et BOUTIGNY. *Cours de Physique, Optique,* Vuibert.

[A-B-S] ATIYAH (M. F.), BOTT (R.) et SHAPIRO (A.). *Clifford Modules,* Topology, 3, 1964-1965, supplément, p. 3-38.

[AE] *Astronomie,* Encyclopédie de la Pléïade, Gallimard

[AN] ARTIN (Emil). *Geometric Algebra,* Interscience.

[AR] ARNOLD (V.). *Méthodes mathématiques de la mécanique classique,* Mir, Moscou.

[AS] ARNAUDIÈS (J.-M.), *Les cinq polyèdres de* $\mathbf{R}^3$ *et leurs groupes,* C.D.U.-S.E.D.E.S., Paris.

[AV] ALEXANDROW (A. D.). *Konvexe Polyeder,* Akademie Verlag, Berlin.

[AW] ALEXANDROW (A.D.). *Die innere Geometrie der konvexe Fläche,* Akademie Verlag, Berlin.

[BA]. BIANCHI (L.). *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve el delle superficie,* Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 25, 1908; p. 291-325.

[BAN] BANCHOFF (Thomas). *Non-rigidity Theorems for Tight Polyhedra,* Archiv der Mathematik, 21, 1970, p. 416-423.

[BA-WH] BANCHOFF (Thomas) et WHITE (James). *The behavior of the total twist and self-linking number of a closed space curve under inversions,* Mathematica Scandinavica 36, 1975, p. 254-262.

[B-B] BECKENBACH (Edwin F.) et BELLMAN (Richard). *Inequalities,* Springer.

[BE] BROUSSE (Pierre). *Mécanique,* Armand Colin.

[BER] BERGER (M.). *Lectures Notes on Geodesics in Riemannian Geometry,* Tata Institute, Bombay.

[BES] BESSE (Arthur). *Manifolds all of whose geodesics are closed,* Ergebnisse der Mathematik, Band 93, Springer.

[B-F] BONNESEN (O.) et FENCHEL (W.). *Theorie der konvexe Körper,* Chelsea.

[B-G] BERGER (Marcel) et GOSTIAUX (Bernard). *Géométrie différentielle,* Armand Colin.

[B-H] BOREL (A.) et HIRZEBRUCH (F.). *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces*, American Journal of Math., 80, 1958, p. 458-538.

[B-H-H] BLACK (W. L.), HOWLAND (H. C.) et HOWLAND (B.). *A Theorem about Zigzags between two Circles*, American Math. Monthly, 81, 1974, p. 754-757.

[BI 0] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Théorie des Ensembles, Hermann, 1970.

[BI 1] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Topologie Générale, chapitres 5 à 10, Hermann, 1974.

[BI 2] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre II, chapitre 9, Hermann.

[BI 3] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre V, chapitres 1, 2, 2e édition, Hermann.

[BI 4] BOURBAKI (Nicolas). *Groupes et algèbre de Lie*, chapitre 4, 5, 6, Hermann.

[BI 5] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Algèbre, chapitres 1 à 3, Hermann, 1970.

[B-K] BUSEMANN (Herbert) et KELLY (Paul J.). *Projective Geometry and Projective Metrics*, Academic Press.

[BL] BLUMENTHAL (Leonard M.). *Theory and Applications of Distance Geometry*, Chelsea.

[BLA 1] BLASCHKE (Wilhelm). *Kreis und Kugel*, Chelsea.

[BLA 2] BLASCHKE (Wilhem). *Vorlesungen über Differential Geometrie, II : Affine Differential Geometry*, Springer.

[BLA 3] BLASCHKE (Wilhelm). *Vorlesungen über Differential Geometrie, III : Differential Geometrie der Kreise und Kugel*, Springer.

[BL-BO] BLASCHKE (W.) et BOL (G.). *Geometrie der Gewebe*, Springer, 1938.

[B-M] BLUMENTHAL (Leonard M.) et MENGER (Karl). *Studies in Geometry*, W. H. Freeman.

[BN] BOURGIN (D. G.). *Modern Algebraic Topology*, Mac Millan.

[BO 1] BOREL (Armand). *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes*, American Journal of Math., 76, 1954, p. 273-342.

[BO 2] BOREL (Armand). *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Annals of Math., 57, 1953, p. 115-207.

[BP] BAUDOIN (Paul). *Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal*, Vuibert.

[BR] BAER (R.). *Linear Algebra and Projective Geometry*, Academic Press.

[B-S] BOREVICH (Z. I.) et SHAFAREVICH (I. R.). *Number Theory*, Academic Press.

[B-T] BRUHAT (F.) et TITS (J.). *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées*, Public. Math. I.H.E.S., n° 41.

[BU 1] BUSEMANN (Herbert). *Convex Surfaces*, Interscience.

[BU 2] BUSEMANN (Herbert). *Recent Synthetic Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik, n° 54, Springer.

[BUR] BURCKHARDT (J. J.). *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*, Birkhaüser.

[BV] BONNEVAL (H.). *Photogrammétrie générale* (4 volumes), Eyrolles.

[BZ] BENZ (Walter). *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer.

[CA] CAIRNS (Stewart Scott). *Introductory Topology*, Ronald Press.

[CAL] CALLAHAN (Francis P.). *Morley polygons*, American Math. Monthly 84, 1977, p. 325-337.

[C-B] COUDERC (P.) et BALLICIONI (A.). *Premier livre du tétraèdre*, Gauthier-Villars.

[CD] CARATHEODORY (C.). *The most general transformation which transform circles into circles*, Bull. Amer. Math. Soc., 43, 1937, p. 573-579.

[C-D-L] COHEN-TANNOUDJI (C.), DIU (B.) et LALOE (F.). *Mécanique quantique, vol.* 1, Hermann.

[CE 1] CARTAN (Elie). *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes*, Oeuvres complètes, tome I, volume 2, p. 1227-1246.

[CE 2] CARTAN (Elie). *The Theory of Spinors*, Hermann ou The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

[C-G] CHEEGER (Jeff) et GROMOLL (Detlef). *On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature*, Ann. of Math., 96, 1972, p. 413-443.

[CH 1] CARTAN (Henri). *Calcul différentiel*, Hermann.

[CH 2] CARTAN (Henri). *Théorie élémentaire des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

[CH-GR] CHERN (S. S.) et GRIFFITHS (P.). *Abel's theorem and webs*, Jahrbericht d. Deutsche Math.-Verein., 80, 1978, p. 13-110.

[CL 1] CONNELLY (Robert). *A counter example to the rigidity conjecture for polyhedra*, Public. Math. I.H.E.S., 47, 1978, p. 333-338.

[CL 2] CONNELLY (Robert). *A flexible sphere*, Math. Intelligencer, 1, 1978, p. 130-131.

[C-M] COXETER (H. S. M.) et MOSER (W. O. J.). *Generators and Relations for Discrete Groups*, 2e édition, Springer.

[CN] CUENIN (R.). *Cartographie générale (2 volumes)*, Eyrolles.

[CO] CONNELLY (Robert). *An attack on rigidity I, II*. Preprints, Cornell University.

[CR 1] COXETER (H. S. M.). *Introduction to Geometry*, John Wiley.

[CR 2] COXETER (H. S. M.). *Regular Polytopes*, Methuen.

[CR 3] COXETER (H. S. M.). *Non-euclidean Geometry*, The University of Toronto Press.

[CR 4] COXETER (H. S. M.). *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press.

[CR 5] COXETER (H. S. M.). *The Problem of Apollonius*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 5-15.

[CS] CASSELS (J. W. S.). *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer.

[CT] CHOQUET (Gustave). *Cours d'Analyse, tome II : Topologie*, Masson.

[CY] CHEVALLEY (Claude). *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press.

[CZ] CONZE (Jean-Pierre). *Le théorème d'isomorphisme d'Ornstein et la classification des systèmes dynamiques en théorie ergodique*, Séminaire Bourbaki, novembre 1972.

[D-C 1] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Géométrie*, J. B. Baillière.

[D-C 2] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Compléments de géométrie*, J. B. Baillière.

[DE 1] DIEUDONNÉ (Jean). *La géométrie des groupes classiques*, 2e *édition*, Springer.

[DE 2] DIEUDONNÉ (Jean). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, 3e *édition*, Hermann.

[DE 3] DIEUDONNÉ (Jean). *Calcul infinitésimal*, Hermann.

[DE 4] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome II*, Gauthier-Villars.

[DE 5] DIEUDONNÉ (Jean), *Eléments d'Analyse, tome III*, Gauthier-Villars.

[DE 6] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome IV*, Gauthier-Villars.

[DE 7] DIEUDONNÉ (Jean). *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press.

[DE 8] DIEUDONNÉ (Jean). *Cours de Géométrie Algébrique* (*tomes* 1 *et* 2), Presses Universitaires de France.

[D-G-K] DANZER (L.), GRÜNBAUM (B.) et KLEE (V.). *Helly's Theorem and its Relatives*, A.M.S. Symposium on Convexity, Proc. Symp. Pure Math., volume 7, 1963.

[DI] DEMBOWSKI (P.). *Finite Geometries*, Ergebnisse der Mathematik, n° 44, Springer.

[DI-CA] DIEUDONNÉ (Jean) et CARRELL (James B.). *Invariant Theory, Old and New*, Academic Press.

[DN] DANJON (André). *Astronomie générale*, J. et R. Sennac.

[DO] DORRIE (Heinrich). 100 *Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover.

[DQ] DUPORCQ (Ernest). *Premiers principes de géométrie moderne*, 3e *édition*, Gauthier-Villars.

[DR] DIXMIER (Jacques). *Cours de mathematiques du premier cycle, deuxième année*, Gauthier-Villars.

[DV] DVORETSKY (Aryeh). *Some results on convex bodies and Banach spaces*, p. 123-160 dans Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1961.

[DX] DARBOUX (Gaston). *Principes de Géométrie Analytique*, Gauthier-Villars.

[DY] DOUADY (Adrien). *Le shaddock à six becs*, Bulletin A.P.M.E.P., 281, 1971, p. 699.

[EE] *Encyklopädie der Mathematischen Wissenchaften, Geometrie*, III.2.1, Teubner.

[E-K] EELLS (James) et KUIPER (Nicolas O.). *Manifolds which are like Projective Planes*, Public. Math. I.H.E.S., n° 14, p. 5-46.

[EL] ELLISON (W. J.). *Waring's problem*, American Math. Monthly, 78, 1971.

[EN] EGGLESTON (H. G.). *Convexity*, Cambridge University Press.

[ER] ESCHER (M. C.). *L'œuvre graphique*, Solin, Paris.

[E-S] EELLS (J.) et SAMPSON (J. H.). *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, American Journal of Math., 86, 1964, p. 109-160.

[FA] FALCONER (K. J.). *A characterisation of plane curves of constant width*, J. London Math. Soc., 16, 1977, p. 536-538.

[FI] FILLMORE (Jay P.). *Symmetries of surfaces of constant width*, J. of Diff. Geometry, 3, 1969, p. 103-110.

[FL] FRENKEL (Jean). *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann.

[FN] FULTON (William). *Algebraic Curves*, Benjamin.

[FR] FEDERER (Herbert). *Geometric Measure Theory*, Springer.

[FT 1] FEJES-TOTH (L.). *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer.

[FT 2] FEJES-TOTH (L.). *Regular Figures*, Pergamon.

[GA] GARDNER (Martin). *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, Scientific American, January 1977.

[GE] GONSETH (F.). *Un théorème relatif à deux ellipsoides confocaux*, Bulletin des Sciences Math., 42, 1918, p. 177-180 et 193-194.

[GG] GREENBERG (Marvin J.). *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin.

[G-G-V] GELFAND (I. M.), GRAEV (M. I.) et VILENKIN (N. Ya). *Generalized Functions, volume 5, Integral Geometry and Representation Theory*, Academic Press.

[GIS] GRIFFITHS (Phillip A.). *Variations on a Theorem of Abel*, Inventiones Math., 35, 1976, p. 321-390.

[GI-WE] GIBBONS (J. C.) et WEBB (C.). *Circle preserving maps of spheres*, preprint, Illinois Institute of Technology, Chicago.

[GK] *Grundzüge der Mathematik, Band IV : Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik*, Vandenhoeck and Ruprecht.

[G-K-M] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.) et MEYER (W.). *Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Mathematics*, n° 55, Springer.

[GL] GLUCK (Herman). *Almost All Simply Connected Closed Surfaces are Rigid*, preprint, University of Pennsylvania.

[GM] GRAMAIN (André). *Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France.

[GN] GÉRARDIN (Paul). *Mathématiques Elémentaires Approfondies*, cours polycopié, Université Paris VII, U.E.R. de Mathématiques.

[G-O] GELBAUM (Bernard D.) et OLMSTED (John M. H.). *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day.

[GR] GUGGENHEIMER (Heinrich W.). *Plane Geometry and its Groups*, Holden-Day.

[GR-HA] GRIFFITHS (P.) et HARRIS (S.). *On Cayley's Explicit Solution to Poncelet's Porism*, L'Enseignement Mathématique, 24, 1978, p. 31-40.

[GR-SH1] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The eighty-one types of isohedral tilings in the plane*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 82, 1977, p. 177-196.

[GR-SH2] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The 91 types of isogonal tiling in the plane*, Trans. A.M.S., 242, 1978, p. 335-354.

[GS] *Geometric Inequalities* (BOTTEMA *et alia*), Wolters-Noordhoof.

[GT] GUICHARDET (A.). *Calcul intégral*, Armand Colin.

[GX] GODEAUX (Lucien). *Les géométries*, Armand Colin.

[HA] HALL (M.). *The Theory of Groups*, Mac Millan.

[HA-WR] HARDY (G. H.) et WRIGHT (E. M.). *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press.

[H-C] HILBERT (D.) et COHN-VOSSEN (S.). *Geometry and the Imagination*, Chelsea.

[HD 1] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome I*, 10e *édition*, Armand Colin.

[HD 2] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome II*, 7e *édition*, Armand Colin.

[H-K] HAUPT (O.) et KÜNNETH (H.). *Geometrische Ordnungen*, Springer.

[H-L-P] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) et POLYA (G.). *Inequalities*, Cambridge University Press.

[HM] HARTMAN (P.). *On Isometries and a Theorem of Liouville*, Mathematische Zeitschrift, 69, 1958, p. 202-210.

[HN] HELGASON (Sigurdur). *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press.

[HOL] d'HOLLANDER (Raymond). *Topologie Générale, tome I : Généralités, Mesure des angles et des distances*, Eyrolles.

[HO-PE] HODGE (W. V. D.) et PEDOE (D.). *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge University Press.

[H-P] HUGHES (Daniel R.) et PIPER (Fred C.). *Projective Planes*, Springer.

[HR] HADWIGER (H.). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer.

[HS] HERSCH (Joseph). *Quatre propriétés des membranes sphériques homogènes*, C.R.A.S., 270, 1970, p. 1714-1716.

[HU] HUSEMOLLER (Dale). *Fibre Bundles*, McGraw Hill.

[H-W] HILTON (P. J.) et WYLIE (S.). *Homology Theory*, Cambridge University Press.

[H-Y] HOCKING (John G.) et YOUNG (Gail S.). *Topology*, Addison-Wesley.

[HZ] HURWITZ (M. A.). *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales Ecole Norm., 19, 1902, p. 357-408.

[I-R] ILLIOVICI (G.) et ROBERT (P.). *Géométrie*, Eyrolles.

[JE] JOEDICKE (Jürgen). *Les structures en voiles et coques*, Vincent, Fréal et Cie.

[KE] KRÉE (P.). *Introduction aux mathématiques et à leurs applications fondamentales, M.P. 2*, Dunod.

[KF] KAZARINOFF (Nicholas D.). *Geometric Inequalities*, Random House.

[KG 1] KLINGENBERG (Wilhelm). *Eine Vorlesung über Differential Geometrie*, Springer.

[KG 2] KLINGENBERG (Wilhelm). *Paare symmetrischen und alternierenden Formen zweiten Grades*, Abhandl. Math. Sem. Hamburg, 19, 1955, p. 78-93.

[KH] KUROSH (A. G.). *Lectures in General Algebra*, Pergamon.

[KM] KLOTZ-MILNOR (Tilla). *Efimov's Theorem about Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature*, Advances in Math., 8, 1972, p. 474-543.

[KN 1] KLEIN (Félix). *Lectures on the Icosahedron*, Dover.

[KN 2] KLEIN (Félix). *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer.

[KO-NO 1] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume I*, Interscience.

[KO-NO 2] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume II*, Interscience.

[LB 1] LEBESGUE (Henri). *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars.

[LB 2] LEBESGUE (Henri). *Les coniques*, Gauthier-Villars.

[LB 3] LEBESGUE (Henri). *Octaèdres articulés de Bricard*, l'Enseignement mathématique, 13, 1967, p. 175-185.

[LE] LEKERKERKER (C. G.). *Geometry of numbers*, Walters-Noordhoff.

[LF 1] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Géométrie différentielle*, Masson.

[LF 2] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes*,

Mémoires Acad. Royale Belg., Cl. Sci. Mém. Coll. in-8°, 1971, fascicule 5.

[LF 3] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes*, J. of Diff. Geometry, 8, 1973, p. 487-510.

[LF-AR] LELONG-FERRAND (J.) et ARNAUDIÈS (J.-M.). *Cours de mathématiques, tome* 3, Dunod.

[LG 1] LANG (Serge). *Elliptic Functions*, Addison-Wesley.

[LG 2] LANG (Serge). *Analysis II*, Addison-Wesley.

[LM 1] LEMAIRE (J.). *Hypocycloïdes et Epicycloïdes*, Vuibert.

[LM 2] LEMAIRE (J.). *L'hyperbole équilatère*, Vuibert.

[LP] *Le libre du problème, volume 4 : la convexité*, CEDIC.

[LR 1] LEHNER (Joseph). *A Short Course in Automorphic Functions*. Holt, Rinehart and Winston.

[LR 2] LEHNER (Joseph). *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, Math. Surveys, number VIII, American Math. Society.

[LS] LEVALLOIS (Jean-Jacques). *Géodésie Générale, tome II : Géodésie classique bidimensionnelle*, Eyrolles.

[LU] LUSTERNIK (Lazar A.). *Convex Figures and Polyhedra*, Heath.

[LY] LEVY (Harry). *Projective and Related Geometry*, Mac Millan.

[LZ] LAZUTKIN (V. F.). *The Existence of Caustics for a Billiard Problem in a Convex Domain*, Math. USSR Izvestia, 7, 1973, p. 185-214.

[MA] MALLIAVIN (Paul). *Géométrie différentielle intrinsèque*, Hermann.

[MD] MARCHAUD (A.). *Les surfaces du second ordre en géométrie finie*, J. Math. pures et appl., 9-15, 1936, p. 293-300.

[MI] MILNOR (John). *A problem in cartography*, American Math. Monthly, 76, 1969, p. 1101-1102.

[MJ] MANDELBROJT (Benoît). *Les Objets fractals*, Flammarion.

[ML] MICHEL (Charles). *Compléments de géométrie moderne*, Vuibert.

[M-P] MODENOV (P. S.) et PARKHOMENKO (A. S.). *Geometric Transformations, volume I*, Academic Press.

[MR] MATHER (J.). *The nice dimensions, Proceedings of Liverpool Singularities, Symposium I*, Lecture Notes in Mathematics n° 192, Springer.

[M-T] MARTINEAU (André) et TREVES (Francois). *Eléments de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions, fascicule I*, C.D.U.

[MW 1] MOSTOW (G. D.). *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces*, Annals of Mathematical Studies, n° 78, Princeton University Press.

[MW 2] MOSTOW (G. D.). *Discrete Subgroups of Lie Groups*, Advances in Mathematics, 15, 1975, p. 112-123.

[NA] NEVANLINNA (Rolf). *On Differentiable Mappings, Analytic Functions*, p. 3-9, Princeton University Press.

[OA] OBATA (M.). *The Conjecture on Conformal Transformations of Riemannian Manifolds*, J. of Differential Geometry, 6, 1972, p. 247-258.

[OM] O'MEARA (O. T.). *Introduction to Quadratic Forms*, Springer.

[OS 1] OSSERMAN (Robert). *Bonnesen-style Isoperimetric Inequalities*, American Math. Monthly, 86, 1979, p. 1-29.

[OS 2] OSSERMAN (Robert). *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., 84, 1978, p. 1182-1238.

[PA] PALAIS (Richard). *The Classification of G-Spaces*, Memoirs of the A.M.S., n° 36.

[PC] PASCAL (Blaise). *Pensées*, édition Brunschwig.

[PE] PEDOE (D.). *A Course of Geometry*, Cambridge University Press.

[PL] POHL (William F.). *A Theorem of Géométrie finie*, Journal of Differential Geometry, 10, 1975, p. 435-466.

[PN] PAYNE (L. E.). *Isomerimetric Inequalities and their Applications*, SIAM Review, 9, 1967, p. 453-488.

[PO] PORTEOUS (I. R.). *Topological Geometry*, Van Nostrand-Reinhold.

[PR] PORTER (T. I.). *A History of the Classical Isoperimetric Problem, Contributions to the Calculus of Variations*, University of Chicago Press, 1933.

[P-S] POLYA (G.) et SZEGÖ (G.). *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton University Press ou Kraus Reprint Corporation.

[PT] PICKERT (G.). *Projektive Ebenen*, Springer.

[PV 1] POGORELOV (A. V.). *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, Israël Programm for Scientific Translation, Jerusalem.

[PV 2] POGORELOV (A. D.). *Complete Solution of Hilbert's Fourth* John Wyley, 1979.

[RA] RADEMACHER (Hans). *Topics in Analytic Number Theory*, Grundlehren n° 169, Springer.

[R-C 1] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie*, 1re *partie*, Gauthier-Villars.

[R-C 2] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie*, 2e *partie*, Gauthier-Villars.

[RE] ROUSSARIE (Robert). *Sur les feuilletages de variétés de dimension* 3, Annales de l'Institut Fourier, 21(3), 1971, p. 13-81.

[RM] DE RHAM (Georges). *Sur les polygones générateurs des groupes fuchsiens*, l'Enseignement mathématique, 17, 1971, p. 49-61.

[RN 1] ROBINSON (Raphael M.), *Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane*, Inventiones Math., 12, 1971, p. 177-209.

[RN 2] ROBINSON (Raphael M.). *Undecidable Tiling Problems in the Hyperbolic Plane*, Inventiones Math., 44, 1978, p. 259-264.

[RN 3] ROBINSON (Raphael M.). *Comments on the Penrose Tiles*, preprint, University of California, Berkeley.

[RO] ROMANOV (V. G.). *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations*, Springer.

[RS] ROGERS (C. A.). *Packing and Covering*, Cambridge University Press.

[R-V] ROBERTS (A. Wayne) et VARBERG (Dale E.). *Convex Functions*, Academic Press.

[SA] SHIMURA (G.). *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami Shoten et Princeton University Press.

[SB] STERNBERG (Shlomo). *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall.

[SC 1] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *The plane symmetry groups : their recognition and notation*, American Math. Monthly, 85, 1978, p. 439-450.

[SC 2] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *Tiling the plane with congruent pentagons*, Mathematics Magazine, 51 (1978), p. 29-44.

[SD 1] STAUDE (Otto). *Fadenconstructionen des Ellipsoides*, Math. Annalen, 20, 1882, p. 147-184.

[SD 2] STAUDE (Otto). *Die Fokaleigenschaften der Flächen Zweiter Ordnung*, Leipzig, 1896.

[SE 1] SERRE (Jean-Pierre). *Corps locaux*, Hermann.

[SE 2] SERRE (Jean-Pierre). *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France.

[SE 3] SERRE (Jean-Pierre). *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W. A. Benjamin.

[SE-TH] SEIFERT (H.) et THRELFALL (W.). *Lehrbuch der Topologie*, Chelsea.

[SF 1] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants of a class of transformation groups*, Aequationes Math., 14, 1976, p. 105-110.

[SF 2] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants à cinq points dans le plan projectif*, C.R.A.S., 285, 1977, p. 127-128.

[SG] SEIDENBERG (A.). *Lectures in Projective Geometry*, Van Nostrand.

[SGR] *Séminaire de Géométrie Riemannienne de l'Université Paris VII*, 1970-1971.

[SK] SPIVAK (Michael). *Differential Geometry, volume II*, Michael Spivak.

[SL 1] SALLEE (G. T.). *Maximal areas of Reuleaux polygons*, Canadian Math. Bull., 13, 1970, p. 175-179.

[SL 2] SALLEE (G. T.). *Reuleaux polytopes*, Mathematika, 17, 1970, p. 315-323.

[SN] STEIN (S. K.). *Tiling Space by Congruent Polyhedra*, Bulletin of the A.M.S., 80, 1974, p. 819-820.

[SO] SANTALO (L. A.). *Introduction to Integral Geometry*, Hermann.

[SR] SPANIER (E.). *Algebraic Topology*, McGraw Hill.

[S-T] SNAPPER (Ernst) et TROYER (Robert J.). *Metric Affine Geometry*, Academic Press.

[STE] STEFFEN (Klaus). *A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices*, preprint, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette.

[ST-RA] STEINITZ (E.) et RADEMACHER (H.). *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Springer.

[SU] SAMUEL (Pierre). *Unique Factorization*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 945-952.

[SW] STEWART (Ian). *Galois Theory*, Chapman and Hall.

[TG] *Seminar on Transformation Groups*, by Armand BOREL, Annals of Mathematical Studies, n° 46, Princeton.

[TM] THOM (René). *Sur la théorie des enveloppes*, J. de Math. pures et appl., 16, 1962, p. 177-192.

[TS] TITS (Jacques). *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer Lecture Notes in Mathematics, n° 386.

[VE] VALENTINE (Frederik A.). *Convex Sets*, McGraw Hill.

[VG 1] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in*

kongruente Bereiche in Form einer Spirale, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1936, p. 229-231.

[VG 2] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1937, p. 159-160.

[VL] DU VAL (Patrick). *Homographies, Quaternions and Rotations*, Oxford University Press.

[VN] VALIRON (Georges). *Equations fonctionnelles. Applications*, Masson.

[V-Y] VEBLEN (O.) et YOUNG (J. W.). *Projective Geometry*, deux volumes, Ginn and Co.

[WF] WOLF (Joseph A.). *Spaces of Constant Curvature*, J. A. Wolf.

[WK] WALKER (R. J.). *Algebraic Curves*, Dover.

[WL] WEYL (Hermann). *Symmetry*, Princeton University Press.

[WN] WENNINGER (Magnus J.). *Polyhedron Models*, Cambridge University Press.

[WO] WONG (Yung-Chow). *Isoclinic n-Planes in Euclidean 2n-Space, Clifford Parallels in Elliptic (2n − 1)-Space and the Hurwitz Matrix Equations*, Memoirs of the A.M.S., nº 41.

[WR] WARNER (Frank). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott-Foresman.

[Y-B] YAGLOM (I. M.) et BOLTYANSKII (V. G.). *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston.

[ZN] ZISMAN (Michel). *Topologie algébrique élémentaire*, Armand Colin.

[ZR] ZWIKKER (C.). *The advanced Geometry of Plane Curves and their Applications*, Dover.

（补充参考书目）

[B-B-N-W-Z] BROWN(H.), BÜLOW(R.), NEUBÜSER(J.), WONDRATSCHEK (H.), ZASSENHAUS (H.). *Crystallographic groups of four-dimensional space*, Wyley, 1978.

[GBG] GREENBERG (Marvin J.). *Euclidean and Non-Euclidean Geometry, Development and History*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1980.

目　　录

第 8 章　欧氏向量空间复习与补充

用一个欧氏仿射空间可以很好地表示我们的世界，确切地说，由于不存在自然的长度单位，这种表示至多只相差一个数量倍数.欧氏仿射空间是本书的主要内容，在下面这一章里就要开始对这种空间进行讨论.为了作一些准备，我们先讨论作为欧氏仿射空间的底空间的欧氏向量空间；因而本章不论在形式上还是在实质上，都是相当代数化的.由于自古希腊以来积累的材料极为浩繁，故我们对它们进行了筛选，并以正交群 $O(\cdot)$ 作为主线来组织这些材料，以求取得某种统一性（在 8.2.14 有一个讨论纲要）. 在说明 $O(E)$ 的定义及一般性质(8.1，8.2)以后，一方面讨论 $O(E)$ 中单独一个元素的结构(特征子空间，8.4)，另一方面讨论整个 $O(E)$ 群的结构(8.5，8.3，8.9)；二维的情形主要用到复数(8.3)，三维和四维的情形用到四元数(8.9).第 8.10 节是从文化修养以及与最新数学的联系这两个角度来安排的. 8.7 节是很特殊的一节，其中引进了作为一种很精巧的不变量(在作者看来，对于中学教学来说未免过于精巧)的平面定向角，借助这一概念可以得出一些关于圆的漂亮结果，例如可参看 10.9.7. 与此相反，半直线或直线夹成的(无向)角的概念，在作者看来，则是最基本的，8.6 节对此作了讨论.第 8.8 节讨论相似性，其中有个原因是物质世界在仅相差一个数量倍数的意义上跟欧氏空间相符. 最末的第 8.11 节中，除了经典的(并在众多学科中得到应用的)向量积以外，介绍了欧氏向量空间的规范体积形式，它是今后定义欧氏仿射空间规范测度的工具 (9.12).

对数学家们逢到一个结构就作推广的做法业已习惯或者有所爱好的读者，想必已经预料到，在欧氏向量空间中舍弃某些性质后，是可以把它的结构推广成为一些新的结构的. 这些结构，我们仅在第 13 章中零星地有所述及，建议读者参阅下列文献：

[DE1], [PO], [S-T], [BI 2], [AN].

若非另作申明,则本章中E总表示欧氏向量空间,n表示它的维数.

8.1 定义,初步性质

8.1.1 定义. 欧氏向量空间E是$\mathbf{R}$上的有限维向量空间,其上赋有正定的对称双线性形式φ,即$\varphi: E\times E\to\mathbf{R}$是对称双线性形式而且对所有的$x\neq 0$有$\varphi(x,x)>0$. 记$\varphi(x, y)=(x|y)$,称为$x$和$y$的内积;$x$的范数就是

$$\|x\|=\sqrt{\varphi(x, x)}=\sqrt{(x|x)}.$$

若$(x|y)=0$,称x和y正交. 集合$\{e_i\}_{i=1,\cdots,k}\subset E$称为正交向量组,如果$(e_i|e_j)=0\ \forall i\neq j$; 倘若还有$\|e_i\|=1\ \forall_i$,则称为标准正交向量组.

8.1.2 注

8.1.2.1 欧氏向量空间E的向量子空间F对限制$\varphi|_F$而言自然地成为一个欧氏向量空间.

8.1.2.2 标准的例子是

$$E=\mathbf{R}^n \text{ 而 } \varphi((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n))=\sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

8.1.2.3 在E上,φ是一个二次型(参见 3.3.2),对任意的x,y都有

8.1.2.4

$$\begin{cases} \|x+y\|^2=\|x\|^2+2(x|y)+\|y\|^2 \\ \text{或} \\ (x|y)=\dfrac{1}{2}[\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2]. \end{cases}$$

8.1.2.5 由非零向量构成的正交组必定是线性无关组.

8.1.2.6 若$\{e_i\}$是E的标准正交基,则

$$x = \sum_i x_i e_i$$

等价于 $x_i = (x|e_i)$ $\forall_i$. 另外还有

$$\left(\sum_i x_i e_i \,\middle|\, \sum_i y_i e_i\right) = \sum_i x_i y_i.$$

8.1.3 命题. 对任何 $x, y \in E$, 有 $|(x|y)| \leqslant \|x\|\|y\|$. 等式仅当 x, y 线性相关时成立;更精确地说, $(x|y) = \pm\|x\|\|y\|$ 等价于存在 $\lambda, \mu \in \mathbf{R}^{\pm}$ 使 $\lambda x + \mu y = 0$. 对任何 $x, y \in E$: $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$; 特别是

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

使 E 成为具有典范拓扑的度量空间 (参见 2.7.1).

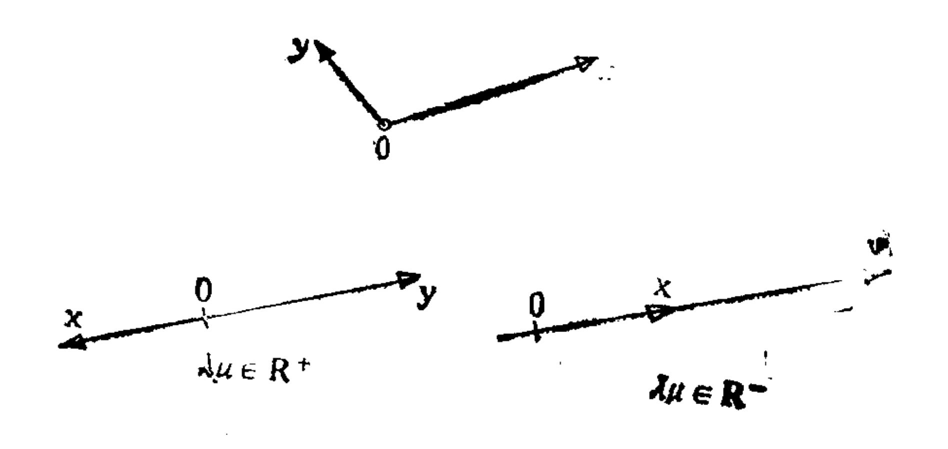


图 8.1.3.

8.1.4 命题 (Schmidt 标准正交化). 设 $\{b_i\}_{i=1,\cdots,k}$ 是 E 中一组线性无关的向量; 则存在标准正交向量组 $\{a_i\}_{i=1,\cdots,k}$ 具有以下性质: $\{a_i\}_{i=1,\cdots,k}$ 同伦于 $\{b_i\}_{i=1,\cdots,k}$ (参见 2.7.2.7) 且 $\forall h = 1, \cdots, k$, 由 $a_i (i = 1, \cdots, h)$ 生成的向量子空间与由 $b_i (i = 1, \cdots, h)$ 生成的向量子空间是相同的. 特别是, E 上任一给定的(可能是空集的)标准正交向量组必可扩充成为标准正交基, 它们都同伦于某一个标准正交基.

对 k 用归纳法. 对 $k = 1$, 取 $a_1 = b_1^n = \|b_1\|^{-1} b_1$, 其中对任一 $x \in E$, x^n表示 x 经标准化后所成向量, 即 $x^n = \|x\|^{-1} x$; x^n必同

伦于 x. 同伦可取为 $x(t)=tx''+(1-t)x$, $t\in[0,1]$, 即连结端点 x, x'' 的线段. 现假设 $\{a_i\}_{i=1,\cdots,h-1}$ 已作出,要作 a_h; 相继置

$$d_h=\sum_{i=1}^{h-1}(a_i\,|\,b_h)a_i,\quad c_h=b_h-d_h,\quad a_h=c_h''.$$

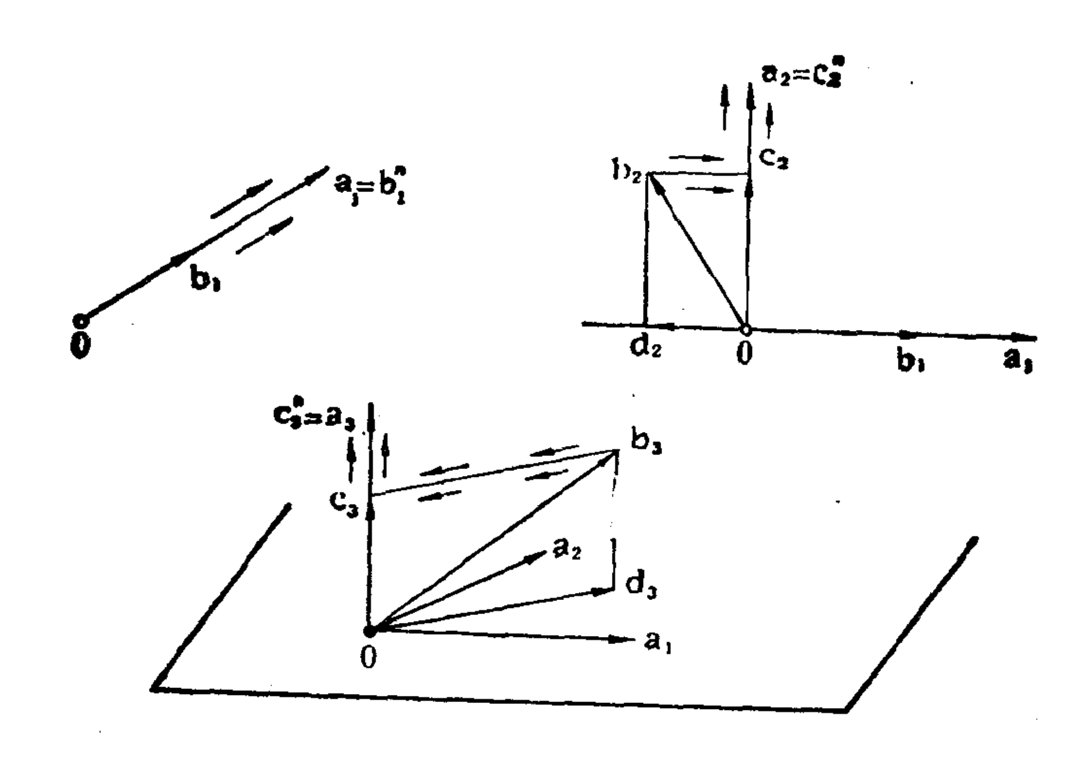


图 8.1.4.

可直接验证 $\{a_i\}_{i=1,\cdots,h}$ 满足命题要求,同伦即可取为相继所作的同伦的合成; 其中最后的两个同伦, 由 b_h 到 c_h 的为 $b_h(t)=tc_h+(1-t)b_h$, 由 c_h 到 a_h 的有如前述.

8.1.5 命题. 设 E, E' 是两个维数相同的欧氏向量空间, $f:E\to E'$ 是集合的映射,则下述命题是等价的:

(i) $f\in L(E;E')$ 且 $\|f(x)\|=\|x\|\ \forall x\in E$;

(ii) $\forall x,y\in E:(f(x)\,|\,f(y))=(x\,|\,y)$.

这样的 f 必为双射,称为等距. 等距的全体记为 $O(E;E')$.

(i) 蕴涵 (ii) 可由 f 线性和 8.1.2.4 推出. (ii) 蕴涵 (i): 在 E 中取一个标准正交基 $\{e_i\}$ (参见 8.1.4). 由 (ii) 和维数相等的条件, $\{f(e_i)\}$ 是 E' 的标准正交基; 然而由 8.1.2.6 和 (ii) 可知

$$f\left(\sum_i x_i e_i\right) = \sum_i x_i f(e_i),$$

因此 f 是线性的.

8.1.6 推论. 每个 n 维欧氏向量空间都与 $\mathbf{R}^n$ 等距(参见 8.1.2.2).

8.1.7 有人把 8.1.6 中的"与 $\mathbf{R}^n$ 等距"就说成"与 n 维欧氏空间等距";如果对自己所用的术语含义清楚的话,这样说也未始不可.

8.1.8 对偶

8.1.8.1 引理. 设 E 是欧氏向量空间,E^* 是作为实向量空间的对偶空间,则映射 $b: E \ni x \longmapsto x^b = \{y \longmapsto (x|y)\} \in E^*$ 是向量空间的同构.逆映射记为 $\# = b^{-1}: E^* \to E$.

我们知道 $\dim E = \dim E^*$ (例如可由对偶基的概念看出);由于 b 是线性的,只须再说明 b 的核是零.然而,若对每一 y 有

$$(x|y) = 0,$$

则特别地有 $(x|x) = \|x\|^2 = 0$,因而 $x = 0$.

8.1.8.2 引理 8.1.8.1 使我们可以赋予 E^* 一个自然的欧氏空间结构,以后遇有需要时我们将作出这一结构.由 2.4.8.1 和 8.1.8.1 可以导出:

8.1.8.3 定义.命题. 对 E 的子集 A,令

$$A^\perp = \{x \in E: (x|y) = 0 \ \ \forall y \in A\}$$

并称为 A 的正交集.$\forall A \subset E$,这一正交集是一个向量子空间,若 $\langle A \rangle$ 表示由 A 生成的(向量)子空间,就有 $A^\perp = \langle A \rangle^\perp$.对每一子空间 A,我们有直和 $A \oplus A^\perp = E$; $\dim A + \dim A^\perp = \dim E$. $A^{\perp\perp} = A$.若 A, B 是两个子空间,则 $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$, $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$.如果 $A \subset B^\perp$,称 A, B 是正交的,这时也有 $B \subset A^\perp$,因而记作 $A \perp B$.

8.1.8.4 记号. 如果 $E = V \oplus W$ 是直和,而且 $W = V^\perp$,我们就说这是一个*正交直和*,记作 $E = V \overset{\perp}{\oplus} W$.更一般地,对一族子空间可以有

$$E = V_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_k = \overset{\perp}{\bigoplus_i} V_i.$$

8.1.8.5 在三维的特殊情形下，8.1.8.3 重又证明了用公理方法建立的欧氏几何的结果如下：过定点垂直于已知直线的全体直线的集合是一张平面，即该直线的垂直平面. 如果考虑过定点分别垂直于两张已知平面的两条直线 D, D'，那么由 D 和 D' 张成的平面恰是直线 $P\cap P'$ 的垂直平面. 读者想必会看出，第一个结果就有很大的实用意义：有了它，附图中的门就可以开关自如，没有任何理论上的困难. 对这一结果的古典的阐述，见 [HD2].

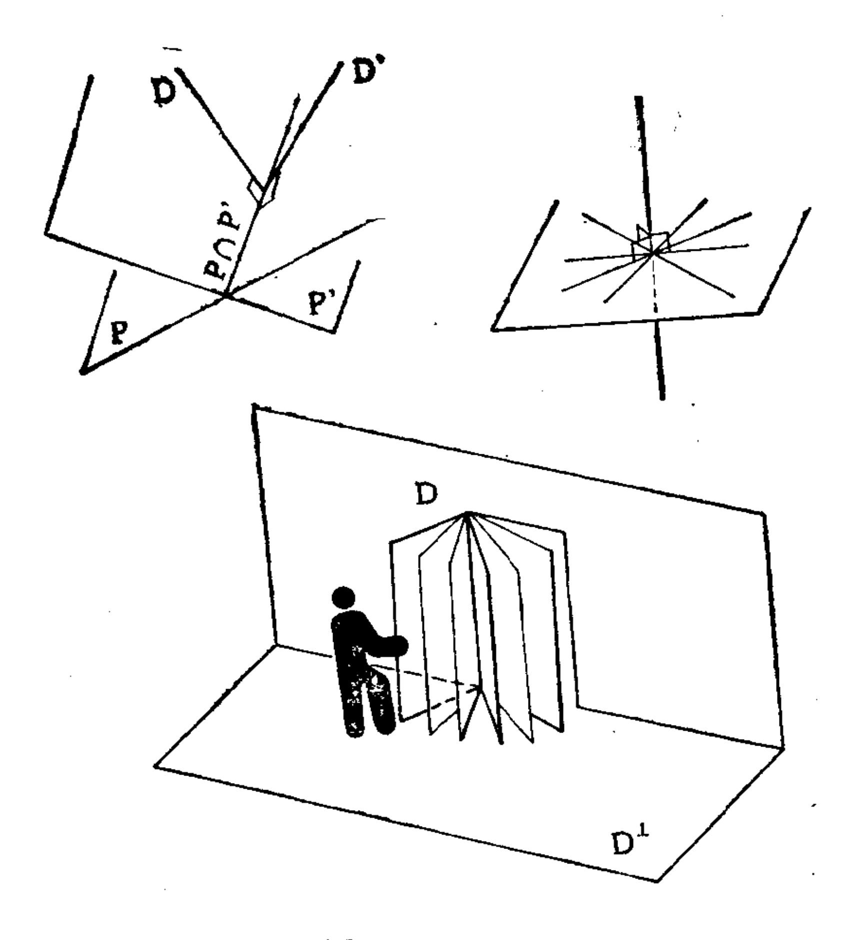


图 8.1.8.4.

8.1.8.6 根据引理 8.1.8.1，可定义一个自同态 $f:E\circlearrowleft$ 的伴随自同态，记作 ${}^tf$. 实际上，$f:E\to E'$ 诱导出转置自同态 $f^*:E'^*\to E^*$；因而令 ${}^tf=\sharp\circ f^*\circ b:E\to E$ 并把 ${}^tf$ 称为 f 的伴随自同态. 因此就有

$$({}^tf(x)\mid y)=(x\mid f(y))\quad \forall x,y\in E.$$

8.2 正交群:初步性质与讨论纲要

8.2.1 命题. 记 $O(E)=O(E;E)$，称为E的正交群;记

$$O(n)=O(\mathbf{R}^n).$$

$f\in O(E)$ 的充要条件是 f 的矩阵A在任一或某一标准正交基下满足 ${}^tAA=I$（其中 ${}^t\cdot$ 表示矩阵的转置，I 表示单位矩阵）. 特别有 $\det f=\pm 1$; 记 $O^+(E)=\{f\in O(E):\det f=1\}$,

$$O^-(E)=\{f\in O(E):\ \det f=-1\};$$

$O^+(E)$的元素称为旋转. 还有: $f\in O(E)\Longleftrightarrow {}^tff=\mathrm{Id}_E$（参见 8.1.8.6）.

这个命题可由下述引理推出，而下述引理则可由 8.1.2.6 和矩阵乘积的定义推出:

8.2.2 引理. 设$\{e_i\}$是E的一个标准正交基，A,B 是两个方阵，阶数都等于 E 的维数;若将 A,B 分别写成由列向量组成的形式

$$A=(x_1,\cdots,x_n),\quad B=(y_1,\cdots,y_n),$$

则有

$${}^tAB=((x_i|y_j)).$$

8.2.3 注

8.2.3.1 若 $\dim E=n$，则由 8.1.6 可知 $O(E)$ 同构于 $O(n)$. 因此，对正交群的线性群结构的研究，只须对 $O(n)$ 进行讨论即可.

8.2.3.2 子群 $O^+(E)$ 是 $O(E)$ 的正规子群. 我们有下列明显的乘法法则:

$$O^-(E)O^-(E)\subset O^+(E),\quad O^-(E)O^+(E)\subset O^-(E).$$

8.2.3.3 $O(E)\subset GL(E)$（参见 2.7.1）在诱导拓扑下是紧的: 事实上，对有限维向量空间E的任一基，若$A(f)$表示 f 关于该基的矩阵，则映射 $f\longmapsto(\mathrm{trace}\ ({}^tA(f)A(f)))^{1/2}$ 就是 $GL(E)$ 上的一个欧氏结构的范数. 现在若E是欧氏向量空间而基是标准正交的，则由 8.2.1，$O(E)$中所有的元素在上述意义下的范数都等于

$n=\dim E$；因此 $O(E)$ 是 $\mathrm{GL}(E)$ 中的有界集；但由 ${}^tAA=I$ 的条件可知它又是闭集，因而就是紧集．说明 $O(E)$ 是有界集的另一方法是：对于 E 的欧氏范数，在 $\mathrm{GL}(E)$ 中应用线性映射全体所成空间的范数（非欧氏范数！）；于是由 $O(E)$ 的定义有：

对 $f\in O(E):\|f\|=\sup\{\|f(x)\|:x\in E$ 且 $\|x\|=1\}=1$.

8.2.4 由 $O(E)\subset\mathrm{GL}(E)$ 是紧子群，可有下述有用的逆定理：

8.2.5 定理． 设 E 是有限维实向量空间，不必是欧氏的，G 是 $\mathrm{GL}(E)$ 的紧子群，则在 E 上至少存在一个欧氏结构 φ 使得 $G\subset O(E)$，其中 $O(E)$ 是这一欧氏结构的正交群．

8.2.5.1 要给出一个最简捷的证明，就必须用到紧群上 Haar 测度的存在性的概念（对此例如可见［DE4］，第 219 页以后）；设 dg 是 G 上的 Haar 测度，φ 是 E 上的任一欧氏结构．对 $g\in G$，定义一个欧氏结构 $g^*\varphi$ 如下：

$$(g^*\varphi)(x,y)=\varphi(g(x),g(y))\ \ \forall x,y\in E;$$

所求的欧氏结构取为 $g^*\varphi$ 关于测度 dg 的平均值即可，即令

$$\bar\varphi=\int_{g\in G}g^*\varphi dg,$$

亦即对任何 x,y：

$$\bar\varphi(x,y)=\int_{g\in G}\varphi(g(x),g(y))dg.$$

容易看出 $\bar\varphi$ 仍是 E 上欧氏结构，而且 $\bar\varphi$ 在 G 下不变，即

$$g^*\bar\varphi=\bar\varphi\ \ \forall g\in G.$$

这一点可由 $\bar\varphi$ 的构造和测度 dg 在 G 中平移下不变的事实得证．然而

$$g^*\bar\varphi=\bar\varphi\ \ \forall g\in G$$

就等于说 $G\subset O(E)$，其中 $O(E)$ 是 $(E,\bar\varphi)$ 的正交群．

8.2.5.2 第二种证明从 2.7.5.7 出发，仅用到有限维实向量空间中 Lebesgue 测度的理论．我们在 n 维实向量空间 E 上的二次型所构成的实向量空间 $\mathscr{P}_2^\bullet(E)$（这时 $\mathscr{P}_2^\bullet(E)$ 就是 $n(n+1)/2$ 维的）中进行讨论．在 $\mathscr{P}_2^\bullet(E)$ 中，正定二次型所成的子集 $Q(E)$ 是一个开的凸锥，且在如 8.2.5.1 中那样由 $g^*\varphi$ 定义的 G 的作用下

稳定．从 $Q(E)$ 中任一 φ 出发，φ 在 G 的作用下的轨道

$$K=\{g^*\varphi:g\in G\}$$

是 $\mathscr{P}_2^\bullet(E)$ 的紧子集，且 $K\subset Q(E)$．因此中心 $\operatorname{cent}(K)$ 在 $Q(E)$ 中，而且由 2.7.5.7 可知它在 G 的作用下不变．

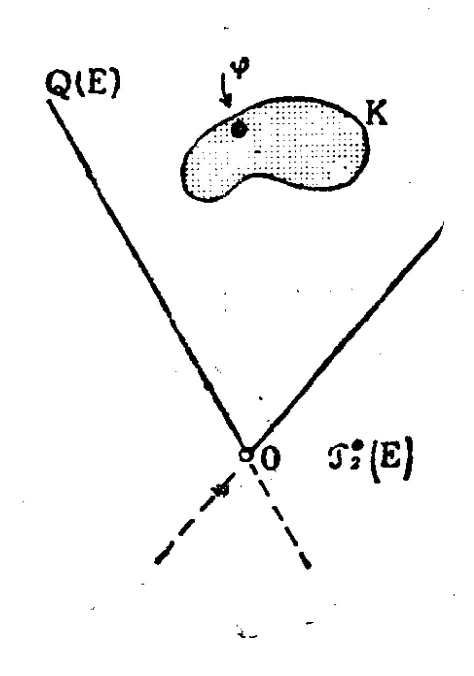


图 8.2.5.2.

8.2.5.3. 我们在 11.8.10.8 中还会看到 8.2.5 的第三种几何方法的证明，它从凸性出发，并不用到测度理论．

8.2.6 注． 在 G 下不变的欧氏结构一般来说并非唯一的，试考虑 G 缩成 E 的恒等变换的情形！可是存在一个很好的准则：G 容有一个唯一的（在不计相差一个常数倍数的情况下！）不变欧氏结构的充要条件是 G 在 $\mathrm{GL}(E)$ 中不可约，即 E 不容有除 $\{0\}$ 和 E 以外的任何对每一 $g\in G$ 稳定的子空间．见 8.12.1．

关于 8.2.5 的最新应用，除 8.1.2.1 外，还可参阅例如 [PA] 或 [TG] 第八章．

若 G 是有限群，$G=\{g_i:i\in I\}$，只要取 $\bar{\varphi}=\sum\limits_i g_i^*\varphi$ 即可！

8.2.7 命题．（设 $\dim E\geqslant 2$.）群 $O^+(E)$ 在 E 的单位球面

$$S(E)=\{x\in E:\|x\|=1\}$$

上可迁，在 E 的所有的 Grassmann 流形 $G_{E,p}(O\leqslant p\leqslant\dim E)$

(参见 1.2.5) 上也可迁. 群 $O(E)$ 在 E 的标准正交基的集合上是单可迁的; 群 $O^+(E)$ 在同伦标准正交基的集合上是单可迁的(参见 2.7.2.7).

8.2.8 根据 8.2.4，可将 n 维的标准球面，譬如说 $S^n = S(\mathbf{R}^{n+1})$，写成齐性空间 (参见 1.5.5)

$$S^n = O(n+1)/O(n),$$

其中 $O(n)$ 是作为 $O(n+1)$ 中由保持向量 $(0,\cdots,0,1) \in \mathbf{R}^{n+1}$ 不动的 f 所构成的子群而自然地嵌入 $O(n+1)$ 的. 同样，对 Grassmann 流形有

$$G_{n,p} = O(n)/(O(p) \times O(n-p)),$$

其中 $O(p) \times O(n-p)$ 是子群 $O(p)$ 和 $O(n-p)$ 的直积，$O(p)$ 由保持 $\mathbf{R}^n$ 的典范基中的 $n-p$ 个向量 $e_{p+1}, \cdots, e_n$ 不动的 $f \in O(n)$ 所构成 ($O(n-p)$ 对 $e_1, \cdots, e_p$ 有类似情形).

8.2.9 命题. 设 $E = S \oplus T$ 是直和分解，σ 是关于 S 平行于 T 的对称 (参见 6.4.6)，则 $\sigma \in O(E)$ 的充要条件是 $E = S \overset{\perp}{\oplus} T$ (即 $T = S^\perp$); 这时把 σ 记作 σ_S. 这样的 σ 称为欧氏空间 E 的(**正交**)**对称**，若 $\dim S^\perp = 1$，则称为**超平面对称**; 若 $\dim S^\perp = 2$，则称为**中心对称**. 我们有 $\sigma_S \in O^\pm(E)$，$\dim S^\perp$ 是偶数时取 $+$，$\dim S^\perp$ 是奇数时取 $-$. 每个对称都是对合，反之，每个使 $f^2 = \mathrm{Id}_E$ 的 $f \in O(E)$ 都是对称.

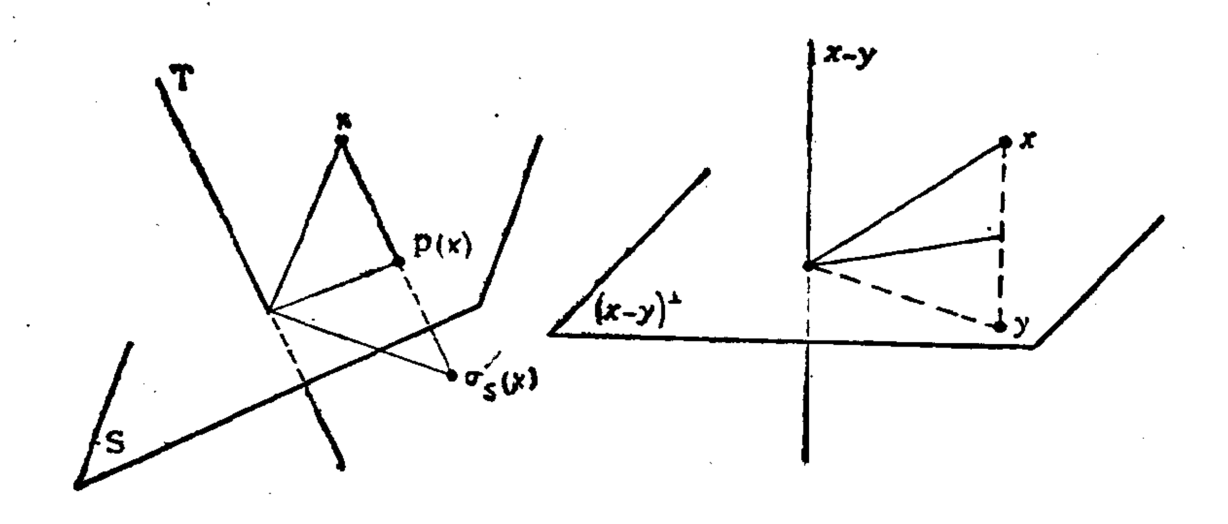


图 8.2.9.

8.2.10 知道当H是超平面时σ_H的具体表达式是很有用的；若x是$H^\perp$(其维数为1)的一个非零向量，则

$$\boxed{\sigma_H(y) = y - 2\frac{(y|x)}{\|x\|^2}x.}$$

8.2.11 若$x,y\in E$且$\|x\| = \|y\|$，则存在超平面H使$\sigma_H(x)=y$；若$x\neq y$，$x\neq 0$，则H是唯一的．事实上，若$x = y$，则任一含有x的超平面都满足要求，否则H必为$H = (y-x)^\perp$，仍满足要求．注意到H就是x和y的垂直平分超平面，即

$$H = \{z\in E: d(x,z) = d(y,z)\},$$

参见9.7.5.

8.2.12 定理．每一$f\in O(E)$是至多$n = \dim E$个超平面对称的乘积．

事实上，只须应用8.2.11并作递推；最后归结到f，而且

$$f(x) = x\quad (x\neq 0),$$

但这时f保持$x^\perp = S$不动，而S的维数严格小于E的维数．

8.2.13 **推论**．若$\dim E = 1$，则$O(E) = \mathrm{Id}_E\cup(-\mathrm{Id}_E)$．若$\dim E = 2$，则每一$f\in O^-(E)$是超平面对称，即关于一条直线的对称，每一$f\in O^+(E)$是两个关于直线的对称的乘积．

尽管8.2.12的证明很简单，我们还是把它称作定理，原因是它有很基本的应用．当把欧氏结构代之以在任意域上有限维向量空

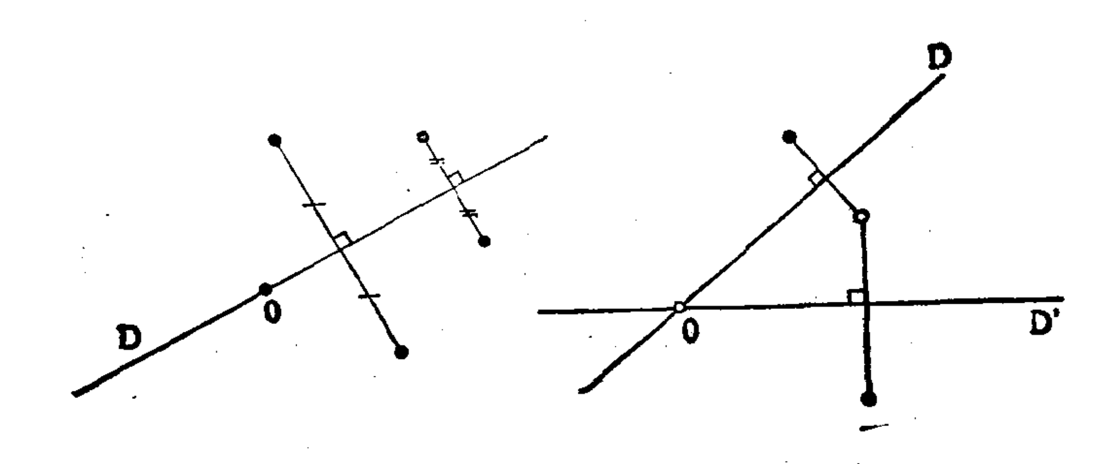


图 8.2.13.

间中的一个非退化（除此以外毫无要求）的二次型时，8.2.12 仍成立，但证明要困难得多；这个证明将是第十三章的一个主要内容.

8.2.14　以后有关 $O(E)$ 的讨论的纲要

$O(E)$ 中一个元素的结构：讨论 $f\in O(E)$（相应地，$O^+(E)$）所能分解成的超平面对称（相应地，中心对称）的最小个数（见 8.4.5，8.4.6）；我们将把一个 $f\in O(E)$ 分解成一维或二维子空间的等距的乘积（见 8.2.15），由此还可引出对 $O(2)$ 的深入讨论（因为 $O(1)$ 是平凡的，见 8.2.13），重要的结论是 $O^+(2)$ 为交换群.

整个 $O(E)$ 群的结构：除 $O^+(2)$ 是交换群以及有关 $O(E)$ 或 $O^+(E)$ 的中心的很简单的讨论外，还将证明对 $n=3$ 和 $n\geqslant 5$，$O^+(n)$ 都是单群：见 8.5. $O(4)$ 不是单群，这一例外的情形将在 8.9.10 中借助于四元数进行讨论. 借助四元数还能对 $O(3)$ 和 $O(4)$ 进行细致的讨论.

$O(E)$ 的拓扑与代数拓扑：在 8.4.3 中可以看到 $O^+(E)$ 是弧连通的，因而 $O^+(E)$ 和 $O^-(E)$ 是 $O(E)$ 的两个连通分支. 接下去，在 8.10.3 中可以看到基本群 $\pi_1(O(n))$ 在 $n=2$ 时是 $\mathbf{Z}$，而在 $n\geqslant 3$ 时是 $\mathbf{Z}_2$. 我们在这里得到了数学中两个很重要的结果：$\pi_1(O(2))=\mathbf{Z}$ 是单复变量函数论和平面曲线的几何理论的一块基石；而 $n\geqslant 3$ 时 $\pi_1(O(n))=\mathbf{Z}_2$ 则是数学中一些出人意料的发展的源泉. 凡此种种均见 8.10.3.

8.2.15　引理. 设 $f\in O(E)$，则存在正交直和

$$E=\overset{\perp}{\bigoplus_i} P_i$$

使 $\forall i$ 有 $f(P_i)=P_i$，且 $\forall i$ 有 $\dim P_i=1$ 或 2.

根据 7.4.3，存在一维或二维向量子空间 $P_1\subset E$ 使 $f(P_1)=P_1$. 由于 f 保持内积，就有 $f(P_1^\perp)=P_1^\perp$；但 $\dim P_1^\perp<\dim E$，递推即得所需结论. 不用到复化，亦即只在实的范围中进行的证明，可参看 8.12.2 和 8.12.3.

上述引理说明，要研究 $f\in O(E)$，只要研究 $\dim E=1$或 2 时的 $O(E)$ 就可以了；$\dim E=1$ 就是 8.2.13 的情形，$\dim E=2$ 的

情形将在下一章中讨论.

8.2.16 $O(E)$ 和 $O^+(E)$ 的中心. $\dim E = 2$ 的情形放在下节讨论,现在假设 $\dim E \geqslant 3$ 而且

$$f \in O(E) \mid fg = gf \quad \forall g \in O^+(E).$$

对 g 特别地取中心对称 σ_V, 其中 V 是余维数为 2 的 E 的子空间(参见 8.2.9); 我们有 $\sigma_V = g \in O^+(E)$ 和 $g(x) = x \ \forall x \in V$, 因而 $f(V) = V$. 这个结论对上述的任一 V 都正确,因而对任一向量直线 D 有 $f(D)=D$, 由此即知 f 是一个位似: $f=\lambda \mathrm{Id}_E$ (参见 4.5.3). 但由 $f \in O(E)$ 有 $\lambda = \pm 1$, 从而 $f = \pm \mathrm{Id}_E$, 注意到 f 的行列式的符号,就可得下述命题:

8.2.17 命题. $O(E)$ 的中心是 $\mathrm{Id}_E \cup (-\mathrm{Id}_E)$. $O^+(E)$ 的中心,当 E 为奇数维时是 $\{\mathrm{Id}_E\}$, 当 E 为偶数维时是 $\mathrm{Id}_E \cup (-\mathrm{Id}_E)$.

8.3 $\dim E = 2$ 时 $O(E)$ 的结构

本节中 E 是欧氏向量平面;仅当特别指明时 E 才是定向的.

8.3.1 引理. 对于 E 中一个给定的标准正交基以及 $f \in GL(E)$ 在这一基下的矩阵 $M(f)$, 有

(i)

$$f \in O^+(E) \Longleftrightarrow M(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ 且 } a^2 + b^2 = 1;$$

(ii)

$$f \in O^-(E) \Longleftrightarrow M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ 且 } a^2 + b^2 = 1.$$

此外,对给定的 f, 实数 a 和 $|b|$ 与这个基的选取无关.

设 $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ 是基,

$$M(f) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

即 $f(e_1) = (a, b), f(e_2) = (c, d)$. 根据假设, $f(e_2) \in (f(e_1))^\perp$;

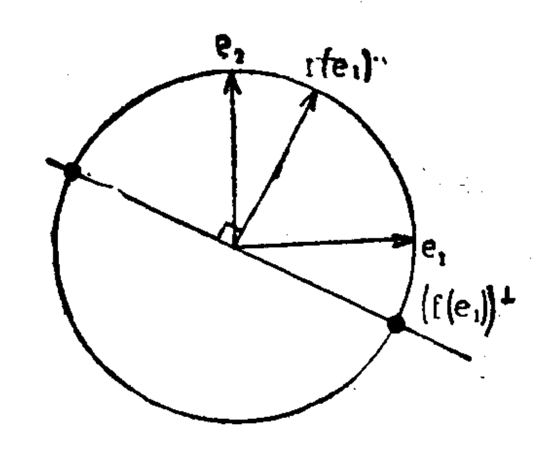


图 8.3.1.

但 $\dim(f(e_1))^{\perp}=1$ 而 $(-b, a)\in(f(e_1))^{\perp}$. 因此 $f(e_2)=(-kb, ka)$, $k\in\mathbf{R}$; 但由 $\|f(e_2)\|=\|f(e_1)\|=1$ 可推得

$$a^2+b^2=1 \text{ 和 } k=\pm 1.$$

至于数量 a，它与基的选取无关，因为 $\operatorname{trace} f=2a$; 而 $|b|$ 也与基的选取无关则因为 $b^2=1-a^2$.

8.3.2 注. 上面的证明表明，给定范数为 1 的 e_1 和 u 后，存在唯一的 $f\in O^{\pm}(E)$ 使 $f(e_1)=u$，因为 $f(e_2)$ 在 $(f(e_1))^{\perp}$ 上只有两个相对的可选的值，因而一个值决定了 $O^+(E)$ 中的一个 f，而另一个值决定了 $O^-(E)$ 中的一个 f. 这种单可迁性也可由 1.4.4.1 得出.

8.3.3 定理. 集合 $O^-(E)$ 是关于 E 中直线的对称全体的集合. 群 $O^+(E)$ 是交换群并且在圆 $S(E)=\{x\in E:\|x\|=1\}$ 上单可迁.

第一个结论可由 8.2.13 推出；单可迁性可由 8.3.2 推出. 可交换性则可由下列计算推出:

8.3.4

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'-bb' & -(ab'+a'b) \\ ab'+a'b & aa'-bb' \end{pmatrix}.$$

8.3.5 推论. 若 E 已定向，则 b 不依赖于所取正向标准正交基的选取. 若 $f\in O^+(E)$, $g\in O^-(E)$, 则 $fg=gf^{-1}$. 任一 $f\in O^+(E)$ 是两个关于直线的对称的乘积，其中第一次所用的直线可以任意

选取．

设 $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ 是两个正向标准正交基，$f\in O^+(E)$．矩阵 $M_{\mathscr{B}}(f)$ 和 $M_{\mathscr{B}'}(f)$ 是相似的：$M_{\mathscr{B}'}(f)=(M_{\mathscr{B}}(t))^{-1}M_{\mathscr{B}}(f)M_{\mathscr{B}}(t)$，其中 t 由 $\mathscr{B}'=t(\mathscr{B})$ 所定义．但由于 $O^+(E)$ 是交换群，即得 $t\in O^+(E)$ 及 $M_{\mathscr{B}'}(f)=M_{\mathscr{B}}(f)$．若 $f\in O^+(E)$，$g\in O^-(E)$，就有 $fg\in O^-(E)$（参看 8.2.3.2），因此（参看 8.3.3）fg 是一个对称，从而就是对合：$fgfg=\mathrm{Id}_E$；然而 $g\in O^-(E)$ 也是对合．最后，若 $f\in O^+(E)$，g 是 $O^-(E)$ 中任一对称，则总可将 f 写成 $f=(fg)g$．

8.3.6 命题． 由 $f\longmapsto a$ 定义的映射 $O^+(E)\to\mathbf{R}$ 称为余弦，记作 cos，其中 a 是 8.3.1 中的数量．若平面还是定向的，则将由 $f\longmapsto b$ 定义的映射 $O^+(E)\to\mathbf{R}$ 称为正弦并记作 sin，其中 b 是 8.3.5 中的数量．对于定向的 E，映射

$$\Theta:O^+(E)\ni f\longmapsto \cos f+i\sin f\in\mathbf{C}$$

是从 $O^+(E)$ 到模 1 的复数全体所成的群 $\mathbf{U}$ 上的同构．而且当 $O^+(E)\subset\mathrm{GL}(E)$ 和 $\mathbf{U}\subset\mathbf{C}$ 都取诱导拓扑时，这个映射 Θ 是同胚．

根据 8.3.4，这个映射是同态；由于 8.3.1 中 $a^2+b^2=1$，它是满射，单射则是显然的．最后，由于 Θ 显然连续而 $O^+(E)$ 紧，可知它是同胚．

8.3.7 复习． 由复指数函数

$$z\longmapsto e^z=\sum_n\frac{z^n}{n!}$$

派生的映射 $\Lambda:\mathbf{R}\ni t\longmapsto e^{it}\in\mathbf{C}$ 是从加法群 $\mathbf{R}$ 到交换群 $\mathbf{U}$ 上的同态．此外，核 $\Lambda^{-1}(1)$ 形如 $\xi\mathbf{Z}$，其中 $\xi>0$．我们记 $\xi/2$ 为 π，以使 $\Lambda^{-1}(1)=2\pi\mathbf{Z}$．圆 $\mathbf{U}$ 同胚于商拓扑空间 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$．最后，也分别将由 $\cos t=e^{it}$ 的实部，$\sin t=e^{it}$ 的虚部所定义的从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 中的两个映射称为余弦和正弦．

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{R}\\ & & \downarrow\Lambda\\ O^+(E) & \xrightarrow[\Theta]{} & \mathbf{U}\end{array}$$

8.3.8 8.3.7 的证明，可参阅 [FL]，第 181—183 页或 [CH2]，第 30 页等。

根据 8.3.7，还可由 $\mathbf{R}$ 的弧连通性推出 $\mathbf{U}$——因而任何欧氏平面 E 上的圆 $S(E)$——是弧连通的。也可参看 8.12.4。

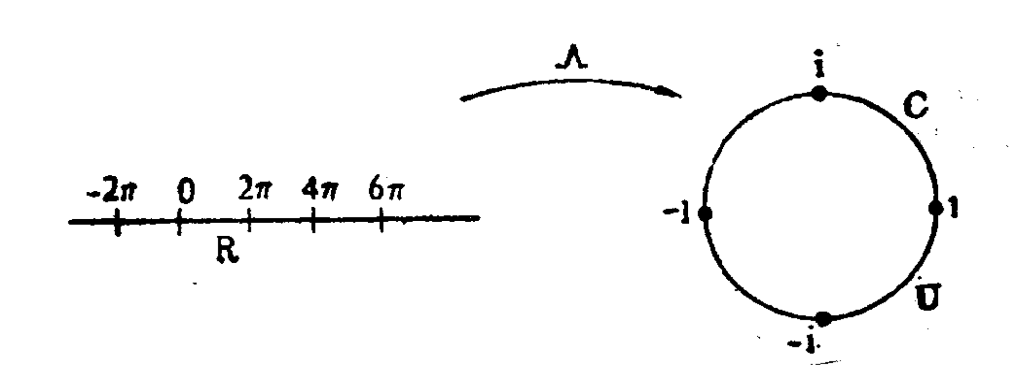


图 8.3.8.

8.3.9 定义. 设 $f\in O^+(E)$，E 已定向. 任一元素 $\theta\in\Lambda^{-1}(\Theta(f))$ 称为 f 的一个测度（参见 8.3.6）；所有其它测度都形如 $\theta+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$。

8.3.10 若 θ 是 f 的一个测度，则 f 在任何正向标准正交基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，其中用到了余弦和正弦映射 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$。

8.3.11 附注. 限制函数 $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ 是双射；其逆双射记为 Arccos. 限制函数 $\sin:[0,\pi]\to[0,1]$ 不是双射，应限制成 $[0,\pi/2]\to[0,1]$ 才是双射；这时，其逆双射记为 Arcsin.

8.3.12 问题与答案. 我们常将 $\mathbf{R}^2$ 与 $\mathbf{C}$ 等同；但因受 8.3.6 启发，我们很希望能将定向欧氏平面 E 以内在的方式与 $\mathbf{C}$ 等同. 这并不是当然可行的. 但有一点可以做到，那就是仅仅利用 E 的欧氏结构和定向来在 E 上给出一种复直线的结构. 事实上，令 $\partial\in O^+(E)$ 是 E 中的旋转，它的一个测度为 $\pi/2$，在 E 定义复纯量乘法为

$$(\lambda+i\mu)x=\lambda x+\mu\partial(x).$$

由于 $\partial^2=-\mathrm{Id}E$ 而且 $\partial\in GL(E)$，可知 E 在上述乘法及 E 的

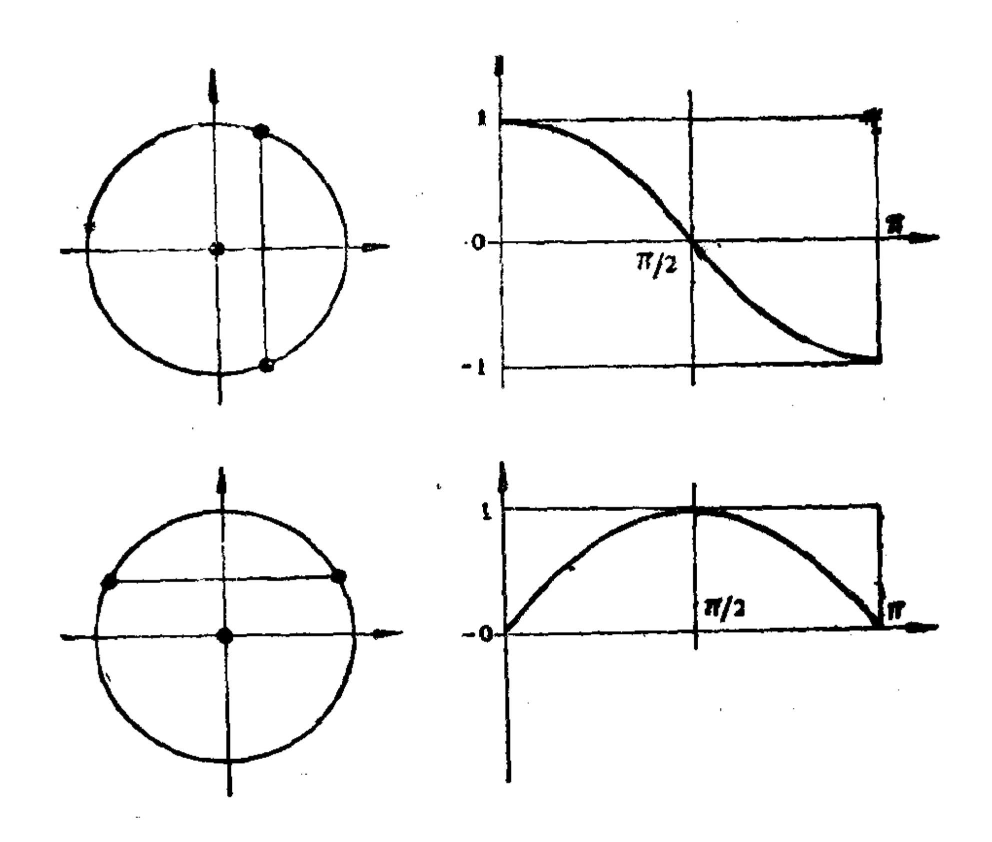


图 8.3.11.

向量加法下确是一个复向量空间。 在 8.7.3.5 中还会以另外的方式(不用测度)出现 ∂. 注意到 $O^+(E)$ 的元素可以等同于 $|a|=1$ 时的线性映射 $z\longmapsto az$，而(实)位似可以等同于 $b\in\mathbf{R}^*$ 时的 $z\longmapsto bz$.

8.3.13 附注. 我们会发现，通过复指数来"量"角是代价很大的. 实际上这里有一个很根本的困难，因此不存在任何方便的处理方法;要弄清这一点，读者可参阅 [FL] 第 178—186 页，[DE2] 第 161—164 页，[BI 1] 第 V 章 §2 和第 VIII 章 §2.

不难证明所有的连续满射同态 $\mathbf{R}\to\mathbf{U}$ 必有 $t\longmapsto \Lambda(kt)$, $k\in\mathbf{R}^*$ 的形式：参看 [FL]，第 184 页.

8.4 $O(E)$ 中一个元素的结构. $O(E)$ 和 $O^+(E)$ 的生成元

8.4.1 命题. 设 $f\in O(E)$; 存在 E 的一个正交基使 f 的矩阵在这

个基下形如

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & & \\ & -I_q & & & 0 & \\ & & A_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & A_r \end{pmatrix},$$

其中 I_p 和 I_q 分别是 p 阶和 q 阶的单位矩阵，

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}, \text{而 } \theta_i \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z} \quad \forall i = 1, \cdots, r.$$

8.4.2 上述结果可由 8.2.15 和 8.3.10 推出．这样的结构不是唯一的，不仅 θ_i 可相差 $2\pi\mathbf{Z}$，而且尤其当某些 A_i 的角相等时，基就不是唯一的；说明可参阅 18.8．反之，I_p 和 $-I_q$ 这两部分是唯一的，其中整数 p，q 以及基中与之相应的部分都是唯一确定的：实际上它们就对应于 f 关于特征值 1 和 -1 的特征子空间 $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - f)$ 和 $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E + f)$，特别是 p，q，r 仅与 f 有关．

8.4.3 推论． 群 $O(E)$ 有两个连通分支： $O^+(E)$ 和 $O^-(E)$，它们而且还是弧连通的．对任一有限维实向量空间 E，群 $\mathrm{GL}(E)$ 总有两个连通分支：$\mathrm{GL}^+(E)$，$\mathrm{GL}^-(E)$，它们也都是弧连通的．

为了证明后半部分，我们任意赋予 E 一个欧氏结构；由 8.1.4 可知，只须证明 $O^+(E)$ 弧连通即可（参见 2.7.2.9）．于是，设 $f \in O^+(E)$ 并应用 8.4.1；在前述记号下，注意到 $\det f = 1$ 时 q 是偶数；$O^+(E)$ 中一条从 f 到 Id_E 的连续道路就可以通过下述矩阵来对 $t \in [0,1]$ 定义：

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & & & \\ & B_1(t) & & & & & \\ & & \ddots & & & 0 & \\ & & & B_{q'}(t) & & & \\ & 0 & & & A_1(t) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & A_r(t) \end{pmatrix}$$

其中

$$B_1(t) = \cdots = B_{q'}(t) = \begin{pmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix},$$

$$A_i(t) = \begin{pmatrix} \cos t\theta_i & -\sin t\theta_i \\ \sin t\theta_i & \cos t\theta_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, \cdots, r).$$

还可以对 $O^+(E)$ 的弧连通性给出一个更初等的证明，既不用到 8.4.1，也不用到角的测度(复指数函数：8.3.7)。做法仍是在两个与 E 的定向相同的标准正交基 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}'$ 之间找出一条连续道路来。设 $\mathscr{B} = \{e_i\}$，$\mathscr{B}' = \{e_i'\}$；我们通过连续的方式归结为 $e_1 = e_1'$，然后考虑正交补 $e_1^\perp$，即可由归纳法证得结论。假定 $e_1 \neq e_1'$ 而 P 是 e_1 和 e_1' 张成的平面；由于圆周 $S(P)$ 是弧连通的(参看 8.3.8，尤其是 8.12.4)，从 e_1 到 e_1' 的一条连续道路 γ 很容易扩充成从 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{B}''$ 的一条连续道路，这里 $\mathscr{B}''$ 的第一个向量是 e_1'。

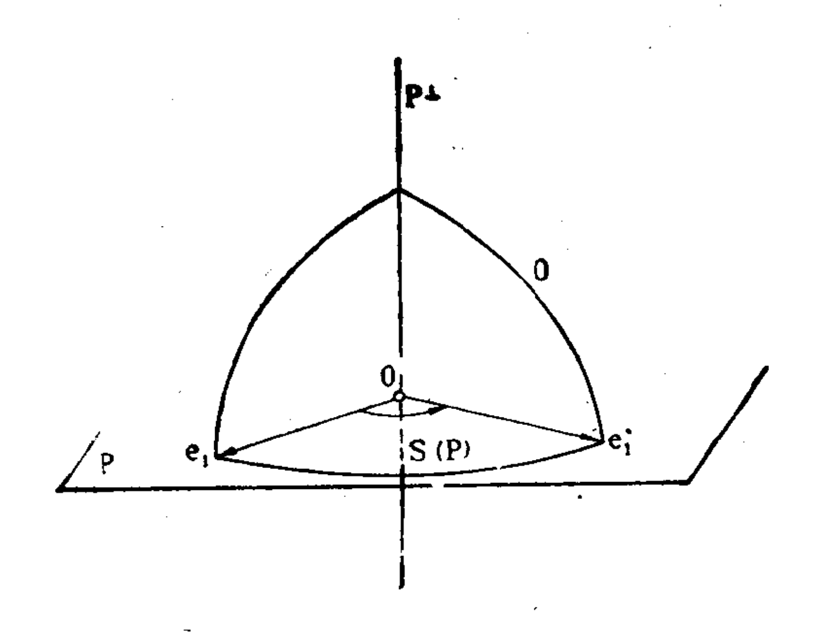


图 8.4.3.

8.4.4 现在我们来说明，定理 8.2.12 中 $f \in O(E)$ 所分解出的超平面对称最少是多少。然后，跟 8.2.12 表明 $O(E)$ 由超平面对称生成相仿，我们证明 $O^+(E)$ 由中心对称生成并讨论至少需由多少个中心对称才能生成(当 $\dim E \geqslant 3$ 时)。

8.4.5 命题. 设 $f \in O(E)$ 且

$$s = \dim E - \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E));$$

则 f 可以写成 s 个超平面对称的乘积，但不可能写成个数 $< s$ 的乘积. 若 f 是 s 个超平面对称的乘积，则这些超平面的交就是 $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

若 $f = \sigma_{H_1} \cdots \sigma_{H_k}$，则 $H_1 \cap \cdots \cap H_k \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$，从而 $k \geqslant s$；若 $k = s$，则有 $H_1 \cap \cdots \cap H_s = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. 设 $f \in O(E)$，应用 8.4.1 可得出所需的生成 f 的 s 个超平面对称如下：对每个基向量 $e_j \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$，取超平面对称 $e_j^{\perp}$；对于平面 P_i 的一个相伴矩阵 A_i，我们将所考虑的 P_i 的旋转分解为（参看 8.2.13）两个关于 P_i 上直线的对称，它们可通过恒等映射嵌入 $P_i^{\perp}$，故为超平面对称.

8.4.6 命题. 设 $f \in O^+(E)$，$\dim E \geqslant 3$ 且

$$s = \dim E - \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)),$$

则 f 是 s 个中心对称的乘积.

当 $\dim E = 2$ 时，这个结论不成立，因为这时 E 的唯一的中心对称是 $-\mathrm{Id}_E$，它根本不可能生成 $O^+(E)$. 下文中不再用到 8.4.6（除 8.5.3.1 外），所以我们将其证明留给读者作为习题（参看 [FL]，第 193 页），但 $\dim E = 3$ 的情形则可立即由 8.4.7.1 和 8.2.13 得出.

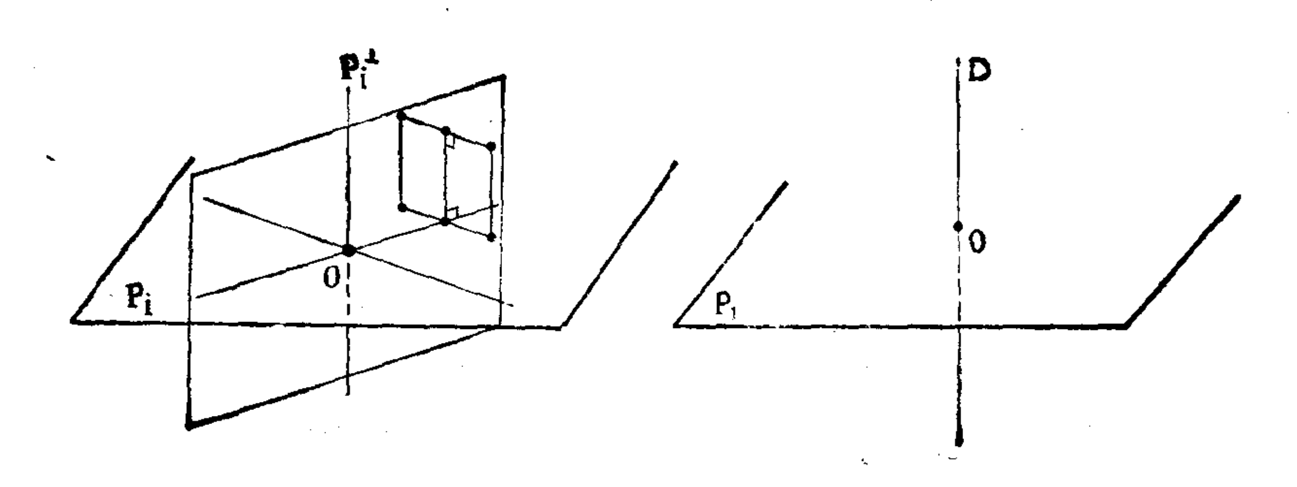


图 8.4.6.

8.4.7 例

8.4.7.1 3维时的 $O^+(E)$. 根据 8.4.1，每个 $f\in O^+(E)\backslash \mathrm{Id}_E$ 有唯一的一条向量直线 D 与之相伴，称该直线为 D 轴；称 f 为关于 D 轴的旋转. 实际上，$f|_D\ \in O^+(D^\perp)$ 而 $D^\perp$ 是一个平面. 于是这个 f 还有一个 $[0,\pi]$ 之间的角与之相伴(参看 8.6)； 若这个角是 π，f 就是中心对称 σ_D. 为了具体计算这个角 θ，只须注意到由于 8.4.1，f 的迹是 $1+2\cos\theta$； 然而这个迹又是与基的选取无关的. 因而，对于任一标准正交基，矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

总表示一个旋转，其角为 $2\pi/3$ 而其轴由向量 $(1,1,1)$ 所生成；注意到这个旋转是 3 阶的. 在 1.8.3.1 中我们实际上已用到 $f\in O^+(E)$ 的轴的唯一性.

8.4.7.2 3维时的 $O^-(E)$. 根据 8.4.1，我们看到每个 $f\in O^-(E)$ 都由超平面对称 σ_H（这里 $\dim H=2$）加上一个以直线 $D=H^\perp$ 为轴的旋转所合成.

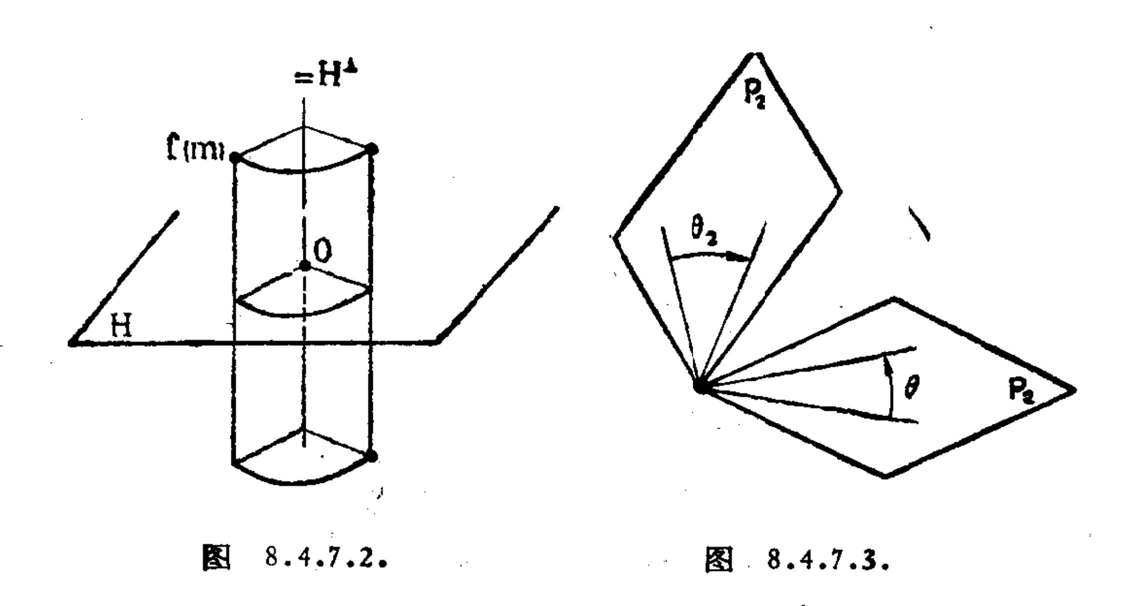


图 8.4.7.2.　　　　图 8.4.7.3.

8.4.7.3 $\dim E=4$ 的情形. 我们看到，除 $O^+(2)$ 的情形

（这时 $f\in O(E)$ 可以不容有任何特征向量），基本的情形按 8.4.1 的记法是

$$M(f)=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ 0 & 0 & \sin\theta_3 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\text{ 且 }\theta_1,\theta_2\notin\pi\mathbf{Z}.$$

两种比较极端的情形最有意思；其一是 $\theta_1=\theta_2$ 的情形，这就是在 1.2.9 和 4.3.6.2 中已遇到过的例子，第 18.8 节将专门对此进行讨论。

另一种情形是 θ_1,θ_2 按古希腊人的说法“不可公度”的情形，即 $\theta_1/\theta_2\notin\mathbf{Q}$，这里 $\mathbf{Q}$ 是有理数域。这时 $m\in E\backslash 0$ 在由 f 生成的群 $G=\{f^n:n\in\mathbf{Z}\}$ 的作用下的轨道是很值得考察的：它的闭包是 E 的微分子流形且微分同胚于一个环面；这一点在 18.9 中还会提起。图 8.4.7.4 表示的并非 f 的轨道，而是下述矩阵的旋转所成的群的轨道：

$$\begin{pmatrix}\cos t\theta_1 & -\sin t\theta_1 & 0 & 0\\ \sin t\theta_1 & \cos t\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos t\theta_2 & -\sin t\theta_2\\ 0 & 0 & \sin t\theta_2 & \cos t\theta_2\end{pmatrix}$$

其中 t 取遍 $\mathbf{R}$（θ_1,θ_2 固定且 $\theta_1/\theta_2\notin\mathbf{Q}$）。要注意的是，图 8.4.7.4 仅仅表示轨道及其闭包的拓扑型，而根本没有表示在四维空间 E 中的这一轨道（这道理是显然的）。

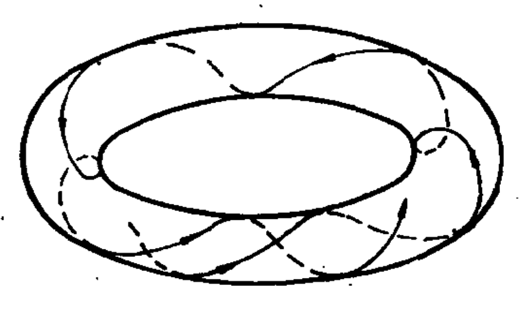


图 8.4.7.4.

8.5 $O(E)$ 的单性

这里提供一个典型的"几何代数"的例子，即通过几何证明来获得纯代数的性质；我们在 1.6.7.2 已碰到过这种情况，而整个第 13 章都将进行这样的讨论． 本书的基本精神是尽量利用代数的工具来研究几何，特别是有形可循的几何问题，上述的讨论仅仅是一种很短暂的逆向的插曲．

8.5.1 定理． 群 $O^+(3)$ 是单群，即它不容有任何非平凡的正规子群（非平凡指既非单位元素亦非整个群）．

仅须证明每一正规子群 $G \neq \mathrm{Id}$，$G \subset O^+(3)$ 至少含有一个中心对称；因若 g 是关于直线 D 的中心对称而 $f \in O^+(3)$，则 fgf^{-1} 是关于 $f(D)$ 的中心对称并仍属于 G． 然而 $O^+(3)$ 是在 $\mathbf{R}^3$ 的直线上可迁的（参见 8.2.7），因此 G 包含所有的中心对称， 从而根据 8.4.6 它与 $O^+(3)$ 相同．

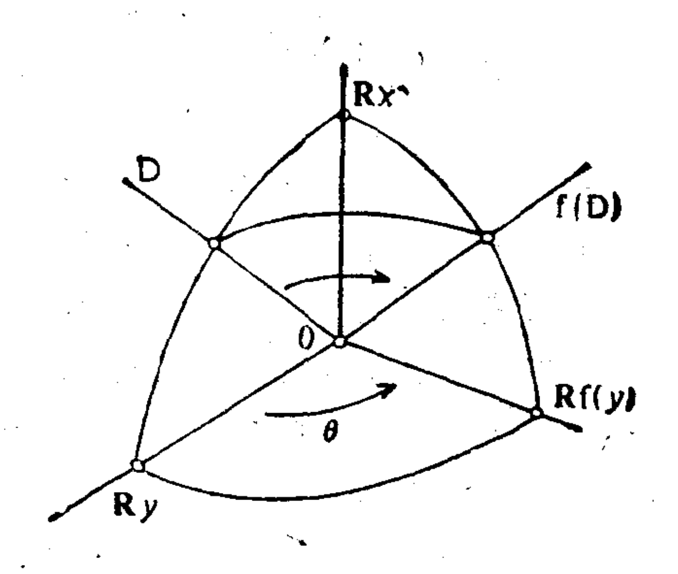


图 8.5.1.

任取 $f \in G$，$f \neq \mathrm{Id}_E$；则 f 是（参看 8.4.7.1）一个以 $\mathbf{R}_x$（$x \in \mathbf{R}^3 \setminus 0$）为轴、以 $\theta \in]0, \pi[$ 为角的旋转（若 $\theta = \pi$，f 是中心对称）．由于 $f^n \in G$，$n \in \mathbf{N}$，必存在 n 使 $n\theta \in [\pi/2, \pi[$；所以不妨假定 $\theta \in]\pi/2, \pi[$． 于是存在一直线 D，使 D 和 $f(D)$ 这两条直线是正交的；为了

说明这一点：可取 $\mathbf{R}^3$ 的坐标轴 $\{\mathbf{R}x, \mathbf{R}y, \mathbf{R}z\}$，其中 $\mathbf{R}x$ 是 f 的轴，$\mathbf{R}y$ 是任一与 $\mathbf{R}x$ 正交的轴，$\mathbf{R}z = \mathbf{R}f(y)$. 当直线 D 在平面 $\mathbf{R}x + \mathbf{R}y$ 上从 $\mathbf{R}y$ 变到 $\mathbf{R}x$ 时，D 和 $f(D)$ 的夹角从 $\theta > \pi/2$ 变到 0，从而在中间取到 $\pi/2$ 的值. 令 $g = \sigma_D$ 即关于 D 的中心对称，令

$$h = gfg^{-1}f^{-1} \in G;$$

h 在 $f(D)$ 上的作用是：

$$f(D) \ni m \underset{f^{-1}}{\longmapsto} f^{-1}(m) \underset{g^{-1}}{\longmapsto} f^{-1}(m) \underset{f}{\longmapsto} m \underset{g}{\longmapsto} -m \in f(D),$$

亦即 $h|_{f(D)} = -\mathrm{Id}_{f(D)}$，因此 h 必为(关于一条与 $f(D)$ 正交的直线的)一个中心对称(参看 8.4.7.1).

8.5.2 附注. 上述代数结论的证明中，毕竟用到了实数理论，特别是阿基米德公理来找出 n 使 $n\theta \geqslant \pi/2$，对此读者也许会感到不无遗憾. 其实，这是非用不可的，读者可以在 [AN] 第 179 页以后看到一个正交群的例子，这个群作用在一个赋有非阿基米德域上的正定二次形式的 3 维空间里，而它不是单群.

8.5.3 定理. $n \geqslant 5$ 时，群 $O^+(n)$ 关于其中心(参看 8.2.17)的商群是单群.

8.5.3.1 设 G 是 $O^+(n)$ 的正规子群，$f \in O^+(n) \setminus$ 中心. 我们的目的是借助于 f 作出一个形如 $g' \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Id}_V$ 的 $g \in G$，其中 $\dim V = n-3$，这一写法意味着有正交直和分解 $\mathbf{R}^n = V \overset{\perp}{\oplus} V^\perp$，$g' \in O^+(V^\perp)$ 而 g 则由 $V^\perp$ 上的 g' 与 V 上的恒等变换合成而得. 事实上，8.5.1 的证明中提供了 $V^\perp$ 中的一个中心对称，它与 V 上的恒等变换合成后即为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个中心对称并在 G 中，由此据 8.4.6 即可得 $G = O^+(n)$.

8.5.3.2 存在一个平面 P 使 $f(P) \neq P$，如若不然，$\mathbf{R}^n$ 的所有直线都在 f 下不变，从而 f 属于 $O^+(E)$ 的中心，参看 8.2.16. 设 S 是由 P 和 $f(P)$ 生成的子空间：$S = P + f(P)$；由于 $n \geqslant 5$ 就有 $S^\perp \neq \{0\}$. 考虑关于 $P^\perp$ 的中心对称：$h = \sigma_{P^\perp}$，令 $k = hfh^{-1}f^{-1}$，即 $k = \sigma_{P^\perp}\sigma_{f(P^\perp)}$，特别就有 $k|_{S^\perp} = \mathrm{Id}_{S^\perp}$ 及 $k \in G \setminus$ 中心. 固定

$x \in S^{\perp} \backslash 0$ 与 y，使

$$z = k(y) \neq y.$$

对每一 $u \in \mathbf{R}^n \backslash 0$，记 $t_u = \sigma_{u^\perp}$ 为关于超平面 $u^\perp$ 的超平面对称，则依次有：$l = t_y t_x \in O^+(n)$，

$$g = klk^{-1}l^{-1} \in G \backslash 中心$$

和 $$g = kt_y t_x k^{-1} t_x t_y = kt_y k^{-1} t_x t_x t_y = t_{k(y)} t_y = t_z t_y$$

(因为 $kt_x k^{-1} = t_{k(x)} = t_x$ 所以 $kt_x = t_x k$)．而 $g = t_z t_y$ 正好就是形如$g = g' \oplus \mathrm{Id}_V$ 的，其中 $\dim V^\perp = 3$ (其实现在 $V^\perp \subset S$).

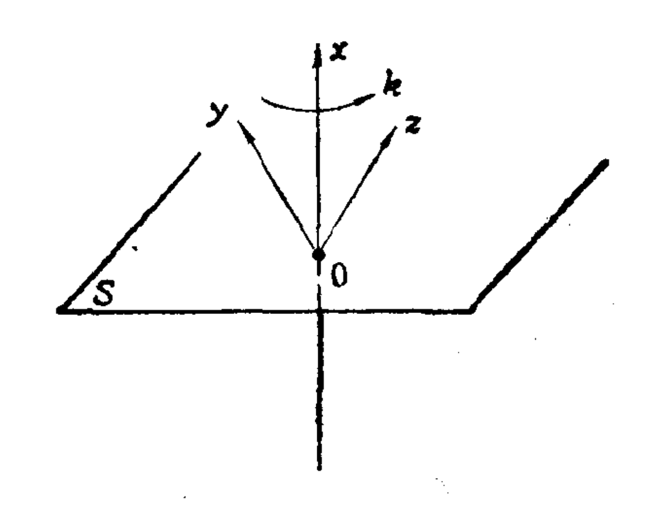


图 8.5.3.2.

8.5.3.3 $O(4)$ 情形如何呢？答案将在 8.9.10 中给出． 关于"典型群"的单性，基本的参考文献是 [DE1]；也可参看 13.6.8 和 13.7.14.

8.6 直线或半直线的交角

本节中 $\dim E \geqslant 2$.

这里讨论的是无向角，这是相对于欧氏平面中直线或半直线的定向角而言的概念，后者将在下节中讨论．本节中的(无向)角可以位于任意维的欧氏空间之中，其中包括平面的情况．另外，在这一章中仅涉及向量直线的讨论，仿射直线的情形要放在下一章

再讨论(参看 9.2.1).

8.6.1 半直线，定向直线. 设 E 是任一实向量空间；E 的半直线就是 E 中形如 $\mathbf{R}_+^*x$, $x \in E\setminus 0$, 的子集，它们的全体记作 $\tilde{\mathscr{D}}(E)$. E 中向量直线的全体，亦即 Grassmann 流形 $G_{E,1}$, 现在记作 $\mathscr{D}(E)$；我们有一个映射 $p: \tilde{\mathscr{D}}(E) \to \mathscr{D}(E)$, 它的每一逆像都含有两个元素.

确切地说，若 $\Delta \in \tilde{\mathscr{D}}(E)$, 则其反向半直线 $-\Delta$ 使得

$$p(-\Delta) = p(\Delta) = \mathbf{R}x \quad \forall x \in \Delta.$$

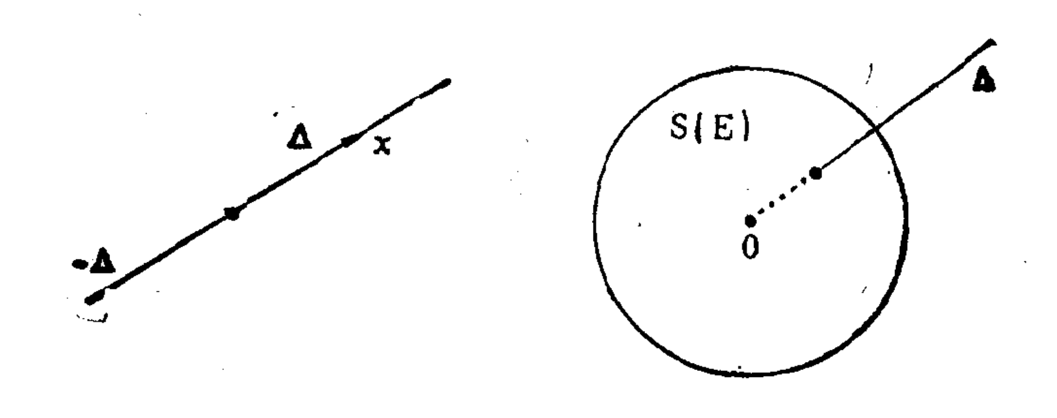


图 8.6.1.

我们还记得，$\mathscr{D}(E)$ 就是射影空间 $P(E)$ (参看 4.1.3.4)；至于 $\tilde{\mathscr{D}}(E)$, 如果 E 是欧氏空间的话，也可有一个很方便的解释，因为 $x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$ 确定了一个双射 $\tilde{\mathscr{D}}(E) \to S(E)$, 其中 $S(E)$ 是 E 的单位球面. 即使在一般情形下，在 $\tilde{\mathscr{D}}(E)$ 和带有定向的 E 中的向量直线全体所成的集合之间总存在着等价关系.

8.6.2 下述定义的根据，一是角的测度(参看 8.3.7, 8.3.11), 另一是 8.6.6.

8.6.3 定义. 设 E 是欧氏向量空间，

$$\Delta, \Delta' \in \tilde{\mathscr{D}}(E), \quad D, D' \in \mathscr{D}(E),$$

则

(i) 数量 $\dfrac{|(x|x')|}{\|x\|\|x'\|}$ 只与 D, D' 有关，而与 $x \in D\backslash 0$, $x' \in D'\backslash 0$ 无关. D 和 D' 的(无向) 交角，记作 $\overline{DD'}$ 或 $\overline{D,D'}$，就是如下定义的 $[0, \pi/2]$ 中的实数(参见 8.3.11)

$$\overline{DD'} = \operatorname{Arc}\cos\left(\frac{|(x|x')|}{\|x\|\|x'\|}\right), \quad x \in D\backslash 0, \quad x' \in D'\backslash 0.$$

(ii) 数量 $\dfrac{(x|x')}{\|x\|\|x'\|}$ 只与 Δ, Δ' 有关，而与 $x \in \Delta\backslash 0$, $x' \in \Delta'\backslash 0$ 无关. Δ 和 Δ' 的(无向)交角，记作 $\overline{\Delta\Delta'}$ 或 $\overline{\Delta,\Delta'}$，如下定义为 $[0, \pi]$ 中的实数

$$\overline{\Delta\Delta'} = \operatorname{Arc}\cos\left(\frac{(x|x')}{\|x\|\|x'\|}\right).$$

8.6.4 换一种说法:

$$\cos(\overline{DD'}) = \frac{|(x|x')|}{\|x\|\|x'\|}, \quad \cos(\overline{\Delta\Delta'}) = \frac{(x|x')}{\|x\|\|x'\|}.$$

根据 8.3.11，只须验证 $\dfrac{(x|x')}{\|x\|\|x'\|} \in [-1, 1]$ 即可，这已见于8.1.3.

8.6.5 附注. 由 8.1.3 可知: $\overline{DD'} = 0$ (相应地，$\overline{\Delta\Delta'} = 0$) 等价于 $D = D'$ (相应地，$\Delta = \Delta'$); 而 $\overline{\Delta\Delta'} = \pi$ 等价于 $\Delta' = -\Delta$, $\overline{\Delta\Delta'} = \pi/2$ (或 $\overline{DD'} = \pi/2$) 等价于 Δ 和 Δ' (或 D 和 D') 正交.

这些交角都是遗传的: 若 $F \subset E$ 是包含 Δ, Δ' 的子空间，则在 F 中来看也好，在 E 中来看也好，交角 $\overline{\Delta\Delta'}$ 总是相同的. 对 $\mathscr{D}(E)$ 亦然.

$\tilde{\mathscr{D}}(E)$ 上或 $\mathscr{D}(E)$ 上的交角，都满足两条距离公理; 在9.9.8, 18 和 19.1 中我们还会进一步看到它们确实就是距离. 对 $\tilde{\mathscr{D}}(E)$ 而言，这是球面 $S(E)$ 上的内蕴距离，对 $\mathscr{D}(E)$ 而言则涉及射影空间 $P(E)$ 上的椭圆几何.

8.6.6 命题. 如果 $O(E)$ 以 $g(\cdot,\cdot) = (g(\cdot), g(\cdot))$ 的平凡方式作用在 $\tilde{\mathscr{D}}^2(E)$ 和 $\mathscr{D}^2(E)$ 上，则:

(i) 对于 $O(E)$ 的作用：(D, D') 和 (D_1, D_1') 属于同一轨道的充要条件是 $\overline{DD'} = \overline{D_1D_1'}$，$(\Delta, \Delta')$ 和 (Δ_1, Δ_1') 属于同一轨道的充要条件是 $\overline{\Delta\Delta'} = \overline{\Delta_1\Delta_1'}$；

(ii) 对于 $O^+(E)$ 的作用，(i) 的两点结论在 $\dim \geqslant 3$ 时仍成立，但在 $\dim E = 2$ 时都不成立。

换句话说，我们已将 $\tilde{\mathscr{D}}^2(E)$（相应地，$\mathscr{D}^2(E)$）中 $O(E)$ 的轨道用 $[0, \pi]$（相应地，$[0, \pi/2]$）中的一个实数来作为参数；而且当 $\dim E \geqslant 3$ 时 $O^+(E)$ 的轨道全体跟 $O(E)$ 的相同。

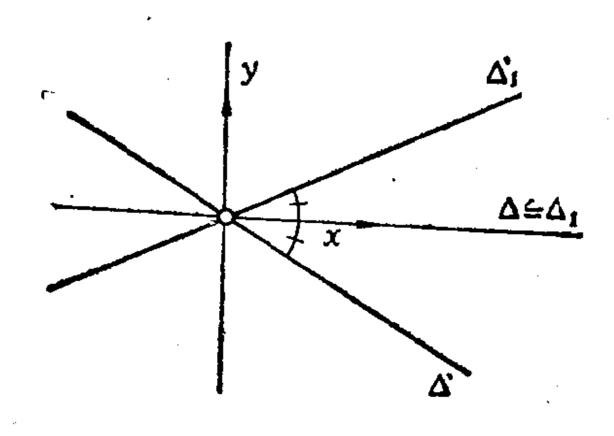


图 8.6.6.

我们对 $\tilde{\mathscr{D}}(E)$ 的情形进行讨论，直线的情形不会有更多的困难。根据 8.2.7，不妨假定 $\Delta, \Delta', \Delta_1, \Delta_1'$ 都在 E 的同一平面内，而且 $\Delta = \Delta_1$；取该平面的正交基 $\{x, y\}$，使 $x \in \Delta = \Delta_1$，$x' \in \Delta'$，$x_1' \in \Delta_1'$，且 $\|x'\| = \|x_1'\| = 1$. 根据 $\overline{\Delta\Delta'}$ 和 $\overline{\Delta_1\Delta_1'}$ 的定义，两向量 x' 和 x_1' 有相同的 x 坐标；由于它们的模都是 1，它们的 y 坐标或是相等或是互为相反数. 若相等，则 $\Delta' = \Delta_1'$，命题得证；若互为相反数，则对称 σ_Δ 满足

$$\sigma_\Delta(\Delta') = \Delta_1'.$$

若 $\dim E \geqslant 3$，这一 σ_Δ 可延拓为 E 的中心对称. 若 $\dim = 2$，则图示的情形提供了反例.

8.6.7 问题. 这样，一个 $[0, \pi/2]$ 上的数量可以用来表征至少彼此等距的一对直线；对 E 的两个维数给定的子空间 (V, W)，

也可提出同样的问题．对于 $\dim = 3$，可用 $[0, \pi/2]$ 上的一个数量很方便地进行分类：若 $\dim V = \dim W = 2$，取正交直线 $V^{\perp}$，$W^{\perp}$ 的交角．若 $\dim V = 1$，$\dim W = 2$，取 $\inf\{\overline{VD}: D \subset W\}$(而且，这一下界可由直线 V 和 V 在 W 上的正交投影来实现)．

但从 $\dim = 4$ 起，典型的情形是 $\dim V = \dim W = 2$，不可能再用一个实参数来对 $O(E)$ 的作用下的轨道进行分类．在 [FL] 第 310—316 页可以找到最一般情况下的这一问题的完整答案．

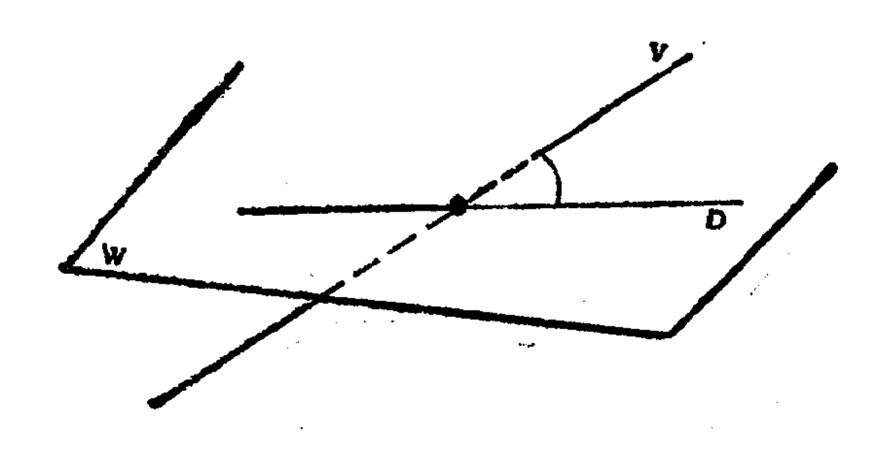


图 8.6.8.

8.7 平面上的定向角

本节中 $\dim E = 2$.

8.7.1 8.6.6 (ii) 表明，当 E 是欧氏平面时，为了对 $\tilde{\mathscr{D}}^2(E)$ 或 $\mathscr{D}^2(E)$ 在 $O^+(E)$ 下的轨道进行分类，交角(在 $[0,\pi]$ 或 $[0,\pi/2]$ 内）已不够用了；必须引进一个更精细的不变量．下面将要叙述的理论，对讨论简单的直线交角来说显得过于抽象，但既然不存在一种更直观更简捷的理论，那么从这一意义上说我们的叙述就是不可避免的了；要能信服这一点，读者可以参阅 [FL] 第 160—186 页．为了看出叙述清晰的好处，读者也可参阅诸如 [IR]，[DC1]

这样的旧文献，其中在定向角的关系中引进了“mod$k\pi$”和“mod$2k\pi$”。

花费如此代价得到的更精细的不变量，即定向角的概念，使我们能在以下几章中得出许多巧妙而简洁的结果：可参看 10.9.

8.7.2 定向直线的定向角

8.7.2.1 由于 $O^+(E)$ 在 $\tilde{\mathscr{D}}^2(E)$ 上单可迁（参看 8.3.3），存在一个映射，记作 $\Phi:\tilde{\mathscr{D}}^2(E)\to O^+(E)$. 这一映射在 $\tilde{\mathscr{D}}^2(E)$ 上确定了一个等价关系（有同一像点的那些点）；另一方面，$O^+(E)$ 在 $\tilde{\mathscr{D}}^2(E)$ 上的作用也确定另一等价关系，以轨道为等价类（参看 1.6）。有趣的是：

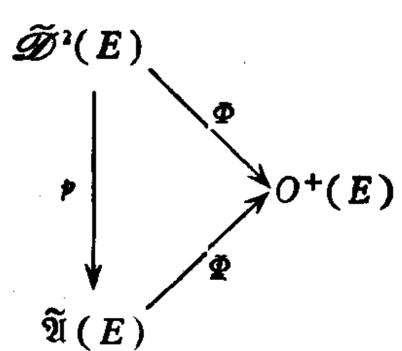
8.7.2.2 引理. 上述两个等价关系是相同的.

第一个是 $(\Delta,\Delta')\sim(\Delta_1,\Delta_1')$ 如果 $\exists g\in O^+(E)$ 使 $\Delta'=g(\Delta)$ 且 $\Delta_1'=g(\Delta_1)$，第二个是 $\exists f\in O^+(E)$ 使 $\Delta_1=f(\Delta)$ 且 $\Delta_1'=f(\Delta')$. 由于 $O^+(E)$ 是交换群，两者是相同的.

因而我们可以径直定义商集 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)=\tilde{\mathscr{D}}^2(E)/\mathscr{R}$ 而无须说明用的是两个等价关系中的哪一个；另外再定义典范射影

$$p:\tilde{\mathscr{D}}^2(E)\to\tilde{\mathfrak{A}}(E)$$

以及 Φ 在商集上诱导的映射 $\underline{\Phi}:\tilde{\mathfrak{A}}(E)\to O^+(E)$. 因 Φ 是满射，故 $\underline{\Phi}$ 由定义是双射.



8.7.2.3 定义. $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 称为 E 中定向直线的定向角集合；从 $O^+(E)$ 的群结构可以由 $\underline{\Phi}$ 诱导出 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 的群结构，记作加法. $\Delta,\Delta'\in\tilde{\mathscr{D}}(E)$的定向角就是 $p((\Delta,\Delta'))$；记之为 $\widehat{\Delta\Delta'}$ 或 $\widehat{\Delta,\Delta'}$.

下面列举定向角的一些有用的性质，其中大部分或则是上述内容换个形式的表达，或则是显而易见的.

8.7.2.4 性质. 对任何定向直线:

(1) $\Delta' = f(\Delta)$, $f \in O^+(E) \Longleftrightarrow \Phi(\widehat{\Delta\Delta'}) = f$, 特别有

$$\widehat{\Delta\Delta'} = 0 \Longleftrightarrow \Delta = \Delta';$$

(2) $\widehat{\Delta\Delta'} = \widehat{\Delta_1\Delta_1'} \Longleftrightarrow \exists f \in O^+(E) \mid f(\Delta) = \Delta_1$ 且 $f(\Delta') = \Delta_1'$;

(3) $\widehat{\Delta\Delta'} = \widehat{\Delta_1\Delta_1'} \Longleftrightarrow \widehat{\Delta\Delta_1} = \widehat{\Delta'\Delta_1'}$;

(4) $\widehat{\Delta\Delta'} + \widehat{\Delta'\Delta''} = \widehat{\Delta\Delta''}$ (Chasles 关系式), 特别有 $\widehat{\Delta'\Delta} = -\widehat{\Delta\Delta'}$;

(5) $\forall f \in O^+(E)$ (相应地, $O^-(E)$): $\widehat{f(\Delta)f(\Delta')} = \widehat{\Delta\Delta'}$ (相应地, $-\widehat{\Delta\Delta'}$).

其中唯一不能从定义和8.7.2.2引出的性质是(5)中$f \in O^-(E)$的情形,但它可直接由8.3.5导出.

8.7.2.5 注. 所以,若为定义定向角,则无须将E定向;但若想度量定向角,则必须将E定向.

读者以后还会在仿射空间中遇到上述某些性质: Chasles 关系式,平行四边形法则 ($\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} \Longleftrightarrow \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{bd}$), 并且将会发现这些性质对所有的单可迁交换群都成立.

8.7.3 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 中以 2 相除; 平分线. 这里的问题是在群 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 中求解方程 $2x = a$. 我们先来求解方程 $2x = 0$, 或即 $O^+(E)$ 中的 $d^2 = \mathrm{Id}_E$. 若

$$M(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

由8.3.4就有$a^2 = 1$, 从而$a = \pm 1$, 而$b = 0$, 即$f = \pm \mathrm{Id}_E$. 利用8.2.9提供的对合构造也可以看到这一点.

8.7.3.1 命题. 方程$2x = 0$恰有两个解0和$\Phi^{-1}(-\mathrm{Id}_E)$; 这一定向角记作$\varpi$并称作**平角**. 我们有 $\widehat{\Delta\Delta'} = \varpi \Longleftrightarrow \Delta' = -\Delta$, 这里$-\Delta$表示$\Delta$带有另一方向所定义的半直线.

最后, 8.7.3.1 的第三种证明可由下述定义导出.

8.7.3.2 定义. 凡能使 $\widehat{\Delta\Sigma}=\widehat{\Sigma\Delta'}$ 的定向直线 Σ，都称为定向直线 Δ 与 Δ' 的*平分线*.

根据 8.7.2.4 (4) 和 (5)，说 Σ 是 Δ 和 Δ' 的平分线就等价于说关于 Σ 的对称 σ_Σ（参见 8.2.9）满足 $\sigma_\Sigma(\Delta)=\Delta'$. 但 8.2.11 的讨论表明支撑 Σ 使 $\sigma_\Sigma(\Delta)=\Delta'$ 的直线是唯一的，因为一条定向直线容有唯一的正单位向量. 因此 Δ，Δ' 恰有两条反向的平分线 $\pm\Sigma$. 最后由 $\widehat{\Delta\Sigma}=\widehat{\Sigma\Delta'}$ 可推出 $\widehat{\Delta\Delta'}=2\hat{\Delta}\Sigma$，由此即得:

8.7.3.3 命题. 两条定向直线 Δ,Δ' 恒有两条平分线，位于同一直线上而方向相反. 对任一 $a\in\widetilde{\mathfrak{A}}(E)$，方程 $2x=a$ 恰有两个

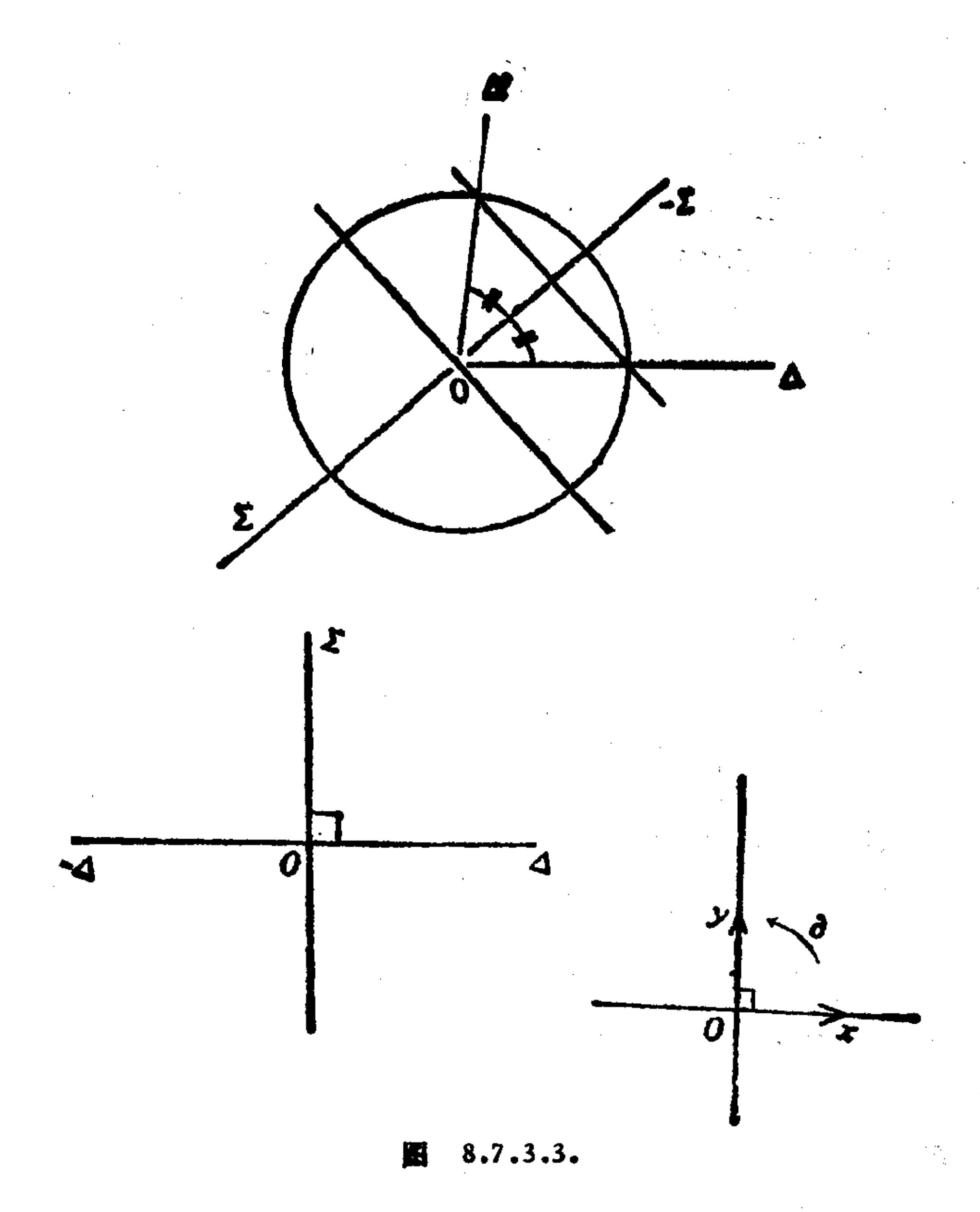


图 8.7.3.3.

解，形如 $\{b, b+\varpi\}$. 若 $\widehat{\Delta\Delta'}=a$，则 $2x=a$ 的 x 解由 Δ 和 Δ' 的平分线 Σ 通过 $x=\widehat{\Delta\Sigma}$ 的关系式给出。

8.7.3.4 方程 $2x=\varpi$ 所起的作用是很有趣的，因为若 x 使得 $2x=\varpi$ 且 $\widehat{\Delta\Delta'}=x$，则 Δ, Δ' 所在的那两条直线相互正交，反之亦然。要说明这一点，可利用矩阵及 8.3.4：由 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$，应有 $a=0$，从而 $b=\pm 1$；或者从几何上看，注意到两条直线 Δ 和 $-\Delta$ 的平分线是与 Δ 正交的，这是因为 Δ 所在的直线 D 应在 σ_Σ 下不变并异于 Σ. 此外，$2x=\varpi$ 的解与 E 的定向的关系如下：

8.7.3.5 命题. $2x=\varpi$ 的解称为 $\widetilde{\mathfrak{A}}(E)$ 的直角. 取定其中的一个直角，就等价于取定 E 的定向如下：若 ∂ 是取定的直角，则标准正交基 $\{x, y\}$ 为正的充要条件是 $y=\underline{\Phi}(\partial)(x)$.

注意，这里的 ∂ 是完全和 8.3.12 中一致的。

8.7.4 E 定向的情形；定向角的测度. 本段 8.7.4 中假设 E 是定向欧氏平面，并利用 8.3.6 和 8.3.9 给出：

8.7.4.1 定义. 对 $\widetilde{\mathfrak{A}}(E)$ 中一个定向角 α，将 $\underline{\Phi}(\alpha)$ 的任一测度，即 $\Lambda^{-1}(\Theta(\underline{\Phi}(\alpha)))$ 的任一元素，称为 x 的测度（一个测度）.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathbf{R} \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \Lambda} \\ \widetilde{\mathfrak{A}}(E) & \xrightarrow[\underline{\Phi}]{} & O^+(E) & \xrightarrow[\Theta]{} & \mathbf{U} \end{array}$$

8.7.4.2 例. ϖ 的一个测度是 π，∂ 的一个测度是 $\pi/2$. 若 t 是 α 的一个测度，则 α 的所有其它测度都形如 $t+2k\pi$，其中 $k \in \mathbf{Z}\backslash 0$.

借助于测度，可以来说明对任何整数 $n \geqslant 1$ 和任何 $a \in \widetilde{\mathfrak{A}}(E)$，方程 $nx=a$ 在 $\widetilde{\mathfrak{A}}(E)$ 中恰有 n 个不同的解：参见 8.12.7.

8.7.5 $\overline{\Delta\Delta'}$ 与 $\widehat{\Delta\Delta'}$ 的比. 下面假设 E 是定向的；若 E 事先并未定向，则出于我们的需要应将它定向. 设 Δ, Δ' 是两条定向直线，而且在这里不妨都看作半直线(参见 8.6.1)；则 $\widehat{\Delta\Delta'}$ 总有一个属于

$[0,2\pi[$ 的测度。另一方面，(Δ, Δ') 通过 $\{x, x'\}$，其中 $x \in \Delta$，$x' \in \Delta'$，定义的标架，或都是正的，或都是负的（$\Delta' = \pm\Delta$ 的情形排除在外）。

8.7.5.1 命题. 设 t 是 $\widehat{\Delta\Delta'}$ 在 $[0,2\pi[$ 内的测度，则若 (Δ,Δ') 所定义的标架是正的(相应地，负的)，就有 $t \in [0, \pi[$ （相应地，$t \in [\pi, 2\pi[$）和 $\overline{\Delta\Delta'} = t$（相应地，$\overline{\Delta\Delta'} = 2\pi - t$），其中不包括 $\Delta = \Delta'$，$t = 0$ 和 $\Delta' = -\Delta$，$t = 2\pi - t = \pi$ 这两种平凡的情形。

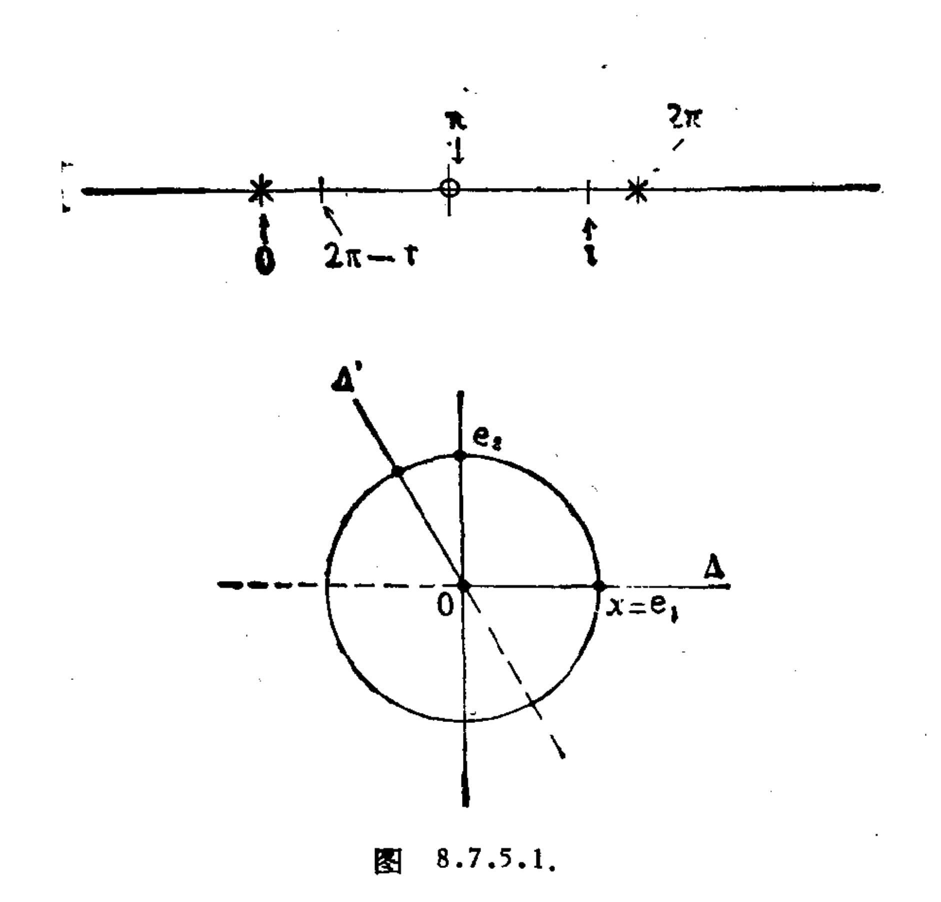


图 8.7.5.1.

后两种情形是平凡的；因此我们总可假定 $\Delta' \neq \pm\Delta$. 若改变定向，则 $\Delta\Delta'$ 改变符号，从而 t 变成 $2\pi - t$；因而总不妨在正标架的假设下进行证明. 确切地说，设 $x \in \Delta$，$x' \in \Delta'$ 都是单位向量，$\{e_1 = x, e_2\}$ 是第一个向量 x 的标准正交正基. 关键在于 x' 关于 e_2 的坐标是正的，而该坐标就是 $\sin t$，因而 $t \in [0, \pi[$，利用 8.3.11 即得证。

8.7.5.2 定义. 设 Δ, Δ', Δ'' 是一个(不必定向的)欧氏平面上的三条直线;若满足下列条件之一,则称 Δ' 介于 Δ 和 Δ'' 之间:若 $\Delta = \Delta''$, 则 $\Delta' = \Delta = \Delta''$, 若 $\Delta'' = -\Delta$, 无须任何条件, 若 $\Delta'' \neq \pm\Delta$, 则 Δ' 要属于 Δ 所定义并包含 Δ'' 的半平面与 Δ'' 所定义并包含 Δ 的半平面的交集.

8.7.5.3 推论. 设 Δ' 介于 Δ 和 Δ'' 之间, 则 $\overline{\Delta\Delta'} + \overline{\Delta'\Delta''} = \overline{\Delta\Delta''}$.

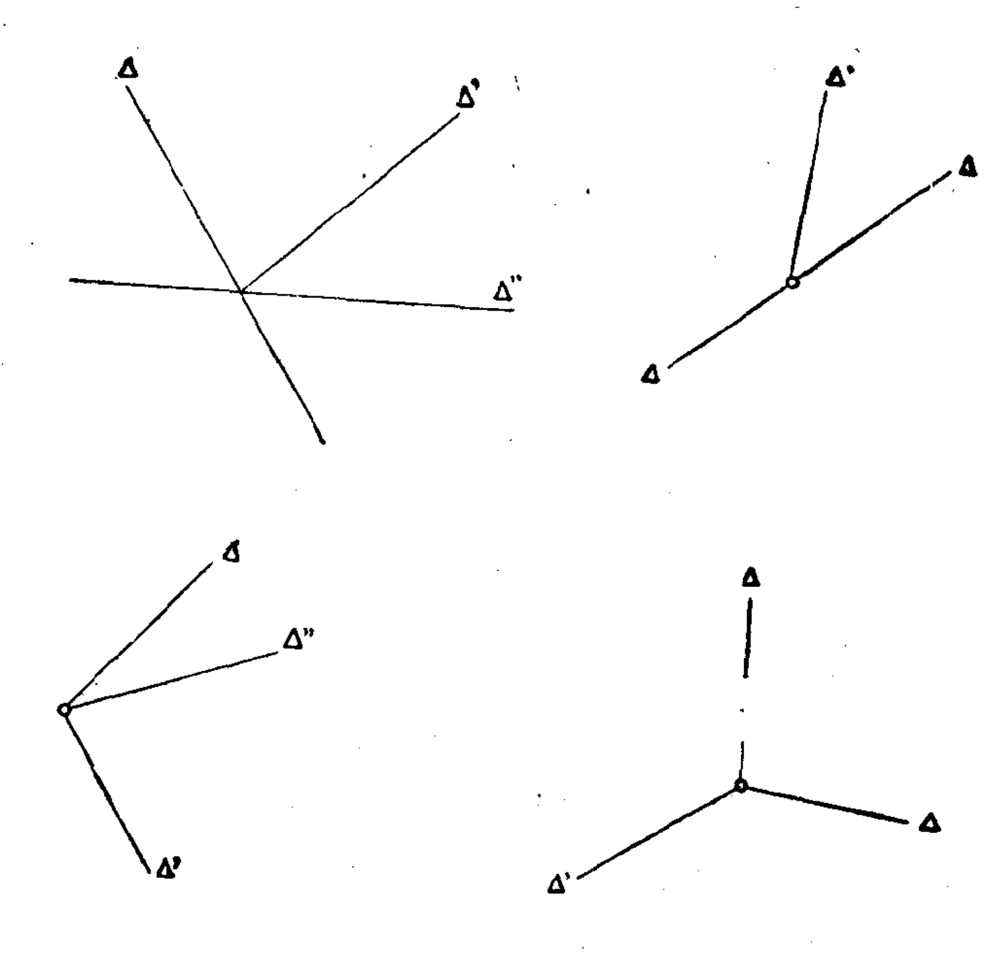


图 8.7.5.3.

三条半直线各不相同时,结论并不显然;这时, 取 E 的定向使 (Δ,Δ') 所定义的标架为正,假设条件表明 (Δ',Δ'') 和 (Δ,Δ'') 的情形也是如此($\Delta'' = -\Delta$ 的情形除外). 设 s, t 是 $\widehat{\Delta\Delta'}$, $\widehat{\Delta'\Delta''}$ 在 $[0,2\pi[$ 内的测度;由 8.7.5.1 可知 $t \in [0,\pi[$ 和 $s = \overline{\Delta\Delta'}$, $t = \overline{\Delta'\Delta''}$. 但 $s + t$ 是 $\widehat{\Delta\Delta''}$ 的一个测度且 $s + t \in [0,2\pi[$; 若 $\Delta'' = -\Delta$, 则

$s+t=\pi$，若 $\Delta''\neq-\Delta$，则我们已知 $(\Delta,\ \Delta'')$ 所定义的标架是正的，因此由 8.7.5.1 有 $s+t=\overline{\Delta\Delta''}$，推论得证.

8.7.5.4 推论 8.7.5.3 很重要，它可以直观地表达如下：就"角"这个词儿的真实的、物理的意义而言，我们可以把无向角 $\overline{\Delta\Delta'}$ 表示为由 Δ 和 Δ' 所定义的扇形的测度，若 $\Delta'=-\Delta$(Δ 任意)，则该扇形成为半平面，若 $\Delta'\neq-\Delta$，则是介于 Δ 和 Δ' 之间的半直线的集合. 若 Δ' 介于 Δ 和 Δ'' 之间，则由 Δ 和 Δ'' 所定义的扇形是 Δ,Δ' 所定义的扇形与 $\Delta',\ \Delta''$ 所定义的扇形的并集. 另一种表示法则将一个扇形跟该扇形在 E 的单位圆 $S(E)$ 上截得的圆弧联系起来；8.7.5.3 说明圆弧的长度是组成该圆弧的两段圆弧长度的和. 我们以后还会对 8.6.5 中提出的这种观点进行充分的讨论；请参阅 9.9.8. 关于扇形可参阅 [DE2] 第 79—82 页，或 [FL] 第 183 页.

8.7.6 附注. 上述内容表明了角的测度的困难所在：两个扇形的并集并不一定是扇形（图 8.7.5.3)，因而若无基本的限制，加法就无法进行；对此亦可参阅 [FL] 第 185—186 页. 我们可以构造一种很有趣的结构，即 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)\backslash\varpi$ 上的序的关系；用非内蕴的观点，可将 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 看作一个圆（参阅 8.3.6) 并由 ϖ 出发将它球极射影（参见 18.1.4) 到 $\mathbf{R}$ 上，由此可得出 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)\backslash\varpi$ 与 $\mathbf{R}$ 之间的一个双射，从而可将 $\mathbf{R}$ 的序关系推衍到 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)\backslash\varpi$ 上. 关于更详细的论述，可参看 [FL] 第 176 页，或 [DE2] 第 117 页，也可利用 Λ 在 $]-\pi,\pi[$ 上的限制.

8.7.7 直线的定向角

8.7.7.1 本段中将对直线和 $\mathscr{D}^2(E)$ 作相仿的讨论；由于这种讨论并无多大困难，我们只是很快地、不加证明地在行文中给出种种结果. 它们都建立在两个等价的事实的基础上：一条直线 D 恰好定义两条反向的定向直线（其中并无哪一条先天地应取为正向)，群 $O^+(E)$ 在 $\mathscr{D}^2(E)$ 上不再是单可迁的，但商群

$$PO^+(E)=O^+(E)/\{\mathrm{Id}_E,\ -\mathrm{Id}_E\}$$

却是单可迁的. $PO^+(E)$ 的记号意指"正交射影群"，因为 $\mathscr{D}(E)\simeq$

$P(E)$；在 14.7.2 和 19.1 中还将对这种正交射影群进行充分的讨论。

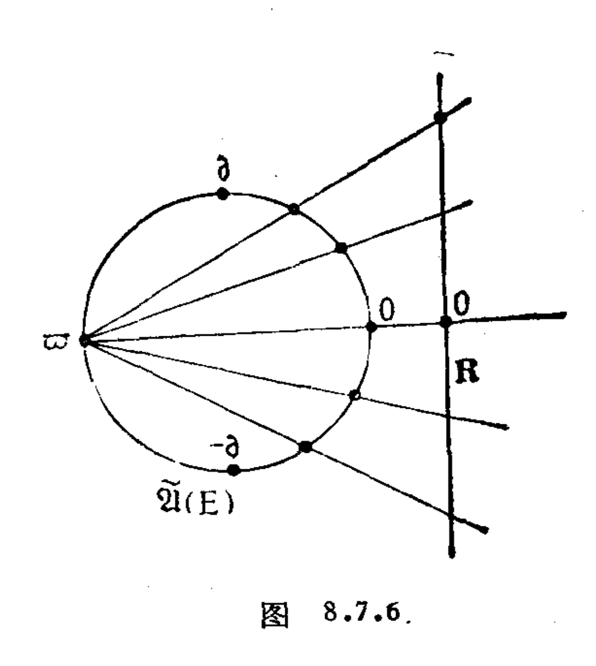
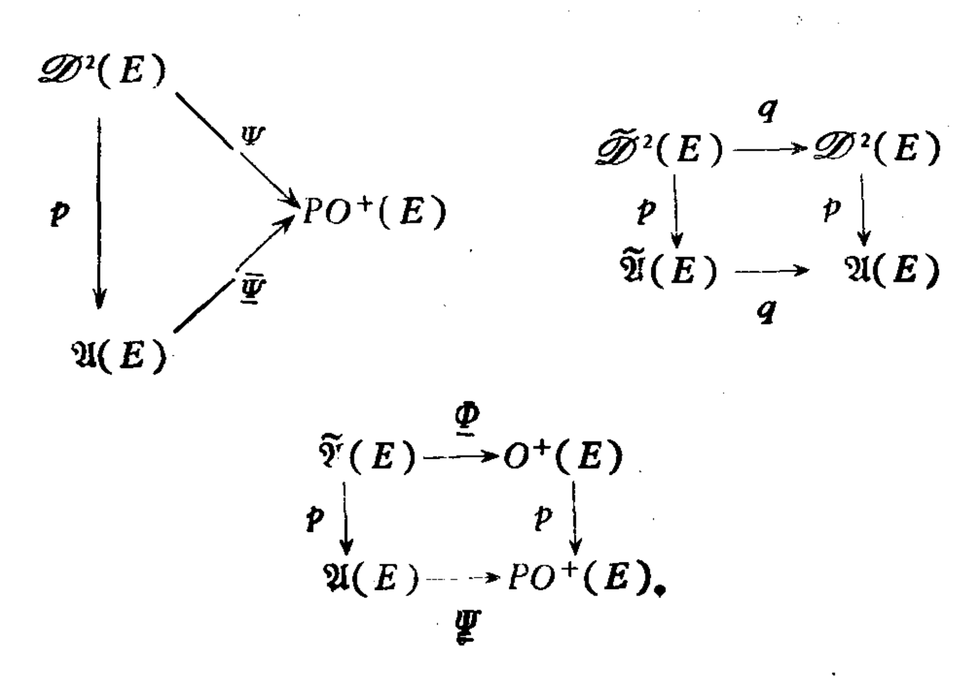


图 8.7.6.

8.7.7.2 群 $PO^+(E)=O^+(E)/\{\pm \mathrm{Id}_E\}$ 在 $\mathscr{D}^2(E)$ 上单可迁；若 Ψ 表示与之相应的映射，则 Ψ 在 $\mathscr{D}^2(E)$ 上定义的等价关系就是 Ψ 在 $\mathscr{D}^2(E)$ 上作用轨道所定义的等价关系。记商集为 $\mathscr{D}^2(E)/\mathscr{R}=\mathfrak{A}(E)$，$p:\mathscr{D}^2(E)\to\mathfrak{A}(E)$ 为典范投影而 $\underline{\Psi}$ 为诱导映射 $\mathfrak{A}(E)\to PO^+(E)$；则 $\underline{\Psi}$ 是双射：



若 $q:\tilde{\mathscr{D}}^2(E)\to\mathscr{D}^2(E)$ 是由也记为 q 的映射 $q:\tilde{\mathscr{D}}(E)\to\mathscr{D}(E)$ 诱导的，其中后一映射将一条定向直线与它所在的直线联系了起来，则上图是交换图。

我们通过 φ 由 $PO^+(E)$ 的群结构诱导出 $\mathfrak{A}(E)$ 上的交换群结构，并称之为 E 中直线的定向角群，$D,D'\in\mathscr{D}(E)$ 的定向角是 $p((D,D'))\in\mathfrak{A}(E)$，记作 $\widehat{DD'}$ 或 $\widehat{D,D'}$。

8.7.7.3 对任何直线有：

$$\widehat{DD'}=\widehat{D_1D_1'}\Longleftrightarrow\widehat{DD_1}=\widehat{D'D_1'};\ \widehat{DD'}+\widehat{D'D''}=\widehat{DD''};$$

$$\widehat{D'D}=-\widehat{DD'};$$

$$\forall f\in O^{\pm}(E):\ \widehat{f(D)f(D')}=\pm\widehat{DD'};$$

$$\widehat{DD'}=0\Longleftrightarrow D=D'.$$

8.7.7.4 方程 $2x=0$ 在 $\mathfrak{A}(E)$ 中有两个解，一个是 0，另一个称为直角，记作 δ。我们有：$\widehat{DD'}=\delta\Longleftrightarrow D$ 与 D' 正交(在 8.1.8.3 的意义下)；δ 是 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 中两个直角在 q 下的像。方程 $2x=a$ 在 $\mathfrak{A}(E)$ 中恒有两个解，形如 $\{x,x+\delta\}$；若 $a=\widehat{DD'}$，则使 $x=\widehat{DS}$ 和 $2x=\widehat{DD'}$ 的所有直线 S 是两条正交的直线，称为 D 和 D' 的平分线，它们由如下特征所刻划：或 $\widehat{DS}=\widehat{SD'}$ 或 $\sigma_S(D)=D'$。

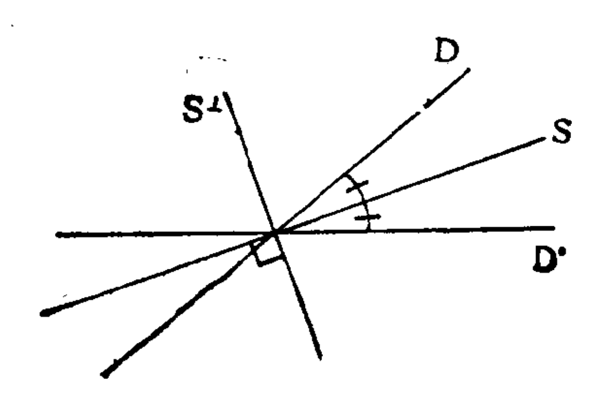
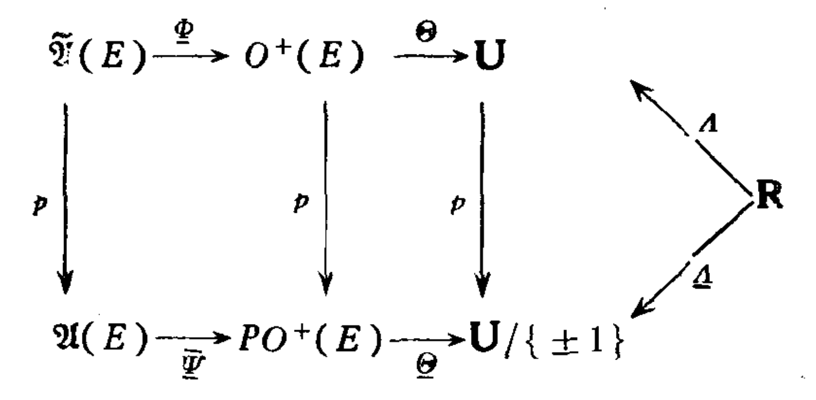


图 8.7.7.4.

8.7.7.5 设 D, D', S, S' 是四条直线，使得在射影直线 $P(E^*)$ 上有 $[D, D', S, S'] = -1$，则 $D \perp D'$ 等价于 S, S' 以 D, D' 作为平分线.

8.7.7.6 若要度量直线的交角(定向角)，必须将 E 定向；因而定义 $\underline{\Theta}$ 和 $\underline{\Lambda}$ 如下图所示（参见 8.3.6, 8.3.7, 8.7.4），其中 $\underline{\Lambda} = p \circ \Lambda$. 作为定义，$a \in \mathfrak{A}(E)$ 的一个测度是指 $\underline{\Lambda}^{-1}(\underline{\Theta}(\underline{\Psi}(a)))$ 的任一元素. $\mathfrak{A}(E)$ 的一个元素的所有测度都形如 $t + \pi k, k \in \mathbf{Z}$；0 的一个测度是 0，$\delta$ 的一个测度是 $\pi/2$.



设 $D, D' \in \mathscr{D}(E)$，E 已定向而且 $D \neq D'$；则 $\widehat{DD'}$ 在 $]0, \pi[$ 中有唯一的测度 t 而且：或 $\overline{DD'} = t$，或 $\overline{DD'} = \pi - t$（参见 8.6.6）. 若 D，D' 不正交，则存在 E 的唯一定向使 $t \in]0, \pi/2[$. 值得注意的是在 $\mathscr{D}(E)$ 中不可能有推论 8.7.5.3；例如，若 D, D', D'' 是如图 8.7.7.5 所示的三条直线，则有

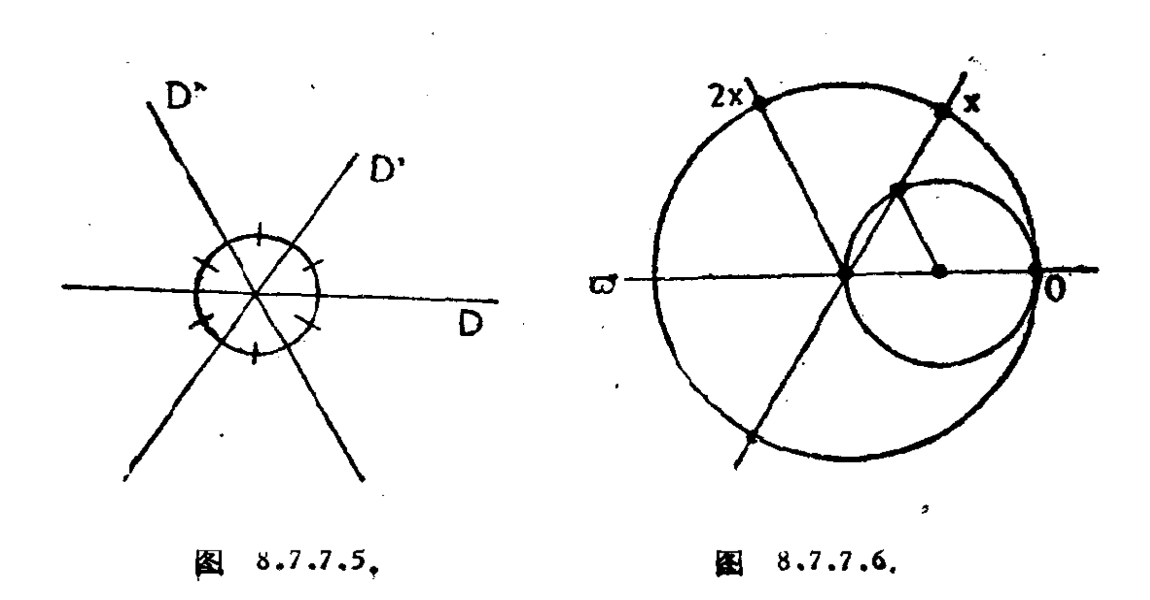
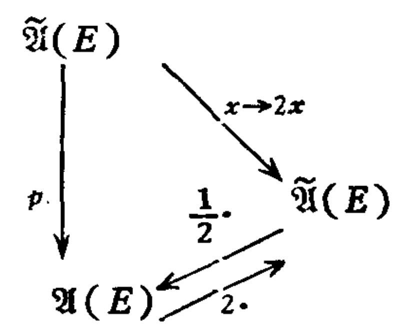


图 8.7.7.5.　　图 8.7.7.6.

$$\overline{DD'}=\overline{D'D''}=\overline{DD''}=\pi/3,$$
但不论三条直线次序如何排列，不可能有 $\overline{DD'}+\overline{D'D''}=\overline{DD''}$！



8.7.7.7 4.3.6.1 中对 4.3.6 的证明，使我们预期 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 与 $\mathfrak{A}(E)$ 之间有一个自然的双射；事实上，我们引进映射

$$\tilde{\mathfrak{A}}(E)\ni x\longmapsto 2x\in\tilde{\mathfrak{A}}(E),$$

其核为 $\{0,\varpi\}$。根据 8.7.3.3，在商集上诱导出的映射 $\mathfrak{A}(E)\to\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 是一个双射；我们仍将它记作 $\mathfrak{A}(E)\ni x\longmapsto 2x\in\tilde{\mathfrak{A}}(E)$，逆映射则记为 $1/2$：$\tilde{\mathfrak{A}}(E)\ni x\longmapsto 1/2x\in\mathfrak{A}(E)$。几何上，这个映射如图 8.7.7.6 所示；在三角学中，这个映射解释了正弦、余弦、正切何以可以表示成半弧的正切的代数式。另一很有用的应用是：

8.7.7.8 命题. 设 D,D' 是 E 中两条直线，则有

$$\sigma_{D'}\circ\sigma_D=\underline{\Phi}(2\widehat{DD'}),$$

即 $\sigma_{D'}\circ\sigma_D$ 是以 $2\widehat{DD'}$ 为转角的旋转。

我们知道 (8.2.3.2) $f=\sigma_{D'}\circ\sigma_D\in O^+(E)$；由 8.7.7.4 又有 $f(D)=\sigma_{D'}(D)=D''$ 和 $\widehat{DD''}=2\widehat{DD'}$，由此即可证得命题，因为 $O^+(E)$ 是单可迁的。

8.7.7.9 以 $O^+(E)$ 和 $PO^+(E)$ 相比，我们注意到 $\sqrt{\cdot}$ 和 $\cdot^2$ 是相应的映射。

8.7.8 三角学. 根据复指数函数满足 $e^{z+z'}=e^ze^{z'}$ 的事实，特别可推出如下公式

8.7.8.1

$$\begin{cases}\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b,\\ \sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a,\end{cases}$$

两式对任何实数 a,b 都成立。 而由 8.3.6 可知当 E 定向时这两个公式在 $O^+(E)$ 上也成立，不过有一点区别，那就是 $a+b$ 要换成乘积 fg，这里 $f,g\in O^+(E)$.

8.7.8.2 由 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 和 $\mathfrak{A}(E)$ 的群结构的定义，最终可以推出，如果 E 是定向的，而我们通过到子群的转移来定义 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 和 $\mathfrak{A}(E)$ 上的余弦和正弦函数，则公式 8.7.8.1 在 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 和 $\mathfrak{A}(E)$ 中也仍成立。作为定义，一个定向角的余弦和正弦等于它的任何一个测度的余弦和正弦。

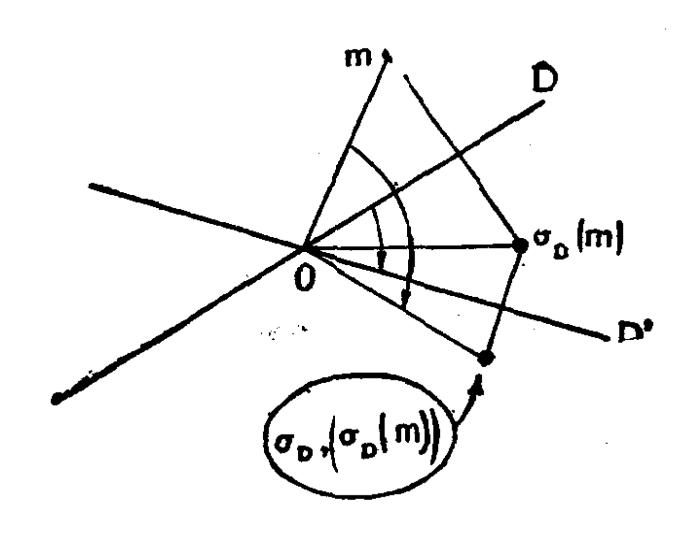


图 8.7.7.7.

8.7.8.3 由 8.7.8.1 出发， 通过代数变形可以导出大量公式，有时很有用，并且很有趣；在 8.12.8 有一张详尽的公式表。它们在本书中的应用，可参看 10.3.10，18.6.13。

8.7.8.4 反过来，定向角也能用来从几何的角度研究复数。将 $\mathbf{C}$ 看作一个定向欧氏平面，即带有欧氏结构及典范定向的 $\mathbf{R}^2$. 若 $z\in\mathbf{C}\setminus 0$，则可将它写成 $z=|z|(z/|z|)$，这样一来 $z/|z|\in\mathbf{U}$. 定向角 $(\Theta\circ\underline{\Phi})^{-1}(z/|z|)\in\tilde{\mathfrak{A}}(\mathbf{C}=\mathbf{R}^2)$ 称为复数 z 的辐角，记作 $\arg(z)$；若 $z=0$，则取 $\arg(z)=\tilde{\mathfrak{A}}(\mathbf{C})$ 的任何元素。 复数 $z\in\mathbf{C}$ 完全由 $|z|$ 和 $\arg(z)$ 所决定，$(|z|,\arg(z))$ 称为 z 的三角形式；当然有

8.7.8.5 $|zz'|=|z||z'|,\quad \arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$.

在计算中，使用测度常常会更方便，即若 t 是 $\arg(z)$ 的一个测度，则记 $z = |z|e^{it}$；每个这样的写法都称为 z 的“一个”三角形式，它有时可以改写为

$$z = |z|(\cos t + i\sin t).$$

在 9.6.5.1 将给出它的古典应用；也可参看 12.4.2.

8.8 相似；迷向锥面与迷向直线

8.8.1 现在，我们的欧氏空间又可以是任意维的了。我们之所以对相似的概念感到兴趣，除了在以后（9.6.7, 9.6.8, 9.6.9）将看到的那些有趣的应用外，还因为它跟物理世界的概念有自然的联系，物理世界中不存在长度单位，因为并不容有一个自然的欧氏结构。相似，是一种与长度无关而仅与长度之比有关的变换。

8.8.2 定义. 使 $\|f(x)\| = \mu\|x\|\ \forall x \in E$ 的 $f \in GL(E)$ 称为 E 中以 μ 为相似比的一个相似。相似的全体记为 $GO(E)$；令

$$GO^+(E) = GO(E) \cap GL^+(E)$$

（相应地，$GO^-(E) = GO(E) \cap GL^-(E)$）并称其中元素为正向相似（相应地，逆向相似）。

8.8.3 位似 $\lambda \mathrm{Id}_E$ 是相似，相似比为 $\mu = |\lambda|$，$\lambda < 0$ 时它为正向相似的充要条件是 $\dim E$ 为偶数。若 $f \in GO(E)$，则有

$$(f(x)|f(y)) = \mu^2(x|y)\ \ \forall x, y \in E;$$

对 $\mu^{-1}f \in GL(E)$ 应用 8.1.5 即可看出这一点。为使这一观念更明确化，我们把每个以 μ 为相似比的 $f \in GO(E)$ 写成

$$f = (\mu^{-1}f) \circ (\mu\ \mathrm{Id}_E)$$

的形式。这样就可看出 $GO(E)$ 同构于群的直积

$$GO(E) \cong O(E) \times (\mathbf{R}_+^* \mathrm{Id}_E);$$

同样 $GO^+(E) \cong O^+(E) \times (\mathbf{R}_+^* \mathrm{Id}_E)$。若 $n = 1$，当然就有

$$GO(E) = GL(E).$$

$n = 1$ 的情形是以后经常被排除在外的。

8.8.4 平面相似与复数. 设 E 是定向欧氏平面，并根据 8.3.12

将它恒同于一条复向量直线．E中复线性群 $GL_{\mathbf{C}}(E)$ 的元素都满足 8.8.2 的定义，因此 $GL_{\mathbf{C}}(E)\subset GO(E)$．事实上，$GO^+(E)=GL_{\mathbf{C}}(E)$，这在 8.8.3 和 8.3.12 中已有说明． 至于 $GO^-(E)$，固定 $s\in O^-(E)$ 就有 $GO^-(E)=sGO^+(E)$； 既然 s 是关于一条直线的对称，若在 E 中取一个属于该直线的基（E 的一个复基，仅是一个向量！）就可得出：

8.8.4.1 命题． 对 E 的任一复基而言， 正向（或逆向）相似就是映射 $z\longmapsto az$（或 $z\longmapsto a\bar{z}$）全体，这里 a 取遍 $\mathbf{C}^*$．

8.8.5 相似与角

8.8.5.1 命题． 相似是保角的．确切地说

(i) $\forall f\in GO(E)\ \forall\Delta,\ \Delta'\in\tilde{\mathscr{D}}(E)\ \forall D,D'\in\mathscr{D}(E)$:

$$\overline{f(\Delta)f(\Delta')}=\overline{\Delta\Delta'} \text{ 且 } \overline{f(D)f(D')}=\overline{DD'};$$

(ii) $\forall f\in GO(E)$，若 D,D' 正交，则 $f(D)$，$f(D')$ 正交；

(iii) 若 $\dim E=2$，

$\forall f\in GO^+(E)$（或 $GO^-(E)$）$\forall\Delta,\Delta'\in\tilde{\mathscr{D}}(E)\ \forall D,\ D'\in\mathscr{D}(E)$:

$$\widehat{f(\Delta)f(\Delta')}=\widehat{\Delta\Delta'} \text{ 且 } \widehat{f(D)f(D')}=\widehat{DD'} \text{（或分别为}$$

$$-\widehat{\Delta\Delta'} \text{ 和 } -\widehat{DD'}\text{）．}$$

反过来，若 $\dim E\geqslant 2$ 而 $f\in GL(E)$ 使得 D,D' 正交时总有 $f(D)$，$f(D')$ 正交的结论，则 f 是相似．

鉴于 8.6.6，8.7.2.4 和 8.7.7.3，只有 (iii) 尚须证明． 我们的线性映射满足 $(f(x)|f(x'))=0\ \forall$ 使 $(x|x')=0$ 的 x,x'．先取定 $x\in E\backslash 0$，考察线性形式 $\varphi:y\longmapsto(f(x)|f(y))$； 根据假设条件它在超平面 $x^\perp$ 上为零，因而（参见 2.4.8.6）存在 $k\in\mathbf{R}^*$ 使

$$(f(x)|f(y))=k(x|y)\ \forall y\in E.$$

现在假定 x 可变化，并对每一 x 指定一个 $k(x)$ 使

$$(f(x)|f(y))=k(x)(x|y)\ \forall x\in E\backslash 0,\ \forall y\in E.$$

取线性无关的 x，x'，考察 $k(x+x')$；则有

$$\begin{aligned}(k(x+x')|f(y))&=k(x+x')(x+x'|y)\\&=(f(x)|y)+(f(x')|y)\end{aligned}$$

$$= k(x)(x|y) + k(x')(x'|y) \quad \forall y \in E;$$

因此

$$[k(x+x') - k(x)]x + [k(x+x') - k(x')]x' = 0.$$

因此，由于 x', x' 的线性无关就有

$$k(x) = k(x') = k(x+x');$$

最后，k 是一个常数，从而 f 是相似。

8.8.6 相似与复化

我们将 E 复化为 E^C，将一个元素 $f \in \mathrm{GL}(E)$ 复化为 $f^C \in \mathrm{GL}(E^C)$，从而将 E 的二次型 $N = \|\cdot\|^2 : x \longmapsto \|x\|^2$ 复化为 E^C 上的二次型 N^C。参见 7.1.1，7.2.1，7.3.4。

8.8.6.1 定义. $\dim E \geqslant 3$ 时 E^C 的子集 $(N^C)^{-1}(0)$ 称为 E 的迷向锥面. 若 $\dim E = 2$，$(N^C)^{-1}(0)$ 仅含两条 E^C 中相异直线，称它们为 E 的迷向直线，并记为 $\{I, J\}$. 对 E^C 的共轭映射 σ（参见 7.1.1），有 $\sigma((N^C)^{-1}(0)) = (N^C)^{-1}(0)$，且当 $\dim E = 2$ 时：$\sigma(I) = J$，$\sigma(J) = I$.

我们用锥面这一名称，理由是N是齐性的:$N^C(\lambda x) = \lambda^2 N^C(x)$. E 的二次型 $\|\cdot\|^2$ 是非退化的，因而 N^C 也不退化（参见 7.3.5，13.2.1，13.2.3.1），从而 $(N^C)^{-1}(0)$ 由两条相异直线组成. 为了避免参照 13.2，也为了下文马上就要用到这一事实，我们现在直接证明它由两条相异直线组成：设 $\{e_1, e_2\}$ 是 E 的标准正交基，因而

$$N^C(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$$

（参见 7.3.5），而且 $z_1^2 + z_2^2 = 0$ 等价于 $z_2 = \pm i z_1$. 这样，由 7.2.1 就有

$$\sigma((N^C)^{-1}(0)) = (N^C)^{-1}(\sigma(0)) = (N^C)^{-1}(0);$$

若我们比如取

$$I = \{(z, -iz)\}, \quad J = \{(z, iz)\},$$

则有 $\sigma(I) = J$，$\sigma(J) = I$.

欧氏平面上的两条迷向直线并无先天的差异；更确切地说：

8.8.6.2 命题. 在欧氏平面上选定一条迷向直线，等价于给出 E 的一个定向；它们的关系是：选定的迷向直线 I 就是在 E 中

一个符合定向的标准正交正基下斜率为$-i$的直线.

应该证明 $GO^+(E)$ 的成员使 I 不动；这一点可由 $GO^+(E)$ 连通，因而 I 不能跳到 J 去而得证，这个想法也是很有启发性的. 若在任何一个标准正交正基下进行计算，如

$$M(f)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

对 $\varepsilon=\pm 1$ 就有

$$\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+\varepsilon ib \\ b-\varepsilon ia \end{pmatrix}=(a+\varepsilon ib)\begin{pmatrix} 1 \\ -\varepsilon i \end{pmatrix}.$$

8.8.6.3 附注. 上述计算也表明了，I（或 J）关于 $f\in O^+(E)$ 的特征值是 $a+bi=\Theta(f)$（或 $a-bi=\overline{\Theta(f)}$），其中 Θ 是 8.3.6 中的映射. 而且，若 $f\in O^-(E)$，由 8.3.1 (ii) 就有 $f^C(I)=J$.

8.8.6.4 命题. 设 $f\in GL(E)$，则

(i) $f\in GO(E)\Longleftrightarrow f^C((N^C)^{-1}(0))=(N^C)^{-1}(0)$，即 f^C 使 E 的迷向锥面整体不变；

(ii) 若 $\dim E=2$:

$f\in GO^+(E)\Longleftrightarrow f^C(I)=I$，$f\in GO^-(E)\Longleftrightarrow f^C(I)=J$.

$\Rightarrow$ 的证明是显然的. 对 (i) 的 $\Leftarrow$，我们已知道 f^C 使 N^C 的核不变，而且 N^C 在 f^C 下的原象，即二次型 $(f^C)^*(N^C)$（参见 13.1.3.9）跟 N^C 有相同的核. 然而由 14.1.6.2，可推得存在 $k\in\mathbf{C}^*$ 使

$$(f^C)^*(N^C)=kN^C,$$

特别当限制在 $E\subset E^C$ 上时，有

$$\|f(x)\|^2=k\|x\|^2\quad\forall x\in E.$$

这表明 k 是实数而 f 是以 $\sqrt{k}$ 为相似比的相似. 为证 (ii) 的 $\Leftarrow$，首先注意到，由 8.8.6.1 有 $f(\{I,J\})=\{I,J\}$；于是可应用 (i) 的 $\Leftarrow$，再注意到若

$$f\in GO^+(E)\ (\text{或} f\in GO^-(E)),$$

则由 8.8.6.2 和 8.8.6.3 有 $f(I)=I$（或 $f(I)=J$）.

8.8.7 Laguerre 公式. Laguerre 在中学毕业班的几何课上对

老师的讲解不感兴趣，却进行了一番独立思考，以下就是他这种独立思考的成果。

8.8.7.1 首先假设 E 是定向欧氏平面，(I, J) 是 8.8.6.2 所给出的 E^C 中的一对迷向直线；设 D，D' 是 E 中两条直线，D^C，D'^C 是它们在 E^C 中的复化(参见 7.4)。

在复射影直线 $P(E^C) \cong \mathscr{D}(E^C)$ 上，很自然地会考虑到 D^C，D'^C，I，J 这四点的交比。然而，若设 $f \in O^+(E)$ 使 $f(D) = D'$，则由 6.6.3 和 8.8.6.3 有

$$[D^C, D'^C, I, J] = \Theta(f)/\overline{\Theta(f)},$$

但因 $\Theta(f) \in \mathbf{U}$，$\overline{\Theta(f)} = (\Theta(f))^{-1}$，为将 $[D^C, D'^C, I, J]$ 完全用定向角来表示，只须应用 8.7.5.1 和 8.7.7.7 即可得出：

8.8.7.2 **定理** (Laguerre 公式)．我们有

$$[D^C, D'^C, I, J] = [\underline{\Theta}(\underline{\Psi}(\widehat{DD'}))]^2;$$

若 t 是 $\widehat{DD'}$ 的任一测度，则有 $[D^C, D'^C, I, J] = e^{2it}$。

为放心起见，我们来验证当改变 E 的定向时，上述公式确能保证；事实上由 8.8.6.4，I 变成 J，J 变成 I，而由 8.3.6，$\Theta(\cdot)$ 变成 $(\Theta(\cdot))^{-1}$；因此由 6.3.1 可保证与定向的相符性。若改变 D 和 D'，则可用 8.7.7.3 和 6.3.1。公式的应用见 17.4.2.2。

8.8.7.3 现设 E 并无定向，只须 $\{I, J\}$ 定义好即可；于是，对 E 中一对直线 D, D' 来说，交比 $[D^C, D'^C, I, J]$ 在 $\mathbf{C}$ 中的定义允许相差 $z \mapsto z^{-1}$。定义一个从 $\mathbf{U} \backslash \{-1\}$ 到 $]-\pi, \pi[$ 中的记作 log 的映射，使它恰是限制映射 $\Lambda:]-\pi, \pi[\to \mathbf{U} \backslash \{-1\}$ 的双射逆映射．设 t 是在 E 的任一定向下 $\widehat{DD'}$ 的一个测度；由 8.7.7.6，$\overline{DD'}$ 应为 t 或 $\pi - t$，由此可知在每种情形都有下述公式

8.8.7.4

$$\boxed{\overline{DD'} = \frac{1}{2}\left|\log([D^C, D'^C, I, J])\right|.}$$

绝对值恰好抵消了从 $\log(e^{2it})$ 转换到

$$\log(e^{2i(\pi-t)}) = \log(e^{-2it}) = -\log e^{2it}$$

所引起的差别。

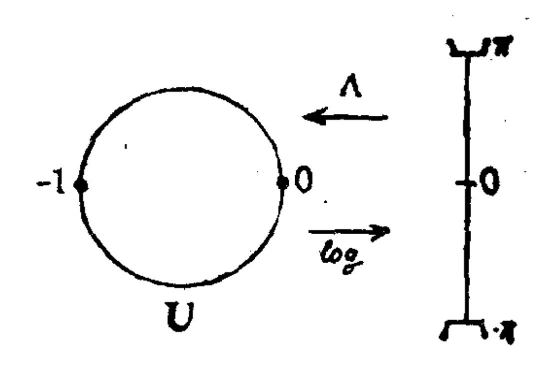


图 8.8.7.3.

8.8.7.5 归功于 Cayley 的公式8.8.7.4,很好地说明了他的原则(参见 5.2.2);由此,E 中直线的交角的几何学就得以产生了,这实际上就是射影直线 $P(E)$ 的度量的几何学,不过已看作一个适当的射影空间的子几何(见 19.2)。

8.9 四元数. 到 $O^+(3)$ 和 $O^+(4)$ 的映射

复数在 $O^+(2)$ 的研究中起着很重要的作用;同样,四元数体 **H** 将会有助于我们对 $O^+(3)$,尤其是对 $O^+(4)$ 作深入的研究.

8.9.1 四元数复习. 我们考虑的是如下构造的一个记作 **H** 的非交换体: 从 $\mathbf{R}^4$ 出发并记其中的典范基为 $\{1, i, j, k\}$,乘法 $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ 由下列公式作线性扩张而得出:

$$1u = u\ \forall u = 1, i, j, k,\ i^2 = ii = j^2 = jj = k^2 = kk = -1,$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$

可以验证得出的是 $\mathbf{R}^4$ 上的一个满足结合律的乘积,将带有这一乘法的 $\mathbf{R}^4$ 记为 **H** 并称为四元数体. **H** 中含有 $\mathbf{R}\cdot 1$,我们把它等同于 **R**. 至于 $\mathbf{R}^3$,我们将其嵌入 **H** 如下:

$$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}i + \mathbf{R}j + \mathbf{R}k \subset \mathbf{H};$$

这个 $\mathbf{R}^3$ 称为纯四元数集合. 每个四元数 $q \in \mathbf{H}$ 都可写成 $q=$

$\mathscr{R}(q)+\mathscr{P}(q)$，其中 $\mathscr{R}(q)\in\mathbf{R}$，$\mathscr{P}(q)\in\mathbf{R}^3$. 作为定义，$q$ 的共轭四元数是 $\bar{q}=\mathscr{R}(q)-\mathscr{P}(q)$. 我们有

$$\bar{\bar{q}}=q,\ q=\bar{q}\Longleftrightarrow q\in\mathbf{R},\ \bar{q}=-q\Longleftrightarrow q\in\mathbf{R}^3,$$

$$\overline{q+r}=\bar{q}+\bar{r},\ \overline{qr}=\bar{r}\bar{q}\ (\text{当心出错!}),$$

$$q\in\mathbf{R}^3\Longleftrightarrow q^2\in\mathbf{R}_-,\ q\in\mathbf{R}\Longleftrightarrow q^2\in\mathbf{R}_+.$$

$\mathbf{R}^4$ 的典范数量积反过来可表示为

$$(q\mid r)=\frac{1}{2}(\bar{q}r+\bar{r}q);$$

特别总有 $q\bar{q}=\mathbf{R}_+$，而$\|q\|=\sqrt{q\bar{q}}$仍称为 q 的范数(或模). 我们有 $\|qr\|=\|q\|\|r\|$; 这样就可看出 $\mathbf{H}$ 确是一个体，只要取 $q^{-1}=\|q\|^{-2}\bar{q}$. 若记

$$S^3=\{q:\|q\|=1\},$$

即 $\mathbf{R}^4=\mathbf{H}$ 的单位球面，则我们看到 S^3 上有一个乘法群的结构(正如 $S^1=\mathbf{U}=\{z:|z|=1\}$ 本身也是一个交换群!). 至此，我们可能会想，这一事实在高维的情形是否也成立呢? 也就是说，别的球面是否也具有群的结构呢? (这种结构是很好的——在一种尚待进一步阐明的意义上说);但借助于代数拓扑可以证明，能容有良好的群结构的球面仅有 S^1 和 S^3: 例如可参看 [PO]，第 284 页，或 [HU]，第 15 章.

球面S^7有一个很有趣的结构，那几乎是一个群，借助于 Cayley 八元数可以说明这一点: 参见 [PO]，第 278 页.

至于S^2球面，现在将作为 $S^2=\{q\in\mathbf{R}^3:\|q\|=1\}$ 嵌入在纯四元数集合中.

也不能期望对 $n=2$ 或 4 以外的某一 n 找到 $\mathbf{R}^n$ 上的合理的体结构，能找到这样的结构的仅有 $\mathbf{R}^2$ 上的 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{R}^4$ 上的 $\mathbf{H}$; 参见 [PO]，第 284 页. 仅 $\mathbf{R}^8$ 有一个相当好的结构，即 Cayley 八元数的结构. 但对 $\mathbf{R}^n$，请参看 8.10.3 及其中的参考文献. 注意到若 q，q' 是纯四元数，则 qq' 的纯部 $\mathscr{P}(qq')$ 就是 $\mathbf{R}^3$ 中的向量积 $q\wedge q'$ (见 8.11.13).

与$\mathbf{C}$的情形相反，体 $\mathbf{H}$ 的自同构是简单而熟知的:见 8.12.10，

并可参看 2.6.4.

8.9.2 定理

(i) 设 $s\in \mathbf{R}^3\backslash 0$; 则 $q\to -sqs^{-1}$ 使 $\mathbf{R}^3$ 稳定，而且它在 $\mathbf{R}^3$ 上的限制就是 $\mathbf{R}^3$ 中关于平面 $s^\perp$ 的对称 $\sigma_{s^\perp}$.

(ii) 设 $s\in \mathbf{H}^*$ 且 $\rho'_s: q\longmapsto sqs^{-1}$; 则 ρ'_s 使 $\mathbf{R}^3$ 稳定，而且它的限制 $\rho_s=\rho'_s|_{\mathbf{R}^3}\in O^+(3)$. 此外 $\rho_s=\rho_{s'}\Longleftrightarrow \exists\lambda\in \mathbf{R}^*: s'=\lambda s$.

(iii) 反过来，对每一 $f\in O^+(3)$, 存在 $s\in \mathbf{H}^*$ 使 $f=\rho_s$.

为证 $\mathbf{R}^3$ 稳定，可利用下列准则:

$$q\in \mathbf{R}^3 \Longleftrightarrow q^2\in \mathbf{R}_-: (-sqs^{-1})^2 = sq^2s^{-1}\in \mathbf{R}_-;$$

映射 $q\longmapsto -sqs^{-1}$ 确是线性等距:

$$\|-sqs^{-1}\| = \|q\| \ \forall q.$$

最后 $s\longmapsto -sss^{-1}=-s$ 且若 $q\in \mathbf{R}^3$ 使 $(q|s)=0$, 则有

$$0=(q|s)=\frac{1}{2}(\bar{q}s+\bar{s}q)=\frac{1}{2}(-qs-sq),$$

因此

$$sq=-qs \text{ 而且 } q\longmapsto -sqs^{-1}=ss^{-1}q=q.$$

为研究 ρ'_s 和 ρ_s, 可如上进行讨论，从而可知 $\rho_s\in O(3)$; 只须再证 $\rho_s\in O^+(3)$. 由拓扑学可知，因 $\mathbf{H}^*$ 连通而且映射 $\mathbf{H}^*\ni s\longmapsto \{q\longmapsto sqs^{-1}\}\in O(3)$ 连续，ρ_s 必与 $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$ (由 $s=1$ 得出) 位于 $O(3)$ 的同一连通分支内，这一点也可从代数上证明。"此外"云云则可从以下事实推出: $\mathbf{H}$ 中与 $\mathbf{R}^3$ 的所有元素可交换的 s 显然是 $\mathbf{R}$ 的元素. (iii) 可由 (i) 及 8.2.12 推出.

8.9.3 推论. 映射 $\rho: S^3\ni s\longmapsto \rho_s\in O^+(3)$ 是连续、满射的群同态，且以 $\{\pm 1\}$ 为核; 特别是，$O^+(3)$ 同胚于 $P^3(\mathbf{R})$.

我们记得 $S^3=\{q\in \mathbf{H}: \|q\|=1\}$; 根据 8.9.2 (ii), 所求的核应使 $s\in \mathbf{R}$ 且 $\|s\|=1$, 因而必为 ± 1. 最后群 S^3 关于子群 $\{\pm 1\}$ 所作的商群引出了等价关系 $x\sim y\Longleftrightarrow y=\pm x$, 因此这个商群就是 $P^3(\mathbf{R})$. 见 4.3.3.2.

8.9.4 命题. 设 $s=\alpha+t$, $t\in \mathbf{R}^3\backslash 0$, $\alpha\in \mathbf{R}$; 则旋转 $\rho_s\in O^+(3)$ 的轴是直线 $\mathbf{R}t$, ρ_s 的转角 $\theta\in[0,\pi]$ 当 $\alpha\neq 0$ 时由 $\operatorname{tg}\theta/2=$

$\|t\|/|\alpha|$ 给出，而当 $\alpha=0$ 时 $\theta=\pi$ 且 ρ_s 是关于 $\mathbf{R}t$ 的中心对称.

$\mathbf{R}t$ 的不变性是显然的. 转角 θ 的计算则稍为复杂一些；首先注意到 $\rho_{zsz^{-1}}=\rho_z\rho_s(\rho_z)^{-1}$ 和 ρ_s 有相同的转角，而因 $O^+(3)$ 在 S^2 上可迁，故存在 z 使 $zsz^{-1}=\beta i$, $\beta\in\mathbf{R}$, 因而可对 $s=\alpha+\beta i$ 进行计算.

ρ_s 的转角应在 $i^\perp\cap\mathbf{R}^3$ 中去求，也就是说应有 $\theta=\widehat{j,(\rho_s j)}$. 但又有 $\rho_s j=(\alpha+\beta i)j(\alpha+\beta i)^{-1}=(\alpha^2+\beta^2)^{-1}(\alpha+\beta i)j(\alpha-\beta i)=(\alpha^2+\beta^2)^{-1}[(\alpha^2-\beta^2)j+2\alpha\beta k]$, 从而

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{2(\beta/\alpha)}{1-(\beta/\alpha)^2},\text{ 因此}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\|t\|}{|\alpha|}.$$

若 $\alpha=0$, 则有 $\rho_s(j)=-j$.

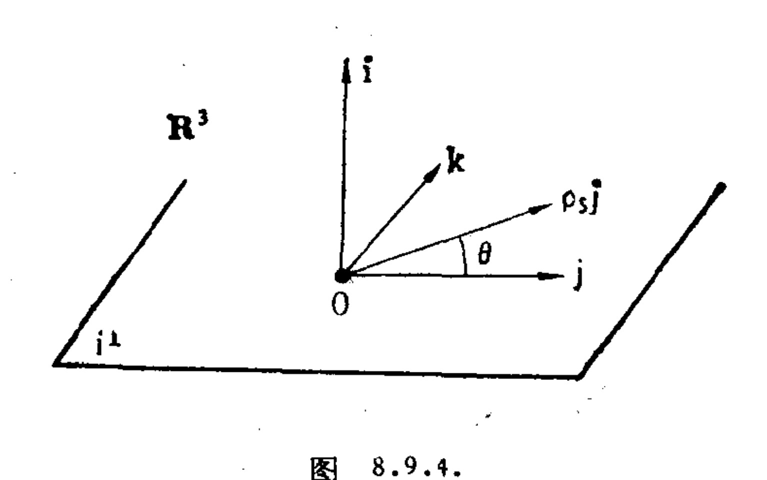
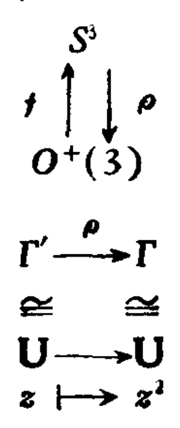


图 8.9.4.

8.9.5 8.9.3 和 8.9.4 的意义在于给出了 $O^+(3)$, 即我们的物理空间中的旋转的一种参数表示；这种参数化的做法在力学和物理学中都是很基本的，但却并非易事，既不易找到，也不易运用. 例如可参阅 [BE] 第 136 页的 Euler 角，并请写出旋转是怎样合成的！8.9.3 和 8.9.4 给出了一种简捷的分解算法，不过仍有不足之处：±1 选择难定. 如能避免这一点当然最好，然而这一点却正是我们的研究对象的一种本质属性，因为有：

8.9.6 命题. 不存在 ρ 的提升 $f:O^+(3)\to S^3$, 也就是使 $\rho\circ f=$

$\mathrm{Id}_{O^+(3)}$ 的 f，能够或是连续的，或是一个群同态。



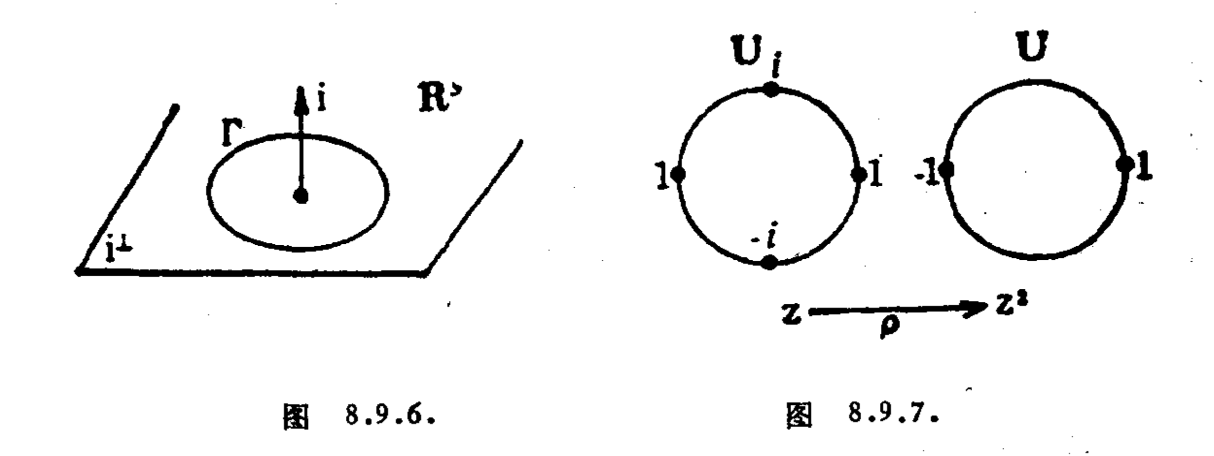


图 8.9.6.　　　　图 8.9.7.

设 Γ 是圆周，即 $O^+(3)$ 中以 $\mathbf{R}i$ 为轴的旋转的集合；由 8.9.4：$\rho^{-1}(\Gamma) = \Gamma' = S(\mathbf{R} + \mathbf{R}i)$，即平面 $\mathbf{R} + \mathbf{R}i \subset \mathbf{H}$ 的单位圆周．而且，8.9.4 的证明告诉我们，限制映射 $\rho|\Gamma' : \Gamma' \to \Gamma$ 在恒同 $\mathbf{R} + \mathbf{R}i = \mathbf{C}$ 的观点下无非就是映射 $z \longmapsto z^2$． 于是，假设存在 $f: O^+(3) \to S^3$ 使 $\rho \circ f = \mathrm{Id}_{O^+(3)}$，并考察它的限制 $f|\Gamma$；若 f 是同态，则应有 $f(\mathrm{Id}) = 1$ 从而 $f(-1) = \pm i$，这是因为如前所述 $\rho(f(-1)) = (f(-1))^2 = -1$，如果，比如说

$f(-1) = i$，$(f(-1))^2 = f((-1)^2) = f(1) = 1 = i^2 = -1$，

则得矛盾．现假设 f 连续，而且比如说 $f(\mathrm{Id}) = 1$（-1 的情形是类似的）；由反函数的概念可知 $\rho(f(z)) = z$ 蕴含着 $f(z) = \sqrt{z}$，按惯例确定在 $\mathbf{C}/\mathbf{R}_-$ 上；但这样一来，当 z 在 $\mathbf{C}$ 的上半平面（或下半平面）趋于 -1 时，$f(z) = \sqrt{z}$ 趋于 i（或 $-i$），得出矛盾．从而命题得证．

8.9.7 如同 8.9.2 的证明一样，我们看到，映射 $\mathbf{H} \ni q \longmapsto sqr \in \mathbf{H}$ 是 $\mathbf{H}$ 的等距，即是属于 $O(4)$ 的，这对所有使 $\|s\|\|r\| = 1$ 的 $s, r \in \mathbf{H}^*$ 都成立，特别当 $\|s\| = \|r\| = 1$ 时也成立. 而且，跟 8.9.2 (ii) 的证明相仿地，可证 $q \longmapsto sqr$ 属于 $O^+(4)$，实际上，有

8.9.8 定理. 映射

$$\tau: S^3 \times S^3 \ni (s, r) \longmapsto \{q \longmapsto sq\bar{r}\} \in O^+(4)$$

是连续满射的群同态，其核由两个元素 $\{(1,1), (-1,1)\}$ 组成.

8.9.9 这里当然要涉及 $S^3 \times S^3$ 上的直积群的结构. 而

$$\tau(ss', rr')(q) = ss'q\overline{rr'} = s(s'q\overline{r'})\bar{r} = (\tau(s,r)\circ\tau(s',r'))(q).$$

τ 的核由使 $sq\bar{r} = q \ \forall q$ 的 (s,r) 所组成；首先 $\bar{r} = s^{-1}$，从而对所有的 q 有 $sqs^{-1} = q$，由此可得 $s \in \mathbf{R}$，从而 $s = \pm 1$. 为证 τ 是满射，设 $f \in O^+(4)$ 且 $q_0 = f(1)$；则有 $\tau(q^{-1}, 1) \in O^+(4)$ 及 $\tau(q_0^{-1}, 1)(q_0) = 1$，从而 $\tau(q_0^{-1}, 1)\circ f \in O^+(3)$. 但由 8.9.2 (iii) 有：$\tau(q_0^{-1}, 1)\circ f = \rho'_s$ 对 $s \in \mathbf{H}^*$ 成立，所以 $f = \tau(q_0, 1)\circ\rho'_s = \tau(q_0 s, s^{-1})$.

8.9.10 推论. 群 $O^+(4)$ 容有除本身及中心 $\{\pm \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^4}\}$ 外的其它正规子群，比如说 $\tau(S^3 \times \{1\})$，$\tau(\{1\} \times S^3)$. 特别地，

$$O^+(4)/\{\pm \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^4}\}$$

是非单的.

8.9.11 注. 至此，从 8.5 起进行的 $O(n)$ 的单性的讨论已可告一段落.

我们看到，$O^+(4)$ 几乎是一个直积. 真正是一个直积的是正交射影群 $PO^+(4)$:

8.9.12 $PO^+(4) = p(\tau(S^3 \times \{1\})) \times p(\tau(\{1\} \times S^3))$.

从几何观点来看，8.9.12 有许多有趣的推论，参见 18.8.8. 关于四元数在几何中的其它应用，可参阅一本很有趣的书 [VL].

8.9.13 问题. 在复数域 $\mathbf{C}$ 上可深入研究 $O^+(2)$，在四元数体上可深入研究 $O^+(3)$，$O^+(4)$，这样，特别就可顺利地给出 $O^+(2)$，$O^+(3)$ 和 $O^+(4)$ 的参数表示. 怎样给出 $O^+(n)$ 的参数表示? Clifford 代数提供了答案；参见 8.10.3.

8.10 $O^+(n)$ 与代数拓扑

8.10.1 我们用本节来为 8.2.14 提出的讨论纲要作一终结；以下内容若要透彻了解，似应具备初步的(多些更好)代数拓扑知识，我们不加说明地指出，$O^+(n)$ 是 C^∞ 微分流形，而且是 Lie 群；8.10.4 中特别用到了 Lie 群的技巧.

8.10.2 作为特例，我们已经看到 $O^+(2)$ 就是圆周 S^1，$O^+(3)$ 就是实射影空间 $P^3(\mathbf{R})$. 我们指出，根据 8.9.8，$O^+(4)$ 可看作 $(S^3 \times S^3)/\mathbf{Z}_2$，由 [PO] 的推论 13.60 则可知 $O^+(5)$ 与 $\mathbf{H}^2$ 有关；由[PO] 的命题 13.61，则可知 $O^+(6)$ 与$\mathbf{C}^4$有关. 也可参阅[DE1]，第 106—116 页. 最后，$O^+(8)$ 产生了一种"平凡化"现象，**原因是外自同构群 Aut $(O^+(8))$ 关于内自同构群 Int$(O^+(8))$ 所作的商群**

$$\mathrm{Aut}(O^+(8))/\mathrm{Int}(O^+(8))$$

同构于对称群 $\mathfrak{S}_3$；参见 [CE2]，第 119 页.

8.10.3 基本群. 既然 $O^+(2)$ 从拓扑上说就是圆周 S^1，它的基本群 $\pi_1(O^+(2))$ 必同构于 $\mathbf{Z}$. 相反地：对所有的 $n \geqslant 3$，

$$\pi_1(O^+(n)) = \mathbf{Z}_2.$$

对 $n = 3$，这可从 8.9.3 推出，因为 ρ 是两叶的覆盖而 S^3 单连通；对 $n > 3$，这可由 $n = 3$ 的情形以及如下所作的同伦正合序列推出：将球面 S^n 表示成齐性空间 $S^n = O^+(n+1)/O^+(n)$ (参见 1.5.9 或 8.2.8)，再作出相应的纤维化的同伦正合序列. 从几何上看，找到 $\pi_1(O^+(3))$ 从而也就是 $\pi_1(O^+(n))$ 的一个非零元素是很有意思的. 但 8.9.6 的证明已经提供了答案，表明 $\mathbf{R}^3$ 中绕定轴的旋转全体，即圆周 Γ 是 $O^+(3)$ 中一个不同伦于 0 的圈 (因为 S^3 连通). 特别地，由于 $\pi_1(O^+(3)) = \mathbf{Z}_2$，所以 Γ 兜了两圈之后是同伦于 0 的. 对此可以用两种方式来作解释，一种是做一条纸带，另一种是拿一只汤盘来作实验："实验者手中水平地持一汤盘，将其绕过盘心的垂线旋转 2π 角度. 这时他的手臂必然要转动，

这是一种扭转。令人吃惊的是，若以同一方式、沿同一方向作第二次旋转，则手臂又会回到初始的位置（而并非扭转两次!）”（[PO]第 2 页）；参见图 8.10.3 和 8.10.4。

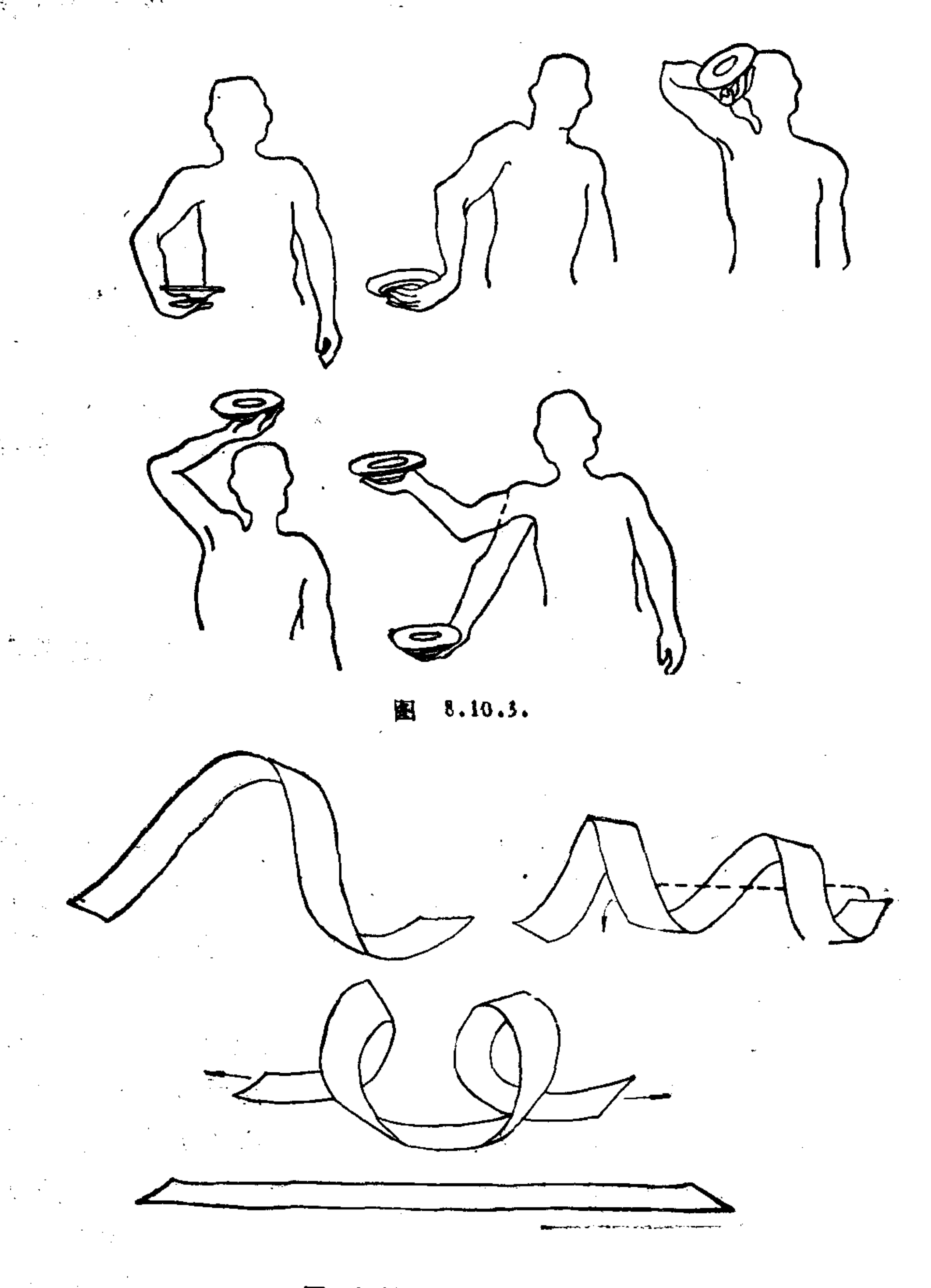


图 8.10.3.

图 8.10.4.

可是关于 $\pi_1(O^+(n))$ 还有一个更为基本的结果，事实上群 $G=O^+(n)$ 定义了一个单连通的拓扑空间，即其泛覆盖空间 $\tilde{G}$. 于是我们知道，G 的群结构通过提升提供了 $\tilde{G}$ 上的一个群结构；这样，对每个 n 都有一从几何群 $O^+(n)\subset \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ 导出的抽象群 $\widetilde{O^+(n)}$. 由此就产生了一个问题：这个抽象群能实现为几何群吗？在 $n=3$ 时，我们已用四元数体 $\mathbf{H}$ 来实现 $\widetilde{O^+(3)}$，以其作为 $\mathbf{H}=\mathbf{R}^4$ 中的乘法；那么，在 $n>3$ 时是什么东西在起四元数体的作用呢？是 Clifford 代数，而 $\widetilde{O^+(n)}$ 则称为旋量群；以上所有内容均可参阅 [PO] 第 13 章和 [BI 2]§9. 也可参阅 13.7，14.4 中提到的文献.

我们看到，前述讨论中并没有导出旋量的概念，这一点是耐人寻味的；旋量表示是 Elie Cartan 在 1913 年研究 $O^+(n)$ 的 Lie 代数的本原不可约线性表示的分类时发现的. 在进行这一分类时，其中有一类是前所未知的，而且它的维数出乎意料地竟是 2^n. 相反地，Clifford 却是在 1876 年企图将 8.9.2 和 8.9.8 这样的理论推广到更高维时找到他的代数的.

8.10.4 至于 $O^+(n)$ 的代数拓扑的其它经典不变量：同调群，上同调环，这些都已完全研究清楚. 可参阅 [BO1] 或 [HU]，第 92—95 页.

8.11 定向欧氏空间的典范体积形式. 混合积，向量积

我们还记得，若 $n=\dim E$，则有 $\Lambda^n E^*=1$ (参见 2.7.2.1).

8.11.1 引理. 若 E 是欧氏空间，则 $\Lambda^n E^*$ 具有一个典范欧氏结构(即有一范数)定义如下：

$$\|\omega\|=|\omega(e_1,\cdots,e_n)|,$$

其中 ω 是 $\Lambda^n E^*$ 的任一元素，(e_i) 是 E 的任一标准正交基.

由于 $\omega\in\Lambda^n E^*$ 由它在 E 的一个基上的值所决定，所以只须证明对任何两个标准正交基总有 $|\omega(e_1,\cdots,e_n)|=|\omega(e'_1,\cdots,e'_n)|$

即可；然而若 $f\in GL(E)$ 由 $f(e_i)=e'_i\ \forall i=1,\cdots,n$ 所定义，则有

$$\omega(e'_1,\cdots,e'_n)=(\det f)\omega(e_1,\cdots,e_n),$$

但由 8.2.1 有 $\det f=\pm 1$.

8.11.2 附注. 更一般地，对任何 p，外代数 $\Lambda^p E^*$，$\Lambda^p E$，张量代数 $\overset{p}{\otimes} E$，$\overset{p}{\otimes} E^*$，对称代数 $\overset{p}{\bigcirc} E$，$\overset{p}{\bigcirc} E^*$ 都具有从 E 的欧氏结构自然继承的欧氏结构：参见 [Bl 2]，第 115 页. 在本书中我们只用到 $\Lambda^n E^*$ 的情形.

8.11.3 定义. 设 E 是定向欧氏向量空间；元素 $\lambda_E\in\Lambda^n E^*$ 称为 E 的典范体积形式，如果在 8.11.1 的意义下有 $\|\lambda_E\|=1$ 而且它附属于 E 的定向(参见 2.7.2.2). $n=3$ 时也称为混合积，有时记为 $(\cdot,\cdot,\cdot)$.

设 E 是欧氏向量空间；由 $(e_1,\cdots,e_n)\to|\lambda_E(e_1,\cdots,e_n)|$ 定义的映射 $\delta_E: E^n\to\mathbf{R}_+$ 称为 E 的典范密度，其中 λ_E 是在任一定向下 E 的典范体积形式.

换一个说法，λ_E 和 δ_E 具有以下特征：

8.11.4 $\delta_E(e_1,\cdots,e_n)=1$（相应地，$\lambda_E(e_1,\cdots,e_n)=1$）$\forall$标准正交基(相应地，正向标准正交基)$(e_i)$.

显然 δ_E 在 $O(E)$ 下不变，而 λ_E 则在 $O^+(E)$ 下不变.

8.11.5 为了计算 $\delta_E(x_1,\cdots,x_n)$，我们引进 Gram 行列式：设 E 是欧氏空间，$(x_i)_{i=1,\cdots,p}$ 是 E 中 p 个元素所成的子集，下述行列式称为 (x_i) 的 Gram 行列式，并记为 $\mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_p)$：

$$\mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_p)=\det((x_i|x_j))$$

$$=\begin{vmatrix}\|x_1\|^2 & (x_1|x_2)\cdots(x_1|x_p)\\ (x_1,x_2) & \|x_2\|^2\ \cdots(x_2|x_p)\\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots\\ (x_p|x_1) & (x_p|x_2)\ \cdots\ \|x_p\|^2\end{vmatrix}.$$

8.11.6 命题. 对 E 的任何子集 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 恒有 $\delta_E(x_1,\cdots,x_n)=(\mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_n))^{1/2}$.

设 (e_i) 是任一标准正交基，

$$f \in GL(E) \mid f(e_i) = x_i \ \forall i = 1, \cdots, n,$$

而 $A = M(f)$ 是 f 关于 (e_i) 的矩阵. 由引理 8.2.2 有

$$\text{Gram}(x_1, \cdots, x_n) = \det({}^t AA) = (\det A)^2 = (\det f)^2;$$

由此即得

$$\delta_E(x_1, \cdots, x_n) = |\det f| \delta_E(e_1, \cdots, e_n) = |\det f|.$$

8.11.7 例. 取 $x, y \in E$ 并将 8.11.6 应用于欧氏空间

$$V = \mathbf{R}x + \mathbf{R}y;$$

我们有

$$\delta_V(x, y) = (\text{Gram}(x, y))^{1/2},$$

因此 $\text{Gram}(x,y) \geqslant 0$; 然而

$$\text{Gram}(x, y) = \begin{vmatrix} \|x\|^2 & (x|y) \\ (y|x) & \|y\|^2 \end{vmatrix} = \|x\|^2\|y\|^2 - (x|y)^2,$$

这样就证明了 Schwarz 不等式(参见 8.1.3). 而且, 由 8.6.3 有

$$\delta_V(x, y) = \sin(\overline{\mathbf{R}x, \mathbf{R}y})\|x\|\|y\|,$$

其中含有两条直线 $\mathbf{R}x, \mathbf{R}y$ 的(无定向)夹角的信息.

对于三个向量,读者可直接证明行列式 $\text{Gram}(x, y, z)$ 恒为正的.

以下讨论向量积. 对于三维空间中所有涉及物理世界的研究来说,这是极其有用的.

以下设 E 是定向的.

8.11.8 命题. 设 E 的维数 $n \geqslant 3$. 若已给定 E 中 $n-1$ 个向量 $(x_i)_{i=1,\cdots,n-1}$, 则存在 E 中唯一的向量,记作 $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$, 使

$$\forall y \in E: (x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} | y) = \lambda_E(x_1, \cdots, x_{n-1}, y);$$

称之为 x_i 的向量积. 它有如下性质:

(i) $E^{n-1} \ni (x_1, \cdots, x_{n-1}) \longmapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \in E$ 是交错多重线性的(从而是反对称的);

(ii) $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = 0 \Longleftrightarrow x_i$ 线性相关;

(iii) $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \in (\mathbf{R}x_1 + \cdots + \mathbf{R}x_{n-1})^{\perp}$;

(iv) 若 (x_i) 线性无关,则 $\{x_1, \cdots, x_{n-1}, x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}\}$ 是

E 的一个正基；

(v) $\|x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}\| = (\mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_{n-1}))^{1/2}$

$$= \delta_{\mathbf{R}x_1+\cdots+\mathbf{R}x_{n-1}}(x_1,\cdots,x_{n-1});$$

(vi) $x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}$ 以 (iii),(iv),(v) 三条性质作为特征。

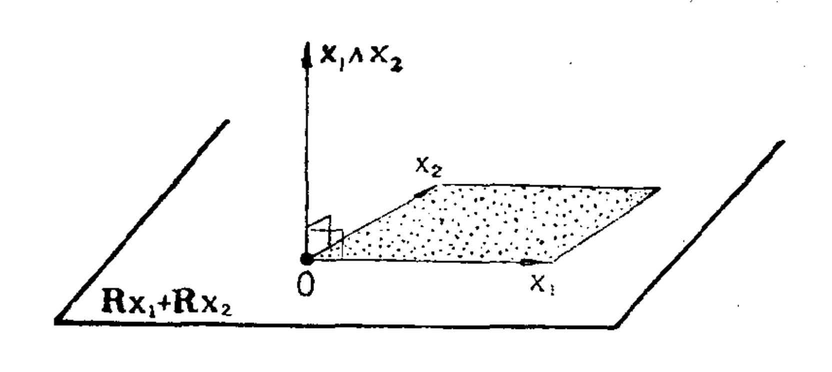


图 8.11.8.

存在性和唯一性都可由 8.1.8.1 推出. (i) 则是 λ_E 交错多重线性的推论. (ii) 的⇐部分是显然的；对⇒部分，若 x_i 线性无关，则可添上 x_n 使之成为一个基，于是有

$$(x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}|x_n) = \lambda_E(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\neq 0,$$

得出矛盾. 为证 (iv)，应用 2.7.2.2 得

$$\lambda_E(x_1,\cdots,x_{n-1},x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}) = \|x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}\|^2 > 0.$$

为证 (v)，令 $z = x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}$，并注意到

$$(z|x_i) = 0\quad \forall i = 1,\cdots,n-1,$$

另外，根据 Gram 行列式的定义：

$$\mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_{n-1},z) = \mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_{n-1})\|z\|^2,$$

因此

$$(\lambda_E(x_1,\cdots,x_{n-1},z))^2 = \|z\|^4 = \mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_{n-1},z)$$

$$= \mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_{n-1})\|z\|^2 \text{ (参见 8.11.6).}$$

最后，为了证明 (iii),(iv),(v) 构成向量积的特征，只须考虑 x_i 线性无关的情形(否则出现的是零向量)，这时

$$\dim(\mathbf{R}x_1+\cdots+\mathbf{R}x_{n-1})^\perp = 1,$$

于是在这条向量直线上 (iv) 和 (v) 确定了唯一的向量。

8.11.9 注. $n=2$ 时，起向量积作用的是映射 $E\ni x\longmapsto\partial(x)\in E$，即 E 中以直角为转角的旋转：参见 8.3.12 和 8.7.3.5.

向量积的概念提供了一种把标准正交基 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n-1}$ 扩充成一个标准正交正基的很方便的方法，实际的计算将在 8.11.11，8.11.12 给出.

8.11.10 具体计算. 设 (e_i) 是 E 的标准正交基，矩阵

$$A=(x_1\cdots x_{n-1})=(x_{ij})(i=1,\cdots,n-1;j=1,\cdots,n)$$

是在该基下以 x_i 为列向量的矩阵，则

8.11.11 $x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}$ 的第 i 个坐标 $=(-1)^{n-i}\det A_i$，其中 A_i 表示在 A 中去掉第 i 行后所得出的方阵. 为证明这一点，令

$$z=x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}=(z_1,\cdots,z_n)$$

并按行列式的最后一列将行列式展开：

$$(z|y)=\lambda_E(x_1,\cdots,x_{n-1},y)$$

$$=\begin{vmatrix}x_{11}\cdots x_{n-1\ 1} & y_1\\ \vdots\quad\ \vdots & \vdots\\ x_{1n}\cdots x_{n-1\ n} & y_n\end{vmatrix}$$

$$=\sum_i(-1)^{n-i}y_i\det A_i=\sum_i y_iz_i.$$

上式对任何 y_i 都正确，这样就证明了上述结论. 比如说 $n=3$ 时就有

8.11.12

$$x=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix};\quad x\wedge y=\begin{pmatrix}bc'-b'c\\ca'-c'a\\ab'-a'b\end{pmatrix}.$$

8.11.13 四元数. $\mathbf{R}^3$（具有欧氏结构及典范定向）中的向量积使我们能很容易地写出两个纯四元数 $x,y\in\mathbf{R}^3\subset\mathbf{H}$ 的乘积（因而就可写出任意两个四元数的乘积）；由 8.9.1 和 8.11.12 有

$$xy=-(x|y)+x\wedge y,\ \text{其中}\ (x|y)\in\mathbf{R}\subset\mathbf{H}.$$

8.12 练　　习

8.12.1 设E是有限维实向量空间，φ和ϕ是E上的两个欧氏结构，$G\subset GL(E)$是E的线性群的一个子群；假使G是不可约的(参见8.2.6)。证明若$G\subset O(E,\varphi)\cap O(E,\phi)$(即若$G$的每一元素都使$\varphi$和$\phi$不变)，则$\varphi$和$\phi$成比例(利用13.5)。

8.12.2　8.2.15的几何证明. 为证$f\in O(E)$具有一条特征直线或一个特征平面，考虑一点$x\in S(E)$使$\|f(x)-x\|$极小，并证明x，$f(x)$和$f^2(x)$处在同一平面内(参见9.3.2并利用18.4)。

8.12.3　8.2.15的微分证明. 在与8.12.2相同的情形下，通过算出映射

$$S(E)\ni y\longmapsto\|f(y)-y\|\in\mathbf{R}$$

在x的导数为零(参见13.5.7.2)，证明x和$f(x)$的平面在f下是稳定的。

8.12.4 直接证明圆周是弧连通的。

8.12.5　正规自同态. 欧氏空间的自同态f称为正规自同态，如果它与自身的伴随自同态可交换：${}^tf\circ f=f\circ{}^tf$(参见8.1.8.6)。证明8.2.15对正规自同态也成立。对此也可参阅13.5.7。当

$$\dim E=2$$

时，正规自同态是什么？

8.12.6 在$\dim E=2$时，确定所有连续的同态$R\to GO(E)$；画出相应的轨道(参见9.6.9)(利用8.3.13)。

8.12.7 证明：对任何$n\in\mathbf{N}^*$和$a\in\widetilde{\mathfrak{A}}(E)$，$\widetilde{\mathfrak{A}}(E)$中的方程$nx=a$恰有$n$个解。在一个圆周上分别对某个$a$和$n=2,3,4,5$表示出这些解。

8.12.8　三角公式汇编. 在下列待证的公式中，整数$n\in\mathbf{N}$和其中出现的实数都是任取的；按常例令

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

$$\operatorname{tg} na=\frac{\binom{n}{1}\operatorname{tg} a-\binom{n}{3}\operatorname{tg}^3 a+\cdots+(-1)^p\binom{n}{2p+1}\operatorname{tg}^{2p+1} a+\cdots}{1-\binom{n}{2}\operatorname{tg}^2 a+\cdots+(-1)^p\binom{n}{2p}\operatorname{tg}^{2p} a+\cdots};$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2};$$

写出相应的正弦和差公式；

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cdot\cos b};$$

证明 $\alpha\cos t+\beta\sin t$，$t\in\mathbf{R}$ 的最大值是 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$；对使

$$a+b+c=\pi$$

的正数 a，b，c，证明：

$$\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},$$

$$\cos a+\cos b+\cos c=4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2};$$

$$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg} b\cdot\operatorname{tg} c,$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}+\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}=1;$$

$$\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4};\quad \cos\frac{\pi}{48}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$1+\cos a+\cdots+\cos na=\frac{\sin(n+1)\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cos\frac{na}{2},$$

$$\sin a+\cdots+\sin na=\frac{\sin(n+1)\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\sin\frac{na}{2};$$

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=n2^{1-n};$$

$$\cos a + \cos 3a + \cdots + \cos(2n-1)a = \frac{1}{2}\frac{\sin 2na}{\sin a};$$

$$\sin a + \sin 3a + \cdots + \sin(2n-1)a = \frac{\sin^2 na}{\sin a};$$

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{4}\cdots\cos\frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{a}.$$

8.12.9 $\mathbf{R}^3$ 中的向量积. 证明下列公式(对于任何 a,b,c):

$$a\wedge(b\wedge c) = (a|c)b - (a|b)c,$$

$$(a\wedge b, a\wedge c, b\wedge c) = (a,b,c)^2,$$

$$(a\wedge b)\wedge(a\wedge c) = (a,b,c)a.$$

证明 $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3 \ni (a,b)\longmapsto a\wedge b\in\mathbf{R}^3$ 连带上加法使 $\mathbf{R}^3$ 成为一个非结合代数,而它满足 Jacobi 恒等式

$$a\wedge(b\wedge c) + b\wedge(c\wedge a) + c\wedge(a\wedge b) = 0,$$

也就是说是一个 Lie 代数。

若 p, q, r 分别是到三个坐标平面上的投影,证明

$$\|a\wedge b\|^2 = \mathrm{Gram}(p(a), p(b)) + \mathrm{Gram}(q(a), q(b)) + \mathrm{Gram}(r(a), r(b)).$$

试用平行四边形的面积来解释上式(见图 8.12.9). 写出在 n 维空

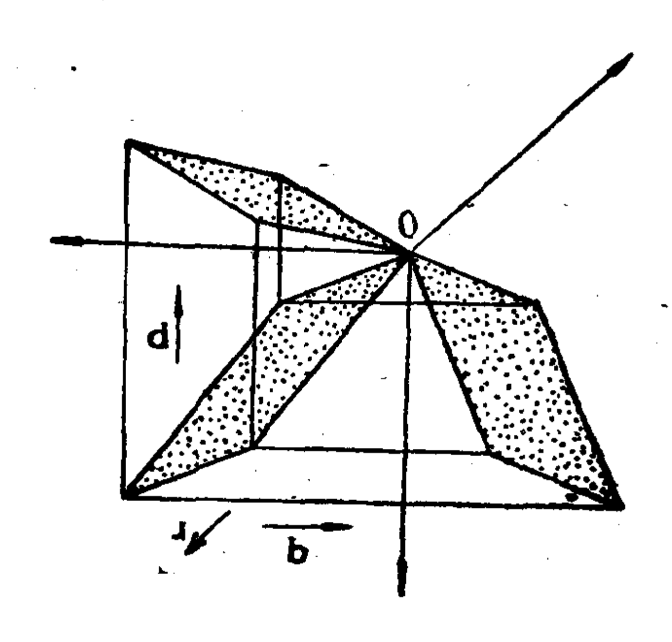


图 8.12.9.

间中关于 Gram $(a_1, \cdots, a_p)$ 的推广公式 (p 和 n 都是任意的)。

讨论方程 $x \wedge a = b$(a, b 已给定)的解集合的存在性及性质.

8.12.10 在 3 维欧氏向量空间中，设 A, B 是两条半直线且 $B \neq -A$，则在 A, B 所决定的平面上作为介于 A, B 之间的 A, B 平分线的这条半直线称为 A, B 在空间的平分线 (参见 8.7.5.2 和 8.7.3.3)。设已给定三条半直线 S, T, U，试求三条半直线 A, B, C，使 S 是 A, B 的平分线，T 是 B, C 的平分线，而 U 是 C, A 的平分线. 对更多的半直线讨论同样的问题.

8.12.11 **H 的自同构.** 证明 **H** 的每一自同构都形如

$$a \longmapsto \mathscr{R}(a) + \rho(\mathscr{P}(a)), \text{其中 } \rho \in O^+(3).$$

8.12.12 具体计算旋转的合成，尤其是 12.5.5.3 中由坐标给出的二十面体的 3 阶及 5 阶旋转.

8.12.13 证明一个紧群的有限维线性表示总是半单的，即：设 G 是紧群，$f: G \to \mathrm{GL}(V)$ 是 G 到有限维实向量空间 V 的线性群 $\mathrm{GL}(V)$ 中的同态，则若存在向量子空间 $W \subset V$ 使 $f(g)(W) = W \ \forall g \in G$，试证存在直和 $V = W \oplus Z$ 使

$$f(g)(Z) = Z \quad \forall g \in G.$$

8.12.14 若 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 是 n 维欧氏空间的标准正交基，具体写出如 8.4.1 所述的对 $O(n)$ 中如下定义的元素 f 的约化：

$$f(e_i) = e_{i+1} \ \forall i = 1, \cdots, n-1, \ f(e_n) = e_1.$$

第9章　欧氏仿射空间

本章讨论(至少在2维和3维的情形下)希腊人的古典几何学以及我们今天的物理世界中所碰到的空间。由于这种结构的内涵极为丰富，且已历经几千年的研究，所以材料很浩繁，我们势必要有所选择。本书选择的原则是：尽快地引出基本的结论，时常给出一些看来简单有趣而实际上证明很难的结果，最后还要介绍一些与讨论内容很接近，但更为困难而且至今尚在研究之中的问题。

前三章除介绍一些基本结论外，还在9.2节给出了具体计算距离的公式；其中 Gram 行列式起了重要的作用，在9.7中也还将碰到这种行列式。

9.4节把9.3节中关于平面等距结构的结论用于内接于一个凸多边形的极小周长多边形问题，并联系到台球(弹子)或光线的轨道问题；这在某种意义上是与台球遍历性问题相对的问题。

9.5节讨论相似性并给出一些并非显然的特征，其中特别包括 Liouville 定理。9.6节利用平面相似求解几个具体问题：相似分割，两个圆的双重垂足轨迹，对数螺线。

后面七节内容较杂，是为以后的内容作一些准备的；但其中介绍的概念仍是很基本的。第9.7节讨论若干点的相互距离的关系式，并提及欧氏仿射空间的纯度量分类问题；这里 Cayley-Menger 行列式是一个重要的工具。第9.8节研究使已给子集不动的子群，尤其是群的紧性与一个公共不动点的存在性之间的关系。第9.9节讨论曲线的长度以及两点间的最短路径。第9.10节中，利用微分学把距离函数关于端点求导并介绍相应的应用，这就是第一变分公式。第9.11节把度量推广到空间的所有紧子集的集合上，这就是 Hausdorff 距离，它在第12章将起重要作用。第9.12节定义欧氏仿射空间的典范测度；由此特别就可引进紧集体积的概念，

而这种体积正是我们最常用的；第 12 章还会讨论这个问题。最后，第 9.13 节介绍 Steiner 对称，它在历史上曾起过重要作用，而且在等周不等式的证明中也要用到(第 12 章)；在该节中则已借助于这种对称证明了 Bieberbach 等径不等式。

关于练习，除了本章末给出的习题外，建议读者浏览一下为数众多的文献：[HD1]，[HD2]，[R-C1]，[R-C2]，[I-R]，[D-C1]，[FL]，[PE1]，[CR1]；其中有些图形之精采是无可置疑的。

本章中，除非另作声明，X 总表示一个欧氏仿射空间；$n=\dim X$ 则是它的维数。

9.1 定义．等距．位移

9.1.1 定义．欧氏仿射空间是指一个仿射空间 $(X, \vec{X})$，其中 $\vec{X}$ 是欧氏向量空间．X 的标架 $\{x_i\}_{i=0,\cdots,n}$ 称为标准正交标架，如果 $\{\overrightarrow{x_0x_i}\}_{i=1,\cdots,n}$ 是 $\vec{X}$ 的标准正交基，我们在 X 加上一个由 $d(x, y)=xy=\|\overrightarrow{xy}\|$ 定义的度量空间结构．

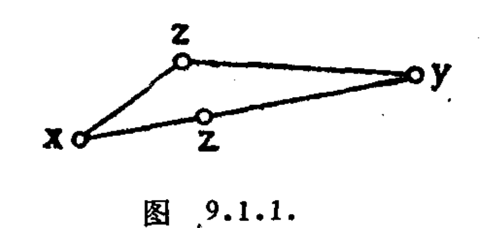


图 9.1.1.

9.1.1.1 严格的三角形不等式．$xz=xy+yz$ 的充要条件是 $z\in[x, y]$，即 z 位于以 x，y 为端点的线段上（参见 3.4.3)．这可由 8.1.3 直接推出．

9.1.2 注．度量空间的拓扑就是 2.7.1.1 中 X 的典范拓扑．若 $S\subset X$ 是 X 的(仿射)子空间，则 S 由 X 处继承一个自然的欧氏仿射空间结构．

n 维标准欧氏空间是指 $X=\mathbf{R}^n$，其中 $\vec{X}=\mathbf{R}^n$ 是 n 维标准欧氏向量空间：见 8.1.2.2．两个欧氏仿射空间 X，Y 之间的等距，是指使 f 成为等距的双射 $f: X\to Y$，即 $d(f(x), f(y))=d(x, y)$

$\forall x, y \in X$；每个 n 维欧氏仿射空间都等距于标准空间 $\mathbf{R}^n$。为说明这一点，取 X 的标准正交标架 $\{x_i\}$ 并定义 $f: X \to \mathbf{R}^n$ 为

$$f\left(x_0 + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i}\right) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

这说明了“n 维欧氏空间”这个名称也是言之有理的，但我们仍将很审慎地使用这个名称。X 的平移 $T(X)$，更一般地说，凡是使 $\vec{f} \in O(\vec{X})$ 的 $f \in \mathrm{GA}(X)$ 都是 X 的等距，它们的全体记作 $\mathrm{Is}(X)$ (参见 0.3)，因为由 2.3.2 和 8.1.5 有 $d(f(x), f(y)) = \|\overrightarrow{f(x)f(y)}\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{xy})\| = \|\overrightarrow{xy}\| = d(x, y)$。事实上 $\mathrm{Is}(X)$ 中已并无其它元素：

9.1.3 命题. 设 $f: X \circlearrowleft$；则 $f \in \mathrm{Is}(x)$ 的充要条件是 $f \in \mathrm{GA}(x)$ 且 $\vec{f} \in O(\vec{X})$。

任取 $a \in X$，设 $t = t_{\overrightarrow{f(a)a}}$ 是以 $\overrightarrow{f(a)a}$ 为平移向量的平移，则 $g = t \circ f \in \mathrm{Is}_a(X)$ 从而 $T(X) \subset \mathrm{Is}(X)$。只要证明 $g \in O(X_a)$ 即可，但若利用等距的定义及 8.1.2.4 在 X_a 中进行计算，可得出 $(g(x)|g(y)) = (x|y)\ \forall x, y \in X$，再由 8.1.5 即可知 $g \in O(X_a)$。

9.1.4 命题. 令 $\mathrm{Is}^{\pm}(X) = \{f \in \mathrm{Is}(X): \vec{f} \in O^{\pm}(X)\}$；$\mathrm{Is}^+(X)$（相应地，$\mathrm{Is}^-(X)$）的元素称为**位移**（相应地，**逆位移**）。对任一 $a \in X$，相应地有一个半直积

$$\mathrm{Is}(X) = T(X)\mathrm{Is}_a(X)\ (\text{或 } \mathrm{Is}^+(X) = T(X)\mathrm{Is}_a^+(X))$$

和一个集论意义下的乘积

$$\mathrm{Is}^-(X) = T(X) \times \mathrm{Is}_a^-(X);$$

此外，$f \longmapsto \vec{f}$ 诱导出一个群同构 $\mathrm{Is}_a(X) \to O(\vec{X})$（或 $\mathrm{Is}_a^+(X) \to O^+(\vec{X})$）。在由 $\mathrm{GA}(X)$ 诱导的拓扑下（参见 2.7.1.4），空间 $\mathrm{Is}(X)$ 恰有两个连通分支 $\mathrm{Is}^+(X)$，$\mathrm{Is}^-(X)$，而且它们还是弧连通的。

$\mathrm{Is}^+(X)$ 弧连通的事实为 $f \in \mathrm{Is}^+(X)$ 取名“位移”提出了理由，因为这样就存在 $F: [0, 1] \ni t \longmapsto \mathrm{Is}^+(X)$ 连续且使 $F(0) = \mathrm{Id}_X$，$F(1) = f$；于是这个 F 是 X 中的一个位移，而它正是 f。如果把 $F(t)$ 作用于 X 的一个固定子集 C，并画出 $C(t) = F(t)(C)$，情况就更直观了。

9.1.5 所以可将 X 写成一个齐性空间：$X = \mathrm{Is}(X)/\mathrm{Is}_a(X)$

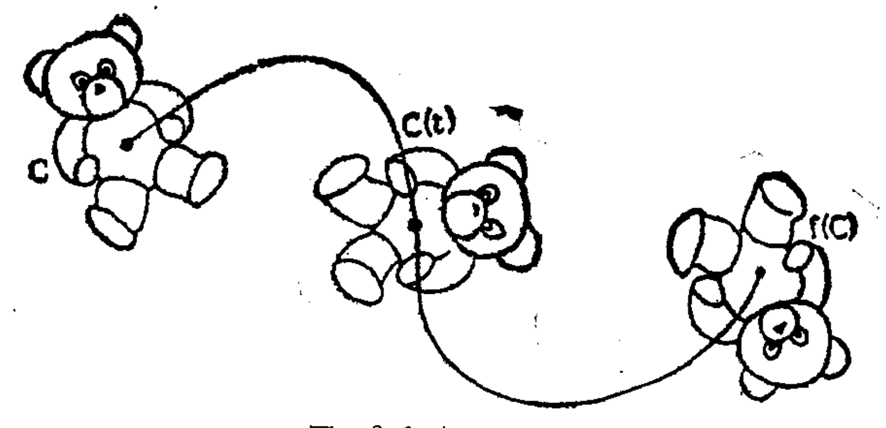


图 9.1.4.

(a 是给定的)．这一写法往往比另两种写法 $X=X_a$ 和 $X=GA(X)/GA_a(X)$ 更为有趣;后面的第一种写法是仿射空间的定义，迷向群为零，第二种写法中迷向群 $GA_a(X)$ 稍大一些，而 $Is_a(X)$ 是紧的．不过，就下述意义而言，$Is(X)$ 仍然是相当大的:

9.1.6 命题． $Is(X)$ 在X的标准正交标架上是单可迁的，而且它在下述意义上在X上双重可迁(参看 1.4.5)：不论 a，b，a'，b' 是X的怎样四个点，只要 $a'b'=ab$，就必然存在 $f\in Is(X)$ 使 $f(a)=a'$，$f(b)=b'$．若还有 $\dim X=2$ 和 $f\in Is^+(X)$，则这样的 f 是唯一的．

这一命题可由 8.2.7 推出．

9.1.7 附注． 刚才特地提到欧氏仿射空间上群 $Is(X)$ 的双重可迁性，是有如下原因的：这一条件表面上看起来很弱，实际上却是很强的．稍为附加一些正则性条件以后，等距群双重可迁的度量空间是我们所完全掌握的．除欧氏仿射空间外，在本书中还会碰到另外三种空间：第 18 章的球面，第 19 章的实射影空间和双曲空间．此外还有复射影空间，四元数体，Cayley 八元数的射影平面以及它们对应的非紧空间．关于这方面的较新的参考资料是 [BU2] 第 95 页．也可参阅 [B-K] 第 117 页和 [PV2]．

9.2 正交子空间;距离

9.2.1 原则上的定义． 对于X的(仿射)子空间，定义正交性、交

角、定向角等概念时，都把它们看作 $\vec{X}$ 中相应方向的对应概念，正如对于X的定向直线所作的一样．举例来说，若 D，D' 是X的两条直线，则它们(在 $[0, \pi/2]$ 上的)交角就是 $\overline{DD'} = \overline{\vec{D}\vec{D'}}$；两条正交直线则记为 $D \perp D'$.

9.2.2 命题. 设 S 是子空间，x 是其中一点，则存在唯一的子空间 T 含有 x 并使 $\vec{X} = \vec{S} \overset{\perp}{\oplus} \vec{T}$；点 $y = S \cap T$（参见 2.4.9.4)的特征是 $xy = d(x, S) = \inf\{xz : z \in S\}$，该数称为 x 到 S 的距离(参见 0.3)。距离 xz 是距离 yz 的严格递增函数.

由于 $(\overrightarrow{xy} | \overrightarrow{yz}) = 0$，有(参见 8.1.2.4)：$xz^2 = xy^2 + yz^2$，而函数 $t \longmapsto \sqrt{1 + t^2}$ 是严格递增的.

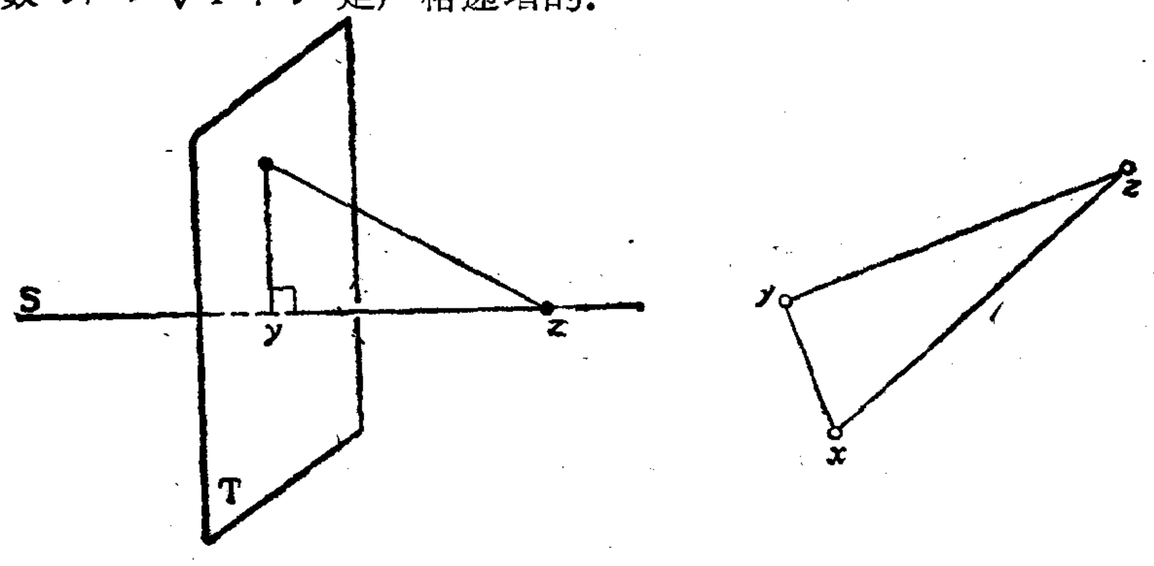


图 9.2.2.

9.2.3 注. 由上可见，对于 X 中三个不同的点 x，y，z，恒有：$xy^2 + yz^2 = xz^2 \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle \perp \langle y, z\rangle$；这就是"Pythagoras 定理"，在欧氏几何的公理体系下，其证明是相当繁冗的.

9.2.4 投影与对称. 在 X 中固定一个子空间 S. 命题 9.2.2 提供了一个映射 π_S: $X \to S$，其中 $p(x)$ 表示 9.2.2 中唯一的 y，这个映射称为 X 到 S 上的正交投影. 由 $\sigma_S(X) = x + 2\overrightarrow{x\pi_S(x)}$（或者说 $\pi_S(x)$ 是 x 和 $\sigma_S(x)$ 的中点）定义的映射 $\sigma_S : X \circlearrowleft$ 称为关于 S 的对称；$\sigma_S \in \mathrm{Is}(X)$. 反之 $\mathrm{Is}(X)$ 中的每一对合都是某个 σ_S，这里 S 是适当的子空间. 若 S 是超平面(相应地，$\dim S = \dim X -$

2)，则 σ_S 称为超平面对称(相应地，中心对称)。

在对合的情形，一定有一个不动点，因为当 $f^2 = \mathrm{Id}_X$ 时 $\frac{x+f(x)}{2}$ 在 f 下不动；因此就归结为欧氏向量空间中的类似问题，对此可应用 8.2.9.

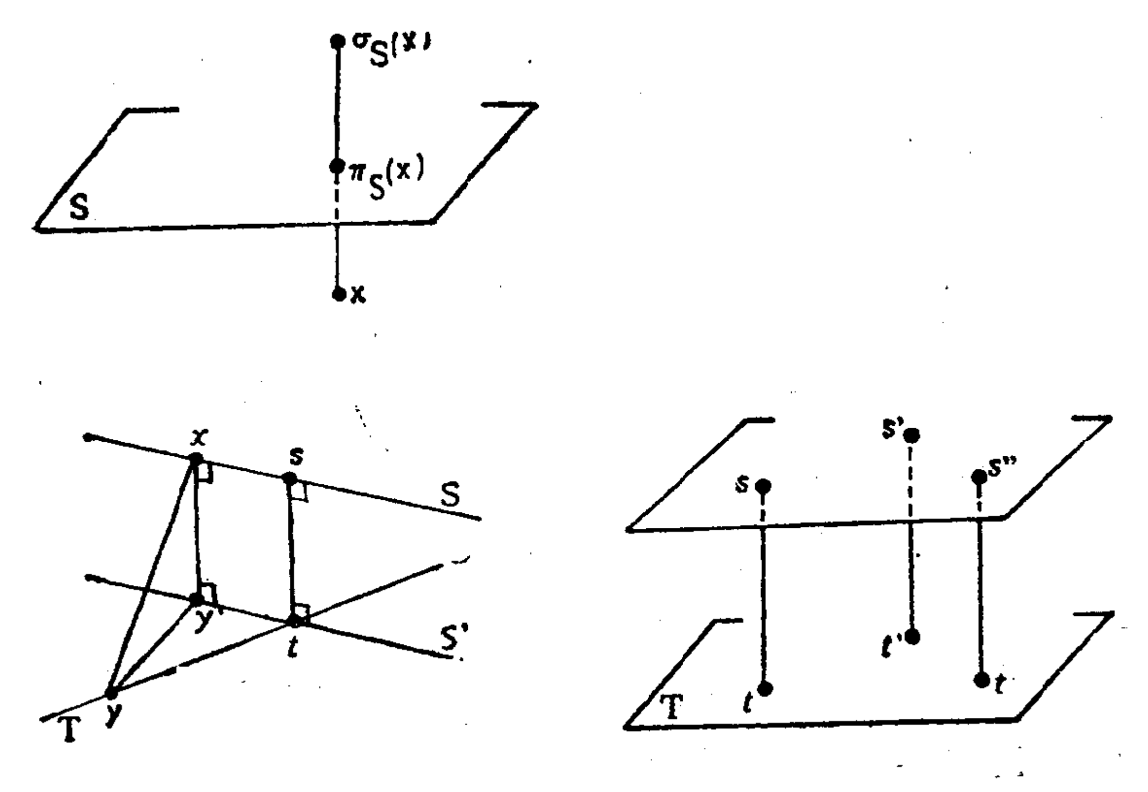


图 9.2.4.

9.2.5 两个子空间的距离. 设 S, T 是两个子空间；令(参见 0.3) $d(S, T)=\inf\{st: s\in S, t\in T\}$ 并称之为 S 与 T 之间的距离. 必然存在 $s\in S$, $t\in T$ 使 $st = d(S, T)$；这一点对的特征是 $\overrightarrow{st}\in(\vec{S})^{\perp}\cap(\vec{T})^{\perp}$ (若 $S\cap T=\varnothing$). 这一点对唯一的充要条件是 $\vec{S}\cap\vec{T}=\{0\}$.

请读者自行用代数方式证明存在性；因为也可利用紧性加以证明. 根据 9.2.2, 条件 $\overrightarrow{st}\in(\vec{S})^{\perp}\cap(\vec{T})^{\perp}$ 是必不可少的；反过来，若满足该条件，设 $x\in S$, $y\in T$ 是任意两点，S' 是由 t 作成的平行于 S 的子空间(参见 2.4.9.2)，而 $y'=\pi_{S'}(x)$，则有 $(\overrightarrow{xy'}|\overrightarrow{y'y})=0$，因此 $xy\geqslant xy'=st$，证毕. 唯一性的准则仍是 $\overrightarrow{st}\in(\vec{S})^{\perp}\cap$

$(\vec{T})^{\perp}$；因为若

$$st = s't' = d(S, T),$$

则有 $\overrightarrow{ss'} = \overrightarrow{tt'} \in \vec{S} \cap \vec{T}$.

9.2.6 具体计算. 下面给出一些公式，用它们可以解决一大批常用的计算问题，特别是对 3 维的情形. 我们并未用标准正交基和坐标进行计算，在那种情况下的公式可从下列公式及 8.1.2.6, 8.11.5, 8.11.11 推出. E 已被定向，以便应用 8.11 整节.

9.2.6.1 设 S 是 X 的子空间，$x \in X$，$\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,k}$ 是 S 的一个标架但不必一定是标准正交基；则

9.2.6.2 $$d^2(x, S) = \frac{\mathrm{Gram}(\overrightarrow{x_0x}, \overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k})}{\mathrm{Gram}(\overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k})}.$$

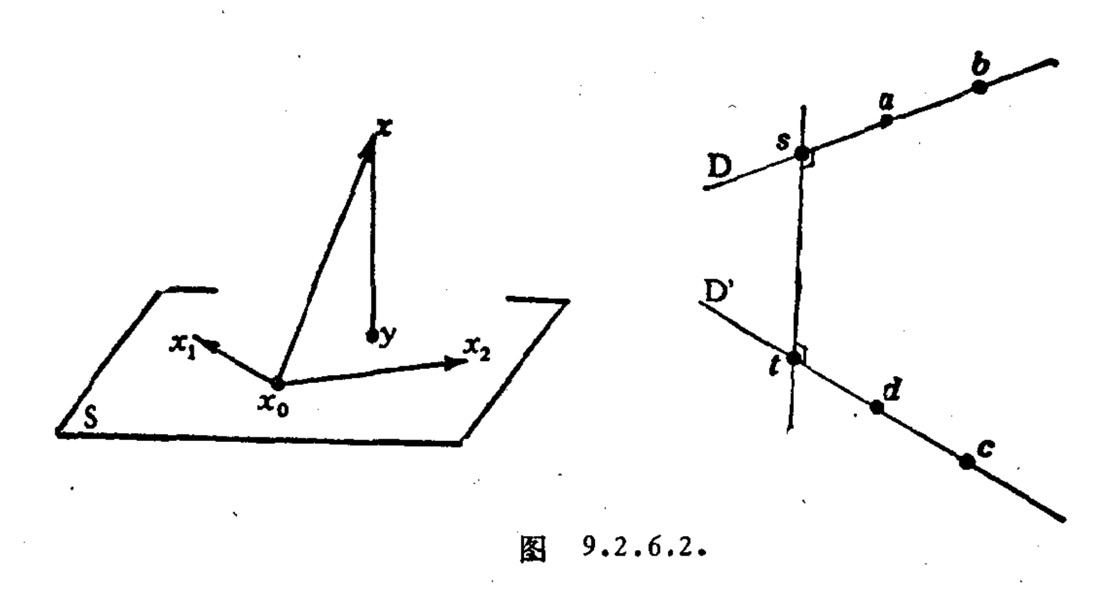


图 9.2.6.2.

事实上，设 $y = \pi_S(x)$，根据 8.11.6，在 Gram 行列式的一个向量上加上其余向量的线性组合后，Gram 行列式保持不变，特别就有

$$\mathrm{Gram}(\overrightarrow{x_0x}, \overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k}) = \mathrm{Gram}(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k}),$$

但在 8.11.8 (v) 的证明中我们已知后一项等于

$$\|\overrightarrow{xy}\|^2 \mathrm{Gram}(\overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k}).$$

9.2.6.3 设 $H = f^{-1}(0)$ 是 X 的超平面，其中 $f \in A(X; \mathbf{R})$ (参见 2.7.3.1)，则对 $x \in X$ 有

9.2.6.4 $$d(x, H) = \frac{|f(x)|}{\|\vec{f}\|},$$

其中$\|\cdot\|$表示 $(\vec{X})^*$ 中的典范范数(参见 8.1.8.2).

事实上，设 $y = \pi_H(x)$；则有 $f(y) = 0$，由此即得 $f(x) - f(y) = f(x) = \vec{f}(\overrightarrow{yx})$. 但 $|\vec{f}(\overrightarrow{yx})| = |(\vec{f}^{\#}|\overrightarrow{yx})| = \|\vec{f}^{\#}\|\|\overrightarrow{yx}\| = \|\vec{f}\| \cdot xy$，这是因为 $\overrightarrow{yx} \in H^{\perp}$ 从而X中的向量 $\vec{f}^{\#}$ 与 $\overrightarrow{yx}$ 是成比例的. 因此可应用 8.1.8.1，8.1.8.2 和 8.1.3.

9.2.6.5 若 D, D' 是X中两条直线，$a, b \in D$，$a', b' \in D'$，则有

$$d^2(D, D') = \frac{\mathrm{Gram}(\overrightarrow{aa'}, \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{a'b'})}{\mathrm{Gram}(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{a'b'})},$$

引进 s, t 使 $st = d(D, D')$ 则可与 9.2.6.1 相仿地说明上式. 直线 $\langle s, t\rangle$ 通常是唯一的，称为 D, D' 的**公垂线**.

9.3 Is(X) 中一个元素的结构. Is(X) 和 Is$^+$(X) 的生成元

关于 $f \in \mathrm{Is}(X)$ 可以提出很多问题：不动点，不变子空间等等；这些问题都可用下述结构定理来解决：

9.3.1 定理. 设 $f \in \mathrm{Is}(X)$，则唯一地存在一个X上的等距g和一个X上的平移 t_{ξ} 满足下列条件：g 的不动点集G非空，$\vec{\xi} \in \vec{G}$，$f = t_{\xi} \circ g$. 从而特别有

$$\vec{G} = \mathrm{Ker}\,(\vec{f} - \mathrm{Id}_X) \text{ 和 } t_{\xi} \circ g = g \circ t_{\xi}.$$

首先注意到 $\vec{X} = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_{\vec{X}}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(s - \mathrm{Id}_{\vec{X}})$ 对任一 $s \in O(\vec{X})$ 都成立；事实上，因维数之和恒与 $\vec{X}$ 的维数相等，故只须说明这两个子空间正交即可，而这可从定义推出：

$$(u|s(v) - v) = (u|s(v)) - (u|v)$$
$$= (s(u)|s(v)) - (u|v) = 0.$$

现在只要把握住证明的起点就行了：任取 $a \in X$，按上述直和将

$\overrightarrow{af(a)}$ 分解成 $\overrightarrow{af(a)}=\vec{\xi}+\vec{h}$，这里 $\vec{h}=\vec{f}(\vec{t})-\vec{t}$，$\vec{f}(\vec{\xi})=\vec{\xi}$. 再令 $x=a-\vec{t}$，则有：

$$\overrightarrow{xf(x)}=\overrightarrow{xa}+\overrightarrow{af(a)}+\overrightarrow{f(a)f(x)}=\vec{t}+\vec{\xi}$$

$$+\vec{f}(\vec{t})-\vec{t}-\vec{f}(\vec{t})=\vec{\xi}.$$

因此，若令 $g=t_{\vec{\xi}}^{-1}\circ f$，则有 $g(x)=x$. 其余的结论是显然的.

关于进一步的细节以及下述推论的证明，均可参阅 [FL] 第 194—197 页.

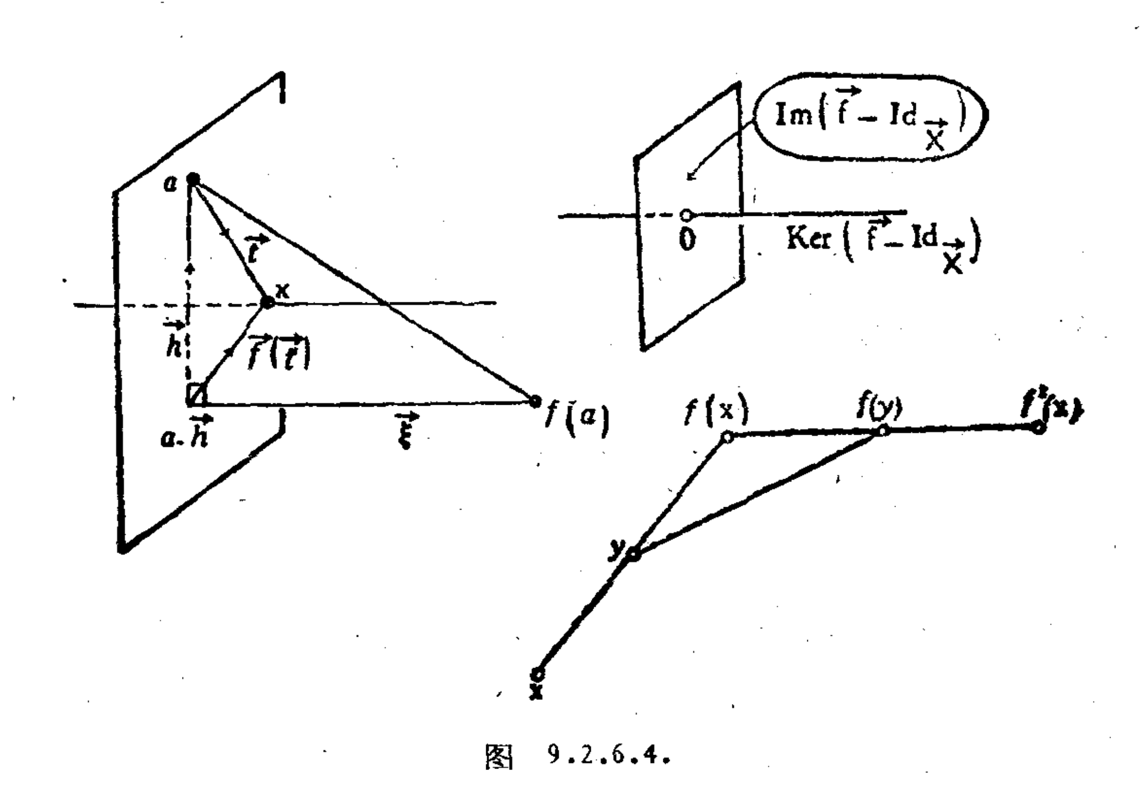


图 9.2.6.4.

9.3.2 注. X 中 $\mathrm{Ker}(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{X}})$ 的平行直线在 f 下整体不变，而若能知道确有一条这样的直线，就能保证 9.3.1 的分解的存在性. 要找到这样的直线，可以用纯粹度量和拓扑的论证方法：若 $x\in X$ 使 $xf(x)=\inf\{yf(y):\ y\in X\}$，则直线 $\langle x,f(x)\rangle$ 在 f 下（整体）不变. 其实，设 y 是 x 和 $f(x)$ 的中点，则因 f 是等距（甚至是仿射映射！），$f(y)$ 是 $f(x)$ 和 $f^2(x)$ 的中点，由假设条件就有：

$$d(y,f(y))\geqslant d(x,f(x))=d(f(x),f^2(x));$$

然而

$$d(y, f(y)) \leqslant d(y, f(x)) + d(f(x), f(y)) = 2 \times \frac{1}{2} d(x, f(x)).$$

因此必须等式处处成立，而这仅当 $f(x) \in \langle y, f(y) \rangle$ 时才能实现(参见 9.1.1.1 严格的三角形不等式)，因此 x，$f(x)$，$f^2(x)$ 共线.

当然，对三角形 $\{a, a-\vec{h}, f(a)\}$. 应用 9.2.3 可知，9.3.1 中的每一 $x \in \vec{G}$ 都满足 $xf(x) = \inf\{yf(y) : y \in X\}$.

9.3.3 推论

(i) 若 $\operatorname{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{X}}) = \{0\}$，则 f 有唯一的不动点(通常称为它的中心)；

(ii) 每一 $f \in \mathrm{Is}(X)$ 是至多 $n+1$ 个超平面对称的乘积，当 f 至少有一个不动点时，这种分解达到最小个数 $s = \dim \vec{X} - \dim(\operatorname{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{X}}))$，当 f 无不动点时，个数为 $s+2$；

(iii) 每一 $f \in \mathrm{Is}^+(X) \backslash T(X)$ 是 s 个中心对称的乘积，每一 $f \in T(X)$ 是 2 个中心对称的乘积.

由 9.3.1 还可推出下述结论:

9.3.4 平面等距的性质: $n = 2$. 每个 $f \in \mathrm{Is}^+(X) \backslash T(X)$ 有唯一的不动点，称为它的中心；我们也说 f 是以 a 为中心的旋转(因此 f 以其中心及转角 $\underline{\Phi}^{-1}(\xi) \in \widetilde{\mathscr{A}}(\vec{X})$ 作为特征). 每个 $f \in \mathrm{Is}^-(X)$ 有唯一的一条整体不变直线 D 且 f 可唯一地写作 $f = t_{\vec{\xi}} \circ \sigma_D$，其中 $\vec{\xi} \in \vec{D}$；D 称为 f 的轴.

9.3.5 空间等距的性质: $n = 3$. $\mathrm{Is}^+(X) \backslash \mathrm{Id}_X$ 中具有不动点的元素 f 称为旋转. 根据 8.4.7.1，这个 f 必有唯一的点点不动的直线 D，称作它的轴；f 的转角是常值 $\overline{\Delta f(\Delta)} \in]0, \pi]$，其中 Δ 是一条正交于 D 的定向直线，但该转角(除非它是 π)再加上 D 并不足以确定 f，因为有两种可能. 欲知其详，可参阅 [DE2] 第 156—159 页或 9.14.5. $f \in \mathrm{Is}^+(X) \backslash T(X)$ 称为螺旋运动；它具有一条唯一的整体不变直线 D，称为它的轴，且还可唯一地分解为 $t_{\vec{\xi}} \circ g$ 的形式，其中 g 是以 D 为轴的旋转，$\vec{\xi} \in \vec{D}$. $\mathrm{Is}^-(X)$ 中有两类不同的元素；一类至少具有一个不动点，它们可写成 $r \circ \sigma_H$ 这样的合成，其中 H 是一个确定的超平面，r 是转轴与 H 正交的一个旋转（或

$r = \mathrm{Id}_X$)，另一类没有不动点，它们可唯一地分解成 $t_{\vec{\xi}} \circ \sigma_H$ 的形式，其中H是确定的超平面而 $\vec{\xi} \in \vec{H}$.

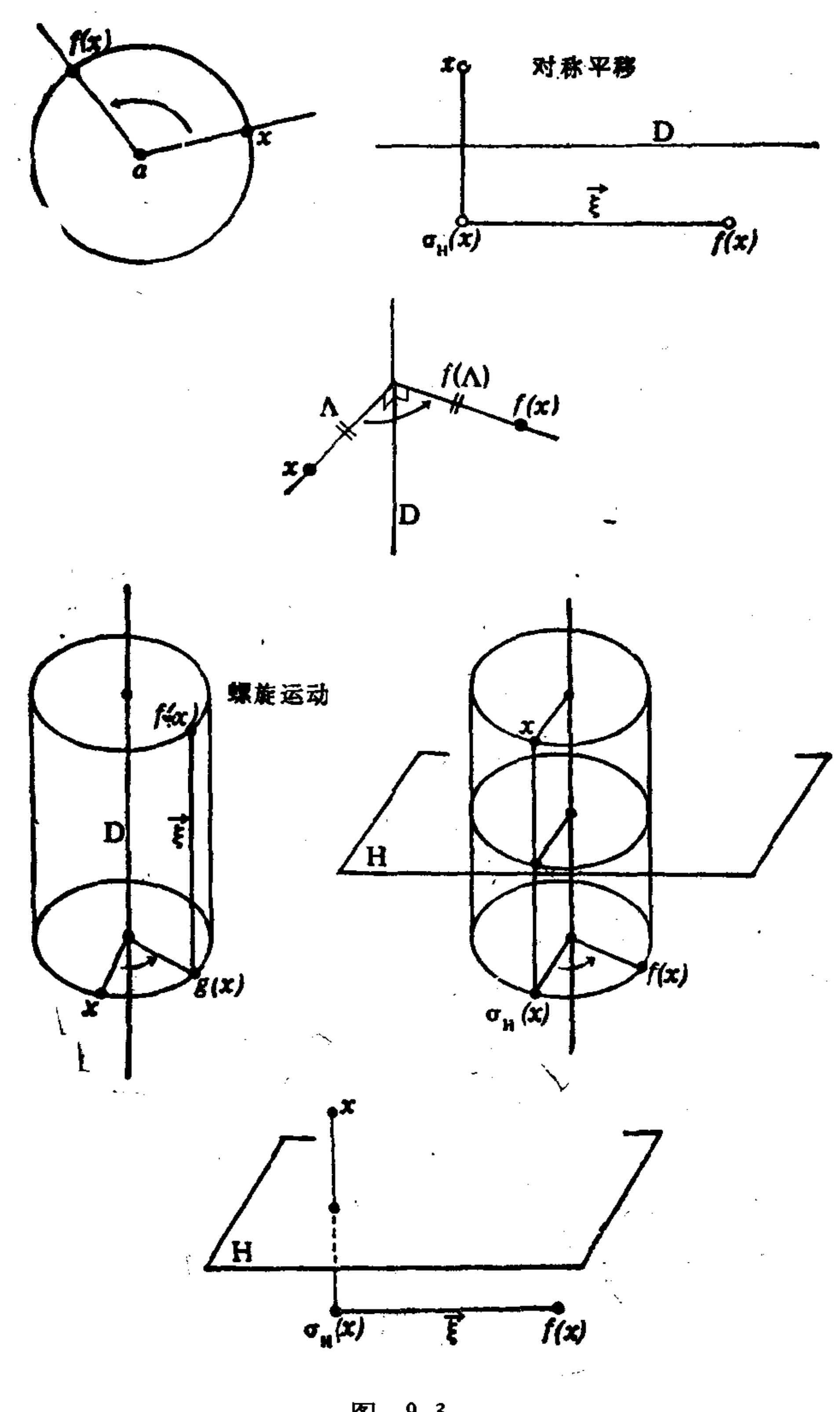


图 9.3.

9.3.6 二维情形的例. 当 $n = 2$ 时，我们知道唯一地存在 $f \in$

$\mathrm{Is}^+(X)$（或 $f\in \mathrm{Is}^-(X)$）使 $f(a)=a'$，$f(b)=b'$，其中 a，b，a'，b' 是给定的四点且 $ab=a'b'$，这可由 9.1.6 推出．很自然地，我们想要通过几何的构造具体地找出这个 f 来．这是很容易的：现在假定我们要找的是 $f\in \mathrm{Is}^+(X)$，由于$f\in T(X)$ 的情形是显而易见的，f 的中心 ω （参见 9.3.4）必是 a，a' 的垂直平分线和 b，b' 的垂直平分线的交点(参见 9.7.5)；另一种对正向相似也有效的作图法是利用 ω 是通过 a，a'，$\langle a, b\rangle\cap\langle a', b'\rangle$ 的圆和通过 b，b'，$\langle a, b\rangle\cap\langle a', b'\rangle$ 的圆的交点．若要找的是 $f\in \mathrm{Is}^-(X)$，只须注意到 f 的轴(参见 9.3.4) 应含有 x 和 $f(x)$ 的中点 ($\forall x\in X$) 即可．

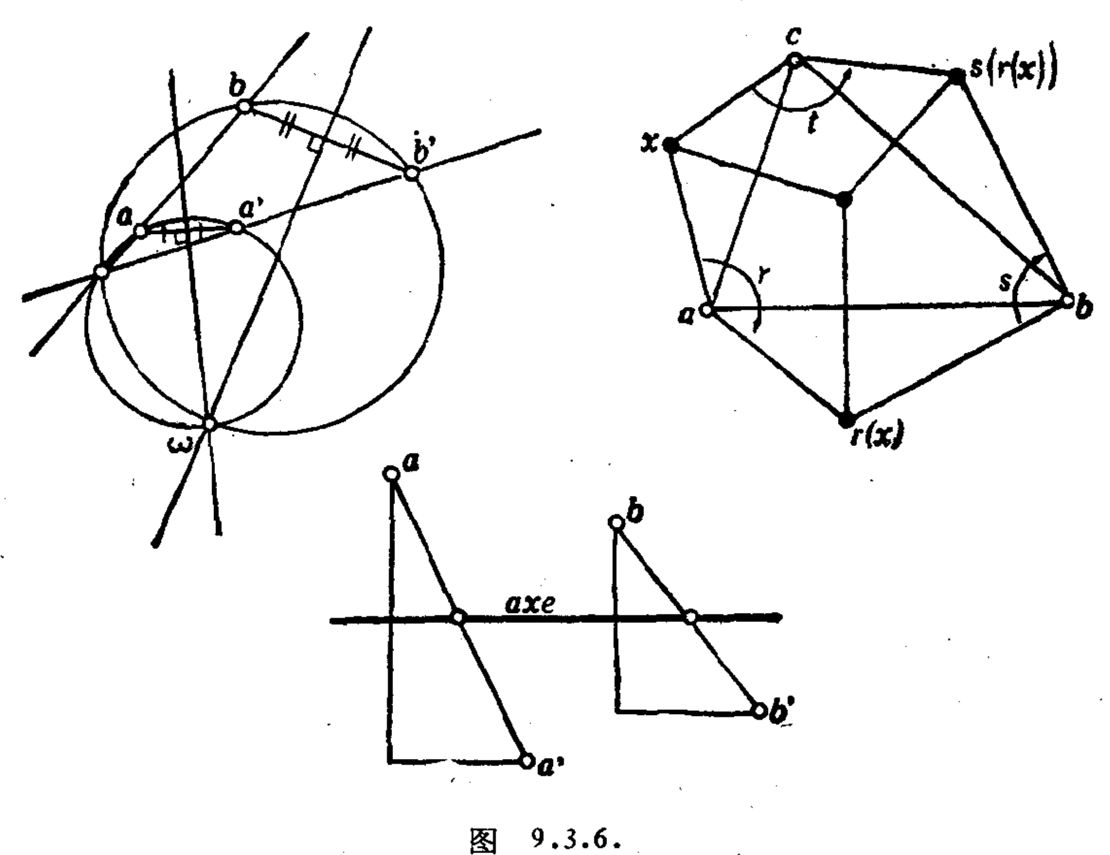


图 9.3.6.

能具体作出合成也是很有用的；在 1.7.5.3 中我们实质上曾经用到了下述结论：若 r，s 是以 a，b 为中心的两个旋转，又若 $tsr=\mathrm{Id}$，则 t 的中心 c 必使在 $\tilde{\mathfrak{A}}(\vec{X})$ 中的转角恰好是：r 的是 $2\widehat{\vec{ac},\vec{ab}}$，$s$ 的是 $2\widehat{\vec{ba},\vec{bc}}$，$t$ 的是 $2\widehat{\vec{cb},\vec{ca}}$.

事实上，我们可应用 8.3.5 并记 $r=\sigma_{\vec{ab}}\sigma_D$，$\delta=\sigma_E\sigma_{\vec{ab}}$，其中

D, E是适当的直线, $a \in D$, $b \in E$; 于是 $sr = \sigma_E \sigma_D$ 从而 sr 的中心以及与之相同的 $t = (sr)^{-1}$ 的中心都是 $D \cap E$, 由此可知 $c \in D \cap E$. 但这样就有$r = \sigma_{\vec{ab}} \sigma_{\vec{ac}}$, $s = \sigma_{\vec{bc}} \sigma_{\vec{ab}}$, 只须再用 8.7.7.7 即可.

9.3.7 三维情形的例. 在$n = 3$ 的情形,推论 9.3.3(iii) 取下述简单的形式(因而可用初等的方法证明): 若 f 是以D为轴、以 $\theta \in]0, \pi]$ 为转角的螺旋运动,其平移向量的模长 $p = \|\xi\|$ 称为 f 的步长,则 f 可分解为两个中心对称的乘积 $\sigma_A \sigma_B$, 其中直线A是任何与D正交并与之相交的直线; A与B之间的距离是 $d(A, B) = p/2$, 它们的交角是 $\overline{AB} = \theta/2$. 这一分解使我们可以很方便地研究螺旋运动的结构并得出相应的应用: 参见 [FL] 第 338—339 页或 9.14.38.

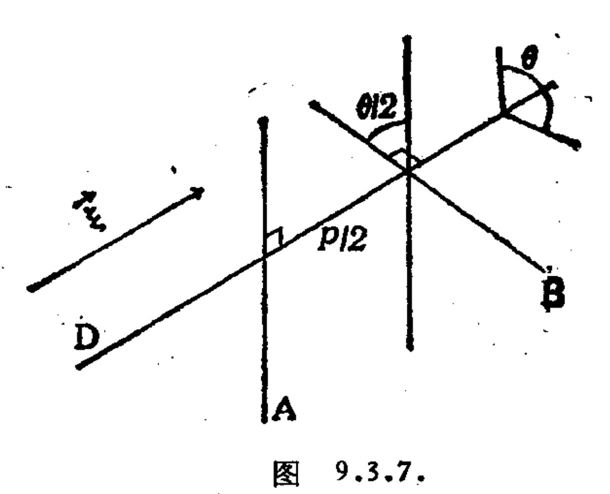


图 9.3.7.

在力学中很自然也会碰到螺旋运动,例如 Is(X) 中的可微曲线的一阶逼近: 参见 9.14.7 或 [BE] 第 120 页.

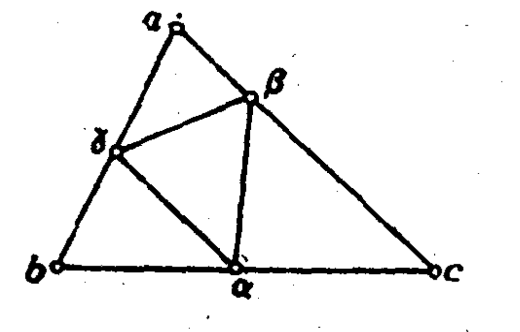
9.4 平面等距的结构与多边形台球

在本节中我们利用平面等距的结构来研究一个比较复杂一些的例子,这个例子中讨论两个相互联系的问题,即多边形台球问题和内接于给定多边形的极小周长多边形问题.为阅读方便起见,我们先处理三角形的情形,然后扩充到任意多边形;一个有趣的现象是: 在边数为偶数的情形跟边数为奇数的情形下, 问题的解答是

截然不同的．整个这一节中，X 都是欧氏仿射平面．

9.4.1 三角形的情形． 设 a，b，c 是 X 中给定的三角形；给出 $\{a, b, c\}$ 的一个内接三角形，就是给定三点 α，β，γ 使 $\alpha\in[b, c]$，$\beta\in[c, a]$，$\gamma\in[a, b]$（参见 3.4.3）．$\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 的周长是 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，参见 10.3 或 12.3.1；若 $\alpha\in]b, c[$，$\beta\in]c, a[$，$\gamma\in]a, b[$ 而且 $\{a, b, c\}$ 的每边都是 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 的外平分线，即在 8.7.3.2 的意义下：$\overrightarrow{bc}$ 是 $\overrightarrow{\gamma\alpha}$，$\overrightarrow{\alpha\beta}$ 的平分线，等等，则称 $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ 为台球轨道或光线三角形．下述引理给出了台球与极小周长之间的联系：

9.4.1.1 引理． 设已给欧氏平面上有直线 D 和位于 D 同一侧开半平面上的两点 a，b（参见 2.7.3）；则存在唯一的 $x\in D$ 使 $ax+bx$ 极小而且这点 x 的特征就是 $\overrightarrow{ax}$ 和 $\overrightarrow{xb}$ 的平分线位于 D 上．



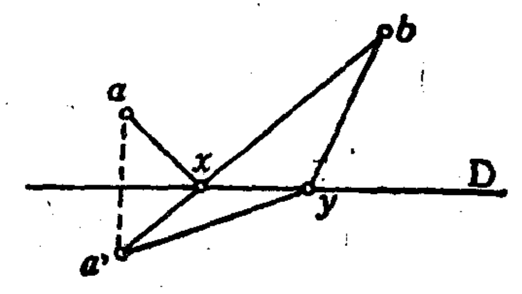


图 9.4.1.1.

经典的办法是引进 $a'=\sigma_D(a)$；于是 $\langle a', b\rangle$ 与 D 交于唯一的一点 x 而且对任一 $y\in D$：$ay+by=a'y+by\geqslant a'b=ax+bx$．

9.4.1.2 附注． $ax+bx$ 极小时必满足平分线的条件，这一点也可由第一变分公式推出：见 9.10.5．

9.4.1.3 命题． 若 $\{a,b,c\}$ 的三角都是锐角（即 $\in]0,\pi/2[$），则该三角形具有唯一的台球轨道，它同时也是唯一的最小周长内接三角形；而且该三角形恰由 $\{a, b, c\}$ 的三个垂足所组成；若 $\{a, b, c\}$ 在 a 处有一个大于或等于 $\pi/2$ 的角，则它不具有任何台球轨道，却具有唯一的内接极小周长三角形，即：α 是自 a 作出

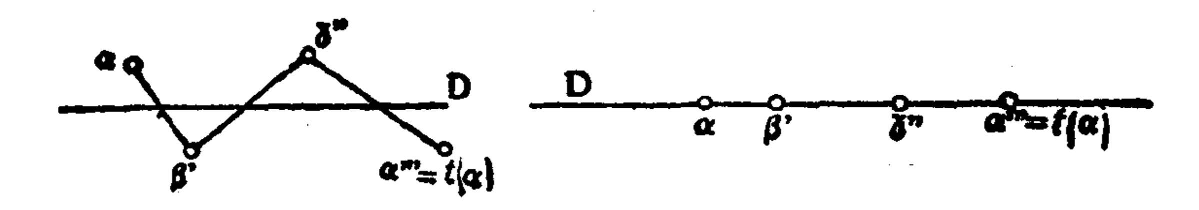
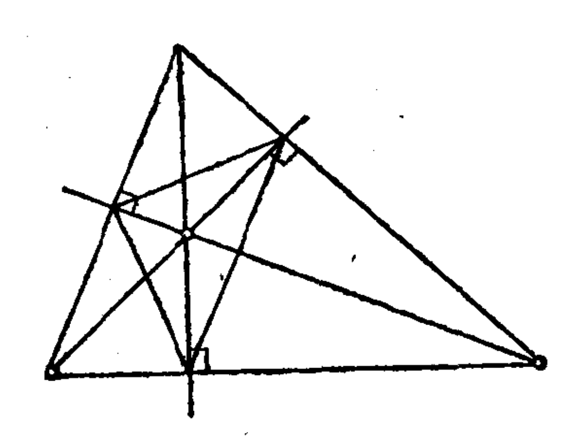


图 9.4.1.3.

的高线的垂足而且 $\beta = \gamma = a$.

9.4.1.4 由紧性可知极小周长多边形总是存在的，因为周长函数

$[b, c] \times [c, a] \times [a, b] \ni (\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \in \mathbf{R}$ 是连续函数. 假设这一极小值由 $\alpha \in]b, c[$, $\beta \in]c, a[$, $\gamma \in]a, b[$ 所实现，于是由 9.4.1.1 可知 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 是一台球轨道. 将 $\{a, b, c\}$ 的三边记为 $A = \langle b, c\rangle$, $B = \langle c, a\rangle$, $C = \langle a, b\rangle$, 并引



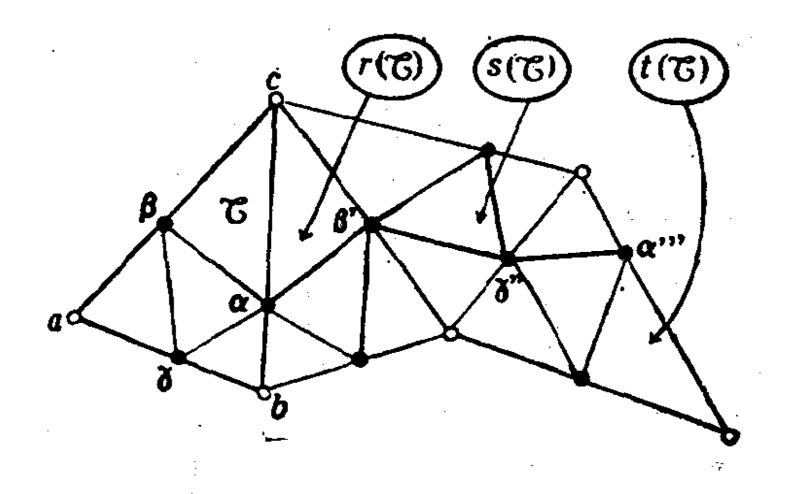


图 9.4.1.4.

进对称 σ_A, σ_B, σ_C; 若 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 是台球轨道,则 $f = \sigma_C\sigma_B\sigma_A$ 满足 $f(\langle\alpha, \gamma\rangle) = \langle\alpha, \gamma\rangle$. 但 $f \in \mathrm{Is}^-(X)$, 因而(参见 9.3.4) 直线 $\langle\alpha, \gamma\rangle$ 是确定的,它就是 f 的轴; 这就说明了台球轨道的唯一性. 而三条高线的垂足又确实给出了 f 的轴(留作习题), 而且这些垂足当且仅当 $\{a, b, c\}$ 的角都是锐角时才严格地位于各边内部.剩下要说明的是,在钝角三角形的情形, 周长的极小值正如命题所述,而在锐角三角形的情形, 得出的光线三角形具有极小周长. 在钝角的情形,我们知道,由于极小值可达到(例如在 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$), 所以根据前面的讨论, α, β, γ 其中之一必定落在顶点上; 于是结论自明. 现在转而证明光线三角形是周长极小的.

我们的方法是将内接三角形 α, β, γ 沿一条折线展开如次;考虑相继如下定义的三个等距: $r = \sigma_A$, $s = \sigma_{B'}\ r$, 其中 $B' = r(B)$, $t = \sigma_{C''}s$,其中 $C'' = s(C)$.我们看到 $\sigma_{B'} = \sigma_{r(B)} = \sigma_A\sigma_B\cdot\sigma_A^{-1} = \sigma_A\sigma_B\sigma_A$, 因而 $s = \sigma_A\sigma_B$, 同样 $t = \sigma_A\sigma_B\sigma_C$ (于是 $t = f^{-1}$!). 对于 $\{a, b, c\}$ 的任何内接三角形 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, 定义 $\beta' = r\ (\beta)$, $\gamma'' = s(\gamma)$, $\alpha''' = t(\alpha)$; 于是由三角形不等式有

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \alpha\beta' + \beta'\gamma'' + \gamma''\alpha''' \geqslant \alpha t(\alpha).$$

然后应用 9.3.2: 函数 $x \longmapsto xt(x)$ 恰在 t 的轴 D 上取到极小值, 而 t 的轴也就是 f 的轴. 另一方面,若 α 位于该轴上(也在 $[a, b]$ 上),则容易看出,在该轴上共线的 α, β', γ'', α''' 是相继排列的, 因此 $\alpha\beta' + \beta'\gamma'' + \gamma''\alpha''' = \alpha t(\alpha)$.

9.4.2 任意多边形. 在本段中 P 是凸 n 边形(参见 12.1), 顶点记为 $(a_i)_{i=1,\cdots,n}$, 位于直线 $\langle a_i, a_{i+1}\rangle$ 上的边 $[a_i, a_{i+1}]$ 记为 D_i; 还常用到 $n + 1 = l$ 的记号. 先将 9.4.1 中的概念作一推广: 所谓 P 的**内接多边形**就是给定 $(\alpha_i)_{i=1,\cdots,n}$ 使 $\alpha_i \in [a_i, a_{i+1}]\ \forall i = 1, \cdots, n$; 内接多边形 $(\alpha_i)_{i=1,\cdots,n}$ 称为**光线多边形**, 如果 $\alpha_i \in]a_i, a_{i+1}[$ 且 $\sigma_{D_i}(\langle\alpha_i, \alpha_{i-1}\rangle) = \langle\alpha_i, \alpha_{i+1}\rangle \forall i = 1, \cdots, n$. (α_i) 的**周长**是

$$p((\alpha_i)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\alpha_{i+1}.$$

9.4.2.1 定理. 必然存在周长极小的内接多边形；若该极小值是 k，(α_i) 是严格内接多边形而且 $p((\alpha_i))=k$，则 (α_i) 是光线多边形. 反之，每一光线多边形必是周长极小的.

假设存在一个光线多边形，则：若 n 是奇数，则它是唯一的，若 n 是偶数，则存在无穷多个光线多边形.

为使 $n=2p$ 时存在一个光线多边形，必须在直线定向角集合 $\mathfrak{A}(\vec{X})$ 中成立关系式 $\sum_{i=1}^{n}\widehat{D_{2i-1}D_{2i}}=0$，特别当 $n=4$ 时顶点 (a_i) 必须是共圆的. 对任意的 n，为使存在一个光线多边形，只须存在一条直线 D 使 $f(D)=D$ 且 $D\cap g_i(]a_{i+1},a_{i+2}[)\neq\varnothing\ \forall i=1,\cdots,n$（其中 f 和 g_i 定义如下）.

这一命题的证明没有什么新的东西，想法完全跟 9.4.1.3 的证明相似.

9.4.2.2 根据紧性，极小周长多边形是存在的，同样，由 9.4.1.1 可知极小周长的严格内接多边形一定是光线多边形. 反过来的证明不那么容易，它是定理最后一部分的推论.

9.4.2.3 将 9.4.1.4 中的作法推广如下. 令 $f=\sigma_{D_n}\cdots\sigma_{D_1}$；再用递推法定义 g_i：

9.4.2.4 $g_1=\sigma_{D_1}$，$g_2=\sigma_{g_1(D_2)}g_1\cdots g_{i+1}=\sigma_{g_i(D_{i+1})}g_i$ $(i=1,\cdots,n)$. 由于 $\sigma_{h(C)}=h\sigma_C h^{-1}$，我们看到

9.4.2.5 $\forall i: g_i=\sigma_{D_1}\cdots\sigma_{D_i}$，特别有 $g=g_n=\sigma_{D_1}\cdots\sigma_{D_n}=f^{-1}$. 对内接多边形 (α_i)，用递推法定义 β_i 如下：

9.4.2.6 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=g_1(\alpha_2)$，$\cdots$，$\beta_{i+1}=g_i(\alpha_{i+1})$ $(i=1,\cdots,n)$.

并集 $\bigcup_{i=1}^{n}[\beta_i,\beta_{i+1}]$ 是表示内接多边形 (α_i) 的“展开”的一条“折线”，确切地说，在这种展开下，这条折线成为线段的充要条件是 (α_i) 是光线多边形.

由上述做法可知 $p((\alpha_i))=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\beta_{i+1}$；根据严格三角形不

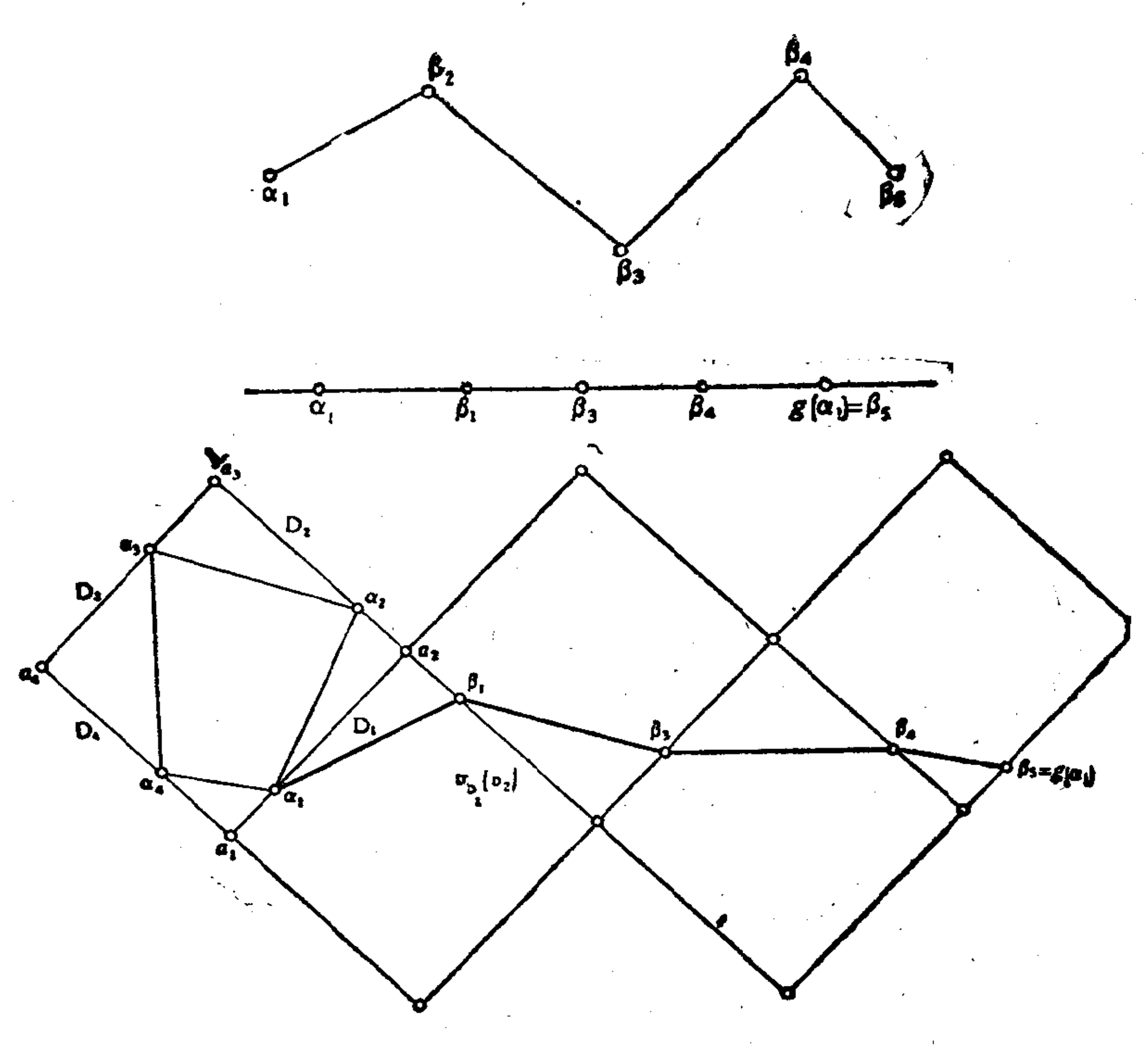


图 9.4.2.6.

等式还有:

9.4.2.7 $\begin{cases} p((\alpha_i)) \geqslant \alpha_1 g(\alpha_1) \text{ 且 } p((\alpha_1)) = \alpha_1 g(\alpha_1) \text{ 的充要条件} \\ \text{是 } \beta_i \text{ 依次位于同一直线上.} \end{cases}$

9.4.2.8 假设 (α_i) 是光线多边形,则直线 $D = \langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle$ 在 f 下稳定: $f(D) = D$. 因此若 n 是奇数,则 $f \in \mathrm{Is}^-(X)$ 且 D 是 f 的唯一的轴(参见 9.3.4),因此在奇数情形下光线多边形是唯一的. 在偶数边形的情形下不唯一的结论,则可由证明的末尾推出. 假定 (α_i) 是 $n = 2p$ 为偶数时的光线多边形,则有 $f(D) = D$,但由 9.3.4 可知这时必须有 $f \in T(X)$,这等价于在 $\tilde{\mathfrak{A}}(\vec{X})$ 中 $\Phi^{-1}(f) = 0$. 把 f 中的对称归类成:

$$f = (\sigma_{D_{2p}} \sigma_{D_{2p-1}}) \cdots (\sigma_{D_2} \sigma_{D_1}),$$

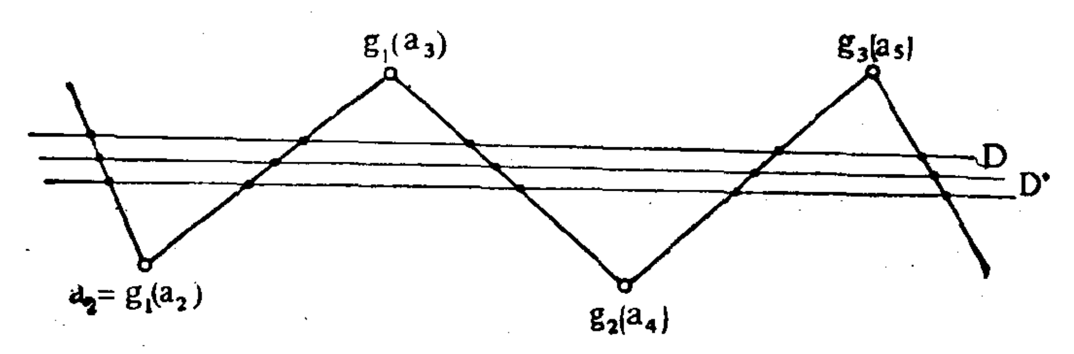
并应用 8.7.7.8；即得 $\sum_{i=1}^{p} \widehat{D_{2i-1}D_i} = 0$. 至于 $n = 4$ 时共圆的结论，可由 10.9.5 推出.

9.4.2.9 现假设定理末尾的条件都已满足.

由 (a_i) 的凸性可推出，点 $\beta_i = D \cap g_i(]a_{i+1}, a_{i+2}[)$ 依次位于 D 上，因此(参见 9.4.2.7) 由 $\alpha_i = g_{i-1}^{-1}(\beta_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ 定义的内接多边形 (α_i) 的周长 $p((\alpha_i))$ 等于 $p((\alpha_i)) = \beta_1 g(\beta_1)$. 若反过来从任一内接多边形出发，仍由 9.4.2.7 可知其周长为

$$p((\alpha_i')) = \alpha_1' g(\alpha_1');$$

但 9.3.2 和 9.3.4 表明 $p((\alpha_i')) \geqslant p((\alpha_i))$，或是 f 属于 $\mathrm{Is}^-(x)$(n 为奇数)且有唯一的轴，或是 f 属于 $T(X)$ (n 为偶数) 且以所有与平移方向平行的直线作为整体不变直线，因此多边形 (α_i) 有极小周长(而且是光线多边形). 这也表明了，每一光线多边形都是周



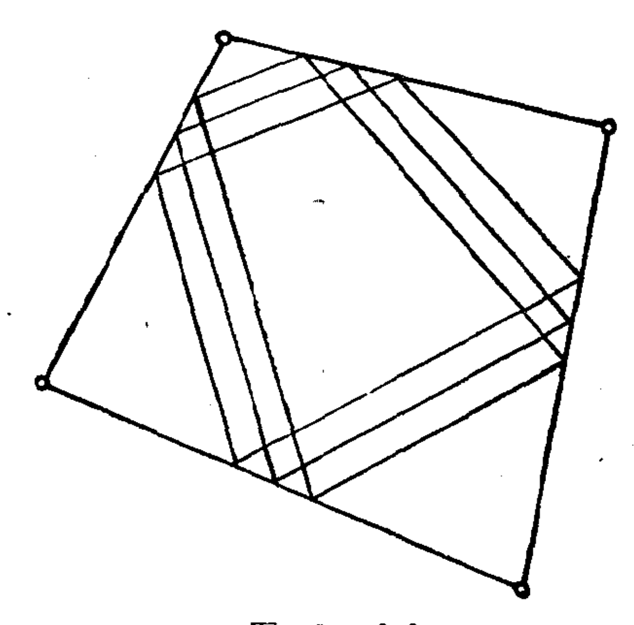


图 9.4.2.9.

长极小的，因为根据 g_i 的定义，直线 $D=\langle\alpha_1, \alpha_n\rangle$ 是满足我们的假设条件的.

9.4.2.10 最后，若 n 是偶数而 (α_i) 是光线多边形，则直线 $D=\langle\alpha_1, \alpha_n\rangle$ 满足关于 $g_i(]a_{i+1}, a_{i+2}[)$ 的交的假设条件；由连续性，每一充分靠近 D 且平行于 D 的直线 D' 仍满足这一条件，且由 $f\in T(x)$ 还有 $f(D')=D'$.

9.4.3 注. 对任何 n 都会产生与三角形情形相仿的不如人意的现象：一般说来并不存在光线多边形，见 9.14.10.

若想实际找出周长的极小值 k，可以这样做：首先通过具体构作 f 找出光线多边形，然后应用 9.4.2.1. 若无法找到光线多边形，则必定有某个 α_i 是 P 的一个顶点；于是可以胸有成竹地考察各种特殊情形并有条不紊地应用 9.4.1.1.

可以研究凸多边形中的台球轨道，它们在来回若干次以后即封闭，见 9.14.9.

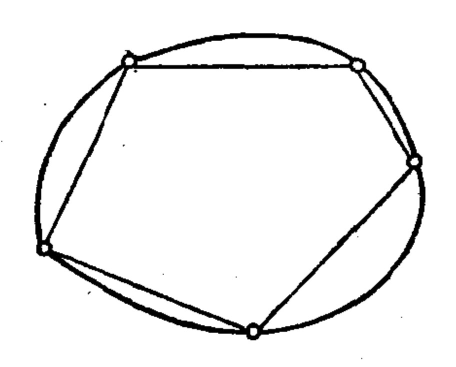
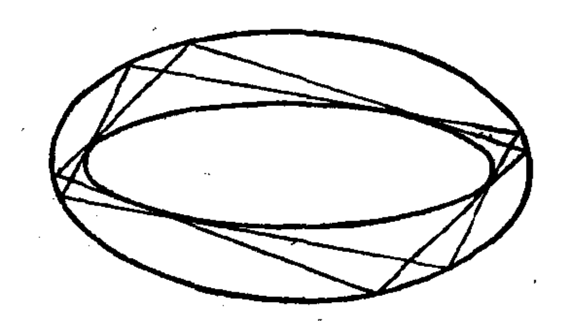



图 9.4.3.

也可在平面紧凸形(不一定是多边形)中研究光线多边形. 当这凸形是严格凸时（参见 11.6.4)，情形最为有趣：对任何 $\geqslant 2$ 的整数 n，总存在具有 n 个顶点的光线多边形，证明可看 9.14.33，椭圆的情形是很引人入胜的：我们在 17.6.6 将会看到，不仅对任何 n 都存在光线多边形，而且它们总有无穷多个，更确切地说，可取椭圆上任意一点作为这种多边形的一个顶点(对任意 n 都如此).

9.4.4 遍历性. 一个至今尚在研究之中而没有得到完全解决的问题，就是任意一个多边形或紧凸形的光线轨道(或台球轨道，两者是一回事）的遍历性问题. 一条轨道由一个起始点和一个直线方

向所决定，先射到边界，再根据等角条件反射出去，然后如此往返．我们感兴趣的是所有轨道的集合，或者说是与之至多相差零测度的一个集合，凡是射到一个顶点而反射方向不明的轨道都不计在内．如果几乎所有的轨道在凸形中处处稠密，则称该凸形是**弱遍**

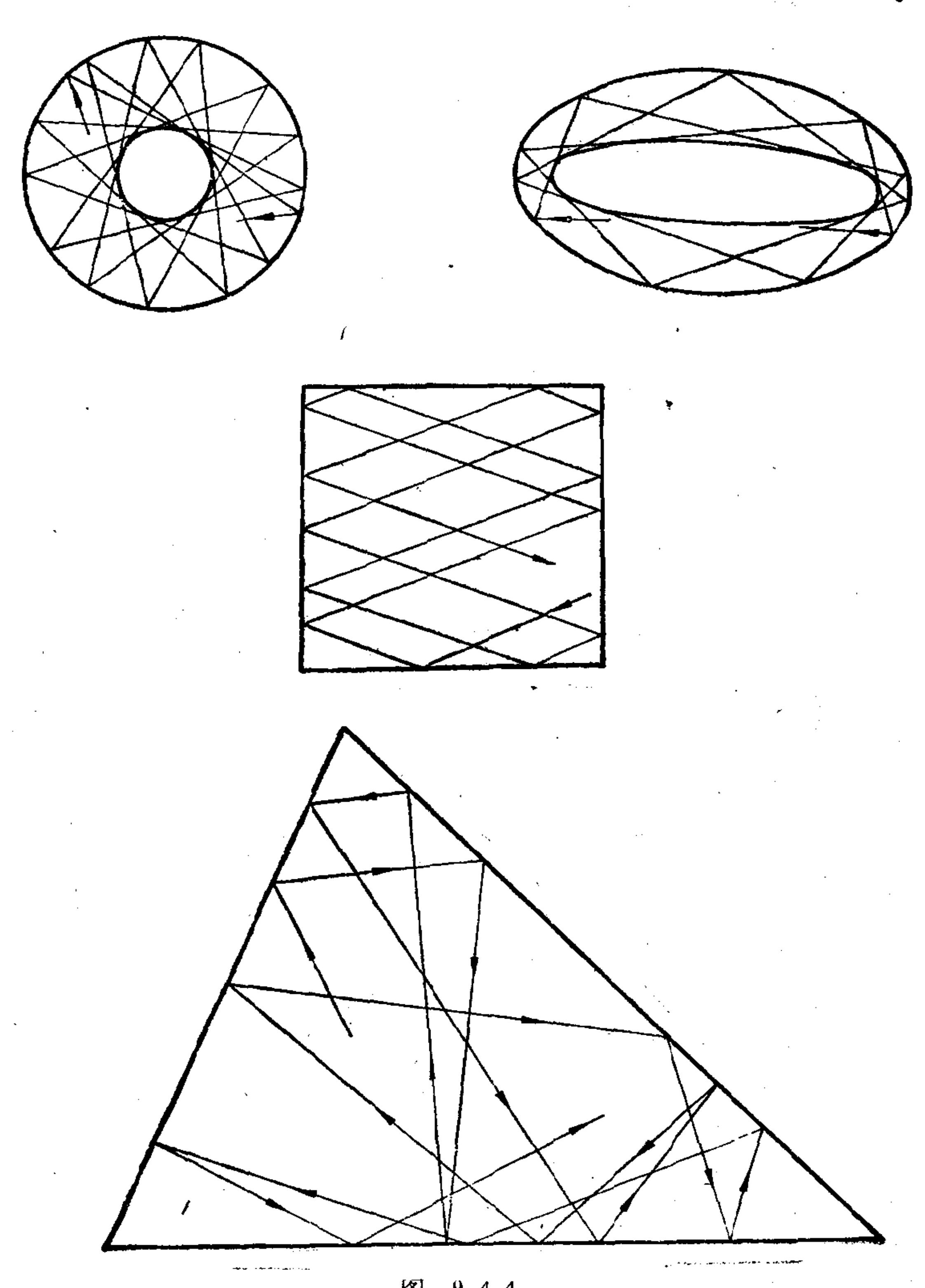


图 9.4.4.

历的，如果几乎所有的轨道在凸形内所有方向所成的空间中处处稠密，则称该凸形是强遍历的. 所以，我们所感兴趣的是与9.4.2所讨论的寻找封闭轨道问题相对的一个问题. 有几种凸形可供研究：圆和椭圆都不是弱遍历的，圆的情形是显然的，椭圆的情形则可由17.6.6推出. 9.14.11中指出有些三角形不是强遍历的. 正方形必定是弱遍历的（因为所有斜率为无理数的方向提供了处处稠密的轨道），但又必定不是强遍历的，因为轨道只有两个互为相反数的斜率. 可是遍历性的问题，哪怕是在已知内角的三角形中，还是在作了大量研究以后至今仍然远未解决的一个问题；为了体会一下这一问题的复杂性，只要沿一条轨道试画出几次反射，这时你很快就会有一种如堕五里雾中的感觉. 有关遍历性的新近的文献，可阅：[A-A]，[CZ]. 最近 Lazutkin 刚证明了，具有 C^2 类边界的严格凸形必然不是遍历的；这是由它们具有焦散面引出的结论，也是在给定椭圆内的共焦椭圆的推广，对此可阅 [LZ].

9.5 相　　似

设 $f\in \mathrm{GA}(X)$ 使 $\vec{f}\in \mathrm{GO}(\vec{X})$（参见8.8.2）；若 μ 是 $\vec{f}$ 的相似比，则有

$$f(x)f(y)=\mu xy,\quad f(x')f(y')=\mu x'y',$$

由此即得：$x\neq y$ 时总有 $\dfrac{f(x')f(y')}{f(x)f(y)}=\dfrac{x'y'}{xy}$；换句话说，这样的 f "保持距离之比". 其逆也真.

9.5.1 命题. 设 $f: X\circlearrowleft$ 是集论意义下的非常值映射并使 $x\neq y$ 且 $f(x)\neq f(y)$ 时总有 $\dfrac{f(x')f(y')}{f(x)f(y)}=\dfrac{x'y'}{xy}$，则这一条件等价于 $f\in \mathrm{GA}(X)$ 和 $\vec{f}\in \mathrm{GO}(\vec{X})$. 这样的 f 称为 X 中的相似：若还有 $\vec{f}\in \mathrm{GO}^+(\vec{X})$（相应地，$\mathrm{GO}^-(\vec{X})$），则称为正向（相应地，逆向）相似；相应的集合分别记为 $\mathrm{Sim}\,(X)$，$\mathrm{Sim}^+(X)$，$\mathrm{Sim}^-(X)$. f 的相似比就是 $\vec{f}$ 的相似比.

由于 f 是非常值映射，所以存在 $x_0\neq y_0$ 使 $f(x_0)\neq f(y_0)$.

于是由假设条件可推知 f 是双射而且对所有的 $x, y\in X$ 有 $f(x)f(y)=\mu xy$，其中 $\mu=\frac{f(x_0)f(y_0)}{x_0y_0}$. 但这样 $h\circ f$ 就是 X 中的等距，这里 h 是任何以 μ^{-1} 为比的位似；根据 9.1.3 就有 $h\circ f\in \mathrm{GA}(X)$ 和 $\overrightarrow{h\circ f}\in O(\vec{X})$；由此，合成 h^{-1} 后就得出关于 f 的结论.

9.5.2 命题. 设 $f\in \mathrm{Sim}\ (X)\backslash \mathrm{Is}\ (X)$；则存在唯一的 $\omega\in X$ 使 $f(\omega)=\omega$，这个 ω 称为相似 f 的**中心**. 而且还有

$$f=h\circ g=g\circ h, \text{ 其中 } h\in H_{\omega,\mu},\ g\in \mathrm{Is}_{\omega}(X).$$

这个命题可由 9.3.3 推出. 另一种证明则要用到拓扑，更确切地说是用到压缩映射的理论；事实上若 μ 是 f 的相似比，则 $\mu<1$ 时 f 是压缩，而 $\mu>1$ 时 f^{-1} 才是压缩！

9.5.3 相似的特征

9.5.3.1 设 f 是一个相似；由 9.2.1 和 8.8.5.1 可知 f 保持直线、半直线的交角，而且在平面的情形 f 保持定向角或使之反向，视 f 是正向还是逆向而定. 尤其，f 保持直线的正交性：

$$D\perp D' \Rightarrow f(D)\perp f(D').$$

同样，对 X 中的任一球面 S（需要时可参看 10.7），$f(S)$ 仍是球面（半径乘以 μ）. 前面这些性质确是相似的特征：

9.5.3.2 定理. 对集论意义下的双射 $f: X\circlearrowleft$，这里 $\dim X\geqslant 2$，下面的三个条件是等价的：

(i) f 是相似；

(ii) 对 X 中任何满足 $a\neq b$, $c\neq d$ 和 $\langle a, b\rangle\perp\langle c, d\rangle$ 的四点 a, b, c, d，有 $\langle f(a), f(b)\rangle\perp\langle f(c), f(d)\rangle$；

(iii) 对 X 中任一球面 S，$f(S)$ 仍是球面.

9.5.3.3 先假定 (ii) 成立. 考虑到 2.6.5 和 8.8.5.1，只须证明 f 将共线三点 a, b, c 变成共线的三点 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$. 为此，将 a, b 扩充成一个仿射正交标架 $\{a, b, a_2, \cdots, a_n\}$；根据假设条件及 8.1.2.5，$\{f(a), f(b), f(a_2), \cdots, f(a_n)\}$ 也是一个正交标架. 但 $\langle f(a), f(c)\rangle\perp\langle f(a), f(a_i)\rangle\ \forall i=2, \cdots, n$，由此即得

$$\langle f(a), f(b)\rangle=\langle f(a), f(c)\rangle.$$

9.5.3.4 现在假定 (iii) 成立，我们先来证明 f 将共线点变成共线点. 其逆是容易证明的：若 a', b', c' 是共线的相异三点，则 $a = f^{-1}(a')$, $b = f^{-1}(b')$, $c = f^{-1}(c')$ 共线，因为否则将存在一

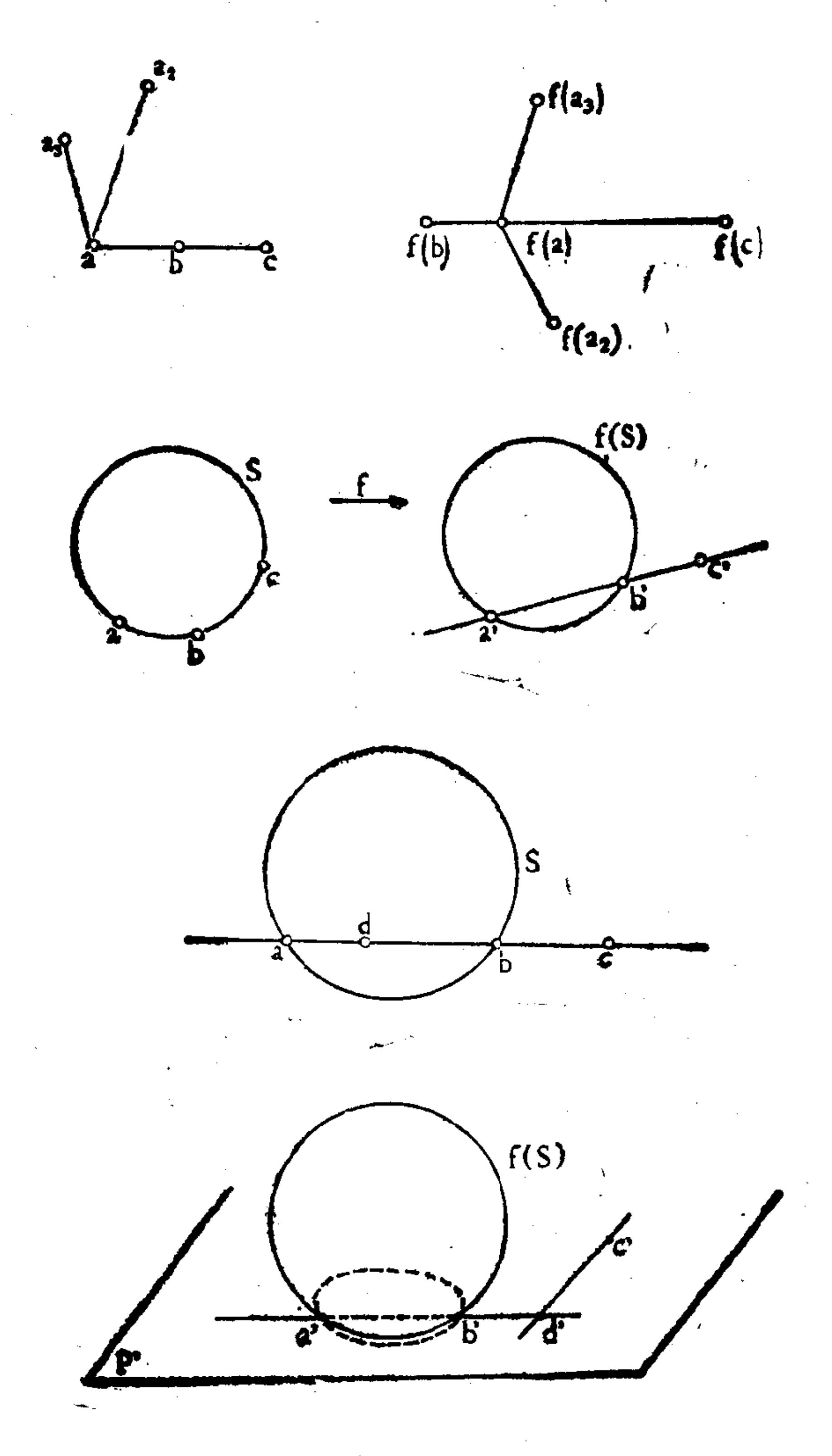


图 9.5.3.4.

个含 a, b, c 的球面 S，而且 a', b', c' 将是球面 $f(S)$ 上共线的相异三点，这是不可能的(需要时可参看 10.7.2)。现在假设 a, b, c 是共线相异三点，$a' = f(a)$，$b' = f(b)$，$c' = f(c)$；倘使 $c' \notin \langle a', b' \rangle$，我们要推出矛盾．由前所述 $f^{-1}(\langle a', b' \rangle) \subset \langle a, b \rangle$，但 $f^{-1}(P' = \langle a', b', c' \rangle) \subset \langle a, b \rangle$，这只要在 $\langle a', b' \rangle$ 上任取 d' 即可看出：$f^{-1}(\langle c', d' \rangle) \subset \langle a, c \rangle = \langle a, b \rangle$． 于是，设 S 是过 a, b 的球面，就有 $S \cap \langle a, b \rangle = \{a, b\}$；因而 $f(S) \cap P' = C'$ 是 P' 上的一个圆且应有 $f^{-1}(C') \subset \langle a, b \rangle$，推出矛盾，因为一个圆至少含有三个相异的点．

9.5.3.5 由 2.6.5 可知，剩下的事是证明 $f \in GA(X)$ 若将球面都变成球面则必是相似；其实只须说明 f 将一个球面变成一个球面就可以了．必要时只要将 f 合成上一个扩张，就不妨假定存在一个球面 S 使 $f(S) = S$．首先注意到 f 使 S 的中心 ω 不动；为此，设 a, b 是 S 上对径的两点，于是一方面，S 在 a, b 处的切超平面 H_a，H_b 必然是平行的，另一方面，球面的切超平面与该球面仅交于一点．由这两个特征可推出 $f(H_a)$，$f(H_b)$ 就是 S 在 $f(a)$ 和 $f(b)$ 处的两个切超平面，它们互相平行，因此 $f(a)$，$f(b)$ 是 S 上的对径点．但这样就有

$$\omega = \frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(\omega),$$

因为 f 是仿射变换．

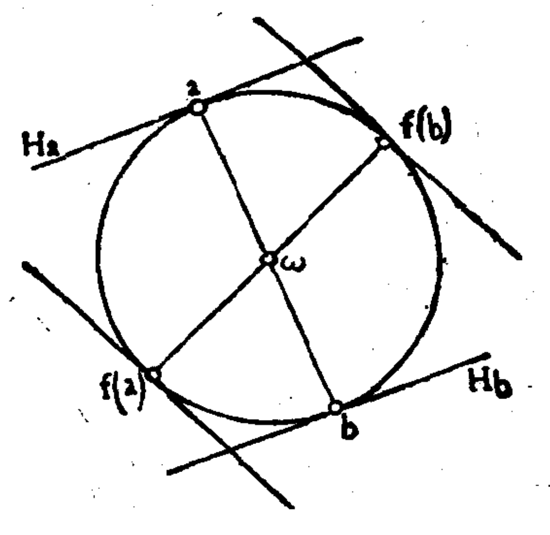


图 9.5.3.5.

所以现在可以归结到向量空间的情形了：$f\in GL(X_\omega)$；但 $f(S)=S$ 等价于 f 保持 X_∞ 的范数，因此由 8.1.5 可得 $f\in O(X_\omega)$.

9.5.3.6 附注. 若将 9.5.3.2 中的条件降低为仅假设 f 是 X 的两个子集之间的一个双射，则由条件 (iii) 不一定能推出 f 是一个相似的限制. 例如 f 可以是一个反演，参见 10.8.2，或者是反演的合成，参见 18.10.4. 有关作为仿射空间子集间的双射并保持球面的 f 的讨论，可参阅 [CD] 和 [GI-WE].

9.5.4 Liouville 定理

9.5.4.1 本段要讨论相似性的一个与微分几何有关的特征；但其中内容与本书下述章节也有密切联系：10.8.5，18.10，20.6.

从 X 中一个相似 f 出发，将它看作 C^∞ 映射 $X\to X$；对每一态射 $f\in A(X;X)$，f 总是 C^∞ 的，而且其导数 $f'\colon X\to L(X;X)$ 就是常值映射 $x\longmapsto\vec{f}$，即 $f'(x)=\vec{f}\ \forall x\in X$（这可由 2.7.7 推出）. 因此，在我们的特殊情形下，$f\in \mathrm{Sim}(X)$ 是一个 C^1 映射且使 $f'(x)=\vec{f}\in O(\vec{X})\ \forall x\in X$；因此可以说相似 f 是"无穷小保角"的. 我们自然要问，除了相似之外是否还有其它映射也有这种性质呢？当然 $n=1$ 时任何有非零导数的映射都有这种性质；因此我们下面不再考虑 $n=1$ 的情形.

9.5.4.2 定义. 设 U 和 V 是欧氏仿射空间 X 的两个开子集，$f\in C^1(U;V)$（即 $f\colon U\to V$ 是 C^1 的）. f 称为保角映射，如果 f 是双射且 $f'(x)\in GO(\vec{X})\ \forall x\in U$；若还有 $f'(x)\in GO^+(\vec{X})$ 或 $GO^-(\vec{X})$，则分别称为正向或反向保角映射. 相应的集合分别记为 $\mathrm{Conf}\,(U,V)$，$\mathrm{Conf}^+(U;V)$，$\mathrm{Conf}^-(U,V)$；并记 $\mathrm{Conf}\,(U)=\mathrm{Conf}\,(U;U)$，$\mathrm{Conf}^\pm(U)=\mathrm{Conf}^\pm(U;U)$.

单射的条件，$GO(\vec{X})\subset \mathrm{Isom}\,(\vec{X};\vec{X})$ 的事实，再加上局部微分同胚定理，表明了 $f\in\mathrm{Conf}\,(U;V)$ 必是 U 到 $f(U)$ 上的一个微分同胚.

9.5.4.3 第一个例：全纯函数

假设 $n=\dim X=2$，由 8.3.12 和 9.6.4 可知，全纯函数 $U\to X$ 的概念是有意义的；其实，预先应该将 X 定向，但实质上得

出的结论与所取定向是无关的。于是 $f: U\to X$ 是单射的全纯函数且导数处处不为零，就等价于 $f\in \mathrm{Conf}^+(U; f(U))$。这是一个经典的结果，可由 8.8.4.1 推出(需要时可参看 [CH2] 第 67 页)。

这样就提供了大量并非真正相似的所谓无穷小相似，因为定义在开集 U (比如说 $\mathbf{C}$ 中的) 单射、全纯且有处处不为零导数的映射可有大量的选择余地。而且从一种很合理的意义上说，这种选择的可能性甚至不是有限维的。

9.5.4.4 第二个例：反演

在 10.8.5 中可以看到，以 a 为中心的任意次幂的反演，总是属于 $\mathrm{Conf}(X\backslash a)$ 的；这样，有限多个反演的合成就提供了 $\mathrm{Conf}(U; f(U))$ 中元素的例子，这里 U 是 X 中除去有限多个点后余下的子集，上述元素并不是真正的相似。

9.5.4.5 但这些反射的选择可能性是有限维的，在 18.10.4 中可以看到，这一维数是 $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$。

下面的定理表明，对无穷小相似来说，$n=2$ 的情形与 $n\geqslant 3$ 的情形是有本质的差别的；这个定理也表明，"局部"的 (即在 X 的一个开子集 U 上)讨论与"整体"的 (即 U 是整个 X) 讨论是有本质的差别的。关于"从局部到整体"的过渡，可在 12.8，16.4，18.3.8.6 中见到其它的例子。

9.5.4.6 定理。若 $n=2$，则 $\mathrm{Conf}(X)=\mathrm{Sim}(X)$；若 n 任意，$f\in\mathrm{Conf}(X)$ 且 f 是 C^4 的，则 $f\in\mathrm{Sim}(X)$。设 $n\geqslant 3$，U 是 X 的任一开子集，$f\in\mathrm{Conf}(U; f(U))$ 是 C^4 的，则 f 是 X 上反演之积在 U 上的限制(因此是 C^∞ 的)。

9.5.4.7 附注。我们总有 $\mathrm{Conf}(X)=\mathrm{Sim}(X)$，即 f 为 C^1 映射已够，但对 $n\geqslant 3$ 的情形，证明远要困难得多，必须用到很深入的分析技巧，参见 [HM]。以下在 $n\geqslant 3$ 情形下的 9.5.4.6 的证明方法是 R. Nevanlinna 给出的：[NA]；参见 9.5.4.21。也可参阅 [LF3] 第 59 页练习 12。

9.5.4.8 $n=2$ 的情形。将 X 向量化，并通过定向把它等同

于 $\mathbf{C}$，考虑 C^1 单射 f: $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$. 由于 $\mathbf{C}$ 连通，就有

$$f'(z)\in GO^+(\mathbf{C})\quad \forall z\in\mathbf{C},\ \text{或}\ f'(z)\in GO^-(\mathbf{C})\quad \forall z\in\mathbf{C},$$

必要时只要将 f 乘以共轭映射 $z\longmapsto\bar{z}$，就不妨假定总是前一种情形成立. 由 9.5.4.3 可知映射 f: $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 是单射全纯函数；而由经典的结论即知 f 必定形如 $z\longmapsto az+b$（对适当的 a，$b\in\mathbf{C}$），因此 f 是相似（需要时可参阅 9.6.4）. 对最后一点，建议读者参阅 [CH2] 第 181—182 页；其证明相当有趣，用到了本质奇点和亚纯函数的概念.

$n\geqslant 3$ 情形的证明，特别用到了下述有名的

9.5.4.9 编辫引理. 设 V，W 是特征数 $\neq 2$ 的域上的两个向量空间，k: $V\times V\times V\to W$ 是一个三重线性映射，关于前两个变量对称而关于后两个变量反对称. 则必有 $k=0$.

这个引理有时在微分几何中起关键的作用，本处即是一例，此外可参阅例如 [SB] 第 333 页和 [KO-NO1] 第 160 页. 引理之所以取这样的名称，是由于它的证明恰好类似于编一条辫子的开头六个动作：做完第六个动作，又回到了起始的情况. 但在三个位置上两股绳的交叉点在左边，在三个位置上两股绳的交叉点在右边，因此有三个负号，由此得证.

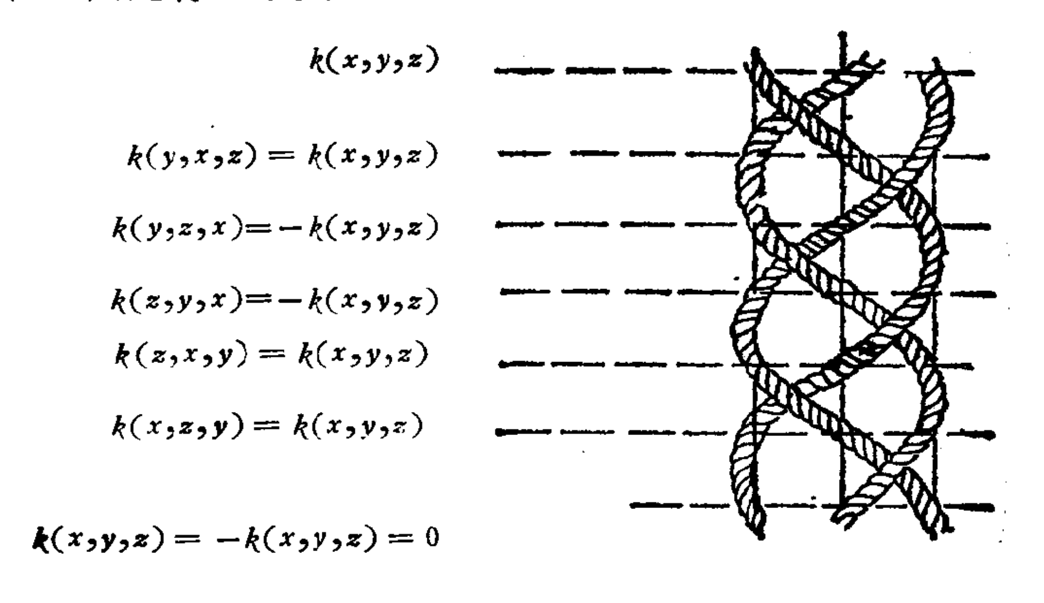


图 9.5.4.9.

9.5.4.9（续） “三重线性”的性质并非必要的，参见 1.9.15 体

会引理证明的实质.

9.5.4.10 由假设条件 $f'(x)\in \mathrm{GO}(\vec{X})$ $\forall x\in U$，因此，若把相应的相似比记为 $\mu(x)$，则有

9.5.4.11 $(f'(x)(u)|f'(x)(v))=\mu^2(x)(u|v)\ \ \forall u,v\in\vec{X}.$

设 u, v 是固定的正交向量，则有

$$(f'(x)(u)|f'(x)(v))=0\quad \forall x\in U,\ \text{微分即得}$$

$$(f''(x)(u,w)|f'(x)(v))+(f'(x)(u)|f''(x)(v,w))=0$$
$$\forall w\in\vec{X}.$$

编辫引理和关于 f'' 的对称的 Schwarz 定理表明，当 u, v, w 是 $\vec{X}$ 中正交向量组时，有 $(f''(x)(u,v)|f'(x)(w))=0$. 由于 $f'(x)(u)$, $f'(x)(v)$, $f'(x)(w)$ 相互正交，对生成平面 $\mathbf{R}u+\mathbf{R}v$ 的正交补的所有的 w 施行上述做法后，就可看出 $f''(x)(u,v)\in \mathbf{R}f'(x)u+\mathbf{R}f'(x)v$，因此存在两个函数 $\alpha,\beta:U\to\mathbf{R}$，使

9.5.4.12 $\begin{cases} f''(x)(u,v)=\alpha(x)f'(x)(u)+\beta(x)f'(x)(v)\\ \forall x\in U,\ \forall\ \text{固定正交的}\ u,\ v.\end{cases}$

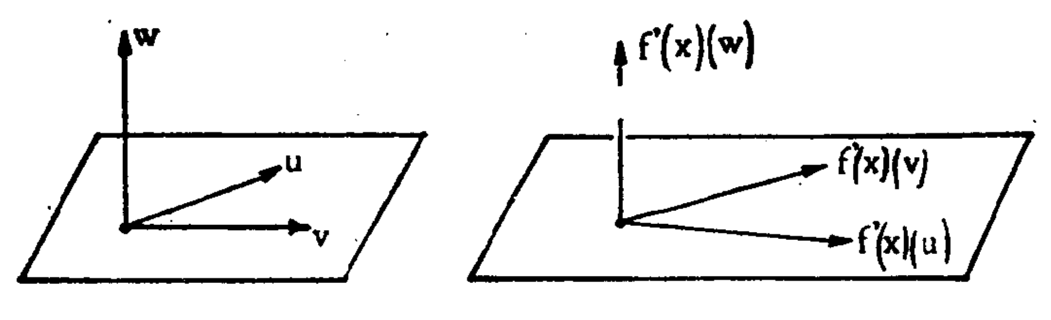


图 9.5.4.12.

微分 $\|f'(x)(u)\|^2=\mu^2(x)\|u\|^2$，就有

$$(f''(x)(u,v)|f'(x)(u))=\mu'(x)(v)\mu(x)\|u\|^2,$$

因此，代入 9.5.4.12 即得

9.5.4.13 $\alpha(x)=\dfrac{\mu'(x)(v)}{\mu(x)},\quad \beta(x)=\dfrac{\mu'(x)(u)}{\mu(x)};$

再将 9.5.4.13 代回 9.5.4.12，并令 $\rho=\mu^{-1}$，得

9.5.4.14 $\begin{cases}\rho'(x)(v)f'(x)(u)+\rho'(x)(u)f'(x)(v)\\ \qquad +\rho(x)f''(x)(u,v)=0\\ \forall x\in U,\ \forall\ \text{固定正交的}\ u,\ v.\end{cases}$

9.5.4.15 我们一鼓作气，作出 f 的三阶微分。微分 9.5.4.14 即得

$$\begin{aligned}&\rho''(x)(v,w)f'(x)(u)+\rho'(x)(v)f''(x)(u,w)\\&\quad+\rho''(x)(u,w)f'(x)(v)+\rho'(x)(u)f''(x)(v,w)\\&\quad+\rho'(x)(w)f''(x)(u,v)+\rho(x)f'''(x)(u,v,w)=0;\end{aligned}$$

可以看出，后五项之和是关于 u，w 对称的，因而第一项也应如此：

$$\rho''(x)(v,w)f'(x)(u)=\rho''(x)(v,u)f'(x)(w),$$

上式对任何正交组 u，v，w 都成立（函数 ρ 本身与 u，v 无关！）。但向量 $f'(x)(u)$ 与 $f'(x)(w)$ 线性无关，因此，由 $n\geqslant 3$ 可知对任何正交的 u，v，都有 $\rho''(x)(u,v)=0$。

根据与 8.8.5.1 类似的证明（这里无穷小相似与真正的相似一致了！）可知 $\rho''(x)$ 与欧氏度量成比例，因此存在 σ: $U\to\mathbf{R}$ 使

9.5.4.16 $\rho''(x)(u,v)=\sigma(x)(u|v)\ \forall x\in U\ \forall u,v\in\vec{X}$。其实 σ 是常数；为了说明这一点，将 9.5.4.16 微分（这是可行的，因为 f 是 C^4 的）：$\rho'''(x)(u,v,w)=\sigma'(x)(w)(u|v)$，由 ρ''' 对称可知右端项也关于 v，w 对称。因此有：$(\sigma'(x)(w)v-\sigma'(x)(v)w|u)=0$，$\forall u$，即 $\sigma'(x)(w)v=\sigma'(x)(v)w$，由此推得 $\sigma'=0$，因为 v，w 是线性无关的。

9.5.4.17 方程 $\rho''(x)(u,v)=\sigma(u|v)$（$\sigma$ 为常数）容易积分解出：

9.5.4.18 $\rho(x)=a\|\overrightarrow{x_0x}\|^2+b$，$a$，$b$ 为常数，$x_0\in X$。

若 $a=0$，则 μ 为常数，微分 9.5.4.11 即得 $f''=0$，因此 f 是仿射映射，从而是限制在 U 上的一个相似。若 $b=0$，注意到 $x_0\notin U$，而且将 f 与一个以 x_0 为极点的反演 i 复合后，所得映射 $i\circ f$ 仍是一个无穷小相似；而当合成这样的无穷小相似时，9.5.4.18 中的 ρ 因子满足 $\rho_{f\circ g}(x)=\rho_f(g(x))\rho_g(x)$。然而一个以 x_0 为极点的反演的 ρ 因子是 $\|\overrightarrow{x_0x}\|^2$（参见 10.8.5.1），因此 $i\circ f$ 的 ρ 因子是常数，$i\circ f$ 是一个限制在 U 上的真正的相似，对这种情形定理已得证。现在要证明必有 $ab=0$。注意到当 f 是 C^4 类且 $n\geqslant 3$ 时，

若 $U = X$，则 $f \in \mathrm{Sim}(X)$；事实上 $b = 0$ 的情形是可以排除的，既然 $\rho(x) \neq 0 \ \forall x \in U = X$。

9.5.4.19 设 g 是 $f: U \to f(U)$ 的逆微分同胚，则它应是无穷小相似，根据 9.5.4.17 给出的相似比合成公式，就有 $\mu_{g\circ f} = 1 = \mu_g(f(x))\mu_f(x) = 1 \ \forall x \in U$。因此，由 9.5.4.18 可知存在常数 c，d 使

9.5.4.20 $(a\|\overrightarrow{x_0x}\|^2 + b)(c\|\overrightarrow{f(x_0)f(x)}\|^2 + d) = 1 \quad \forall x \in U$.

这说明，首先，f 将包含在 U 内的以 x_0 为中心的球面部分变换成以 $f(x_0)$ 为中心的球面部分；其次，f 将 U 中支撑线经过 x_0 的一个线段变换成 $f(U)$ 中支撑线经过 $f(x_0)$ 的一个线段。若固定 $u \in \vec{X}$ 使 $\|u\| = 1$，则得到一个由下列等式定义的数值函数 φ：

$$f(x_0 + tu) = f(x_0) + \varphi(t)v,$$

其中 v 是单位向量，t 的变化区间适当选定。根据 9.5.4.11，有 $\varphi'(t) = (at^2 + b)^{-1}$ 和 $(at^2 + b)(c\varphi^2(t) + d) = 1$，而这两式仅在 a 或 b 为零时才能同时成立。

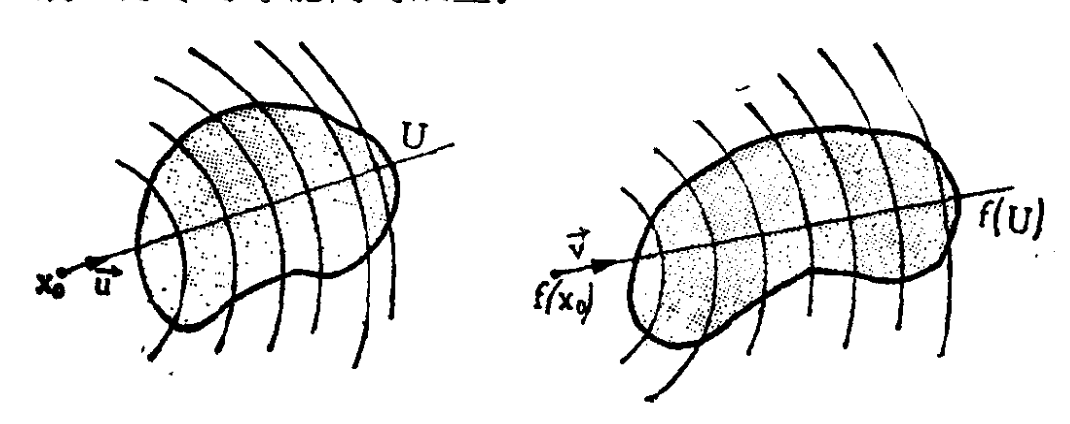


图 9.5.4.20.

9.5.4.21 附注. Liouville 的原始证明很有点特别，它用到的一些内容表面上看来都是跟定理风马牛不相及的：1）一组彼此沿曲率线相交的三重正交曲面(三维时)（Dupin 定理），2）球面的特征是所有的点都是脐点，或者说它们比通常的曲面的曲率线多得多。最后则要用到 9.5.3.2。

9.5.5 脐状超曲面，循环点与相似

本段研究与 8.8.6 相对应的仿射情形；我们利用 7.6 及其记号：若 X 是欧氏仿射空间，则 $\tilde{X}^C$ 表示其射影完备化空间 $\tilde{X}$ 的复化空间. 我们有 $\tilde{X}^C=X^C\cup\infty_{X^C}$，这里 $\infty_{X^C}=P(\vec{X}^C)$，而 $p:\vec{X}^C\to P(\vec{X}^C)$ 总表示一个向量空间到它所定义的射影空间上的投影. 根据 8.8.6 并使用第十四章的语言，可以说二次型 N^C 在 $\infty_{X^C}=P(\vec{X}^C)$ 中定义了一个二次超曲面，其像为 $\Omega=p((N^C)^{-1}(0))$；注意到 $n=2$ 时 Ω 仅含两个点，$n=3$ 时 Ω 是锥面(参见 14.1.3.7).

9.5.5.1 定义. ∞_{X^C} 的子集 Ω 称为欧氏仿射空间 X 的**脐状**超曲面. $n=3$ 时 Ω 是锥面，$n=2$ 时 Ω 仅含两点，称为 X 的**循环点**(或虚圆点)，记为 $\{I, J\}$. 给出 X 的定向等价于选定一个循环点，按 8.8.6.2 的约定记之为 I.

其实，不妨也可以把迷向直线 I, J 等同于它们在相应的射影空间里所给出的那两个点. 现将 8.8.6.4 和 5.2.2 结合在一起，就得出：

9.5.5.2 命题. 为使 $f\in GA(X)$ 是相似，必须而且只须 $\tilde{f}^C(\Omega)=\Omega$. $n=2$ 时，视 $\tilde{f}^C$ 使循环点各各不动或两相交换，而还有 $f\in \mathrm{Sim}^+(X)$ 或 $f\in \mathrm{Sim}^-(X)$.

9.5.5.3 例. X 中两条直线 D, D' 的正交性可以表述为：

$$D\perp D'\Longleftrightarrow[\infty_{D^C}, \infty_{D^{C'}}, I, J]=-1,$$

因为在调和分割的情形下并不会产生什么混淆(参见 8.8.7.4).

9.6 平面相似

本节中，X 表示定向欧氏仿射平面.

若 X 并无定向而又确有需要，则我们先将 X 定向. 本节尽量选用可以作出图形的初等的例子；另有一些例子及其图形出现在练习中. 前面五小段是平面相似的经典性质和记号的概述.

9.6.1 结构. 每个 $f\in \mathrm{Sim}^+(X)$ 都属下列类型之一：f 是平移，或具有唯一的不动点 ω 即其中心，或是一个旋转与一个以 ω 为中心的位似的可交换积. 每个 $f\in \mathrm{Sim}^-(X)$ 都属下列类型之一：$f\in$

$\mathrm{Is}^-(X)$ 是平移对称，或 $f\in \mathrm{Sim}^-(X)\setminus \mathrm{Is}^-(X)$ 具有唯一的不动点 ω，或 f 是一个关于过 ω 的直线的对称与一个以 ω 为中心的位似的可交换积。

这一结构可从 9.3.4 和 9.5.2 看出。

9.6.2 单可迁性. 设 a, b, a', b' 是 X 中满足 $a\neq b$, $a'\neq b'$ 的任意四点，则存在 $\mathrm{Sim}^+(X)$ 中唯一的 f 使 $f(a)=a'$, $f(b)=b'$.

通过一个适当的位似变换，可化成等距：$ab=a'b'$ 的情形，然后可应用 9.1.6。

给定 a, b, a', b' 后，我们要在几何上作出这个唯一的 f 的中心 ω；做法是取交点 $e=\langle a, b\rangle\cap\langle a', b'\rangle$，分别画出过 a, a', e 和过 b, b', e 的两个圆；则两圆交点之一就是 ω（另一交点是 e，两圆相切时 e 与 ω 重合）。这种做法可由 9.5.3.1 和 10.9.4 得到说明，也可参阅 9.14.14。

9.6.3 正向相似的角. 该角就是 $f\in \mathrm{Sim}^{-1}(X)$ 在 8.8.3 的分解下所相应的那个旋转在 $\mathfrak{A}(\vec{X})$ 中的转角. 设该角为 α，则特别有：对任一定向直线 Δ，$\widehat{\Delta f(\Delta)}=\alpha$.

9.6.4 平面相似与复数. 先要提醒注意的是 8.3.12 和 8.8.4 所相应的仿射概念. 设 X 是定向欧氏仿射平面；则 X 有一个自然的复仿射直线结构.

在这个自然结构下，就有 $GA(X)=\mathrm{Sim}^+(X)$，在 X 的复仿射

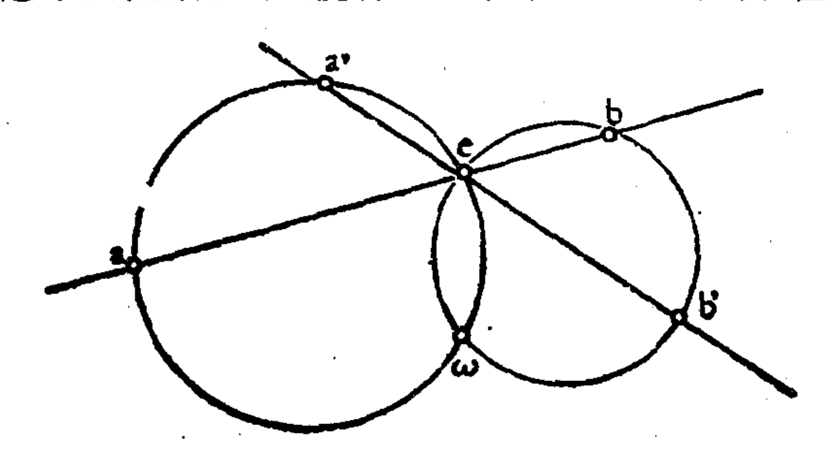


图 9.6.4.

空间的任一标架相应的坐标系下，每个 $f\in \mathrm{Sim}^+(X)$ 都形如 $z\longmapsto az+b$ 而每个 $f\in \mathrm{Sim}^-(X)$ 都形如 $z\longmapsto a\bar{z}+b$。于是 $f\in \mathrm{Sim}^+(X)$ 的角（参见 9.6.3）就是复数 a 的辐角（参见 8.7.8.4），而它的模就是 a 的模 $|a|$。

有了 $z\to az+b$ 的写法，$\mathrm{Sim}^+(X)$ 上的单可迁性以及具体的计算都成为很容易的了。

9.6.5 四点的交比. 由于 X 自然地是一条复仿射直线 $\underline{X}$，它就有一个射影完备化空间 $\tilde{X}$，那是一条复射影直线 $\tilde{X}=\underline{X}\cup\infty\underline{X}$（参见 5.1.3）. 注意不要将 $\tilde{X}$ 跟 9.5.5 中引进的 $\tilde{X}^C$ 混淆起来. 一个是复射影平面，而另一个是复射影直线；一个有一条无穷远直线，而另一个只有一个无穷远点. 作为定义，X 中四点的交比就是它们在 $\tilde{X}$ 中的交比，也即在 $\mathbf{C}\cup\infty$ 中的交比，尤其当这四点各不相同时就是在 $\mathbf{C}$ 中的交比. 这个复数交比与 X 的欧氏结构之间的联系是很有趣的：

9.6.5.1 命题. 若 $z=[a,b,c,d]$，其中 $a,b,c,d\in X$，则 z 的模由下述距离之比决定：$|z|=\dfrac{ac}{bc}\Big/\dfrac{ad}{bd}$，$z$ 的辐角则由下述定向角之差决定：

$$\arg(z)=\widehat{\overrightarrow{ca},\overrightarrow{cb}}-\widehat{\overrightarrow{da},\overrightarrow{db}}\ (\text{在 }\tilde{\mathfrak{A}}(\vec{X})\text{ 中}).$$

9.6.5.2 上面的结论有不少很简单很初等的推论，对此我们不想详加说明，而仅将就其中两点略作考察. 第一是对调和四边形，即 X 上使 $[a,b,c,d]=-1$ 的四点的讨论，请参阅 9.14.15. 第二是说明 $z=[a,b,c,d]$ 是实数的充要条件是其辐角为 0 或 ϖ，因此根据 8.7.7，这充要条件就是在 $\tilde{\mathfrak{A}}(\vec{X})$ 中 $\widehat{\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle}=\widehat{\langle d,a\rangle,\langle d,b\rangle}$；而我们又将看到这正是 a,b,c,d 共圆或共线的条件. 由此，比如说可以说明 $\underline{\tilde{X}}$ 的射影变换 $z\longmapsto\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将圆变成圆（或直线）；事实上我们在第 20 章中会看到这个结论以更一般的形式出现，请参阅 18.10.4 和 20.6.

9.6.6 一种初等作图. 求作一个过定点 x 并与两条定直线 D, D' 相切的圆. $D \| D'$ 的情形留给读者;现令 $a = D \cap D'$, 在 D, D' 和 x 所决定的凸形内任作与 D, D' 相切的圆 C. 我们的想法是找出以 a 为中心的位似, 使之作用在 C 上后给出一个过 x 点的圆. 根据这一想法,即可如图 9.6.6 所示完成作图.

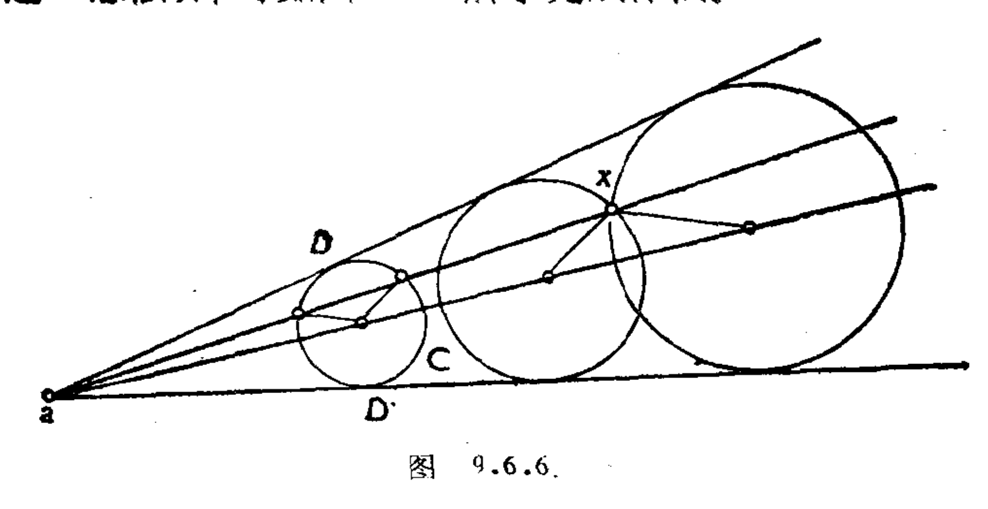


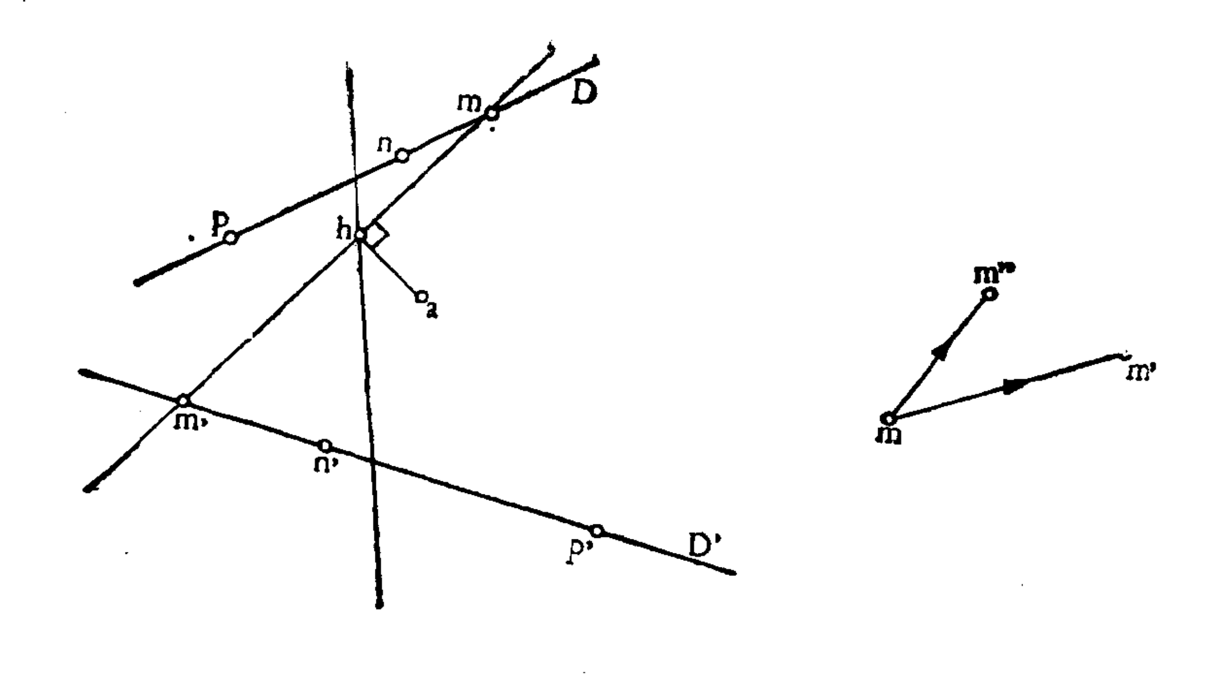
图 9.6.6.

9.6.7 相似形原理. 讨论这一原理, 旨在求解下述问题: "设 D, D' 是 X 中两条相异直线, m, m' 分别是 D, D' 上两点, 并以成比例的速度各自在直线上运动. 直线 mm' 的包络是什么?"

9.6.7.1 设 f 是正向相似且使 $f(m) = m'$, $f(n) = n'$, 其中 m, n 是直线 D 上两点, m', n' 是 D' 上按运动规律相应的两点(参见 9.6.2); 则若 p, p' 是 m, m' 在 D, D' 上作直线运动的任一时刻所处的位置, 必有 $f(p) = p'$, 因为运动速度成比例和 $f \in \mathrm{Sim}^+(X)$ 两者都等价于 $\dfrac{\overrightarrow{m'p'}}{\overrightarrow{m'n'}} = \dfrac{\overrightarrow{mp}}{\overrightarrow{mn}}$ (参见 2.4.6). 我们所需要的原理就是: "凡与点对 m, m' 正向相似关连的点必定也画出一条直线." 实际上也是这样:

9.6.7.2 原理. 设 f 是 X 的正向相似, m'' 是与点对 $(m, m' = f(m))$ 正向相似关连的一点,即有一相似 $\vec{g} \in \mathrm{GO}^+(\vec{X})$ 使 $\overrightarrow{mm''} = \vec{g}(\overrightarrow{mm'})$ $\forall m \in X$, 则 $m \longmapsto m''$ 是正向相似. 特别若 m 画出直线、圆等等,则 m'' 也画出直线、圆等等.

任取标架应用 9.6.4; 就有 $f(z) = az + b$, $\vec{g}(\vec{u}) = c\vec{u}$, 其中



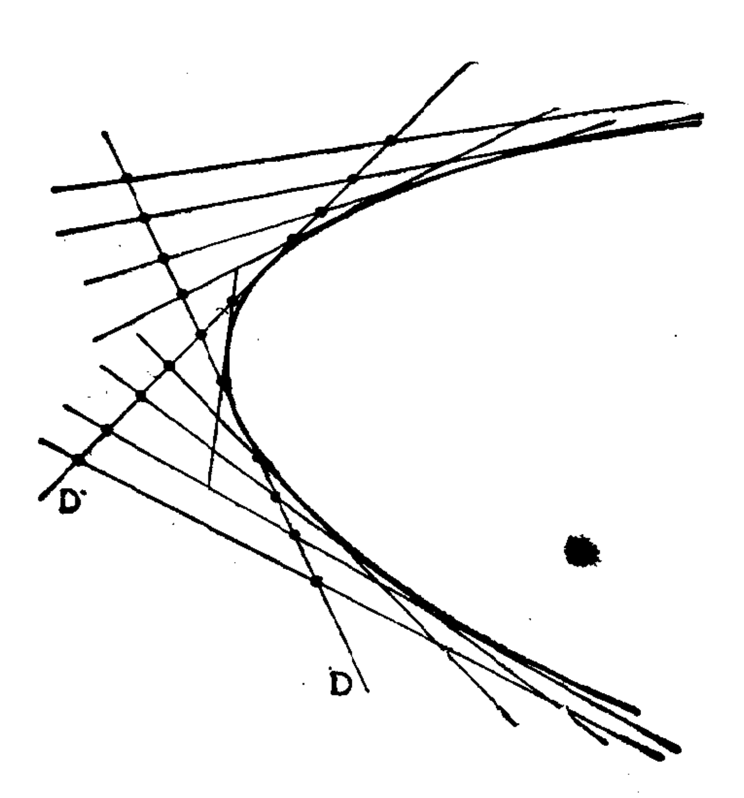


图 9.6.7.

$a, b, c \in \mathbf{C}$. 因此

$$m'' = m + mn'' = z + c(f(z) - z) = z + c(az + b - z)$$
$$= (ac - c + 1)z + bc,$$

而 $z \longmapsto (ac - c + 1)z + bc$ 显然是一个正向相似。

如果回到开始提出的问题，我们可以看到，从 a 向直线 $\langle m, m'\rangle$ 引出的垂线的垂足 h 是与 (m, m') 正向相似关连的，因为 a 就是相似 $m \longmapsto m'$ 的中心；因此 h 画出一条直线 E，而直线 $\langle m, m'\rangle$ 包络出一条以 a 为焦点并以 E 为顶点处切线的抛物线：参见 17.2.2.6。

关于原理 9.6.7.2 的其它应用，参见 10.13.18。

9.6.8 两个圆的双重垂足轨迹. 一条曲线 C 关于 a 点的垂足轨迹，是指使存在一条过 m 并与直线 $\langle a, m\rangle$ 正交的切线的 $m \in X$ 的集合；两条曲线 C，C' 的双重垂足轨迹，则是满足下列条件的 $m \in X$ 的集合：分别存在 C 的切线和 C' 的切线，它们都过 m 并且相互正交。

一个圆的垂足轨迹称为 Pascal 蚶线，它在别的场合也会遇到，其中有个原因就在于它是一条性质较简单的四次曲线(重圆点四次线)。图 9.6.8.1 列出了这类曲线的几种可能的情形，有尖点的那种情形称为心脏线，倘若读者对它感兴趣，还可以在 9.14.33 中找到它。也可参阅 9.14.22。 关于在二重点处的切线夹成 120° 角的 Pascal 蚶线，请参阅 [DQ] 第 169 页练习 77。

关于两条曲线的双重垂足轨迹，容易看出若两条曲线都是 C^1 类的正则闭曲线，则它们的双重垂足轨迹自然地分解成两条曲线 π 和 π'，它们分别由交于 m 的两条切线在 C，C' 的固定定向下的诱导定向而定。但这样分成两条曲线的分解，一般地说并不是双重垂足轨迹的真正的代数分解。下面将会看到，当 C 和 C' 都是圆时，存在一个真正的分解，在那种情形下我们要证明 π，π' 分别是两个圆关于相应的点的垂足轨迹。

9.6.8.1 两圆 C，C' 同心的情形是显而易见的，因此假定它们不同心。首先注意到恰好存在两个正向相似 f_1，f_2 使 $f_i(C) = C'(i = 1, 2)$ 且这两个相似的角都是直角(参见 8.7.3.5 和 9.6.3)；其实只要取 $m \in C$ 而 m_1'，$m_2' \in C'$ 对径并使得 a 和 a' 是 C，C' 的中心，则有 $am \perp a'm_1'$，把使 $f_i(a) = a'$ 和 $f_i(m) = m_i'$ $(i = 1, 2)$ 的正向相似记为 f_1，f_2 即可，根据 9.6.2，这两个相似确实存在

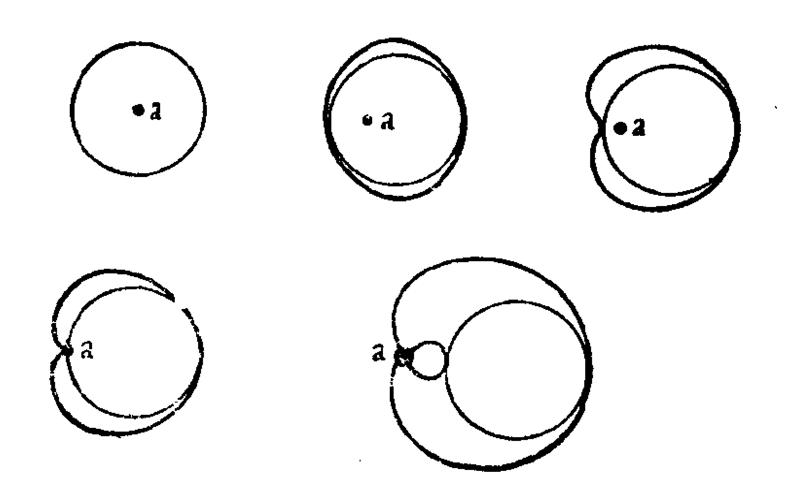


图 9.6.8.1.

并且是定义好的.

我们有 $f_i(C)=C'$，因为 $f_i(C)$ 是以 $f(a)=a'$ 为中心且半径等于 C' 的半径的圆,从而就是 C' 本身. 分别记 C, C' 在 m, m_1' 的切线为 $D=T_mC$, $D'=T_{m_1}C'$, 记 $x=D\cap D'$, 记 h 为 f_1 的中心 ω_1 在 D 上的投影. 我们要来应用下述显见的引理:

9.6.8.2 引理. 设 $\{a, b, c\}$, $\{a', b', c'\}$ 是两个直角三角形,即 $\langle a, b\rangle\perp\langle a, c\rangle$, $\langle a', b'\rangle\perp\langle a', c'\rangle$. 若要存在正向相似 f 使 $f(a)=a'$, $f(b)=b'$, $f(c)=c'$, 必须且只须在 $\mathfrak{A}(\vec{X})$ 上有等式 $\widehat{\langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle}=\widehat{\langle b', a'\rangle, \langle b', c'\rangle}$. 而且 f 由这一共同的定向角所确定.

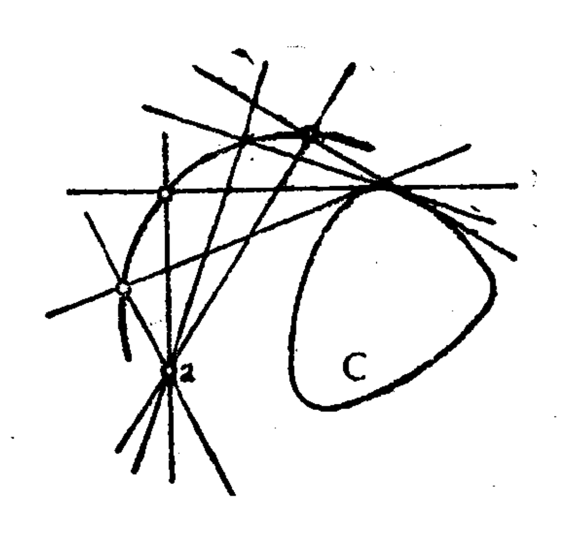


图 9.6.8.2.

9.6.8.3 由引理可知，角 $\widehat{\langle m_1', \omega_1\rangle, \langle m_1', m\rangle}$ 由 $\vec{f}_1$ 所确定，这是一个与 C，C' 以及 f_1 的选取无关的 $\alpha\in\mathfrak{A}(\vec{X})$。根据 10.9.5，有 $\alpha=\widehat{\langle m_1', \omega_1\rangle, \langle m_1', m\rangle}=\widehat{\langle xm, x\omega_1\rangle}$，因为由

$$\widehat{\langle \omega_1, m\rangle, \langle \omega_1, m_1'\rangle}=\widehat{\langle x, m\rangle, \langle x, m_1'\rangle}=\delta$$

（参见 8.7.7.4 和 10.9.5）可知 ω_1，m，m_1'，x 是四点共圆的。因此 $\widehat{\langle x, h\rangle, \langle x, \omega_1\rangle}=\alpha$；由引理又可知 x 是 h 经由一个固定的相似 g_1 而得到的。由于 h 画出 C 关于 ω_1 的垂足轨迹，所以 x 画出 $g_1(\pi_1)$；结果，C 和 C' 的双重垂足轨迹就由 $g_1(\pi_1)$ 和类似的另一曲线 $g_2(\pi_2)$ 组成。

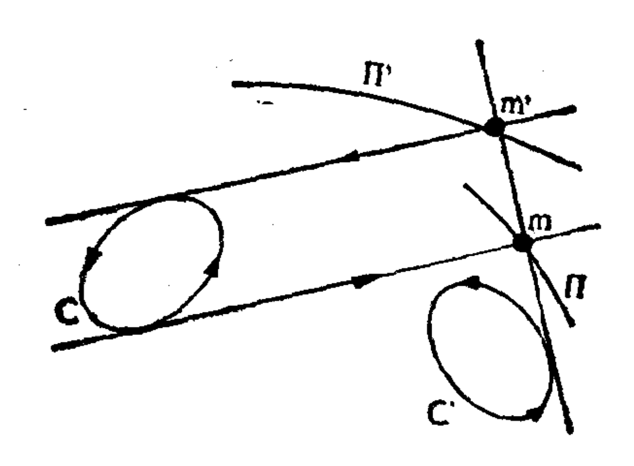


图 9.6.8.3.

9.6.9 “EADEM MUTATA RESURGO”。这里要说的是有关对数螺线的一个现象，它曾经使 Jacob Bernouilli 赞叹不已，以致最后让人把这种螺线和上面那句话一起刻到了他的墓碑上（现存巴塞尔大教堂，见 9.14.32）：从一个对数螺线出发，通过适当的相似变换总能使之整体不变。这一现象很容易用 $\mathrm{Sim}^+_\omega(X)$($\omega\in X$ 给定)或 $\mathrm{Sim}^+(\vec{X})$ 含有非平凡子群的事实来加以说明。

9.6.9.1 对固定的 $k\in\mathbf{R}^*_+$ 和 $\omega\in X$，引进

$$G=\{f(t)=H_{\omega,k^t}\circ\underline{\Theta}^{-1}(\Lambda(t));\ t\in\mathbf{R}\}\subset\mathrm{Sim}^+_\omega(X),$$

其中 $H_{\omega,kt}$ 是以 ω 为中心、以 kt 为比值的位似，$\underline{\Theta}^{-1}(\Lambda(t))$ 表示以 ω 为中心、以 $\Lambda(t)$ 为转角的旋转．我们看到，G 是 $\mathrm{Sim}_{\omega}^{+}(X)$ 的一个子群，一个同胚（同构）于加法群 $\mathbf{R}$ 的单参数子群．对某个适当的 k，称 G 的一条异于 $\{\omega\}$ 的轨道为以 ω 为极点的对数螺线．

由定义可知，一条这样的对数螺线是在 G 下稳定的．对数螺线在任何相似变换下的像仍是对数螺线．对数螺线在前述“与 ω

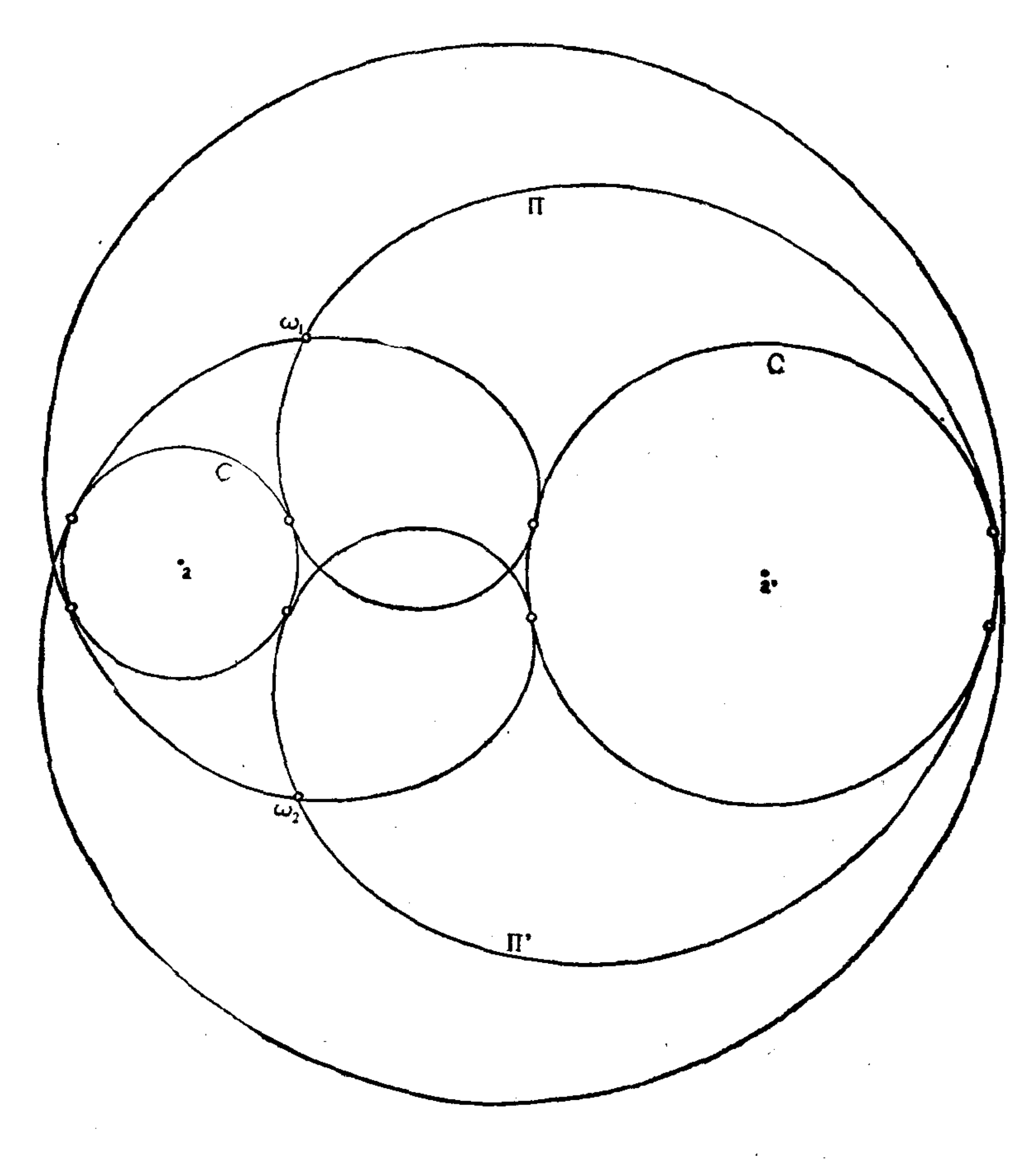


图 9.6.8.4.

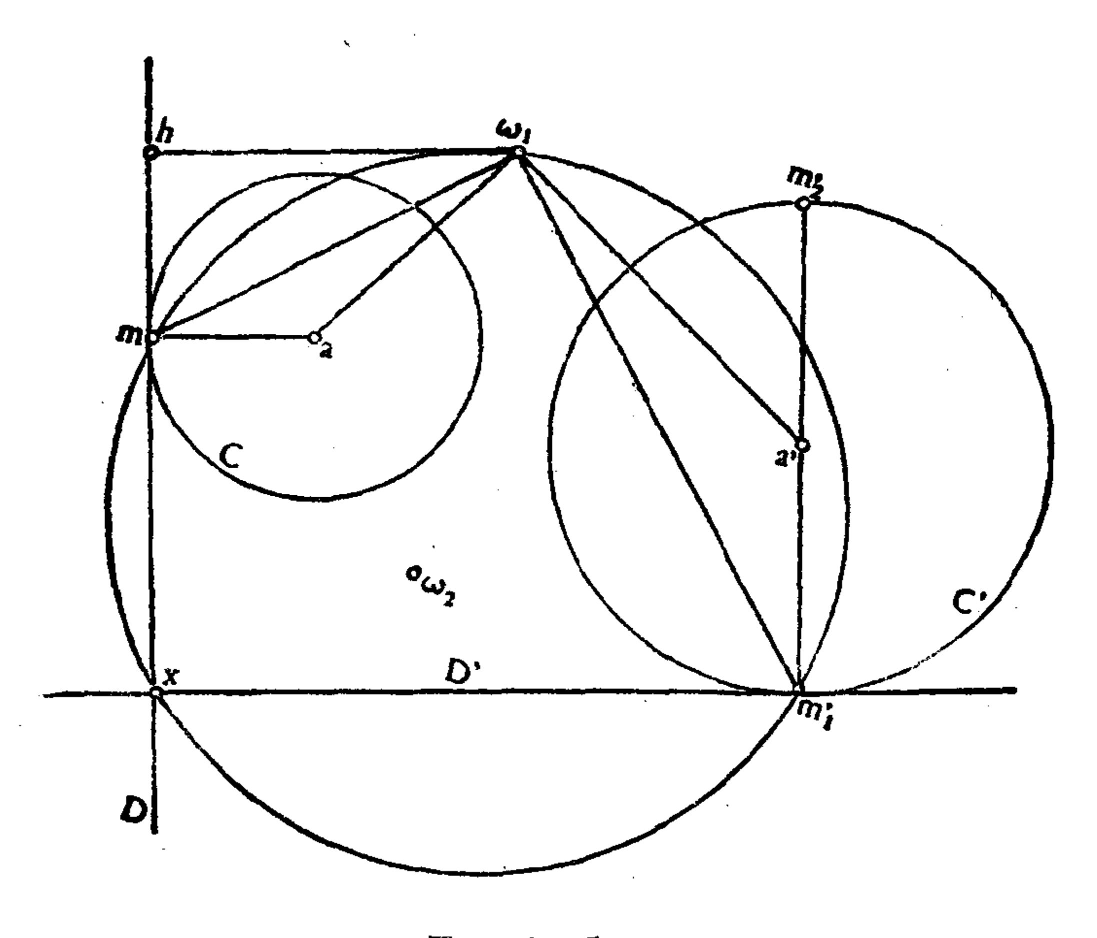


图 9.6.8.5.

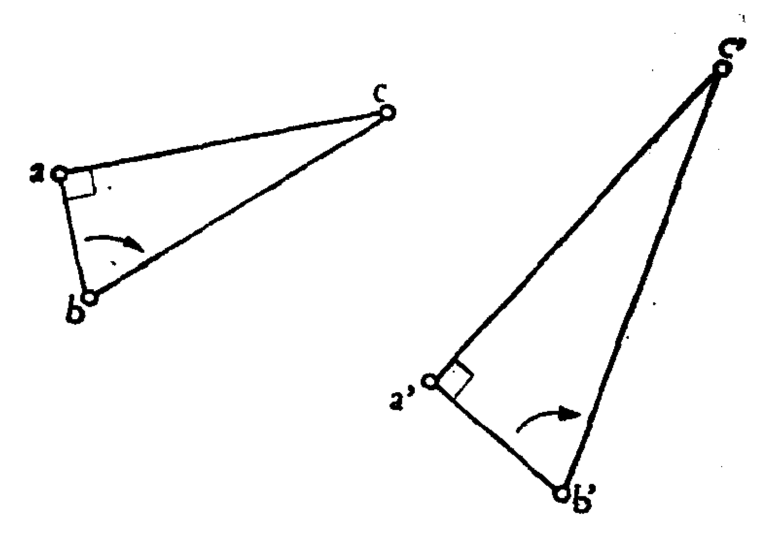


图 9.6.8.6.

正向相似关连"的做法下所导出的曲线也仍是对数螺线．例如，应用 9.6.8.2 即可看出，如果对数螺线 C 在 m 的切线 T_mC 跟直线 $\langle m, \omega\rangle$ 交成定角 $\widehat{\langle m, \omega\rangle, T_mC} \in \mathfrak{A}(\vec{X})$，则 C 关于中心 ω 的垂足轨迹仍是对数螺线． 这一点可证明如下：由定义 G 在 C 上可迁，

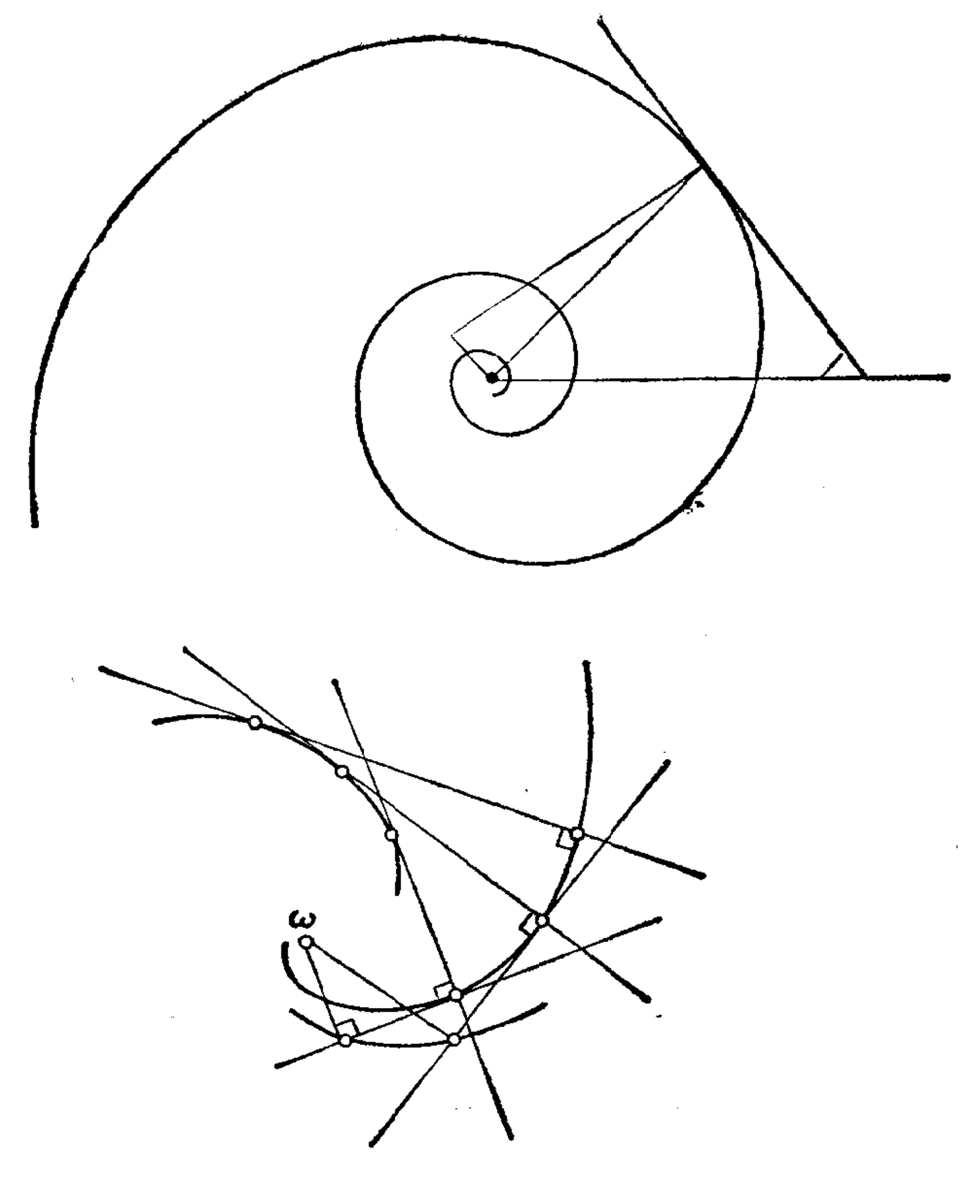


图 9.6.9.1.

故存在 $f\in G$ 使 $f(m)=n$ $\forall m, n\in C$；特别有

$$\widehat{\langle m,\omega\rangle, T_mC}=\widehat{\langle f(m), f(\omega)\rangle, f(T_mC)}=\widehat{\langle n,\omega\rangle, T_nC}.$$

它的逆命题以及对数螺线的其它性质，除了 Bernouilli 的墓碑以外还可参阅 9.14.21. 关于大自然中可遇的其它对数螺线，请参阅 [WL] 第 69—72 页.

9.7 几个点之间的距离

9.7.1 命题. 设 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,n}$ 是 X 的仿射标架；若两点 x，$y\in X$

满足 $x_ix = x_iy$ $\forall i = 0, 1, \cdots, n$，则 $x = y$．设 k 是任一整数，(x_i)，$(y_i)(i = 1, \cdots, k)$ 是 X 的两个子集并使 $x_ix_j = y_iy_j$ $\forall i, j$；则存在 $f \in \mathrm{Is}(X)$ 使 $f(x_i) = y_i$ $\forall i$。

将 X 在 x_0 处向量化，则 8.1.2.4 表明有内积等式 $(x_i|x) = (x_i|y)$ $\forall i$．而线性形式 $(x_i|\cdot)$ $(i = 1, \cdots, n)$ 是线性无关的，因为 (x_i) 是仿射标架，因此 $x = y$．

上段说明对第二个结论仅须就 $k \leqslant n + 1$ 以及子集 (x_i)，(y_i) 仿射无关的情形进行证明，甚至还不妨就假定 $k = n + 1$，这是因为 X 的两个子空间之间的等距 $f \in \mathrm{Is}(Y, Y')$ 总可平凡地扩充为 $\tilde{f} \in \mathrm{Is}(X)$ 而使 $\tilde{f}|_Y = f$．下面对 $n = k - 1$ 用归纳法；$n = 1$ 时，用 9.1.6 即可(或者也可从显然的情形 $n = 0$ 出发)．假定结论已对 n 成立，引进由所给子集生成的子空间：$Y = \langle x_0, x_1, \cdots, x_n\rangle$，$Y' = \langle y_0, y_1, \cdots, y_n\rangle$；存在 $g \in \mathrm{Is}(X)$ 使 $g(Y') = Y$．对 Y 的两个 n 维子集 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,n}$ 和 $(g(y_i))_{i=0,1,\cdots,n}$ 应用归纳假设，则可看出仅需对满足 $x_i = y_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 的 (x_i)，(y_i) 证明命题即可．将 X 在 x_0 处向量化，8.1.2.4 又表明

$$(x_i|x_{n+1}) = (x_i|y_{n+1}) \quad \forall i = 1, \cdots, n,$$

因此 x_{n+1}，y_{n+1} 属于 X 的同一条正交于 Y 的仿射直线 D．但

$$x_0x_{n+1} = x_0y_{n+1},$$

因此 9.2.3 表明 $d(x_{n+1}, Y) = d(y_{n+1}, Y)$，由此即得：或者 $x_{n+1} = y_{n+1}$，或者 $y_{n+1} = \sigma_Y(x_{n+1})$．

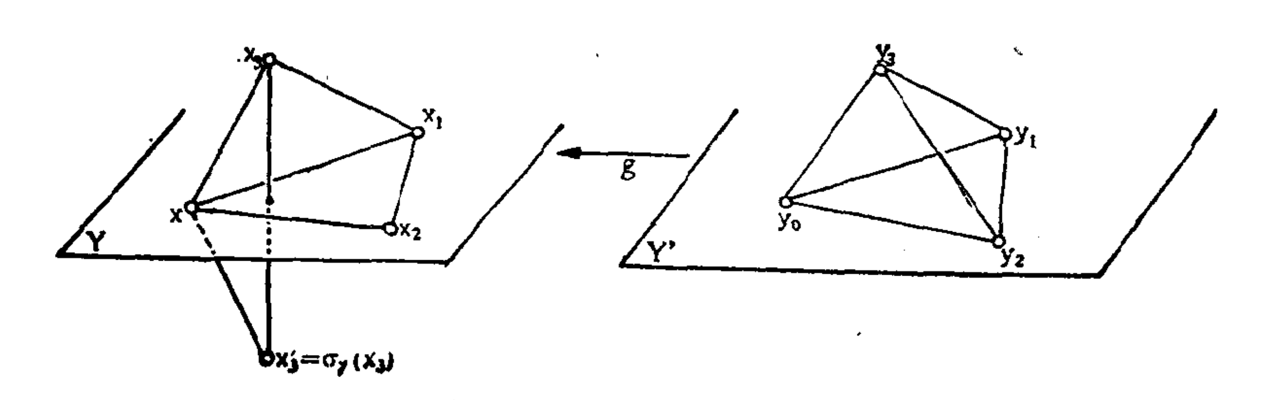


图 9.7.1.

9.7.2 注．命题 9.7.1 表明了 $d_{ij}=x_ix_j$ 给定后子集 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,k}$ 的唯一性(至多相差一个等距)．存在性问题将在 9.7.3.4 中解决．

9.7.3 $n-1$ 维空间中 $n+1$ 个点之间距离的关系

9.7.3.1 很自然地会这样猜想：$n-1$ 维空间 X 中 $n+1$ 个点 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,n}$ 的距离 $d_{ij}=x_ix_j$ 之间有一个统一的关系式．$n=1$ 时，由于三点中必有一点位于另两点之间，乘积 $(d_{01}+d_{02}-d_{12})(d_{01}+d_{12}-d_{02})(d_{02}+d_{12}-d_{01})$ 就应为零．在任意 n 维的情形，9.7.1 的证明过程表明，比如说在 2 维时若 x_0, x_1, x_2 以及 d_{13}, d_{23} 都已给定，则 x_3 只存在两种选择可能，而且它们是关于直线 $\langle x_1, x_2\rangle$ 对称的．由此我们就可以设想存在一个统一的关系式．下面就要找出这个关系式；思路是设法在 $n+1$ 维空间中将 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,n}$ 生成的平行六面体的体积表示成距离 $d_{ij}=x_ix_j$ 的函数．若 x_i 是在一个 n 维空间中，则该体积为 0，这就是我们要找的关系式．而为了能做到这一点，由 8.11.5 和 8.11.6 可知，只要把 X 在 x_0 处向量化并在

$$(x_i|x_j)=\frac{1}{2}(d_{0i}+d_{0j}-d_{ij})$$

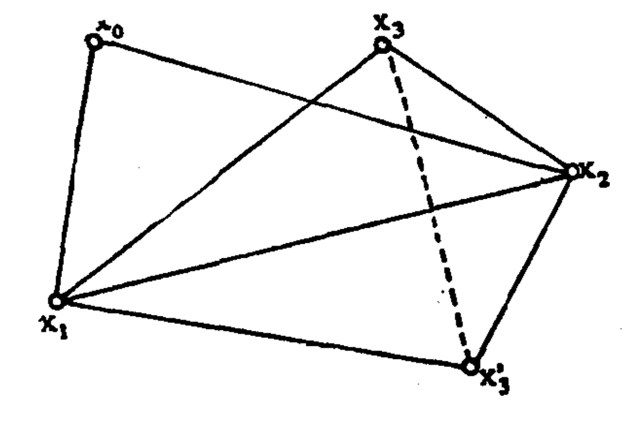


图 9.7.3.

的形式下再用一次等式 8.1.2.4 就行了；由此得出所需的关系式为

$$\begin{vmatrix} d_{01}^2 \cdots\cdots\cdots \frac{1}{2}(d_{01}^2+d_{0n}^2-d_{1n}^2) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \frac{1}{2}(d_{10}^2+d_{n0}^2-d_{1n}^2) \cdots\cdots\cdots d_{0n}^2 \end{vmatrix}=0.$$

严格的证明则要将 X 嵌入一个 $n+1$ 维的 X'，然后，比如说可对 x_0 处的向量化空间 X' 应用 8.11.8(ii) 和 (v)．

关系式 9.7.3.1 的不便之处是关于所有指标并不对称，指标 0 在其中起着特殊的作用．定义 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,k}$ 的 Cayley-Menger 行

列式如下：

9.7.3.2
$$\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_k)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & \cdots & d_{0k}^2 \\ 1 & d_{10}^2 & 0 & \cdots & d_{1k}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & d_{k0}^2 & d_{k1}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

9.7.3.3 引理. 我们有(参见 8.11.5)：

$$\operatorname{Gram}(\overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k}) = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_k).$$

引理的证明可由 8.2.2，8.11.6 经计算得出；任取标准正交标架，将该标架下的 x_i 坐标记为 x_i^j. 于是，通过经典的行列式变换，依次得

$$\lambda_E(\overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k})=\begin{vmatrix} x_1^1-x_0^1 & \cdots & x_1^k-x_0^k \\ \vdots & & \vdots \\ x_k^1-x_0^1 & \cdots & x_k^k-x_0^k \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_0^1 \cdots x_0^k & 1 \\ x_1^1 \cdots x_1^k & 1 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ x_k^1 \cdots x_k^k & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_0^1 \cdots x_0^k & 1 & 0 \\ x_1^1 \cdots x_1^k & 1 & 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k^1 \cdots x_k^k & 1 & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

在最后的那个行列式D上乘以另一个行列式，即在D中对换最后两行和最后两列所得的行列式的转置行列式，就可得出：

$$\lambda_E^2(\overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k})=-\begin{vmatrix} (x_0|x_0) & (x_0|x_1) \cdots (x_0|x_k) & 1 \\ (x_1|x_0) & (x_1|x_1) \cdots (x_1|x_k) & 1 \\ \vdots & \vdots \quad\quad\quad \vdots & \vdots \\ (x_k|x_0) & (x_k|x_1) \cdots (x_k|x_k) & 1 \\ 1 & 1 \quad \cdots \quad 1 & 0 \end{vmatrix},$$

其中向量计算都是在所选标架中进行的. 以 $\frac{1}{2}(\|x_i\|^2+\|x_j\|^2-$

d_{ij}^2) 代替 $(x_i|x_j)$，并适当地通过先减去最后一列的倍数再减去最后一行的倍数，来消去所有的 $\|x_i\|^2$；这样就得到了

$$\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_k).$$

9.7.3.4 定理. 对 $n-1$ 维空间 X 中任意的 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,n}$，总有 $\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_n)=0$；$(x_i)_{i=0,1,\cdots,n-1}$ 成为 X 中单形的充要条件是 $\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})\neq 0$. 给定 $\frac{k(k+1)}{2}$ 个实数 $d_{ij}(i, j=0, 1, \cdots, k)$ 后，存在一个欧氏空间中的单形 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,k}$ 使 $d_{ij}=x_ix_j$ 的充要条件如下：对任何 $h=2, \cdots, k$ 以及 $\{0, 1, \cdots, k\}$ 中任何 h 个元素所组成的指标子集，相应的 Cayley-Menger 行列式恒不为零而且符号为 $(-1)^{k+1}$.

前两个结论可由 8.11.6 及 9.7.6.6 推出；最后一个结论的证明是对 k 用归纳法. $k=1$ 时是显然的. 根据归纳假设，可以先在一个 $k-2$ 维的 Z 中构造单形 $(x_i)_{i=2,\cdots,k}$ 使 $x_ix_j=d_{ij}$ $(i, j=2, \cdots, k)$，而后在 $k-1$ 维的 $Y\supset Z$ 中找出两点 x_0' 和 x_1，它们位于 $Y\setminus Z$ 中且使 $x_1x_i=d_{1i}$，$x_0'x_i=d_{0i}$ $\forall i=2, \cdots, k$. 把 x_0' 到 Z 上的投影记为 h，将 Y 作为超平面嵌入 k 维的 X 中，又设 X 中包含 h 并正交于 Z、余维数为 2 的子空间为 W；过 x 画出以 W 上的 h 为中心、过 x_0' 的圆 C. 该圆与 Y 还相交于 x_0''，而当 x 画出 C 时，距离 xx_1 画出区间 $[x_1x_0', x_1x_0'']$.

现在把 9.7.3.2 中的距离 d_{01}^2 换成一个任意实数 ξ，其它的 d_{ij} 保留不动；容易看出这样得出的行列式 $\Gamma(\xi)$ 必形如 $\Gamma(\xi)=-\xi^2\Gamma(x_2, \cdots, x_k)+\alpha\xi+\beta$，其中 $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$. 考察 $\xi\in\mathbf{R}_+$ 变化时 $\Gamma(\xi)$ 怎样变化；上式是 ξ 的二次三项式，根据假设 ξ^2 项系数的符号是 $(-1)^{k-1}$. 另一方面，根据定理的第一部分，当 ξ 取两个不同的值 $\xi'=x_1x_0'$ 和 $\xi''=x_1x_0''$ 时上式为零；因此当 $\xi\in[x_1x_0', x_1x_0'']$ 时它的符号都是 $(-1)^{k-1}$. 但 $\Gamma(d_{01})$ 不为零，且由假设其符号为 $(-1)^{k+1}=(-1)^{k-1}$，因此存在一点 $x_0\in C\setminus\{x_0', x_0''\}$ 使 $x_0x_1=d_{01}$.

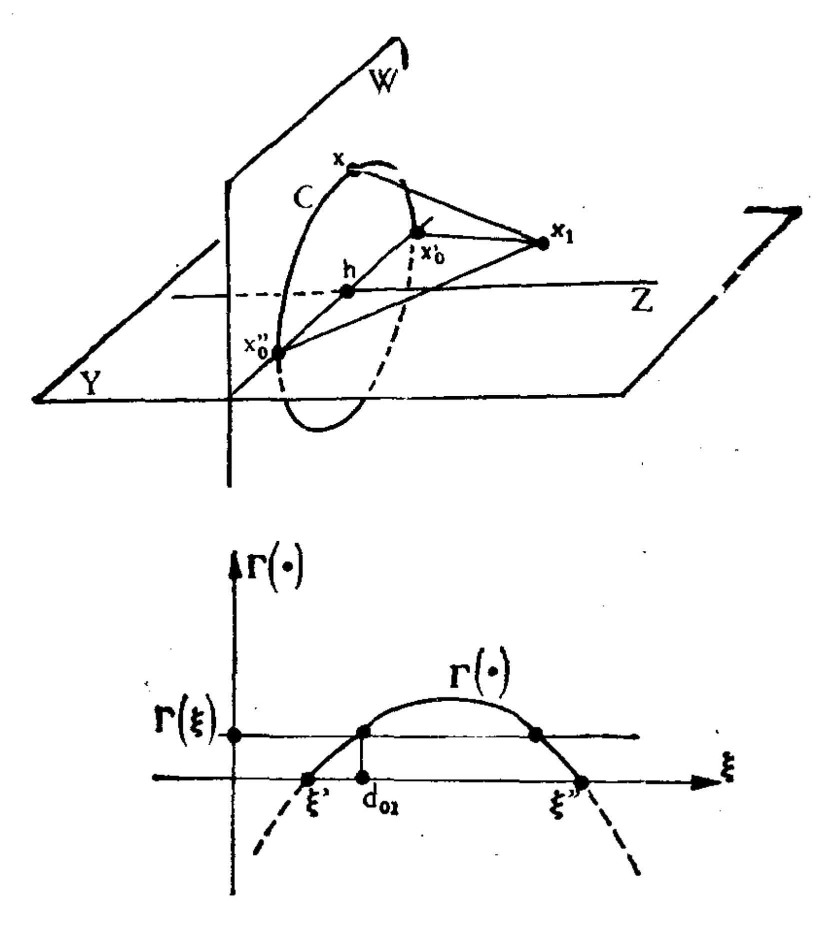


图 9.7.3.4.

9.7.3.5 读者也许已经看出 9.7.3.4 的证明中有两点值得注意的地方;第一是假设条件并没有全部用到,尤其是当我们预先知道这些 x_i 存在并且构成一个单形时,它的任一子集必然也是单形.换句话说,我们不妨设想 Γ 满足下述纯代数的性质: 若 $\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_k)\neq 0$ 而且符号为 $(-1)^{k+1}$,则自然就可推出 Γ 作用在任一子集上不为零而且有适当的符号.情况也确实如此,请参阅 9.14.23;由此可知 9.7.3.4 中的一个充分条件是以 $d_{ij}(i, j=0, \cdots, k)$ 为项的这一个行列式 $\neq 0$ 而且符号为 $(-1)^{k+1}$.

第二点是,倘若并非讨论单形,则 9.7.3.4 并没有回答 9.7.2 的问题;一般情形的解答并不见得更难些,只不过是稍长一些.这一解答将在 9.14.23 中给出. 最后,[BL] 第 105—106 页中对问题给出了一种不同的提法,可资参考.

利用行列式 Γ 还可以研究 n 维空间 X 中 $n+2$ 个点的共球性(参见 9.7.5)以及计算一个单形的外接球面的半径. 定义另一个

行列式Δ如下:

9.7.3.6

$$\Delta(x_1,\cdots,x_k)=\begin{vmatrix}0 & d_{12}^2 & \cdots d_{1k}^2\\ d_{21}^2 & 0 & \cdots d_{2k}^2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ d_{k1}^2 & d_{k2}^2 & \cdots 0\end{vmatrix}.$$

9.7.3.7 命题. 若$(x_i)_{i=1,\cdots,n}$构成$n-1$维空间X中的单形，则该单形的外接球面的半径R适合下式:

$$R^2=-\frac{1}{2}\frac{\Delta(x_1,\cdots,x_n)}{\Gamma(x_1,\cdots,x_n)};$$

特别是对单形来说 $\Delta(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$.

n 维空间X中$n+2$个点 $(x_i)_{i=1,\cdots,n+2}$ 属于同一球面或同一超平面的充要条件是

$$\Delta(x_1,\cdots,x_{n+2})=0.$$

通过简单的行列式运算可以说明，若对 $i=1,\cdots,n$ 都有 $d_{0i}=R$，则 $\Gamma(x_0,x_1,\cdots,x_n)=-2R^2\Gamma(x_1,\cdots,x_n)-\Delta(x_1,\cdots,x_n)$；将 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 的外接球面的中心取作 x_0，则得出所求公式，因为由 9.7.3.4 有 $\Gamma(x_0,x_1,\cdots,x_n)=0$.

由此也可推出，若x_i共球，则 $\Delta(x_1,\cdots,x_{n+2})=0$；而反过来却未必显然. 下面我们直接证明 $\Delta(x_1,\cdots,x_{n+2})=0$ 是x_i共球或位于同一超平面的充要条件. 选取一个标准正交标架并设 x_i^j $(i=1,\cdots,n+2;\ j=1,\cdots,n)$ 是x_i的坐标. 若x_i属于同一超平面或球面，则存在不全为0的数a, b, $c_j(j=1,\cdots,n)$使得:

$$a\|x_i\|^2+b+\sum_{j=1}^{n}c_jx_i^j=0\quad\forall i=1,\cdots,n+2,$$

对此例如可参阅 10.7.6. 由此推出下列两个行列式都等于0:

$$\begin{vmatrix}\|x_1\|^2 & 1 & x_1^1 & \cdots x_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \|x_{n+2}\|^2 & 1 & x_{n+2}^1 & \cdots x_{n+2}^n\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \|x_1\|^2 & -2x_1^1 & \cdots & -2x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \|x_{n+2}\|^2 & -2x_{n+2}^1 & \cdots & -2x_{n+2}^n \end{vmatrix} = 0.$$

因此它们逐行相乘的积等于 0，而这个积正是 $\Delta(x_1, \cdots, x_{n+2})$!

反过来，若 $\Delta(x_1, \cdots, x_{n+2}) = 0$，则第一个行列式等于 0，因此存在不全为 0 的 a, b, c_i 如上. 由 10.7.6 可知 x_i 都属于由下列方程确定的球面或超平面:

$$a\|\cdot\|^2 + b + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot = 0.$$

9.7.3.8 例. 令 $a = d_{12}$, $b = d_{23}$, $c = d_{31}$, 则 $\Gamma(x_1, x_2, x_3) = -(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$, 这就是三角形面积用边长来表示的公式: 见 10.3.3.

若令 $\alpha = d_{12}d_{34}$, $\beta = d_{13}d_{24}$, $\gamma = d_{14}d_{23}$, 则有 $\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = -(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)$, 这就是 Ptolémée 定理: 见 10.9.2.

9.7.4 度量空间的一个基本问题. 欧氏仿射空间的特殊地位，使我们不禁要问，是否可能在度量空间中仅仅按照度量的条件(比如说，不知道 X 是向量空间等等)来对欧氏仿射空间进行分类. 这一基本问题已由 K. Menger 于 1928 年解决；读者可在 [BL] 第 IV 章找到完整的解答; Cayley-Menger 行列式是解决这个问题的关键工具，证明看来并不比 9.7.3.4 困难多少.

对其它的经典度量空间也可以提出类似的问题，例如球面，椭圆空间和双曲空间(参见 18.4.7, 19.1.2.5 和 19.2.11). 在 [BL] 中也可以找到完整的解答. 应该指出，若要对没有其它附加结构的度量空间进行系统的研究，[BL] 是一本极为出色的参考书.

9.7.5 垂直平分超平面

9.7.5.1 命题. 给定 X 上不同两点 x, y 后，集合 $\{z \in X : zx = zy\}$ 是一个超平面，称为 x 和 y 的垂直平分超平面 ($n = 2$ 时为垂直平分线).

更一般地，若 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,k}$ 是仿射无关的，则

$$\{z \in X : zx_0 = zx_1 = \cdots = zx_k\}$$

是 $n+1-k$ 维子空间；特别当 $k=n$ 即当 (x_i) 是单形时，存在唯一的一点与该单形的所有顶点等距；或者说(参见 10.7)：一个单形有唯一的外接球面。

证明的要点是将 X 在 x_0 处向量化，再如上面多次所做的那样，说明距离关系式给出了数量积；然后应用 2.4.8。

9.7.6 Appolonius 公式：重心与距离. 沿用 3.4.5 的记号和概念，我们有：

9.7.6.1 Appolonius 公式. 设 $\{(\lambda_i, x_i)\}$ 是 X 中质点的有限集，$\left(\sum_i \lambda_i, g\right)$ 或即 $(0, \vec{\xi})$ 是其重心，则有

$$\forall z \in X:\ \sum_i \lambda_i zx_i^2 = \sum_i \lambda_i gx_i^2 + \left(\sum_i \lambda_i\right) zg^2$$

或

$$\forall z \in X:\ \sum_i \lambda_i zx_i^2 = \sum_i \lambda_i yx_i^2 + 2(\overrightarrow{zy} | \vec{\xi}).$$

只要写出 $zx_i^2 = zg^2 + gx_i^2 + 2(\overrightarrow{zg} | \overrightarrow{gx_i})$ 并应用 3.4.6.5 即可。

9.7.6.2 推论. 条件与 9.7.6.1 相同，另外 k 是一个给定的实数，则 $L = \left\{z \in X:\ \sum_i \lambda_i zx_i^2 = k\right\}$ 是：

——$\sum_i \lambda_i = 0$ 时：对任何 k 都是一个以 $(\vec{\xi})^\perp$ 为方向的仿射超平面；

——$\sum_i \lambda_i > 0$ 时：若 $k < \sum_i \lambda_i gx_i^2$：$L = \emptyset$，

若 $k \geqslant \sum_i \lambda_i gx_i^2$：

$$L = S\left(g,\ \sqrt{\frac{k - \sum_i \lambda_i gx_i^2}{\sum_i \lambda_i}}\right).$$

这里，$S(x, r)$ 表示以 x 为中心、r 为半径的球面。$\sum_i \lambda_i < 0$ 的情形，读者可自行补出。

9.7.6.3 推论. 在 9.7.6.1 的条件上再加上 $\sum_i \lambda_i > 0$，则函数 $z \longmapsto \sum_i \lambda_i z x_i^2$ 在 g 达到唯一的极小值.

9.7.6.4 推论 9.7.6.3 表明，有限个质点的重心在任一使质点组整体稳定的等距下不变；但这个结论也可由 3.7.3 和 9.1.3 更简捷地得出.

9.7.6.5 推论 9.7.6.2 给出了数量可观的简单"几何轨迹"的性质。首先，取 $\{(1, x), (-1, y)\}$ 就又会得出 9.7.5.1。其次，更一般地，到两定点 x，y 的距离之比为常数的点的轨迹 $\left\{z \in X: \frac{zx}{zy} = k\right\}$ 是一个以 $\frac{x}{1-k} - \frac{ky}{1-k}$ $(k \neq 1)$ 为中心的球面.同样，$\{z \in X: zx^2 + zy^2 = k\}$ 是一个球面，而 $\{z \in X: zx^2 - zy^2 = k\}$ 则是一个超平面；在第一种情形，公式

$$zx^2 + zy^2 = 2zg^2 + 2gx^2 = 2zg^2 + \frac{xy^2}{2}$$

称为"中线公式".

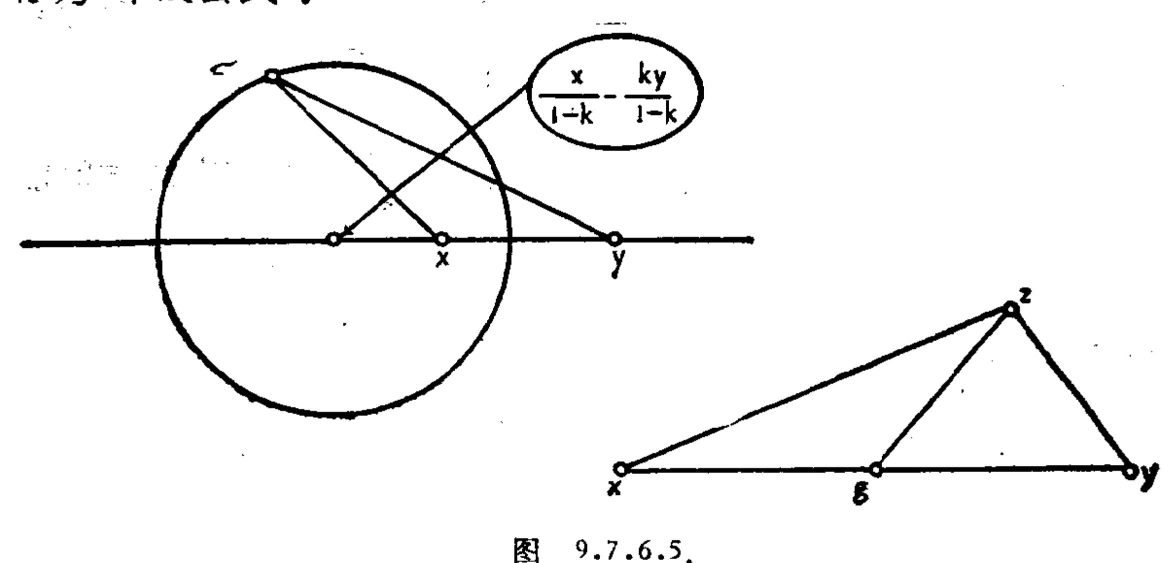


图 9.7.6.5.

最后，$\{z: zx^2 - zy^2 = k\}$ 是一个与 $\overrightarrow{xy}$ 正交的超平面.

9.7.6.6 有了公式 9.7.6.1，就可以不借助行列式(参见 9.7.3.3)而证明 9.7.3.4 的开头部分；具体证明如下：x_i 中总有一点是其它点的重心(参见 3.6)，假设该点就是 x_n，则

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i \text{ 而 } \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = 1.$$

引进质点组 $\{(\lambda_0, x_0), \cdots, (\lambda_{n-1}, x_{n-1}), (-1, x_n)\}$；则其重心就是 $(0, \vec{0})$，因为 $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0$ 而

$$\vec{\xi} = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i - x_n = \vec{0}!$$

根据 9.7.6.1，函数 $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i z x_i^2$ 与 z 无关，设其值为 k；以 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 代替 z，即得出：

$$\begin{array}{l}
\qquad\quad \lambda_1 d_{01}^2 + \lambda_2 d_{02}^2 + \cdots + \lambda_{n-1} d_{0,n-1}^2 - d_{0n}^2 = k \\
\lambda_0 d_{10}^2 \qquad\quad + \lambda_2 d_{12}^2 + \cdots + \lambda_{n-1} d_{1,n-1}^2 - d_{1n}^2 = k \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_0 d_{n0}^2 + \lambda_1 d_{n1}^2 + \lambda_2 d_{n2}^2 + \cdots + \lambda_{n-1} d_{n,n-1}^2 \qquad = k \\
\lambda_0 + \lambda_1 \quad + \lambda_2 \quad + \cdots + \lambda_{n-1} \qquad - 1 \quad = 0,
\end{array}$$

因此有 $\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 0$.

9.8 子集的稳定子群

9.8.1 为研究子集 $A \subset X$，自然会想到定义 A 在 $\mathrm{Is}(X)$ 里的稳定子群或迷向子群 $\mathrm{Is}_A(X) = \{g \in \mathrm{Is}(X): g(A) = A\}$. $\mathrm{Is}_A(X)$ 越大，A 的对称性越强；A 的性状与 $\mathrm{Is}_A(X)$ 相关. 在第一章里我们已经接触过 $\mathrm{Is}_A(X)$，以后在 12.5 节还会遇到. 从 X 的子集所成的集合到 $\mathrm{Is}(X)$ 的子群所成的集合间有一个映射 $\chi: A \longmapsto \mathrm{Is}_A(X)$，这个映射在后面起着主导作用.

9.8.2 注. 如果 A 是紧集且 $g \in \mathrm{Is}(X)$，那么从 $g(A) \subset A$ 可导出 $g(A) = A$. 但若 A 仅仅是闭集或者有界集时，则上述结论不成立. 可参见 9.14.26.

把 A 的闭包记为 $\bar{A}$，一般说来 $\mathrm{Is}_A(X) \subsetneq \mathrm{Is}_{\bar{A}}(X)$（参见 9.14.27）. 子集 A 关于它从 X 诱导得的度量有一个等距变换群

$\mathrm{Is}(A)$，这样就得到限制映射 ρ: $\mathrm{Is}_A(X)\to \mathrm{Is}(A)$。一般说来 ρ 不是单射：例如设 $A=Y$ 是 X 的真子空间，对称 σ_Y 就在 Y 上诱导了恒等映射。不过只要 $[A]=X$，ρ 就是单射。与此相反的是 ρ 总是满射，这可从 9.7.1 得出。

至于 χ，它既不是单射又不是满射。这是因为图 9.8.2 的两个图形有相同的对称群。另一方面取定 $\omega\in X$ 后，$G=\mathrm{Is}_\omega^+(X)$ 不可能是任何子集 A 的迷向子群，这是因为 G 的轨道都是以 ω 为中心的球面的并集，它们都以 $\mathrm{Is}_\omega(X)$ 作为迷向子群。但如 G 是 $\mathrm{Is}(X)$ 的有限子群，那么总存在 $A\subset X$ 使得 $G=\mathrm{Is}_A(X)$（参见 9.14.36）。

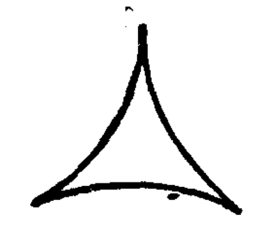
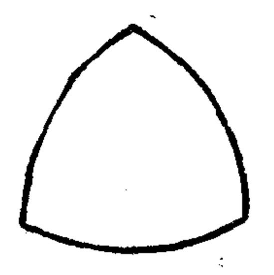



图 9.8.2.

9.8.3 闭性. 一般地说，与 $\mathrm{Is}_a(X)(a\in X)$ 相反，$\mathrm{Is}_A(X)$ 在 $\mathrm{Is}(X)$ 内不是闭集：例如把 $\mathrm{Is}(X)$ 内由一个无理角旋转生成的子群取为 G，把 G 的一个轨道取为 A。但当 A 是 X 的闭子集时，$\mathrm{Is}_A(X)$ 也是 $\mathrm{Is}(X)$ 的闭子集.

9.8.4 有界性. 如果 A 有界，那么 $\mathrm{Is}_A(X)$ 总是有界。这是因为以下将看到 $\mathrm{Is}_{\bar{A}}(X)$ 是紧集，并且有 $\mathrm{Is}_A(X)\subset\mathrm{Is}_{\bar{A}}(X)$（见 9.8.2）。反之当 A 不是有界集时 $\mathrm{Is}_A(X)$ 也可能有界：见 9.14.27.

9.8.5 有限性. 当 A 不是有限集时 $\mathrm{Is}_A(X)$ 仍可能是有限集（见 9.14.27）。但当 A 是有限集时 $\mathrm{Is}_A(X)$ 不必有限：例如当 A 包含在一个子空间内并且 $\dim X-\dim[A]\geqslant 2$ 时。反之若

$$\dim[A]\geqslant \dim X-1,$$

那么只要 A 有限，$\mathrm{Is}_A(X)$ 也有限。为看出这一点，只须确定怎样的 $g\in\mathrm{Is}(X)$ 能在 A 上诱导出恒等变换。由于这样的 g 也在 $[A]$

上诱导出恒等变换，所以当 $[A]=X$ 时，$g=\mathrm{Id}_X$，当 $[A]$ 是超平面时，$g=\mathrm{Id}_X$ 或 $\sigma_{[A]}$。

9.8.6 紧性和不动点

9.8.6.1 命题. 如果 A 是 X 的紧子集，则存在 $x\in X$ 使得 $\mathrm{Is}_A(X)\subset \mathrm{Is}_x(X)$，特别，$\mathrm{Is}_A(X)$ 是 $\mathrm{Is}(X)$ 内的紧集. 如果 $G\subset \mathrm{Is}(X)$ 是紧集，则存在 $x\in X$ 使得 $G\subset \mathrm{Is}_x(X)$.

只要任取 G 的一个轨道，就可从前半部分结论导出后半部分结论. 前半部分中"特别"后面的断言可从 9.8.3 以及 $\mathrm{Is}_x(X)$ 是紧集（见 8.2.3.3）这些事实由第一个断言推导出. 而第一个断言至少可用三种方法加以证明.

9.8.6.2 第一种证明. 这就是 2.7.5.9 的证明. 在这里，内部非空的条件并不是必要的，因为 $\mathrm{Is}_x(X)$ 总是紧的(与 $\mathrm{GA}_x(X)\cong \mathrm{GL}(X)$ 相反).

9.8.6.3 第二种证明. 这是 11.5.8 的结果. 事实上，如果 B 是 X 中含 A 的具有最小半径的唯一圆球，则从 $g(A)=A$ 可得 $g(B)=B$，这是因为 B 是唯一的而且仅仅由度量性质所定义. 要找的不动点 x 就是 B 的中心.

9.8.6.4 第三种证明(Bruhat-Tits 引理). 这个引理肯定了在一个比欧氏仿射空间更一般的度量空间内，紧子集的等距变换群总有不动点存在. 当然这个度量空间要满足一些条件，除 X 外还有不少其它空间也满足这些条件，尤其是双曲空间(见 19.4.7).

要知道 9.8.6.1 并不对任意的度量空间都成立. 譬如说以 x 为中心的球面 S 有等距变换群 $\mathrm{Is}(S)$，但这个群没有不动点，并且 $\mathrm{Is}(S)\cong \mathrm{Is}_x(X)$ 是紧的，S 也是紧的.

在欧氏仿射空间内，以下条件 (CN) 被两个点的中点所满足，而且取的是等号，这就是 9.7.6.5 所给出的中线公式. 以后将看到对于双曲空间内的线段的中点，条件 (CN) 也能满足(见 19.4.7). 但球面不满足此条件.

9.8.6.5 引理 (Bruhat-Tits, [B-T], 63 页). 设 X 是完备度量空间，满足以下条件:

$$(CN)\begin{cases}\text{对任意的 } x, y \in X\text{，存在 } m \in X \text{ 使得}\\ d^2(x, z) + d^2(y, z) \geqslant 2d^2(m, z) + \dfrac{1}{2}d^2(x, y)\ \forall z \in X,\end{cases}$$

则对X的任一有界子集A存在点$x \in X$使得$g(x)=x\ \forall g \in \mathrm{Is}(X)$，并且$g(A)=A$.

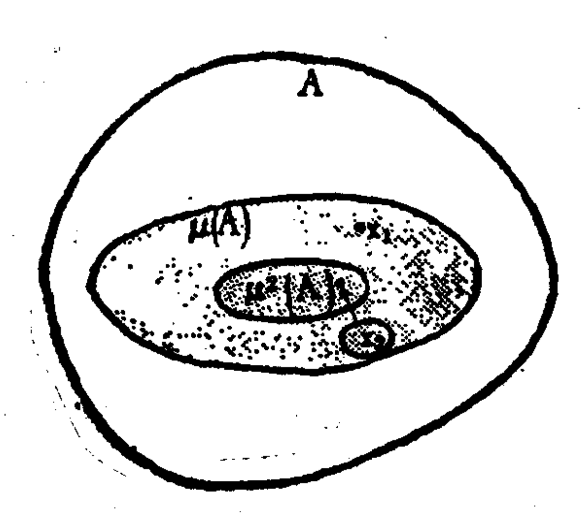


图 9.8.6.5.

证明的思路如下：假设A是紧子集，从A出发可作一个子集$\mu(A)$：对于A中满足$d(x, y)=\mathrm{diam}(A)$的一切点对$\{x, y\}$，通过(CN)条件可以得到点m，这些m就构成了$\mu(A)$. 这样，(CN)保证$\mathrm{diam}(\mu(A)) \leqslant \lambda \mathrm{diam}(A)$，而且$\lambda<1$是普遍适用的. 于是得到了直径趋于0的紧子集的下降序列，它们的交就是所求的点.

以下给出当A是完备空间X的有界子集时的详细证明. 这就是一般的情形. 我们取定$k \in]0, 1[$，并且对任一子集Y取Y内使$d(x, y) \geqslant k\,\mathrm{diam}(Y)$的点对$\{x, y\}$的由$(CN)$条件给出的点$m$的集合，记为$\mu(Y)$.

从条件(CN)可得

$$\sup\{d(x, y): x \in Y,\quad y \in \mu(Y)\} \leqslant k_1 \mathrm{diam}(Y).$$

$$\mathrm{diam}(\mu(Y)) \leqslant k_2 \mathrm{diam}(Y).$$

其中$k_1=\sqrt{1-k^2/4}$，$k_2=\sqrt{1-k^2/2}$. 利用归纳法，令

$$\mu^n(Y)=\mu(\mu^{n-1}(Y)).$$

设 A 有界，则从前面的不等式首先可得

$$\operatorname{diam}(\mu^n(A)) \leqslant k_2^n \operatorname{diam}(A) \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

因而 $\mu^n(A)$ 的交集至多是一个点. 但这个交集也不是空集: 设 $(x_n)_{n\in N}$ 是点 $x_n \in \mu^n(A)$, $n \in \mathbf{N}$ 的任一序列，则它是一个 Cauchy 序列，因为根据前面的不等式有 $d(x_n, x_{n+1}) \leqslant k_1 k_2^n \operatorname{diam}(A)$. 这个序列收敛于 $x \in X$, 从而 $\bigcap_{n\in N} \mu^n(A) = \{x\}$. 但 $\mu^n(A)$ 是从 A 出发纯粹由度量条件定义的，因而 $\mu^n(A)$ 在 $\operatorname{Is}_A(X)$ 下保持稳定，x 也保持不变.

9.8.7 注. 如同 2.7.5.11 那样可以看出 $\operatorname{Is}(X)$ 的极大紧子群都是共轭的.

9.8.8 例. 请参见 1.7.5.1 的证明以及 [B-T] 第 64 页.

9.9 曲线的长度

在这一节中 M 是任意的度量空间，其距离记为 $d(\cdot,\cdot)$.

9.9.1 定义. M 中的一条曲线就是 $([a,b], f)$, 其中 $[a,b]$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个区间 $(a<b)$, $f:[a,b]\to M$ 是一个连续映射. $([a,b],f)$ 的端点是 $(f(a), f(b))$, 其中 $f(a)$ 是起点，$f(b)$ 是终点. 以 (x,y) 为端点的曲线的集合记为 $C(x,y)$. f 的**长度**是 $\mathbf{R}_+\cup\infty$ 中的一个元素 $\operatorname{long}(f)$ 定义为

$$\operatorname{long}(f) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(f(t_i), f(t_{i+1})):\right.$$

$$\left. a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,\ n \in \mathbf{N}^*\right\}.$$

当 $\operatorname{long}(f)\in\mathbf{R}_+$ 时，称曲线 f 为**可求长的**.

9.9.2 注. $C(x,y)\neq\emptyset \quad \forall x, y\in M$ 相当于说 M 是弧连通的. 如果 $\theta:[c,d]\to[a,b]$ 是同胚映射，$f:[a,b]\to M$ 是 M 的曲线，则总有

$$\operatorname{long}(f\circ\theta) = \operatorname{long}(f).$$

因此可把长度看成是定义在曲线集合关于上述等价关系所得的商

集上的，这样就得到了几何弧的概念，但在本书中并不用到此概念。

请注意象 9.9.2 那样的图假定了连接 $(f(t_i), f(t_{i+1}))$ 的"线段"的存在性，关于这一点请参看 9.9.4.2.

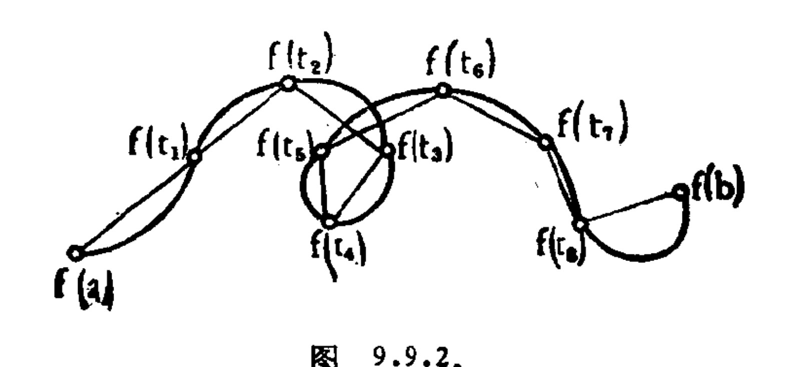


图 9.9.2.

9.9.3 例

9.9.3.1 我们总有 $\operatorname{long}(f) \geqslant d(x, y) \forall f \in C(x, y)$.

9.9.3.2 如果 $f:[a, b] \to M$，$g:[b, c] \to M$ 是两条曲线使得 $f(b) = g(b)$，则曲线 $f \cup g:[a, c] \to M$ 满足

$$\operatorname{long}(f \cup g) = \operatorname{long}(f) + \operatorname{long}(g).$$

9.9.3.3 甚至对很好的 M 也可能存在不可求长的曲线. 例如在平面 $\mathbf{R}^2$ 内把图形 9.9.3.3.1 迭代无穷多次，可得映射 $f: [0,1] \to \mathbf{R}^2$. 首先要证这样做法可收敛于一个连续映射 f，我们把它留给读者. f 的长必须 $\geqslant (4/3)^n \forall n \in \mathbf{N}^*$，因而是无穷大. 此外，对于使 $t < t'$ 的 $t, t' \in [0, 1]$，限制映射 $f|_{[t,t']}$ 的长仍然是无穷大.

这样的曲线尽管看起来有些反常，但还是很自然的. 我们在岩岸的外形里遇得到这种曲线. 关于这一题目的更多的讨论可参看 [MJ].

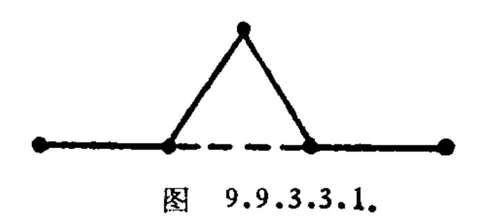


图 9.9.3.3.1.

9.9.4 线段. 内蕴空间及优异空间

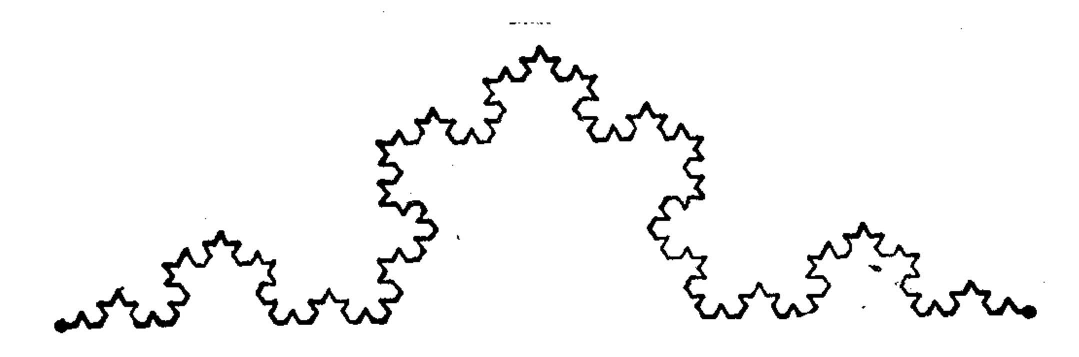


图 9.9.3.3.2.

9.9.4.1 定义．曲线 $f:[a,b]\to M$ 如果满足 $d(f(t),f(t'))=t'-t\ \forall t,\ t'\in[a,b],\ t<t'$，就称为**线段**．特别，

$$\operatorname{long}(f)=d(f(a),f(b)).$$

9.9.4.2 这里定义的线段与在 3.4.3 内引入的欧氏仿射空间 X 内以 $x,\ y\in X$ 为端点的线段 $[x,y]$ 的概念并无分歧．实际上对任意的 $a\in\mathbf{R}$，一个那样的线段可唯一确定一个线段 f:

$$[a,a+d(x,y)]\ni t\longmapsto f(t)=x+\frac{t-a}{d(x,y)}\overrightarrow{xy}\in X.$$

一般说来，即使 $C(x,y)\neq\emptyset$ 时，在M内也有可能不存在以 (x,y) 为端点的线段．足以保证这一存在性的相当一般的条件可参见 [CT]第 135 页或 [BL] 第 40 页．

图 9.9.4.2.　　　　图 9.9.4.3.1.

9.9.4.3 很容易找到一个反例：取 $M=\mathbf{R}^2\backslash(0,0)$，它的距离是从 $\mathbf{R}^2$ 诱导而得的，$x\in M$是任意一个点，$y=-x$，则不存在以 $(x,-x)$ 为端点的线段，这是因为它的长应该是 $2\|x\|$，但只有线段 $[x,-x]$ 的长才等于 $2\|x\|$，不幸的是这个线段包含$(0,0)\notin M$．另一个例子是球面 $S^n\subset\mathbf{R}^{n+1}$，带有由 $\mathbf{R}^{n+1}$ 诱导的距离．对任意的 $x,\ y\in S^n,\ x\neq y$，S^n 里以 (x,y) 为端点的任一曲线 f 的长 $\operatorname{long}(f)>d(x,y)$，这是因为 $\operatorname{long}(f)\geqslant d(x,f(t))+d(f(t),y)\ \forall t\in\,]a,b[$，并且

$$d(x, f(t)) + d(f(t), y) > d(x, y)$$

(参见 9.1.1.1)。这些反例使人得出以下定义。

9.9.4.4 定义. 如果度量空间 M 是弧连通的并且

$$d(x, y) = \inf\{\operatorname{long}(f): f \in C(x, y)\} \quad \forall x, y \in X,$$

则称 M 为内蕴空间. 如果对任意的 $x, y \in M$ 存在以 (x, y) 为端点的线段,则称 M 为优异的.

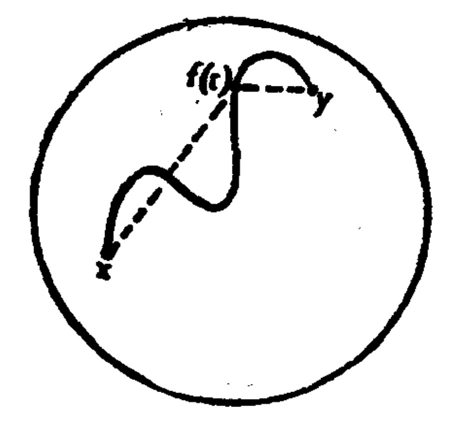


图 9.9.4.3.2.

9.9.4.5 例. 根据 9.9.4.1 可知一个优异空间总是内蕴的. 但 9.9.4.3 的第一个例子表明反之不一定对.

从 9.4.4.2 可知欧氏仿射空间是优异的. 此外 9.1.1.1 表明当端点给定时,线段是唯一的(可能相差定义区间的一个平移)。

以后将看到优异空间的其它例子:18.4.2,19.1.2 及 19.3.2。

从球面的例以及后面 9.9.8 的圆周的例可看出,与欧氏仿射空间不同,在一个优异空间内,给定端点间的线段并不总是唯一的。

9.9.4.3 的第二个例子告诉我们,当 S^n 带着由 $\mathbf{R}^{n+1}$ 诱导的距离时,它不是内蕴度量空间. 在 18.4 中将设法补救这一缺陷.

9.9.5 最短路径. 我们通常说在一个欧氏空间内从一个点到另一点的最短路径是以这两点为端点的线段. 更精确地说:如果 f 是以 (x, y) 为端点的曲线且 $\operatorname{long}(f) = d(x, y)$,则对 f 的定义区间 $]a, b[$ 中的任两个满足 $t \leqslant t'$ 的 t, t',有

$$f(t') \in [x, y] \text{ 以及 } f(t) \in [x, f(t')].$$

这个结论可从 9.1.1.1 以及下面的初等事实得出:如果

$$\operatorname{long}(f) = d(x, y),$$

则对任意的 $t \in [a, b]$,有

$$\operatorname{long}(f|_{[a,t]}) = d(x, f(t)) \text{ 以及 } \operatorname{long}(f|_{[t,b]}) = d(f(t), y).$$

9.9.6 注. 回想一下(见 [DR] 第 314 页),在欧氏仿射空间 X 内如果曲线 $f:[a, b] \to X$ 是 C^1 类的,则它是可求长的而且长度等

于

$$\operatorname{long}(f)=\int_a^b \|f'(t)\|dt.$$

更一般地，这一类公式对于欧氏仿射空间的微分子流形、甚至抽象黎曼流形的曲线也有效。如果这些流形是完备的，就总能得到优异的度量而且线段是局部唯一的。这些概念导出了测地线的基本概念。关于其推广可参看 [KG1] 第 114 页或 [MA] 第 271 页。

9.9.7 内蕴度量的构造法. 如果 (M, d) 是一个非内蕴度量空间，有一个方法几乎总是能给出一个内蕴度量 $\bar{d}$:

9.9.7.1 命题. 设 (M, d) 是一个度量空间使得 $\forall x, y \in X$，存在 $f \in C(x, y)$ 使 $\operatorname{long}(f) < \infty$，则
$\bar{d}: M \times M \ni (x, y) \longmapsto \bar{d}(x, y) = \inf\{\operatorname{long}(f): f \in C(x, y)\} \in \mathbf{R}_+$
是 M 上的一个距离．并且是内蕴的．此外 $\bar{\bar{d}} = \bar{d}$. 我们把证明留给读者，参看 9.14.30. 结论中的 $\bar{\bar{d}} = \bar{d}$ 说明这个方法用一次就到底了.

当度量空间是 (S^n, d) 时(其中 d 是由 $\mathbf{R}^{n+1}$ 诱导的度量)，那末得到的新度量 $\bar{d}$ 正是 8.6.3 内引入的度量 $\bar{d}(x, y) = \operatorname{Arc}\cos((x|y))$. 在 9.9.8 将当 $n = 1$ 时研究这个度量，在 18.4.3 将对任意的 n 进行研究，如果把圆周 S^1 参数化为 $t \longmapsto (t, \sqrt{1-t^2})$ 并借助 9.9.6 计算 $\bar{d}$，就再次导出利用积分 $\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$ 而得到的角的测度，这个方法比复指数 A 的方法稍初等些. 参看 8.3.13.

9.9.8 圆周 S^1 的内蕴度量. 这里涉及的是欧氏向量平面 X 的一个圆周 C，就是 $C = \{x \in X: \|x\| = 1\}$. 这个圆周可等同于 X 的半直线的集合(见 8.6.1). 这样就有:

9.9.8.1 定理. 关于 $\overline{xy} = \operatorname{Arc}\cos((x|y))$，$C$ 是一个内蕴度量空间. 要使 $\overline{xy} + \overline{yz} = \overline{xz}$ 的充要条件是半直线 $\mathbf{R}_+ y$ 在 $\mathbf{R}_+ x$ 与 $\mathbf{R}_+ z$ 之间(见 8.7.5.2). 给出了 $x, y \in C$，如果 $y \neq -x$，则存在从 x 到 y 的唯一最短路径(见 9.9.5)，这就是从 x 到 y 的圆弧(见 8.7.5.4)；如果 $y = -x$，则恰好有两条最短路径，这就是以

(x, y) 为端点的两个半圆周.

对于三个点 x, y, $z \in C$, 除去其中两个点是相等或相对(这时可直接解决)的情形外,只有以下四种可能的位置:

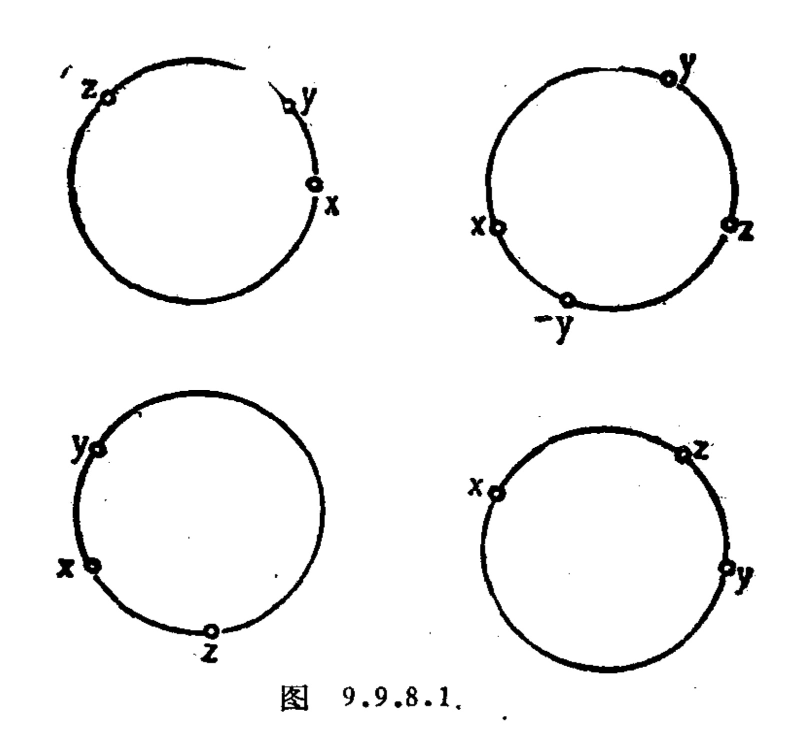
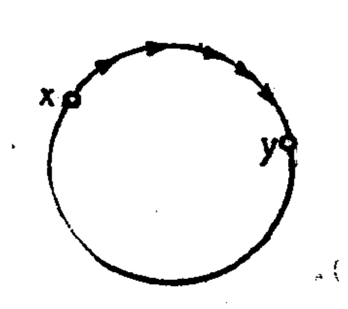


图 9.9.8.1.

在第一种情形有 $\overline{xy}+\overline{yz}=\overline{xz}$, 在第二种情形是 $\overline{xy}+\overline{yz}+\overline{xz}=2\pi$, 在第三种情形有 $\overline{xz}=\overline{yz}-\overline{xy}$, 第四种情形是 $\overline{xz}=\overline{xy}-\overline{yz}$. 这些结果都来自 8.7.5.3. 由于在第二种情形里有 $\overline{xy}+\overline{yz}>\pi$, 因此不论在哪种情形都有 $\overline{xy}+\overline{yz}\geqslant\overline{xz}$, 此外等号仅在第一种情形里才能成立. ($C$, $\overline{\cdot\cdot}$) 是一个度量空间. 为了说明它是内蕴的, 我们证明它是优异的. 设 x, $y\in C$, 根据 8.7.5 的作法,当 $\overline{xy}=t$ 时,我们先给平面 X 定向并把以 (x, y) 为端点的曲线取为



x y=-x

图 9.9.8.2.

$f:[0,t]\ni s\longmapsto \cos s\cdot e_1+\sin s\cdot e_2\in C$. 对于使 $s\leqslant s'$ 的 $s,s'\in[0,t]$，我们有 $\overline{f(s)f(s')}=s'-s$，因此 f 确实是一个线段. 至于有关最短路的断言，这可从定理前半部分对严格三角等式 $\overline{xy}+\overline{yz}=\overline{xz}$ 的研究以及 9.9.5 节末尾的评论推导出来.

9.9.9 附注. 关于一般度量空间的曲线的性质以及不用微分学而定义曲率、挠率的方法，可参看 [BL] 第 74 页以后或 [B-M] 第 10 章，也可参看 9.14.30.

9.10 度量及微分几何：第一变分公式

这个公式的名称听起来似乎很深奥，实际上就是给出欧氏仿射空间上距离函数 $d:X\times X\to\mathbf{R}$ 的导数 d'. 但是它有很多有趣的推论. 读者也可参看 9.10.7.

9.10.1 第一变分公式. 对于 $x,y\in X$，$x\neq y$ 以及 $\vec{u},\vec{v}\in\vec{X}$：

$$d'(x,y)(\vec{u},\vec{v})=\frac{1}{\|\vec{xy}\|}(\overrightarrow{xy}\,|\,\vec{v}-\vec{u})$$

$$=\|\vec{v}\|\cos(\overline{\vec{v},\ \overrightarrow{xy}})-\|\vec{u}\|\cos(\overline{\vec{u},\ \overrightarrow{xy}}).$$

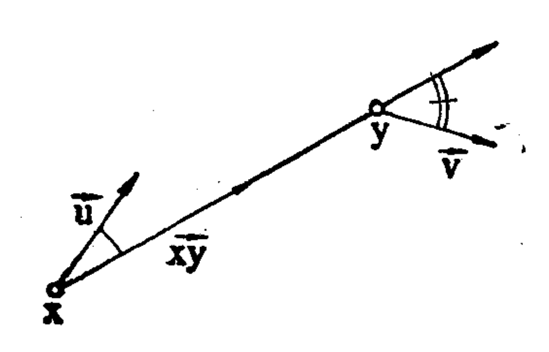


图 9.10.1.

在最后一个式子中出现了有向直线间的夹角，可参看 8.6.3. 为了证明 9.10.1，把 d 的平方记为 e，所以

$$e(x,y)=d^2(x,y)=\|\overrightarrow{xy}\|^2.$$

从求导公式可导出

$$e'(x,y)(\vec{u},\vec{v})=2(\overrightarrow{xy}\,|\,\vec{v}-\vec{u}),$$

这是因为纯量积是一个双线性型(可参见[CH1]，第 33 页)，然后因 $d=\sqrt{e}$，就能得到所求的公式.

9.10.2 如果有两条曲线 C 和 C' 始终正交于一个直线族 $D(t)$，这样 9.10.1 的公式里的两个角都是 $\pi/2$ 于是它们的余弦等于 0，就可知道有 $d(C\cap D(t),\ C'\cap D(t))=$ 常数. 作为其特例，一条位于以 x 为中心的球面上的曲线在 m 点的切线与直线 $\langle x,m\rangle$ 正交(与 10.7.4 比较).

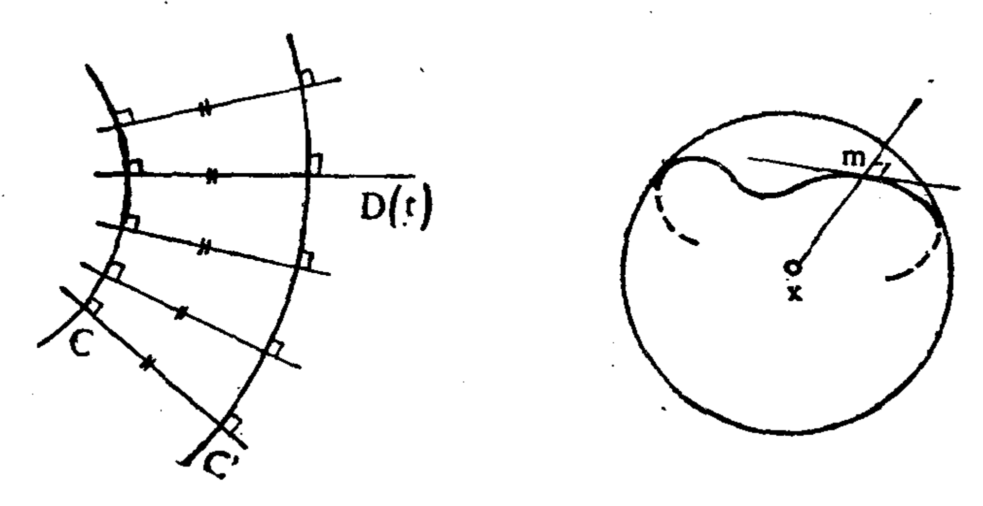


图 9.10.2.

9.10.3 设 $x(t)$ 是一个点，它变化时描出一条 C^1 类正则曲线 C (即 $x'(t)\neq 0\,\forall t$)，$T_{x(t)}C$ 是 C 在 $x(t)$ 处的切线，$y(t)$ 是 $T_{x(t)}C$ 的点，它变化时描出一条曲线 D，而且 D 始终与 $T_{x(t)}C$ 正交于 $y(t)$. 例如当 C 是 D 的法线的包络时，它就符合上述假设，这时 C 被称为 D 的渐屈线. 在这样的假设下，对任意的参数 s，t，都有

$$|x(t)y(t)-x(s)y(s)|=\operatorname{long}(C|_{[s,t]}).$$

这是因为在 9.10.1 的公式中可取 $\vec{u}=x'(t)$，$\vec{v}=y'(t)$，这样，$\vec{v}$ 与 $\overrightarrow{xy}$ 的夹角是 $\pi/2$，其余弦为 0，而 $\vec{u}$ 与 $\overrightarrow{xy}$ 的夹角为 0 或 π，从而 $d'(x(t),\ y(t))(x'(t),\ y'(t))=\pm\|x'(t)\|$，把它从 s 到 t 求积，考虑到 9.9.6 的公式，就可得出前面给出的公式.

9.10.4 在 17.6.4 中将要用到一个稍微复杂一点的类似例子：设两个点 $x(t)$ 和 $y(t)$ 描绘出同一条正则曲线 C，切线 $T_{x(t)}C$ 和 $T_{y(t)}C$ 相交于 $z(t)=(T_{x(t)}C)\cap(T_{y(t)}C)$，$z(t)$ 又描出一条曲线

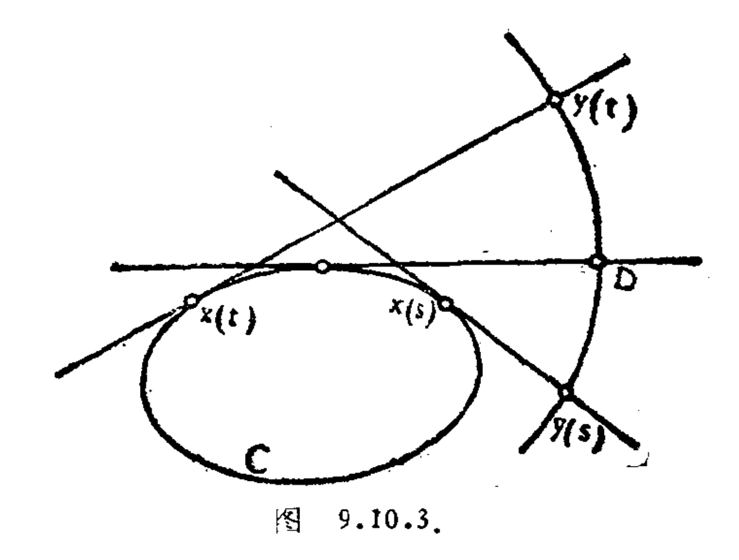


图 9.10.3.

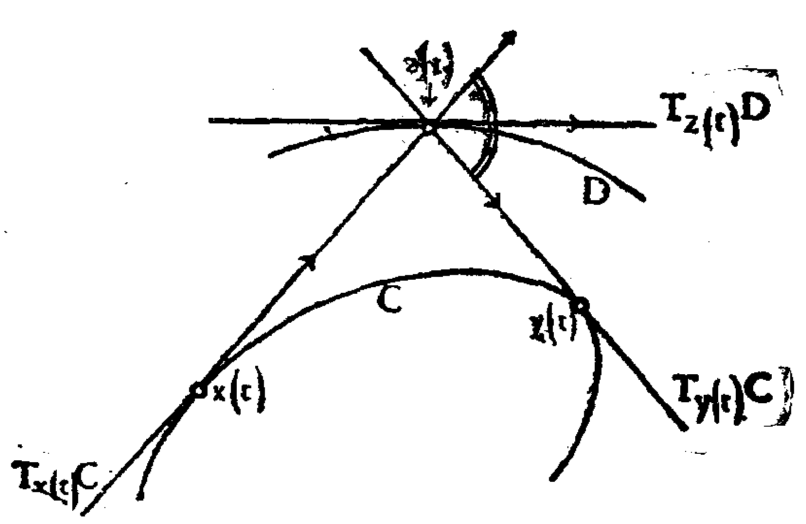


图 9.10.4.

D，使得切线 $T_{z(t)}D$ 是有向直线 $\overrightarrow{z(t)x(t)}$，$\overrightarrow{z(t)y(t)}$ 的外角平分线，则

$$x(t)z(t)+y(t)z(t)-\operatorname{long}(C|_{从x(t)到y(t)})=常数。$$

事实上，根据 9.9.6 和 9.10.1，函数 $F(t)$ 的导数是

$$F'(t)=\|z'(t)\|\cos(\overrightarrow{x(t)z(t)},\ z'(t))-\|x'(t)\|+\|z'(t)\|$$

$$\times\cos(\overrightarrow{y(t)z(t)},\ z'(t))+\|y'(t)\|-\|y'(t)\|+\|x'(t)\|,$$

利用外角平分线的假设，就可把含 $\|z'(t)\|$ 的两个项消去。

9.10.5 公式 9.10.1 应该能使人猜想到 9.4.1.1. 事实上，若 $F=ax+bx$ 在 x 处取极小值，则对于向量 $\vec{\xi}\in\vec{D}$ 有

$$F'(x)(\vec{\xi}) = \|\vec{\xi}\|[\cos(\vec{\xi}, \overrightarrow{xa}) + \cos(\vec{\xi}, \overrightarrow{xb})] = 0,$$

所以D应该是 $\overrightarrow{xa}$ 与 $\overrightarrow{xb}$ 的外角平分线.

9.10.6 公式 9.10.1 也能使人猜测到 Fermat 问题的解： 在欧氏平面内找一个点x使得 $ax + bx + cx$ 达到极小，这里$\{a, b, c\}$是一个三角形. 设极小值在x达到而且x不是顶点，那么对任意的 $\vec{u} \in \vec{X}$ 应该有

$$\left(\vec{u} \left| \frac{\overrightarrow{ax}}{\|\overrightarrow{ax}\|}\right.\right) + \left(\vec{u} \left| \frac{\overrightarrow{bx}}{\|\overrightarrow{bx}\|}\right.\right) + \left(\vec{u} \left| \frac{\overrightarrow{cx}}{\|\overrightarrow{cx}\|}\right.\right) = 0.$$

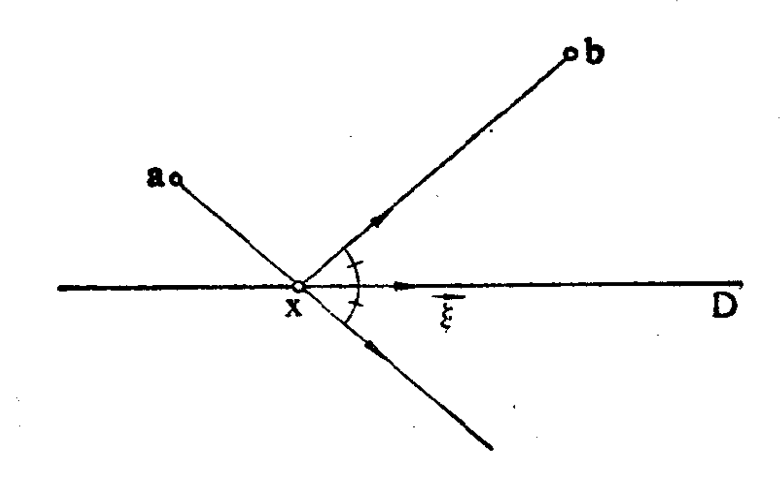


图 9.10.5.

图 9.10.6.

也就是说在 $\overrightarrow{ax}$, $\overrightarrow{bx}$, $\overrightarrow{cx}$ 上的三个单位向量应该加起来等于零，而这个条件等价于它们在 x 点形成的角等于 $2\pi/3$. 从这一点出发就能使我们在 10.4.3 得到问题的解.

9.10.7 附注. "第一变分"意指计算的是一阶导数 d'. 计算 d'' 并没有多大意义，因为我们能直接得到 9.2.2 那样的结果. 反之，在抽象 Riemann 流形或欧氏空间的子流形的情形下对 d'' 的计算(称为"第二变分公式")是 Riemann 几何的基本工具. 正是从这个公式人们才导出了这个领域里的大部分整体结果. 事实上在这个二阶导数里出现了流形的曲率(在欧氏空间的情形曲率等于0). 关于这些问题的最新参考文献可见[KO-NO2]第 VIII 章或[G-K-M]第 121 页以后.

9.11 紧子集间的 Hausdorff 距离

以后，主要在第 12 章里将需要在欧氏仿射空间的所有紧子集的集合上作出一个度量空间的结构. 这个度量应归功于 Hausdorff，我们先在一个更广泛的背景上建立这个度量.

9.11.1 记号. 设 X 是度量空间. 把 X 的所有紧子集的集合记为 $\mathscr{K}=\mathscr{K}(X)$. 如果 F 是 X 的子集，ρ 是 $\geqslant 0$ 的实数，置(参见 0.3)

$$U(F,\rho)=\{x\in X; d(x,F)<\rho\},$$
$$B(F,\rho)=\{x\in X; d(x,F)\leqslant\rho\}.$$

如果 F,G 是 X 的两个子集，置

$$\delta(F,G)=\inf\{\rho: F\subset B(G,\rho) \text{ 以及 } G\subset B(F,\rho)\};$$

$\delta(F,G)$ 称为 F 与 G 之间的 Hausdorff 距离.

请不要把 $\delta(F,G)$ 与 $d(F,G)$ 混淆(参见 0.3)!

9.11.2 定理. Hausdorff 距离使 $\mathscr{K}(X)$ 成为度量空间. 如果再假设 X 使得所有的有界闭集都是紧集，那么当 X 完备时，$(\mathscr{K}(X),\delta)$ 也完备. 当 X 是紧集时，$(\mathscr{K}(X),\delta)$ 也是紧集.

函数 $\delta(\cdot,\cdot)$ 显然是对称的. 如果 $\delta(F,G)=0$，就有 $F\subset$

$B(G, 0) = \bar{G} = G$ 以及 $G \subset F$，从而 $F = G$。设 F, G, H 是三个任意子集. 从 $G \subset B(H, \sigma)$ 可推导出 $B(G, \rho) \subset B(H, \sigma + \rho)$，从而 $F \subset B(H, \sigma + \rho)$. 同样可知

$$G \subset B(F, \rho) \Rightarrow B(G, \sigma) \subset B(F, \rho + \sigma) \Rightarrow H \subset B(F, \rho + \sigma).$$

如果 $\delta(F, G) = \rho$，$\delta(G, H) = \sigma$，则 $\delta(F, H) \leqslant \rho + \sigma$.

今后我们写成 $\mathscr{K}(X)$ 或 $\mathscr{K}$，不再指明它带有 Hausdorff 度量 δ。设 $(F_n)_{n \in N}$ 是 $\mathscr{K}$ 内的 Cauchy 序列，对 $n \in N$ 令 $G_n = \overline{\bigcup_{p \in N} F_{n+p}}$，这里的 $\bar{\cdot}$ 表示闭包. G_n 的序列是下降的，并且每个 G_n 都是有界的：因为 (F_n) 是 Cauchy 序列，存在一个 n_0 使得 $\delta(F_n, F_{n_0}) \leqslant 1\ \forall n \geqslant n_0$，于是 $F_n \subset B(F_{n_0}, 1)\ \forall n \geqslant n_0$. 根据假设，$G_n$ 作为有界闭集也是紧的. 从一般拓扑学的经典结果（见 0.4）可知交集 $F = \bigcap_{n \in N} G_n$ 非空，因此 $F \in \mathscr{K}$. 剩下要证的是在 $\mathscr{K}$ 内有 $F = \lim_{n \to \infty} F_n$. 对于给定的 $\varepsilon > 0$，设 n_0 使得 $\delta(F_n, F_{n_0}) \leqslant \varepsilon\ \forall n \geqslant n_0$，则

$$F \subset G_{n_0} \subset B(F_{n_0}, \varepsilon).$$

反之，存在 n_1 使得 $G_n \subset B(F, \varepsilon)\ \forall n \geqslant n_1$. 如果 $n \geqslant \sup(n_0, n_1)$，则 $\delta(F, F_n) \leqslant \varepsilon$.

为了证明 X 紧时 $\mathscr{K}$ 也紧，我们使用前面已证的完备性质以及下述判别法则："紧性等价于完备性加上准紧性". 所谓准紧性

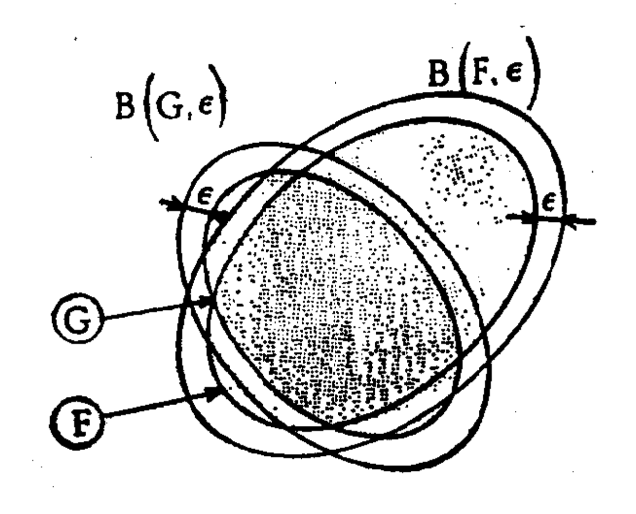


图 9.11.1.

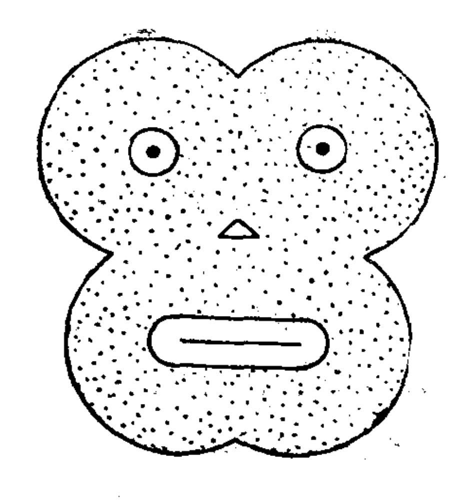


图9.11.2.1. “爪哇猿人”.

$F = [二]$

$G = B\{F, 2.5\text{mm}\}$

$H = B\{G, 10\text{mm}\}$

▨ $= H\setminus G$

图 9.11.2.2.

是指对任意的 $\varepsilon > 0$，总存在这个空间的由直径 ε 的集合构成的有限覆盖. 假定当 $\varepsilon > 0$ 时，X 有一个由球 $B(x_i, \varepsilon)$ 构成的有限覆盖：

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon),$$

再把 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 的子集的集合记为 $\mathscr{K}_0$，则 $\mathscr{K}_0 \subset \mathscr{K}$. 因 $\# \mathscr{K}_0 = 2^n < \infty$，只要证明 $\mathscr{K} = \bigcup_{K \in \mathscr{K}_0} B_\delta(K, \varepsilon)$ 就能得出 $\mathscr{K}$ 的准紧性. 对任意的 $G \in \mathscr{K}$ 取 $F = \{x_i : d(x_i, G) \leqslant \varepsilon\}$. 从 F 的构造，可得

$$F \subset B(G, \varepsilon),$$

但由

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$$

可见 $\forall y \in G \exists x_i | y \in B(x_i, \varepsilon)$，因此 $x_i \in F$，$G \subset B(F, \varepsilon)$. 这样就有 $\delta(F, G) \leqslant \varepsilon$，对 $G \subset B_\delta(F, \varepsilon)$.

9.11.3 推论. 如果 X 是紧集，则有限子集在 $\mathscr{K}(X)$ 内稠密.

9.11.4 推论. 设 X 是欧氏仿射空间，则 $\mathscr{K}(X)$ 是完备的. 此外对任意的 $a \in X$，$r \in \mathbf{R}_+$；$\mathscr{K}_{a,r}(X) = \{F \in \mathscr{K}(X) : F \subset B(a,$

$r)\}$ 是紧的。

9.11.3 可从 9.11.2 的证明的最后一部分得出。推论 9.11.4 常被称为"Blaschke 选择定理"，参见［EN］第 64 页。它意味着 $\mathscr{K}_{a,r}(X)$ 的任意一个无限族总有一个附贴点。这样就得到了 X 的某些紧子集的存在性，这将在 9.13.8 及 12.11.1 被用到。

9.11.5 命题. 对于任意的度量空间 X，直径映射（见 0.3）$\operatorname{diam}: \mathscr{K}(X) \to \mathbf{R}$ 满足 Lipschitz 条件，而且其常数因子等于 2。

设 $F, G \in \mathscr{K}$，$\delta(F, G) = \varepsilon$；设 $x, y \in F$ 使得 $d(x, y) = \operatorname{diam}(F)$，则 $\exists z, t \in G$ 使得 $d(x, z), d(y, t) \leqslant \varepsilon$。因此

$$\operatorname{diam}(F) = d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, t) + d(t, y) \leqslant 2\varepsilon + \operatorname{diam}(G);$$

交换 F 和 G 的位置，就有 $|\operatorname{diam}(F) - \operatorname{diam}(G)| \leqslant 2\varepsilon$。

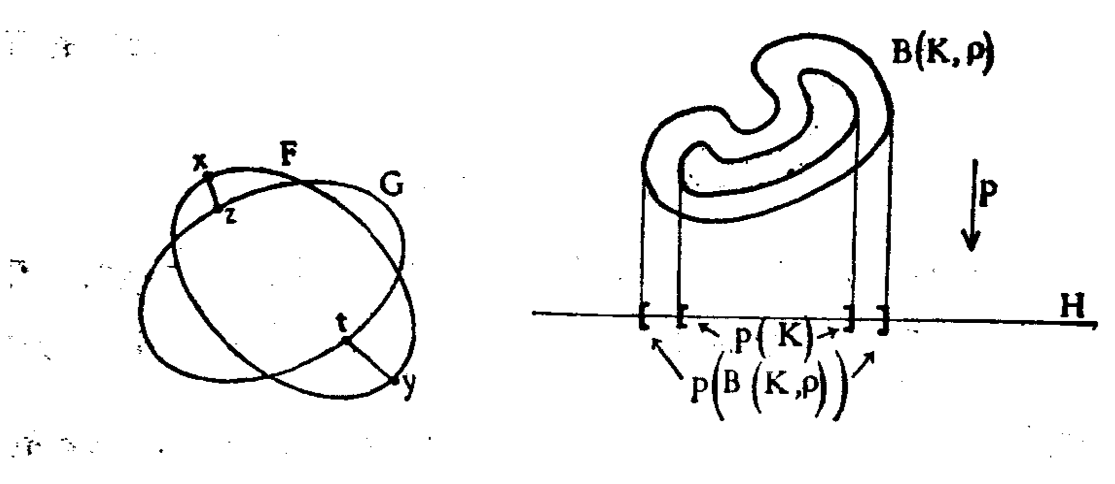


图 9.11.5.　　　　图 9.11.6.

9.11.6 命题. 设 X 是欧氏仿射空间，H 是 X 的超平面，则当 $p: X \to H$ 是 X 到 H 上的正交射影时（参看 9.2.4），映射 $\bar{p}: \mathscr{K}(X) \ni K \longmapsto p(K) \in \mathscr{K}(H)$ 满足比例常数等于 1 的 Lipschitz 条件。

注意到对任一 $K \in \mathscr{K}(X)$ 以及任意的实数 ρ，有

$$p(B_X(K, \rho)) = B_H(p(K), \rho).$$

9.11.7 从三角不等式可以推导出对任意的 ρ, σ, F, G，有

$$\delta(B(F, \rho), B(G, \sigma)) \leqslant \delta(F, G) + |\rho - \sigma|.$$

9.12 欧氏仿射空间的典范测度. 体积

9.12.1 这里我们要把 2.7.4 与 8.11 结合起来. 8.11 表明欧氏向量空间 $\vec{X}$ 具有典范 Lebesgue 测度,这个测度可如下得到: 任取一个向量空间的等距变换 $\mathbf{R}^n \to \vec{X}$, $\mathbf{R}^n$ 的 Lebesgue 测度的像就是所需的测度. 再运用 2.7.4.3 的方法就能在欧氏仿射空间 X 上得到一个典范测度. 我们把这个测度记为 μ 或 μ_X. 从上述构造法可知,如果 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$ 是 X 的一个标准正交标架, $f: X \to \mathbf{R}$ 是一个实函数, 则有

$$\int_X f\mu = \int_{\mathbf{R}^n} f\mu_0,$$

其中 μ_0 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度, 并且把 f 通过由已取定的标准正交标架所导出的同构 $X \to \mathbf{R}^n$ 诱导而得的 $\mathbf{R}^n$ 上的函数仍记为 f. 当然,若 $X = \mathbf{R}^n$, 则 $\mu = \mu_0$. 显然 μ 关于 $\mathrm{Is}(X)$ 不变, 并且在差一个常数因子的条件下是唯一的(见 2.7.4.4).

9.12.2 如果我们想知道与体积形式 $\lambda\vec{x}$ 或密度 $\delta\vec{x}$ 相联系的公式, 可以利用形式或密度在微分流形上的积分理论. 这里的流形就是 X, 形式 λ_X 与密度 δ_X 可直接从 $\lambda\vec{x}$ 和 $\delta\vec{x}$ 得出,这是因为流形 X 的切空间可等同于 $\vec{X}$. 对任意的函数 $f: X \to \mathbf{R}$, 有

$$\int_X f\mu = \int_X f\lambda_X = \int_X f\delta_X.$$

9.12.3 例. X 里的任一仿射子空间 $Y \neq X$ 都是零测度的.

如果 X 和 X' 是有相同维数 n 的欧氏仿射空间, $f: X \to X'$ 是比值为 k 的相似变换(见 9.5), 那么像测度是 $f(\mu_X) = k^n \mu_{X'}$.

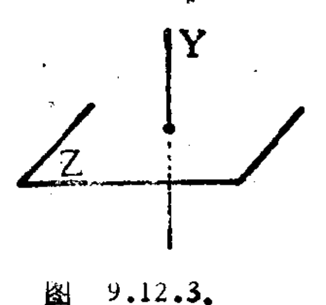


图 9.12.3.

设 Y 和 Z 是 X 的互补正交仿射子空间，则测度 μ_X 是测度 μ_Y 与 μ_Z 的积：$\mu_X = \mu_Y \otimes \mu_Z$. 在这种情形里还能应用 Fubini 定理(见 0.6).

9.12.4 体积

9.12.4.1 定义. 设 K 是 X 的紧集，χ_K 是 K 的特征函数(见 0.6)，积分 $\int_X \chi_K \mu$ 被称为 K 的体积，记为 $\mathfrak{L}(K)$. 当 $\dim X = 1$ (或 2) 时，称为长度(或面积).

这些体积与面积就是我们在日常生活或物理中遇到的体积与面积.在这里我们只计算超平行六面体和单形的体积. 至于"常见立体"(包括球)的体积，请读者参看 9.12.4.7, 9.12.4.8 及 12.12.20.

9.12.4.2 由 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$ 作出的超平行六面体是指

$$P = \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i} : \lambda_i \in [0, 1], \quad i = 1, \cdots, n \right\};$$

由这些点作出的单形是指

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i : \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n \right\}.$$

则有以下公式

9.12.4.3
$$\boxed{\mathfrak{L}(P) = \delta \mathfrak{z}(\overrightarrow{x_0 x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0 x_n}), \quad \mathfrak{L}(S) = \frac{1}{n!} \mathfrak{L}(P).}$$

如果 $\{x_i\}$ 不是仿射标架，则第一个公式可从 9.12.3 得出. 否则，$\{x_i\}$ 确定一个线性同构 $f: X \to \mathbf{R}^n$ (一般地说这不是等距映射)，而且根据 2.4.7.3 及 8.11，像测度 $f(\mu)$ 等于

$$f(\mu) = \delta \mathfrak{z}(\overrightarrow{x_0 x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0 x_n}) \mu_0,$$

但 $f(P)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的单位立方体，它的体积等于 1 (可用 Fubini 定理证明)，这样就可得到 9.12.4.3 的第一个公式. 至于第二个公式则可通过累次使用下述的中间公式而得出. 不妨假设 $\{x_i\}$ 是一个标架，否则将有

$$\mathfrak{L}(S) = \mathfrak{L}(P) = 0;$$

再把从 x_0 到超平面 $Y=\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ 的距离 $d(x_0, \langle x_1, \cdots, x_n\rangle)$ 记为 η，把 $\{x_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 在（$n-1$ 维）欧氏空间 H 内生成的单形 S' 的体积记为 σ，则有以下公式：

9.12.4.4 $$\mathfrak{L}(S)=\frac{1}{n}\eta\sigma,$$

当 $n=2$ 时，这个公式断定三角形的面积等于它的高与对边的长的乘积之半；当 $n=3$ 时，它断定四面体的体积等于它的高与对面面积的乘积的三分之一.

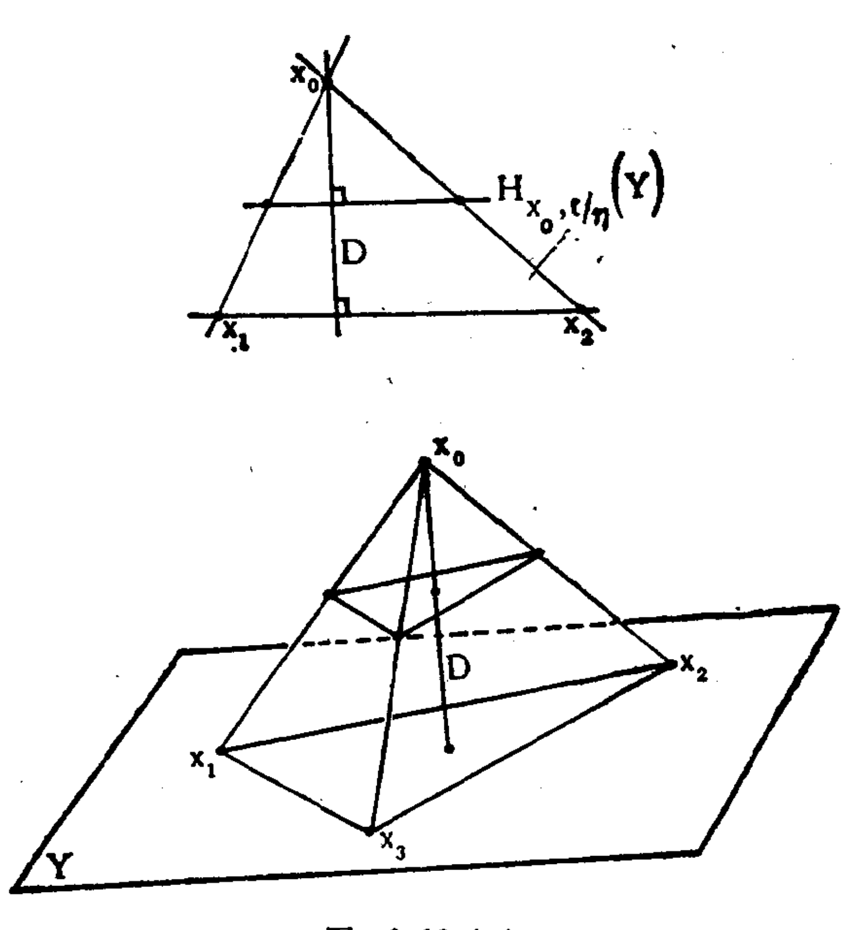


图 9.12.4.4.

为了证明公式 9.12.4.4，把过 x_0 正交于 Y 的直线记为 D，把使 D 与 $\mathbf{R}$ 等距的参数记为 t，使得在 $D\cap Y$ 处 $t=\eta$，在 x_0 处 $t=0$，由 9.12.3 可得 $\mathfrak{L}(S)=\int_0^\eta \sigma(t)dt$，其中的 $\sigma(t)$ 指单形 $H_{x_0,t/\eta}(S')$ 的体积，这个单形由 S' 通过以 x_0 为中心、比值为 t/η 的位似变换而得到，其体积在欧氏空间 $H_{x_0,t/\eta}(Y)$ 内计算.但根据

9.12.3 有 $\sigma(t)=(t/\eta)^{n-1}\sigma$. 因此

$$\mathfrak{L}(S)=\int_0^\eta \frac{t^{n-1}}{\eta^{n-1}}\sigma dt=\frac{1}{n}\eta\sigma.$$

9.12.4.5 注. 利用积分理论计算超平行六面体或单形的体积似乎有点小题大作. 应用初等理论计算体积可参看 12.2.5.

也可使用单形 S 各边的长度 $d_{ij}=x_ix_j$ 来计算 $\mathfrak{L}(S)$, 只要联合运用 8.11.6, 9.7.3.2 及 9.12.4.3 就能得到所需结果.

9.12.4.6 球的体积. 对任意的 $a\in X$ 及 $r\in\mathbf{R}_+$, 有以下公式:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathfrak{L}(B_{2d}(a,r))=\frac{\pi^d}{d!}r^{2d},\\&\mathfrak{L}(B_{2d+1}(a,r))=\frac{2^{d+1}\pi^d}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2d+1)}r^{2d+1}.\end{aligned}}$$

其中的下标是指 X 的维数. 由 9.12.3 可以知道只需在标准空间 $\mathbf{R}^n$ 内计算 $\mathfrak{L}(B_n(0,1))$. 这种经典计算可用多种方法实行(参看 [B-G] 第 227 至 229 页以及练习 6.10.9), 计算结果就是上面式子中用 $r=1$ 代入所得的值. 由于今后常常要用到 $\mathfrak{L}(B_n(0,1))$, 我们令

9.12.4.7 $\boxed{\beta(n)=\mathfrak{L}(B_n(0,1)).}$

9.12.4.8 现在我们可以给出 $n-1$ 维球面 $S_n(0,1)$ 的体积了(参看 9.12.7, 12.10.8 以及 [B-G] 第 226 页以后), 并把 $\mathbf{R}^n$ 的 $n-1$ 维单位球面 S^{n-1} 的体积记为 $\alpha(n)$. 我们首先有

$$\boxed{\alpha(n)=n\beta(n)}\qquad 对任意的\ n.$$

因此

$$\boxed{\begin{aligned}&\alpha(2d)=\frac{2\pi^d}{(d-1)!},\\&\alpha(2d+1)=\frac{2^{d+1}\pi^d}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2d-1)}.\end{aligned}}$$

9.12.4.9 正交射影. 设 H,H' 是 X 的两个超平面,

$$\alpha=(\vec{H})^\perp,(\vec{H}')^\perp\in[0,\pi/2].$$

设 $p: H' \to H$ 是正交射影 $p: X \to H$ 在 H' 上的限制，那么对于在 H 和 H' 里的体积以及对于 H' 的任一紧子集 K，总有

$$\mathfrak{L}_H(p(K)) = \cos\alpha \cdot \mathfrak{L}_{H'}(K).$$

为了看出这一等式，只需在 H' 内取一个标准正交标架使得其中的 $n-1$ 个向量包含在 $\vec{H} \cap \vec{H}^1$ 内.

9.12.5 体积与 Hausdorff 距离

即使在紧子集上也不能以为体积映射 $\mathfrak{L}: \mathscr{K} \to \mathbf{R}$ 就是很简单的映射. 举例来说,存在 $\mathbf{R}^2$ 的紧子集 K,它的边界 $Fr(K)$ 不仅有面积 $\mathfrak{L}(Fr(K)) \neq 0$，而且在每个点上都有面积：请在 [G-O] 的第 135 页找到这样的例子. 函数 $\mathfrak{L}: \mathscr{K} \to \mathbf{R}$ 当然不是连续的，否则由有限集的体积等于 0 可得出所有紧子集的体积都将等于 0 (参见 9.11.3). 不过

9.12.5.1 命题. $\mathfrak{L}: \mathscr{K} \to R$ 是上半连续的.

在 $\mathscr{K}$ 内设 $F = \lim\limits_{n\to\infty} F_n$，则 $\limsup\limits_{n\to\infty} \chi_{F_n} \leqslant \chi_F$. 事实上设 $x \in X \backslash F$，那么存在 n_0 使得 $\delta(F, F_n) \leqslant d(x, F) \forall n \geqslant n_0$. 于是

$$\chi_{F_n}(x) = 0 \quad \forall n \geqslant n_0.$$

9.12.5.2 附注. 反之，在 12.9.3.4 将看到限制在凸紧集时 $\mathfrak{L}$ 是连续的.



图 9.12.5.1.

9.12.6 重心. 设 K 是欧氏仿射空间 X 的紧子集，而且有非空内部：$\mathring{K} \neq \emptyset$，设 $g = \text{cent}'(K)$ 是它的重心 (参看 2.7.5.2)，则 9.7.6.1 可推广为(这里把所有的 λ_i 取为 1)

9.12.6.1 $\forall x \in X: \int_{a\in X} \chi_K xa^2\mu = \int_{a\in X} \chi_K ga^2\mu + \mathfrak{L}(K)xg^2.$

作为证明只须写下以下等式:

$$xa^2 = xg^2 + 2(\overrightarrow{xg}|\overrightarrow{ga}) + ga^2.$$

如果取任意的 $\lambda_i \geqslant 0$，9.7.6.1 的公式推广时要在 K 上取一个任意的正测度．如果 K 的总质量非零，就可用以下的向量积分定义 K 关于 θ 的重心 g:

$$g = x + \frac{\int_{a\in K} \overrightarrow{xa}\theta}{\int_{a\in K} \theta},$$

它与 $x \in K$ 无关．这样就有公式

9.12.6.2 $\forall x \in X$: $\int_{a\in K} xa^2\theta = \int_{a\in K} ga^2\theta + \left(\int_{a\in K}\theta\right) xg^2.$

9.12.6.3 附注． 在大自然中常常会遇到测度 θ，例如对于欧氏平面或 3 维欧氏仿射空间的曲线和曲面，我们使用它们的典范测度，参看 [B-G] 第 221 页．

公式 9.12.6.1 及 9.12.6.2 表明函数

$$x \longmapsto \int_{a\in K} xa^2\theta$$

在 g、并且仅仅在 g 达到极小． 在力学上可用惯量矩解释这一结果：这个极小性意味着如果你想用最小的力气使一个物体绕一点转动，那就应该把这一点取在 g 点．这是有很大实际意义的原理．

在体积与重心间的一个漂亮的关系请参看 12.12.20.9．关于计算面积的力学方法请参看 [GK] 第 72 页以后．

9.12.7 k 维体积． 如果 C 是 $\mathbf{R}^3$ 的曲线，S^2 是单位球面，那么它们的体积 $\mathfrak{L}(C)$，$\mathfrak{L}(S^2)$ 都是零． 但是对 C 来说合适的概念应该是 9.9 所定义的长度（至少当 C 是它的定义区间的同胚像时可以如此做），对 S^2 来说是它的面积（它等于 4π！）．可参看 18.3.7．推而广之，我们希望能定义 X 的"k 维"子集并对这些子集定义"k 维体积"（当 $k=2$ 时就是面积，$k=1$ 时就是长度）．虽然这是一个相当自然的问题，但一般说来这也是很困难的问题．不妨想一想表面的涂漆；关于这一思想的阐发，请参看 12.10.7．

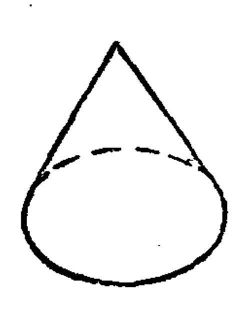
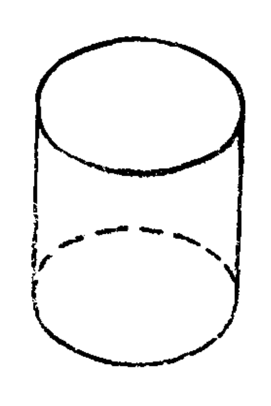
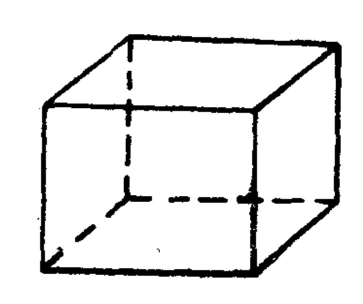




图 9.12.7.

如果涉及到的是X的 C^1 类微分子流形，那么这个理论不会遇到任何困难：这一类子流形容有一个典范测度，因而当它是紧集时，它有总质量．如果子流形是k维的，这个总质量就是子流形的k体积．详情可参看 [B-G] 第 221 页．反之，如果想跳出这个限制性相当强的框框（举例来说，它把立体锥面也排斥在外），也就是说允许某种程度的奇性的话，那么当 $2 \leqslant k < n = \dim X$ 时k维体积的概念不再是唯一的．实际上，存在好几种有本质区别的k维体积的概念． 关于这个问题的完整介绍可参看 [FR]，特别是第 171—174 页给出了七种k维测度．当 $k = n = \dim X$ 时，这些测度都与体积相同，当涉及到（任意维数的）紧微分子流形时，这些k维测度都与前面定义的测度相重合．

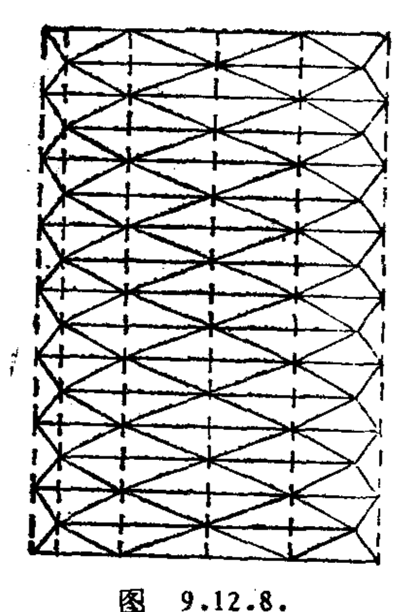


图 9.12.8.

原图取自 Berger-Gostiaux 著的《微分几何》.

以后我们将遇到要作深入探讨的特殊情形：紧凸形的边界．它具有被简称为面积的典范 $(n-1)$ 维体积．其构造方法如下：在 12.3 节先给出多胞形的面积，然后在 12.10 节再用多胞形逼近凸形． 至于球面的情形也可参看 18.3.7.

为了使读者体会到当 $k=2$, $n=3$ 时就会遇到困难，提一下折纸灯笼L这个经典例子也许是有用的．如果我们想采用研究曲线时使用的方法，就会想到用多边形逼近L，如图

9.12.8 所示．不幸的是，随着水平截段的个数以及正多边形的边数趋向无穷大的方式发生变化，其面积的极限也在发生变化，它可取到介于柱面面积(真正的面积!)与无穷大之间的任一实数．

9.13 Steiner 对称

这是把 X 的一个紧子集变为另一个紧子集的一种运算，这个变换在证明涉及 X 的紧子集的某些不等式时起着主要作用：参见 9.13.8，但主要用于第 12 章末尾．我们在这里除了欣赏这个优美的变换外，还要研究在 12 章要用到的这个变换的一些性质．

9.13.1 定义． 取定一个欧氏仿射空间 X，以及 X 的超平面 H，并用 σ_H 表示关于 H 的对称 (见 9.2.4)．设 K 是 X 的一个紧子集，我们要定义一个被称为 K 关于 H 的 Steiner 对称集的新的紧子集，记为 $\mathrm{st}_H(K)$．这个紧子集 $K'=\mathrm{st}_H(K)$ 由以下条件确定：

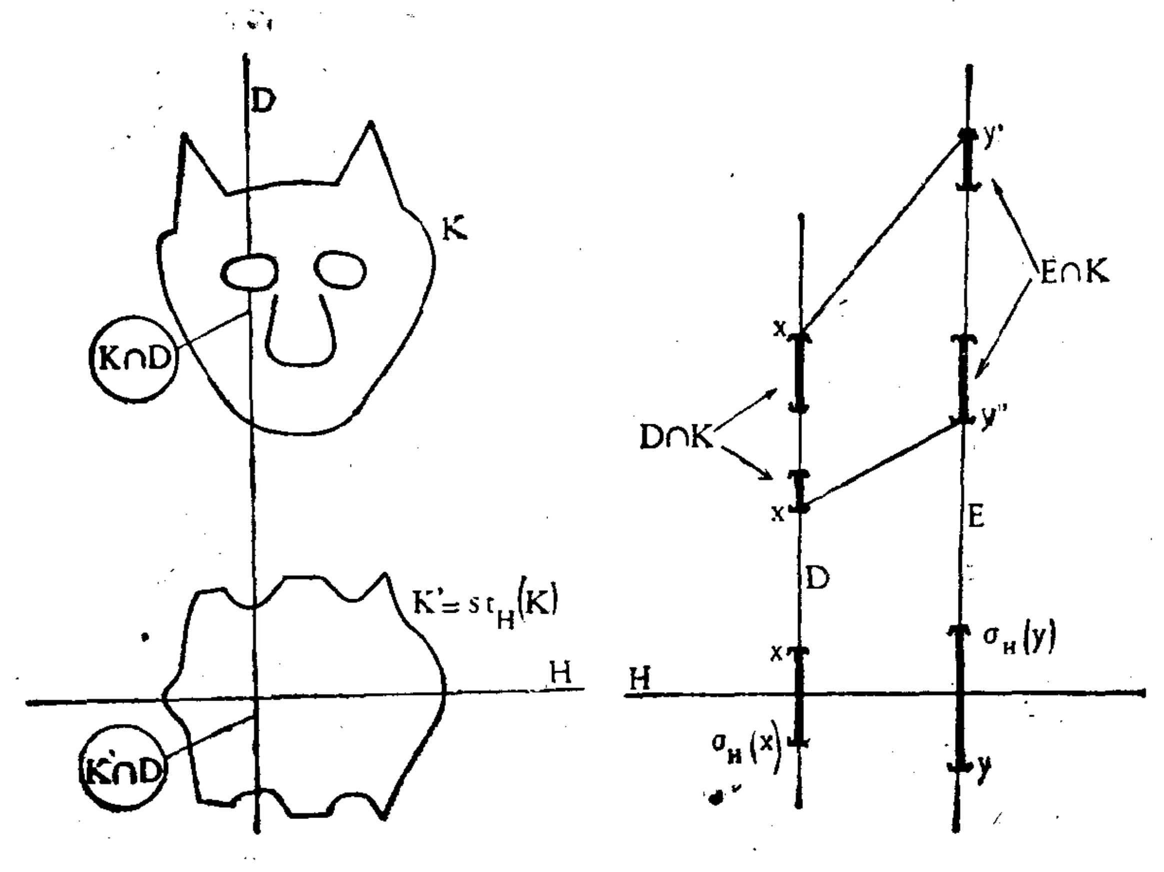


图 9.13.2　　　图 9.13.4

9.13.2

$$\forall \text{ 正交于} H \text{的直线} D \begin{cases} \text{如} K\cap D=\varnothing\text{，则} K'\cap D=\varnothing\text{，} \\ \text{如} K\cap D\neq\varnothing\text{，则} K'\cap D \text{是} D \text{上的线段，} \\ \text{其中点在} D\cap H \text{上，其长度等于 } K\cap D \\ \text{在} D \text{上的长。} \end{cases}$$

9.13.3 注. 请注意 $\mathrm{st}_H: \mathscr{K} \to \mathscr{K}$ 不是连续的(关于 Hausdorff 距离)，这可从图 9.13.3 看出：当一条线段向垂直位置旋转时，它的 Steiner 对称集总是留在H上，不过变得越来越短，但当原始线段转到垂直位置时，其对称集突然变成一条垂直线段。

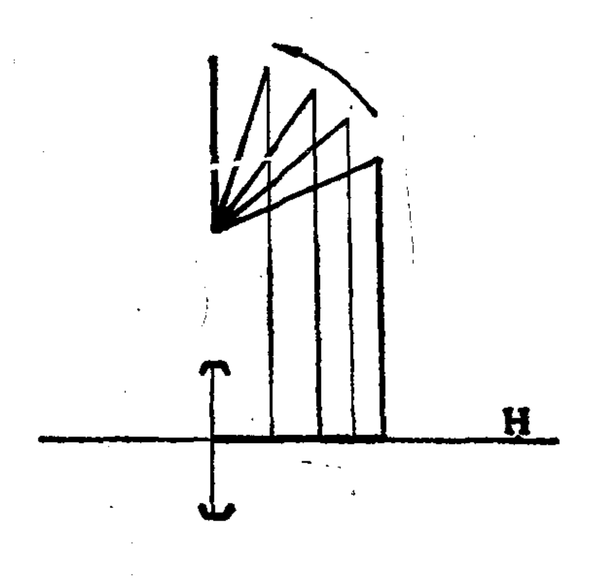


图 9.13.3.

9.13.4 命题. 对所有的 H，K，有以下性质：

(i) $\sigma_H(\mathrm{st}_H(K)) = \mathrm{st}_H(K)$；

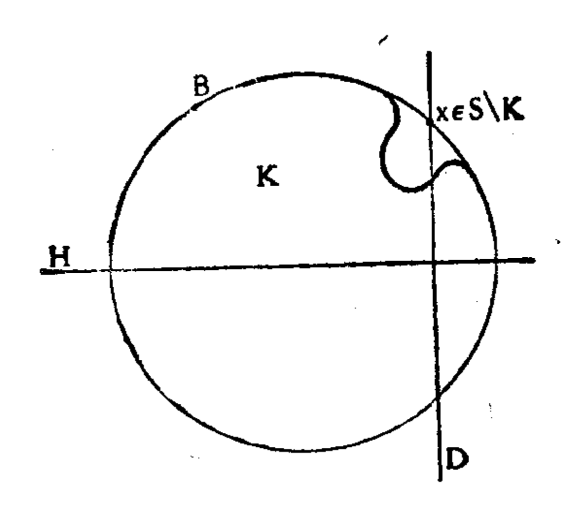
(ii) $\mathfrak{L}(\mathrm{st}_H(K)) = \mathfrak{L}(K)$，即对称集保持体积；

(iii) $\mathrm{diam}\,(\mathrm{st}_H\,(K)) \leqslant \mathrm{diam}\,(K)$，即对称集不增加直径。

性质 (i) 可从定义得出. (ii) 可从 9.12.3 以及 Fubini 定理得出. 现在设 x，$y \in \mathrm{st}_H(K)$ 使得

$$xy = \mathrm{diam}(\mathrm{st}_H\,(K)),$$

设 D，E 是过 x 或 y 的与H正交的直线. 根据 $\mathrm{st}_H(.)$ 的定义，紧子集$D\cap K$(相应地：$E\cap K$)的端点 x' 及 x''(相应地：y' 及 y'')有不等式 $x'x'' \geqslant x\sigma_H(x)$(相应地：$y'y'' \geqslant y\sigma_H(y)$). 不过 $xy \leqslant$



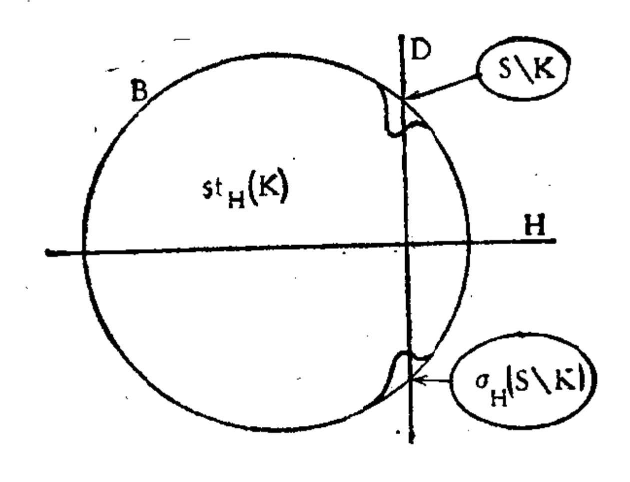


图 9.13.5.

sup $(x'y', x'y'', x''y', x''y'')$. 以下的引理可从 9.13.2 以及图 9.13.5 得出。

9.13.5 引理. 设 B 是以球面 S 为边界的球，H 是包含 B 的中心的超平面，K 是含于 B 内的紧集，则

$$\mathrm{st}_H(K)\cap[(S\backslash K)\cup(\sigma_H(S\backslash K))]=\emptyset.$$

下述定理主要用于 9.13.8 及 12.11.2. 这是在一族紧集内构造一个球的方法。

9.13.6 定理 (Blaschke 旋转定理). 设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{K}=\mathscr{K}(X)$ 的非空子集使得 $\mathscr{F}$ 对于 Hausdorff 度量是闭的并且在点 $a\in X$ 处关于 Steiner 对称集是稳定的，即 $\forall$ 超平面 $H\ni a$ 以及 $\forall K\in\mathscr{F}$，总有 $\mathrm{st}_H(K)\in\mathscr{F}$. 那么或者 $\{a\}\in\mathscr{F}$，或者存在 $r>0$ 使得 $B(a,r)\in\mathscr{F}$.

请注意，$\{a\}\in\mathscr{F}$ 的情形是很容易发生的。甚至当一开始没有什么点的时候，也是如此。譬如说把 9.13.3 例子中的线段族关于 Hausdorff 度量及对称集变换作封闭族，就能得到 $\{a\}\in\mathscr{F}$.

现在令 $r=\inf\{s:\exists F\in\mathscr{F}\mid B(a,s)\supset F\}$，观察（参看9.11.4）$\mathscr{F}'=K_{a,r+1}(X)\cap\mathscr{F}$. 根据假设条件及 9.11.4，这是紧集，因此存在 $F\in\mathscr{F}'$ 使得 $F\subset B(a,r)$；如果 $r=0$，则 $F=\{a\}$. 我们分两步证明当 $r>0$ 时 $F=B(a,r)$.

9.13.6.1 第一步：$F\supset S=S(a,r)$. 这里要利用 r 的定义的极小性。我们采用归谬法。设 $b\in S$，$\varepsilon>0$，使得 $B(b,\varepsilon)\cap F=\emptyset$. 我们将作出一个 $F_n\in\mathscr{F}$ 使得 $F_n\cap S=\emptyset$，这样就跟 r 的定义矛盾。首先可作一系列的 b_i，使得 $b_1=b$，$B(b_i,\varepsilon)\cap B(b_{i+1},\varepsilon)\cap S\neq\emptyset$ 对所有的 $i=1,2,\cdots$ 都成立。经过有限 n 步后，就可覆盖 S：

$$S\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(b_i,\varepsilon).$$

有了这些 b_i 后，就可作出 b 与 b_i 间的垂直平分超平面 H_i，并用递推的方法定义 F_i 为：$F_1=F$，$F_i=\mathrm{st}_{H_i}(F_{i-1})(i=2,\cdots,n-1)$. 引理 9.13.5 表明 $F_n\cap S=\emptyset$，从构造的方法可知 $F_n\in\mathscr{F}$，这正是要作的 F_n.

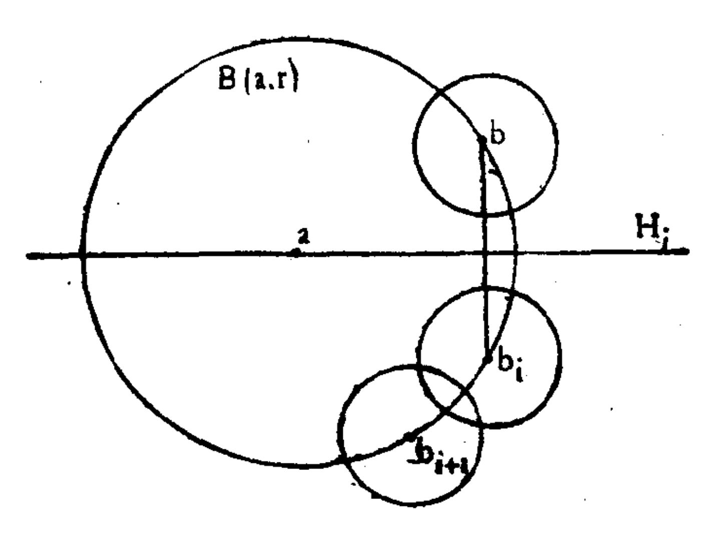


图 9.13.6.1.

9.13.6.2 第二步：$F = B(a,r)$. 我们使用归谬法．设 $x \in B(a,r) \setminus F$．任取一条过 x 的直线 D，设 H 是过 a 正交于 D 的超平面．因 $F \subset B(a,r)$，$D \cap F$ 的长严格小于 $D \cap B(a,r)$ 的长，因而 $\mathrm{st}_H(F)$ 不能包含整个 S．但是 $\mathrm{st}_H(F) \in \mathscr{F}$，根据第一步的结论应该有 $\mathrm{st}_H(F) \supset S$.

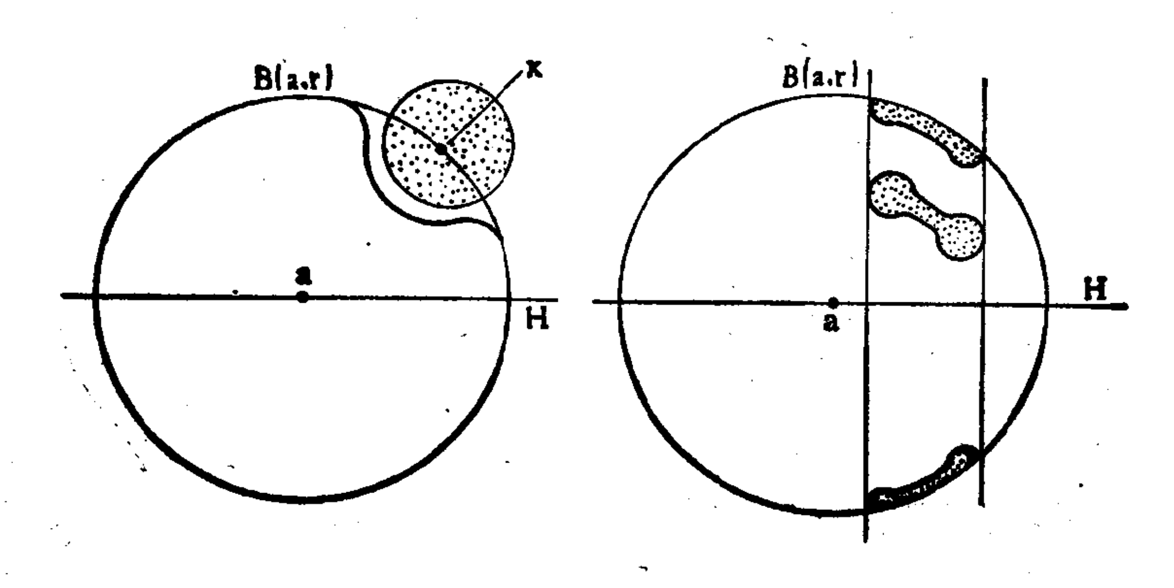


图 9.13.6.2.

9.13.7 附注． 有一个较古老的证明也许较直观些，但要用确切的数学语言写出来却十分困难：考察过 a 的有限多个线性无关超平面 H_i，它们之间的夹角是无理角，则 σ_{H_i} 在 $\mathrm{Is}_a(X)$ 内生成的群在 $\mathrm{Is}_a(X)$ 内稠密，因此 $\mathscr{F}$ 包含一个以 a 为中心的球．

9.13.8 推论（Bieberbach 等直径不等式）． 对于 n 维欧氏空间 X 的任一紧集 K，有

$$\mathfrak{L}(K) \leqslant 2^{-n}\beta(n)(\mathrm{diam}\,(K))^n \quad （参见 9.12.4.5）.$$

如果 $\mathfrak{L}(K) = 0$ 就没有什么要证．否则，令

$$\mathscr{F} = \{G \in \mathscr{K} : \mathfrak{L}(G) \geqslant \mathfrak{L}(K)，并且\ \mathrm{diam}(G) \leqslant \mathrm{diam}(K)\}.$$

根据 9.11.5, 9.13.4 以及 9.13.6（应用到任意一个 $a \in X$），或者有 $\{a\} \in \mathscr{F}$，或者 $\mathscr{F}$ 包含一个球 $B(a,r)$，$r > 0$．第一种情况由 $\mathfrak{L}(K) > 0$ 可知不可能．因此必须有 $\mathfrak{L}(B(a,r)) = \beta(n)r^n \geqslant \mathfrak{L}(K)$ 以及

$$\mathrm{diam}\,(B(a,r)) = 2r \leqslant \mathrm{diam}\,(K),$$

由于 $r>0$，上述不等式能推导得 9.13.8.

9.13.9 注. 需要注意的是，一般说来紧集K不被包含在以 $\text{diam}(K)/2$ 为半径的球内. 等边三角形就是一例.

当K是球时，等直径不等式变成等式. 反之亦对，但证明要困难得多。参看 [EN] 第 106—107 页.

关于 Steiner 对称集的应用及推广，除 12.11 外可再参看 [P-S].

9.14 练　　习

9.14.1 把 9.2.6.5 推广到两个任意子空间的情形.

9.14.2 在一个适当选取的标架里，写出 3 维空间里以下点集的方程 $f(x, y, z)=0$: $\{t: d(t, A)=d(t, B)\}$，其中 A, B 分别是：两条直线；一条直线与一个点；一条直线及一个平面；一个点及一个平面；两个平面. 利用 15.3 及 15.6 的符号，说明所得集合的类型. 如果把等式改成 $d(t, A)=kd(t, B)$，会得出什么结果？

9.14.3 角平分线. 设 D, D' 是平面上两条不平行直线，证明 $\{x\in X: d(x, D)=d(x, D')\}$ 由D和D'的两条角平分线组成(参见 8.7.3.2). 当X不再是平面时，参看 9.14.2.

9.14.4 对于欧氏仿射空间 X，试确定满足下述条件的所有 $f\in GA(X)$: $f^2=f$ 并且 f 使距离缩短，即 $f(x)f(y)\leqslant xy$ $\forall x, y\in X$.

9.14.5 证明如果X是已定向的三维空间，那么对于以定向直线为轴的X的旋转，总可定义一个定向角，它能毫无歧义地刻划这个旋转(见 9.3.5).

9.14.6 设X是三维空间，(a_i), $(a'_i)(i=1, 2, 3)$ 是X的六个点，使得 $a_ia_j=a'_ia'_j$ $\forall i, j=1, 2, 3$. 证明当 a_i 为仿射无关时必存在唯一的 $f\in Is^+(X)$ (或 $Is^-(X)$)，使得 $f(a_i)=a'_i\,\forall i$. 并用几何方法找出 f 的特征元素(见 9.3.5).

9.14.7 连续螺旋运动. 设X是三维欧氏仿射空间，$f: \mathbf{R}\to Is(X)$ 是一个映射，经适当选取标准正交标架后，存在数 k 及 h，使得 f

可写成

$$f(t):(x, y, z)\longmapsto(\cos kt\cdot x+\sin kt\cdot y,\\ -\sin kt\cdot x+\cos kt\cdot y, z+ht),$$

就称这样的 f 为 X 的连续螺旋运动:

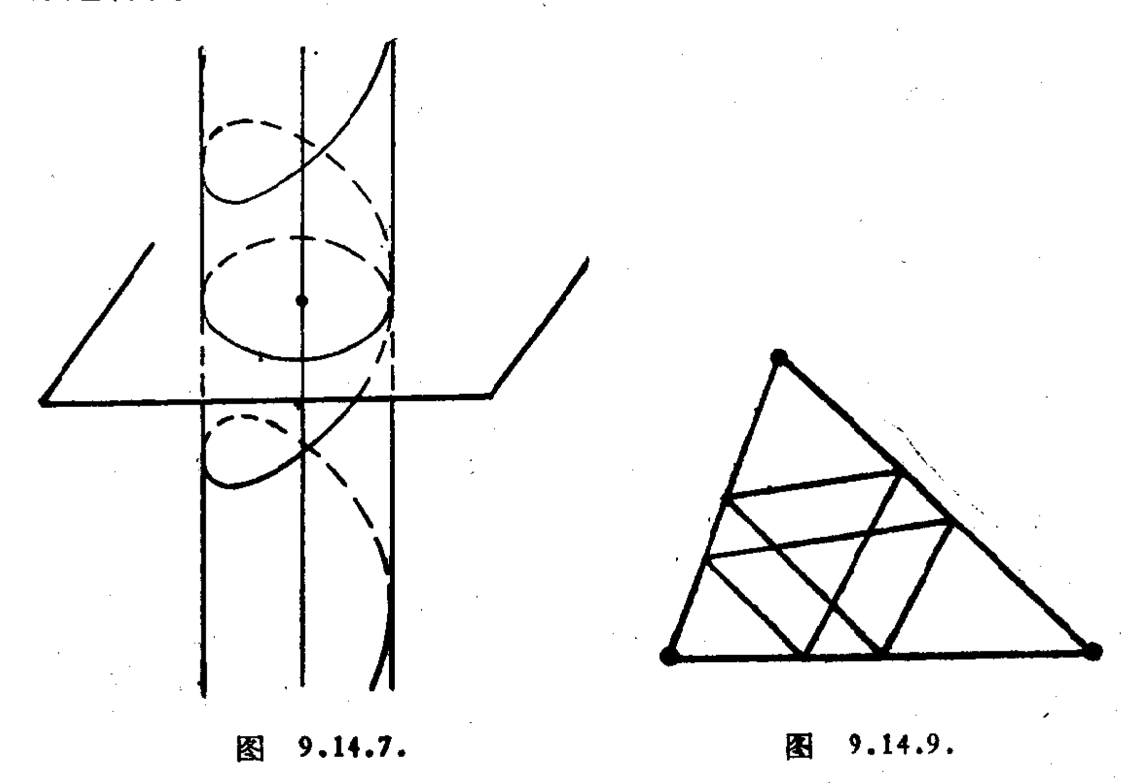


图 9.14.7.　　　　图 9.14.9.

试证对于任意一个 C^1 类映射 $g: \mathbf{R}\to \mathrm{Is}(X)$ (必要时把 $\mathrm{Is}(X)$ 嵌入 $\mathrm{GA}(X)$ 以在 $\mathrm{Is}(X)$ 内定义可微性),存在连续螺旋运动 f,使得 $(g-f)'(0)=0$. 当 g 是由 X 的一条曲线的活动三棱形所确定的映射时,请给出上述连续螺旋运动. 请参见 [BE] 第 120 页.

9.14.8 证明 9.4.2.3 的等距变换 f 绝不是 Id_X. 关于这一主题,请对 [GR] 第 179 页以后作批评性研究.

9.14.9 研究作 k 圈闭合运动的弹子轨道. 根据 k 以及多边形边数的变化进行讨论(参见 [GR] 第 276 页上画得很好的图).

9.14.10 对于顶点共圆的四边形的极小周长内接多边形的性质作完整的讨论.

9.14.11 证明长方形的弹子盘永不会是强遍历的,但总是弱遍历的. 证明等边三角形不是强遍历的.

9.14.12 研究三维空间中相似变换的结构.

9.14.13 设 $n=2$, a, a', b, b' 是四个点,其中 $a\neq b$, $a'\neq b'$. 证明在 $\mathrm{Sim}^-(X)$ 内存在唯一的 f, 使得 $f(a)=a'$, $f(b)=b'$, 并作出其中心及轴.

9.14.14 请利用 9.7.6.5 给出一个与 9.6.2 不同的方法作出 $f\in\mathrm{Sim}^+(X)$ (或 $\mathrm{Sim}^-(X)$) 使得 $f(a)=a'$, $f(b)=b'$.

9.14.15 **调和四边形.** 设 x, y, z, t 是欧氏平面上满足 $[x, y, z, t]=-1$ (见 9.6.5.2) 的四个点. 把 x, y 及 z, t 的中点分别记为 a 及 b. 证明: x, y, z, t 是共圆的; $\langle x, y\rangle$ 的极点属于 $\langle z, t\rangle$; $\langle x, y\rangle$ 是 $\langle a, z\rangle$, $\langle a, t\rangle$ 的角平分线; $az\cdot at=ax^2=ay^2$; $xy\cdot zt=xz\cdot yt+xt\cdot yz$ 以及 $az+at=bx+by$. 证明如果 u 是 $\langle x, y\rangle$ 与 $\langle z, t\rangle$ 的交点,则

$$\frac{ux}{uy}=\left(\frac{zx}{zy}\right)^2=\left(\frac{tx}{ty}\right)^2,\quad \frac{uz}{ut}=\left(\frac{xz}{xt}\right)^2=\left(\frac{yz}{yt}\right)^2.$$

请给出逆命题并加以证明. 再证反演变换 (见 10.8) 把调和四边形变成调和四边形.

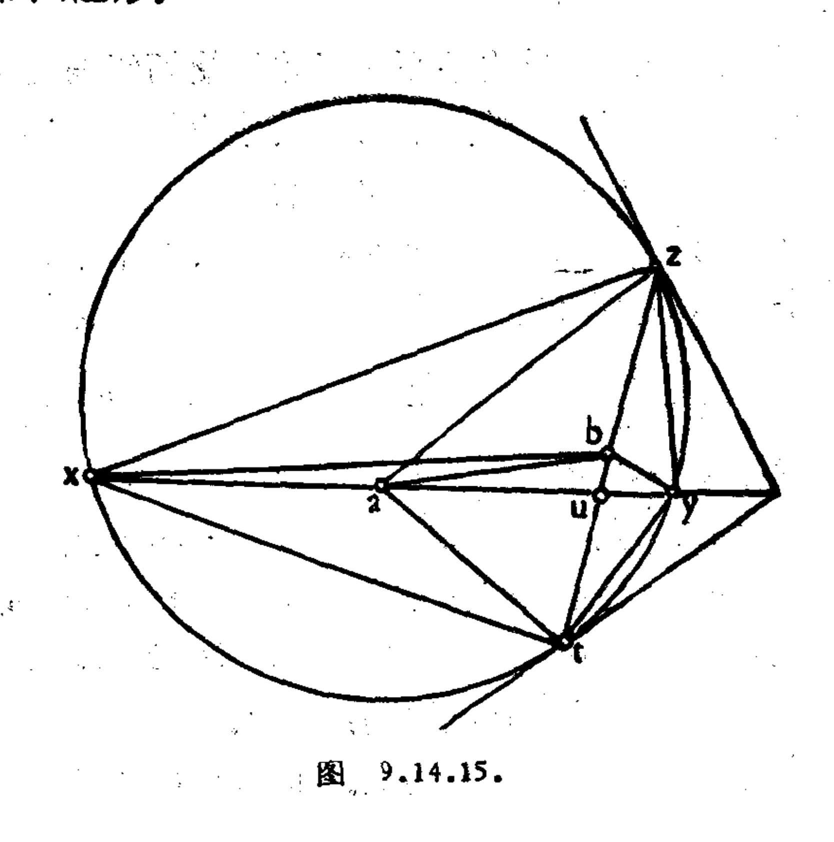


图 9.14.15.

9.14.16 求作三角形的内接正方形. 见下图.

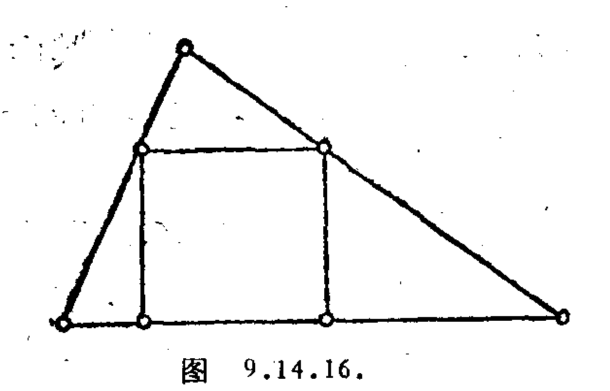


图 9.14.16.

9.14.17 按照两个圆周的相对位置讨论 9.6.8.3 中的蚶线的相对位置及形状.

9.14.18 根据点 a 关于圆周的位置变化,讨论图 9.6.8.1 的蚶线的凹性(可以利用极坐标,由其中的公式可得出关于极点的凹性).

9.14.19 设 C 和 C' 是欧氏平面 X 的两个子集,使得对任意的 α 总存在角 α 的相似变换 f,使 $f(C)=C'$. 问对 C 和 C' 能说些什么?

9.14.20 除了 9.6.9.1 的映射外是否存在既是群同态又是可微分的映射 $\mathbf{R}\to Sim_\alpha^+(X)$?

9.14.21 **对数螺线.** 怎样的平面曲线才能使切线与切点到定点连线间的夹角等于常角? 怎样的平面曲线才能使曲率半径与弧长成比例? 对数螺线能否是它自己的法线的包络?

9.14.22 **Pascal 蚶线, Descartes 卵形线与无球差折光面.** 设 u, v 是两个点, S 是以 $\langle u, v\rangle$ 为轴的迴转曲面. 证明要使作为满足 Descartes 法则 $\dfrac{\sin i}{\sin r}=$ 常数的折光面 S 关于 u 和 v 是完全无球差的,就必须使 S 的点 x 满足形如 $a\cdot xu+b\cdot xv=c(a, b, c\in\mathbf{R})$ 的关系式. 我们把形如 $\{x\in X: a\cdot xu+b\cdot xv=c\}(u, v\in X, a, b, c\in\mathbf{R}$ 已给)的平面曲线称为 Descartes 卵形线. 证明 Pascal 蚶线是 Descartes 卵形线. 研究 Descartes 卵形线的形状. 如要知道更多的细节,请参看 [BP].

9.14.23 **Cayley-Menger 行列式.** 证明 Γ 总是满足以下关系式的:

$$\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1})\Gamma(x_0, x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_k)=$$

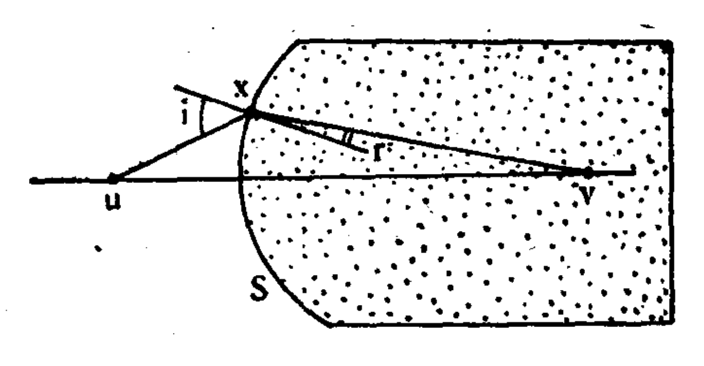


图 9.14.22.

$$= M_{ik}^2 + \Gamma(x_0, x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{k-1})\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_k),$$

其中 M_{ik} 是 Γ 的元素 d_{ik}^2 的余子式．从这个关系式推导出：如果 $\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_k) \neq 0$ 且符号是 $(-1)^{k+1}$，则所有的 $\Gamma(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h})(i_1 < \cdots < i_h,\ h = 2, \cdots, k)$ 是非零的而且符号是 $(-1)^h$．证明存在 X 的点 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,k}$ 满足 $x_ix_j = d_{ij}\ \forall i, j = 0, 1, \cdots, k$ 的充要条件是对于所有的 h 以及 (x_i) 的所有含 h 个元素的子族，相伴的 Γ 或等于 0 或者符号是 $(-1)^h$．

9.14.24 给出一个使 9.13.6 中不可能有 $\{a\} \in \mathscr{F}$ 的简单判则．

9.14.25 Sylvester 定理． 设 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 是实仿射平面内不在同一直线上的 n 个点．证明存在一条直线恰好只含其中两个点（可赋予这个平面以欧氏结构，再考虑 $d(x_i, \langle x_j, x_k\rangle)$ 的下界，其中 $i, j, k = 1, \cdots, n$ 且互不相同）．

9.14.26 找出 $f \in \mathrm{Is}(X)$ 以及 X 的一个有界子集 A，使得 $f(A) \subset A$，$f(A) \neq A$．证明如果 A 是紧的，则 $f(A) \subset A$ 可导致 $f(A) = A$．

9.14.27 试证 $\mathrm{Is}_A(X) \subset \mathrm{Is}_{\mathcal{A}}(X)$，并给出使这两个群不相同的例．

9.14.28 给出无界或有限子集 A，使得 $\mathrm{Is}_A(X)$ 成为紧集或有限集．

9.14.29 平面的格． $\mathbf{R}^2$ 的格就是形如 $\mathbf{Z}x + \mathbf{Z}y$ 的子集，其中 x, y 线性无关（见 1.7.5.2）；证明 $\mathbf{R}^2$ 的任意一个格 Λ 都相似于唯一的形如 $\mathbf{Z}u + \mathbf{Z}v$ 的格，其中 $u = (1, 0)$，v 属于下述区域：

$$\mathscr{D} = \left\{(a, b) : 0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2},\ a^2 + b^2 \geqslant 1,\ b > 0\right\}.$$

按照 v 在 $\mathscr{D}$ 内的位置对 $\mathrm{Is}_\Lambda(\mathbf{R}^2)$ 作讨论。 证明如果 $\mathbf{R}^2$ 的两个格 Λ, Λ' 使得

$$\#\{x\in\Lambda:\|x\|=r\}=\#\{x\in\Lambda':\|x\|=r\}\quad\forall r\in\mathbf{R}_+,$$

则它们必定是等距的(对任意维数的格来说,后一结果是错的. 参见 [SE2] 第 177 页第 4 至第 8 行).

9.14.30 内蕴度量. 证明 9.9.7.1. 设 (M,d) 是如下的度量空间: 其中 d 是由 X 在子集 M 上诱导的距离, M 是以 O 为顶点的锥面,它包含平面 P 上由 9.9.3.3 定义的曲线,其中 P 不包含 O 点. 试研究度量 $\bar{d}$. 用一个例子证明如果 (M,d) 使得 $\bar{d}$ 仍是一个距离,那么 $(M,\bar{d})$ 的拓扑仍然可能异于 (M,d) 的拓扑.

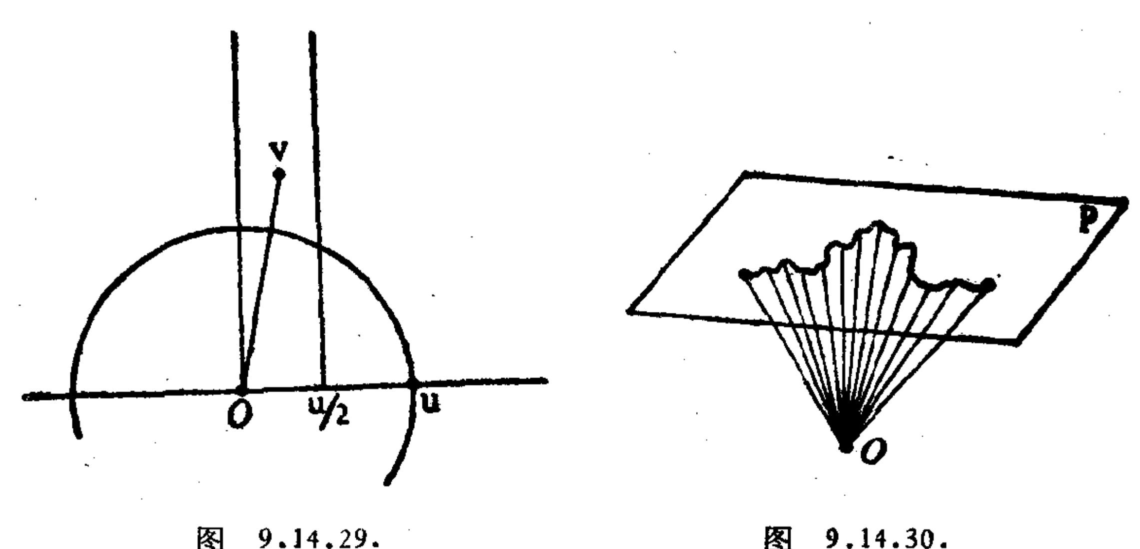


图 9.14.29.　　　　图 9.14.30.

9.14.31 Menger 曲率. 设 f 是欧氏空间的 C^2 类正则曲线, x, y, z 是 f 上三个不同点,置

$$K(x,y,z)=\frac{\sqrt{(xy+yz+zx)(xy+yz-zx)(xy-yz+zx)(-xy+yz+zx)}}{xy\cdot yz\cdot zx}$$

(见 10.3.4).

证明当 y, z 趋向 f 的点 x 时, $K(x,y,z)$ 的极限就是 f 在 x 点的微分几何意义下的曲率(参看 [B-G], 8.4). 给出 C^1 类正则曲线的例子,使得 $K(x,y,z)$ 当 y, z 趋于 x 时无极限或趋向无穷.

9.14.32 (这个练习是选做题,因为作者和出版者都不能负担其费

用)请到巴塞尔大教堂去，观察一下刻在 Bernouilli 墓上的螺线，确定其是否是对数螺线。

9.14.33 设 C 是欧氏平面的严格凸的 C^1 类曲线。证明对任意的 n 至少存在一个内接于 C 的 n 边光线多边形。

9.14.34 内摆线与外摆线(或"螺旋虫"玩具)。

9.14.34.1 定义. 设在欧氏平面上有两个圆周 Γ 和 Γ'，它们的半径之比是有理数，在 Γ' 上取定一点，使 Γ' 沿着 Γ 作无滑动滚动时，这个定点描出的轨迹 C 就称为摆线. 当 Γ' 在 Γ 内部时，称为内摆线，当 Γ' 在 Γ 外部时，称为外摆线. 根据此有理数的取值研究 C 的形状。问 C 的尖点数是多少？

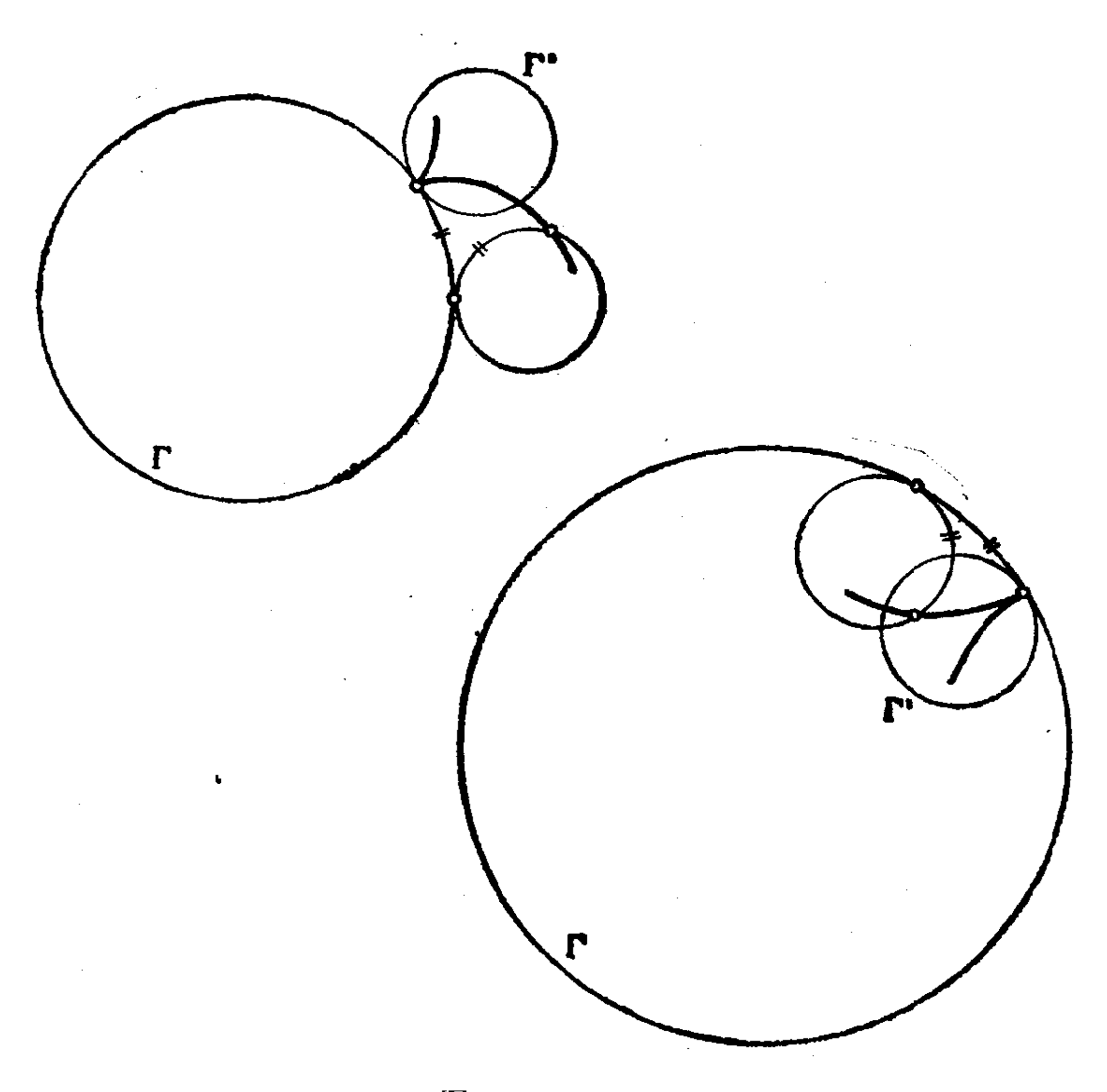


图 9.14.34.1.

9.14.34.2 等价定义. 设 Σ 是 $\mathbf{R}^2=\mathbf{C}$ 的单位圆周，r 是非零有理数. 试证当 θ 跑遍 $\mathbf{R}$ 时，连接点 $e^{i\theta}$ 和 $e^{ir\theta}$ 的直线 $D(\theta)$ 的包络就是外摆线或内摆线. 随着 r 的变化讨论它的性质（内摆线？外摆线？尖点数等…）. 这样能否得到所有的内摆线及外摆线？

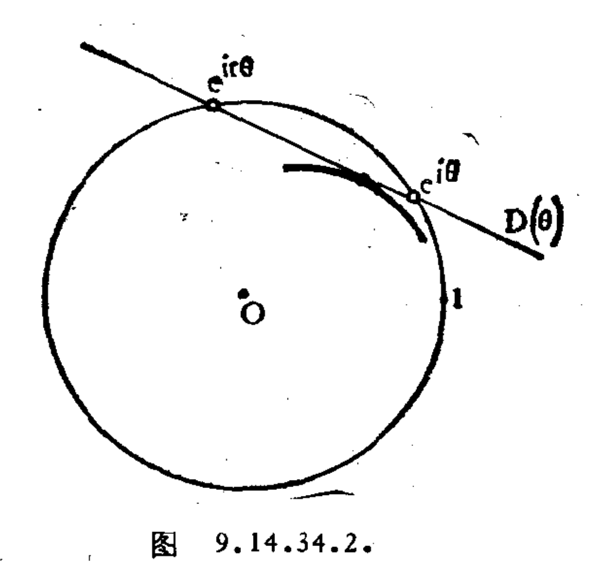


图 9.14.34.2.

9.14.34.3 例

A）当 Γ' 的半径是 Γ 半径之半并且 Γ' 在 Γ 内滚动时可得到怎样的曲线？(Lahire 齿轮机构).

B）试证当 Γ' 与 Γ 有相同半径并且在外部滚动时，就可得到一种 Pascal 蚶线，称为心脏线. 设 a 是平面上一点，D 是平面上

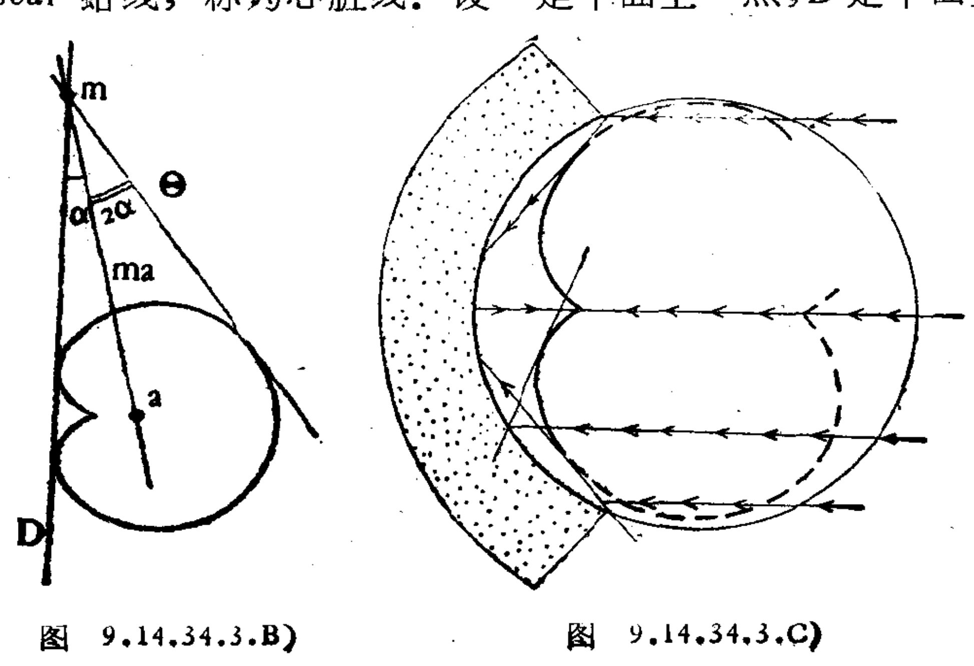


图 9.14.34.3.B)　　图 9.14.34.3.C)

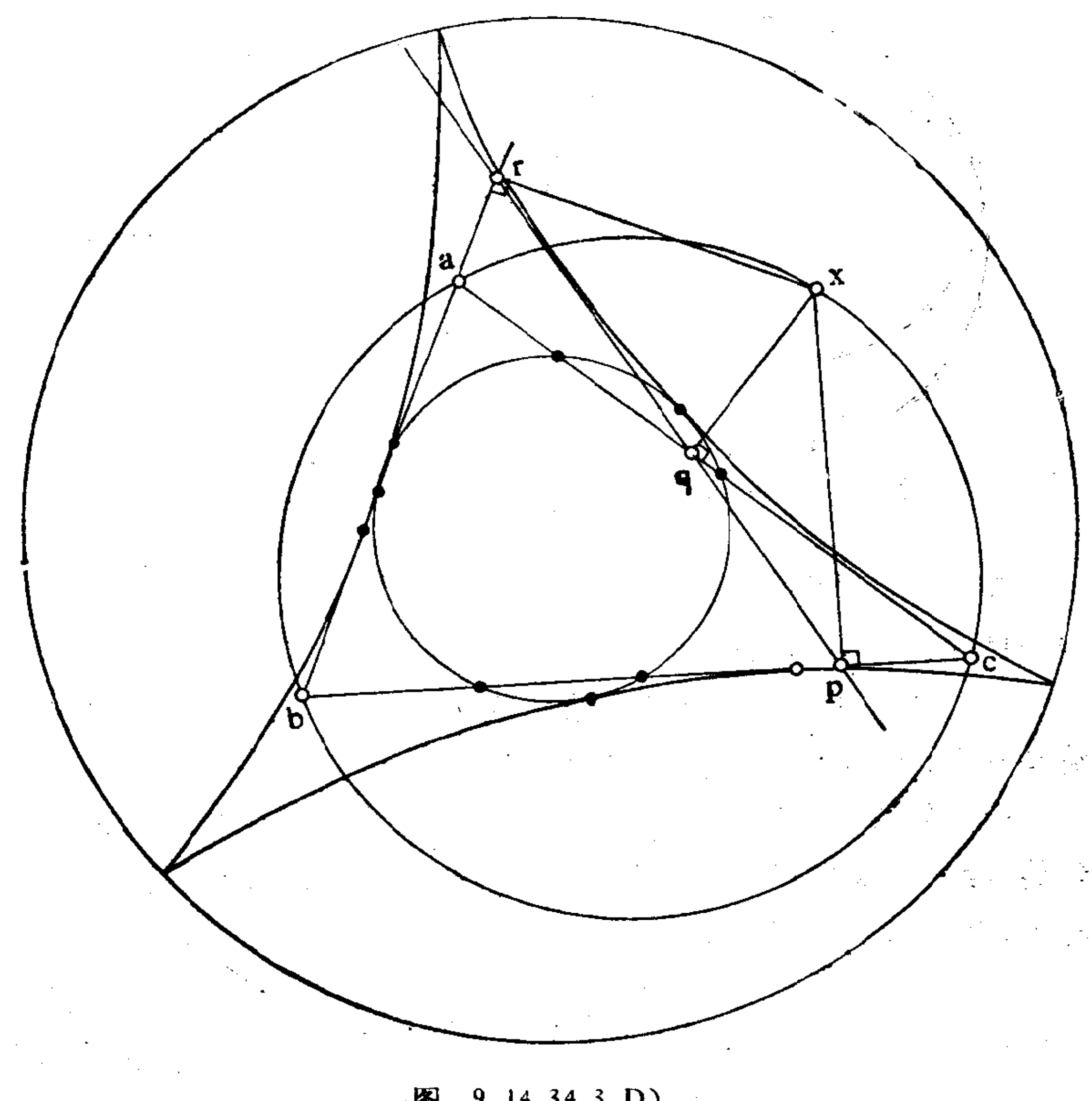


图 9.14.34.3.D)

一直线，$a \notin D$. 试证当 m 跑遍 D 时，由条件 $m \in \Theta$ 以及 $\widehat{D\Theta} = 3\,\widehat{ma, D}$ 所确定的直线 Θ 可包络出一条心脏线. 称 a 为这条心脏线的中心。

C) 证明平面球镜的焦散面（即与轴平行的光线的反射线的包络）是有两个尖点的外摆线的一段（称为肾脏线）。

D) 设 $\mathscr{C}$ 是一个三角形，当一个点在 $\mathscr{C}$ 的外接圆上移动时，试证 Simson 直线的包络（参看 10.4.5.5 及 10.9.7.1）是有三个尖点的内摆线，它与 $\mathscr{C}$ 的九点圆相切于三点（参见 10.11.3）。请指出其切点，

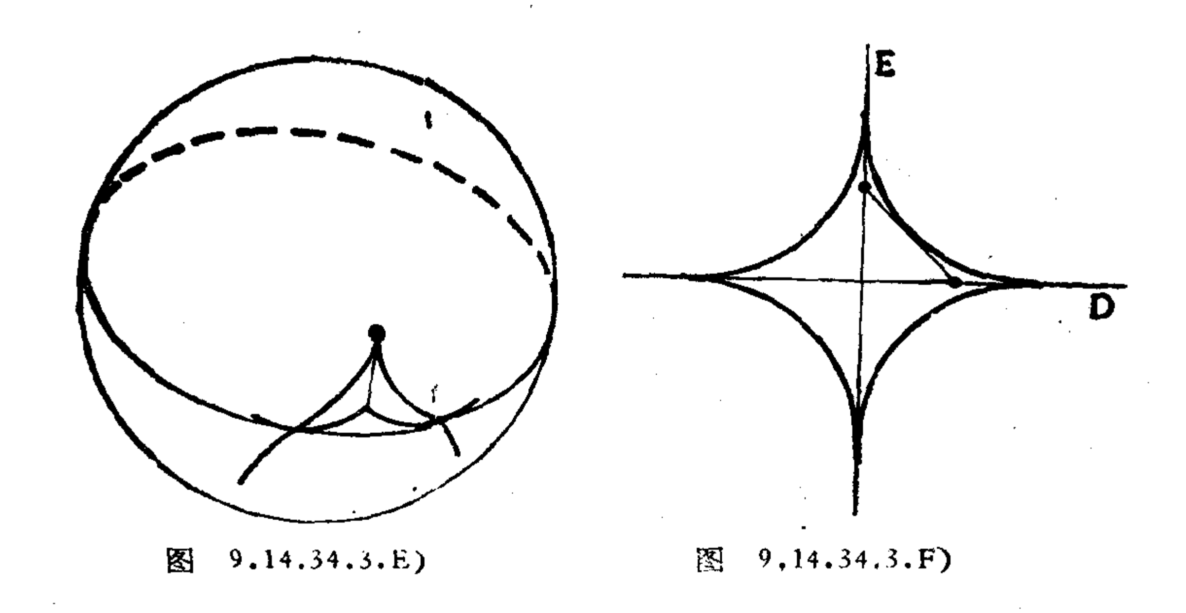


图 9.14.34.3.E)　　　图 9.14.34.3.F)

E）证明具有竖直轴的球面螺旋线（即球面 S 上的曲线，其切线与轴夹成常角 α）的水平投影当 α 适当选取时是外摆线.

F）请证明两个端点在两条正交直线上移动的定长线段的包络是有四个尖点的内摆线(称为星形线).

9.14.34.4 性质. 证明内摆线或外摆线的渐屈线（即法线的包络)相似于原曲线. 试证弧长 s（从某一合适的起点开始度量）与内、外摆线的曲率 K 之间满足以下关系式:

$$as^2 + bK^{-2} = c \quad (a, b, c \text{ 是常数})$$

(这就是内蕴方程,参看 [B-G] 第 323 页). 反之，满足上述关系式的曲线是怎样的? 计算内、外摆线的总长.

9.14.34.5 心脏线与 Morley 定理. 设 $\mathscr{C}$ 是已知三角形. 证明与这三角形三边相切的心脏线的中心构成 27 条直线，它们共有三个方向，相互夹角为 $2\pi/3$（请利用 9.14.34.3 B 及 10.13.18). 再证明 $\mathscr{C}$ 的 Morley 三角形 $\{p, q, r\}$ 的三条边（参看 10.3.10）落在其中三条直线上（请注意 Morley 三角形的顶点就是下述内切心脏线的中心：它的两条切线就是 $\mathscr{C}$ 的两条边;第三条双重切线是 $\mathscr{C}$ 的第三条边. 参见 10.13.23).

9.14.34.6 关于内、外摆线的进一步研究可参看 [LM1]. 也可参看 [ZR]，这是关于平面曲线以及它们与力学、光学、电学之间的联系的十分有趣的参考书，尤其是第 XXI 章涉及外摆线与齿轮

的关系。最后，关于摆线的解析表述可参看[LF-AR]第413至415页，关于 Wankel 内燃机（见12.10.5）缸壁形状的确定可参看第433至435页。

9.14.35 设 a，b，c，d 是欧氏平面的四点，其中 b，c，d 在一直线上。证明有以下的 Stewart 关系式：

$$(ab)^2\overline{cd}+(ac)^2\overline{db}+(ad)^2\overline{bc}+\overline{bc}\cdot\overline{cd}\cdot\overline{db}=0,$$

其中涉及的是 b，c，d 所在直线上相对于任取的单位的代数度量。

9.14.36 设 X 是仿射空间，G 是 $\mathrm{Is}(X)$ 的有限子群。试证存在 X 的子集 A 使得 $G=\mathrm{Is}_A(X)$。由此可得对任意的抽象有限群 G，总存在一个欧氏仿射空间 X 及 X 的子集 B，使得 G 同构于 $\mathrm{Is}_B(X)$。

9.14.37 设 φ 是欧氏平面 E 到它自身的"保持距离1"的映射，即

$$d(\varphi(x),\ \varphi(y))=1\quad \forall x,\ y\in E\,|\,d(x,\ y)=1.$$

请证明 φ 是等度量变换（先证 φ 保持距离 $\sqrt{3}$，然后利用 $\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\cdot\sqrt{3}$ 在 $\mathbf{R}$ 内稠密这一性质）。参看[M-P]第152页。

9.14.38 证明要使三维欧氏空间 E 的三条直线 D，E，F 有公垂线（见9.2.6.5）的充要条件是绕这三条直线的中心对称有以下性质：

$$\sigma_D\circ\sigma_E\circ\sigma_F\quad \text{是一个中心对称。}$$

由此推导出 Petersen-Morley 定理：设 X，Y，Z 是 E 的三条直线，X'（相应地：Y'，Z'）是 Y 和 Z（相应地：Z 和 X，X 和 Y）的公垂线，X''（相应地：Y''，Z''）是 X 和 X'（相应地：Y 和 Y'，Z 和 Z'）的公垂线。请证明三条直线 X''，Y''，Z'' 有公垂线。请参看[LF-AR]第681页及[FL]第339页的其它证法。

9.14.39 已知 $\mathbf{R}^3$ 的六个点 a_i，a_i' $(i=1,2,3)$ 使得

$$d(a_i,\ a_j)=d(a_i',\ a_j')\quad \forall i,j=1,2,3.$$

请用几何方法确定使 $f(a_i)=a_i'$ $\forall i$ 的等度量变换 f。

9.14.40 已知 $\mathbf{R}^2$ 的四个点 a，b，a'，b'，作出使 $a\longmapsto a'$，$b\longmapsto b'$ 的相似变换的中心。

9.14.41 已知 $\mathbf{R}^3$ 的六个点 a_i，a_i' $(i=1,2,3)$，在什么条件下存在使 $f(a_i)=a_i'$ $\forall i$ 的相似变换？如果这些条件被满足，用几何方法作出所求相似变换 f 的中心。再推广到任意的维数。

第10章　三角形,球面及圆

三角形、多边形、四面体、圆及球面都是我们几何园地上驯养的动物。本章汇集了与它们有关的已知条件及基本结论，也收集了更深入的结果，不过这些结果的陈述或图形都是十分简单的。看来我们并不需要对这一章作介绍。读者在翻阅时会被有兴味的段落所吸引，在理解或证明需要时再回头阅读前面的部分。反正读者对这些动物已相当熟悉，我们不把重点放在它们的古典性质的证明上。可以把这一章看成第九章的图解、练习及问题的汇总。第10.12节是其它章节的引论及缘由。

> 本章考虑的空间都是欧氏仿射空间。在10.1至10.5以及10.9至10.11诸节，涉及的是平面，在10.12节，维数是3。

10.1　三角形：定义及记号

10.1.1　根据2.4.7，所谓三角形就是三个仿射无关的点。我们可把它放在由这三个点生成的仿射平面内，因此不妨假设一切都发生在一个欧氏平面X内。在10.1至10.4节都将保持这一假设。

10.1.2　对于一个取定的三角形 $\mathscr{C}=\{x, y, z\}$，我们将始终使用下列记号：

$$a=yz,\ b=zx,\ c=xy \quad (参见 9.1.1),$$

$$A=\overline{\overrightarrow{xy},\overrightarrow{xz}},\ B=\overline{\overrightarrow{yx},\overrightarrow{yz}},\ C=\overline{\overrightarrow{zy},\overrightarrow{zx}} \quad (参见 8.6).$$

实数 a, b, c 被称为$\mathscr{C}$的边，它们所在的直线也使用同样的记号(参见2.4.7)，幸好这样做不会产生混淆。回忆一下 A, B, C 被称为 $\mathscr{C}$ 的角，这是 $]0, \pi[$ 内的实数。$\mathscr{C}$ 的顶点是 x, y, z,

10.1.3 如果三角形的两条边相等，就称为等腰三角形．三条边相等称为等边三角形．一个角是 $\pi/2$ 的三角形称为直角三角形．三个角都在 $]0, \pi/2[$ 内的三角形称为锐角三角形，否则就是钝角三角形．

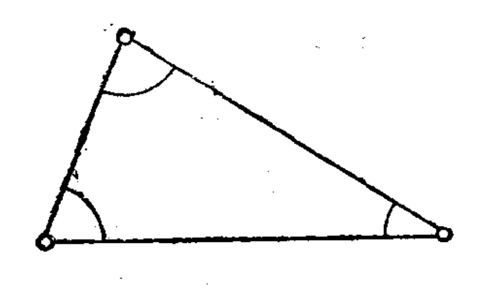


图 10.1.1.

10.1.4 通过 $\mathscr{C}$ 的顶点并与对边正交的直线称为 $\mathscr{C}$ 的高．把相应线段的长记为 h_a，h_b，h_c，也就是说

$$h_a = d(x, \langle y, z\rangle),\ h_b = d(y, \langle z, x\rangle),\ h_c = d(z, \langle x, y\rangle).$$

$\mathscr{C}$ 的垂直平分线就是点对 $\langle x, y\rangle$，$\langle y, z\rangle$ 或 $\langle z, x\rangle$ 的垂直平

图 10.1.4.

分线（参看 9.7.5）. $\mathscr{C}$ 的内角平分线就是有向射线 $\langle\overrightarrow{xy},\overrightarrow{xz}\rangle$, $\langle\overrightarrow{yx},\overrightarrow{yz}\rangle$, $\langle\overrightarrow{zx},\overrightarrow{zy}\rangle$ 的角平分线所在的直线（见 8.7.3.3）. 外角平分线就是过顶点与上述直线正交的直线. 这些角平分线的相应线段之长记为 i_a, i_b, i_c 及 e_a, e_b, e_c. $\mathscr{C}$ 的中线就是直线 $\left\langle x, \frac{y+z}{2}\right\rangle$, $\left\langle y, \frac{z+x}{2}\right\rangle$, $\left\langle z, \frac{x+y}{2}\right\rangle$, 相应的线段之长记为 m_a, m_b, m_c.

10.1.5 根据 9.7.5，存在唯一的与 $\mathscr{C}$ 外接的圆，它的半径记为 R. 存在四个圆与 $\mathscr{C}$ 的三条边相切，一个在内部，称为内切圆，三个在外面，称为旁切圆. 它们的半径分别记为 r, r_a, r_b, r_c. 最后，把 $\mathscr{C}$ 的面积记为 S（参看 9.12.4）.

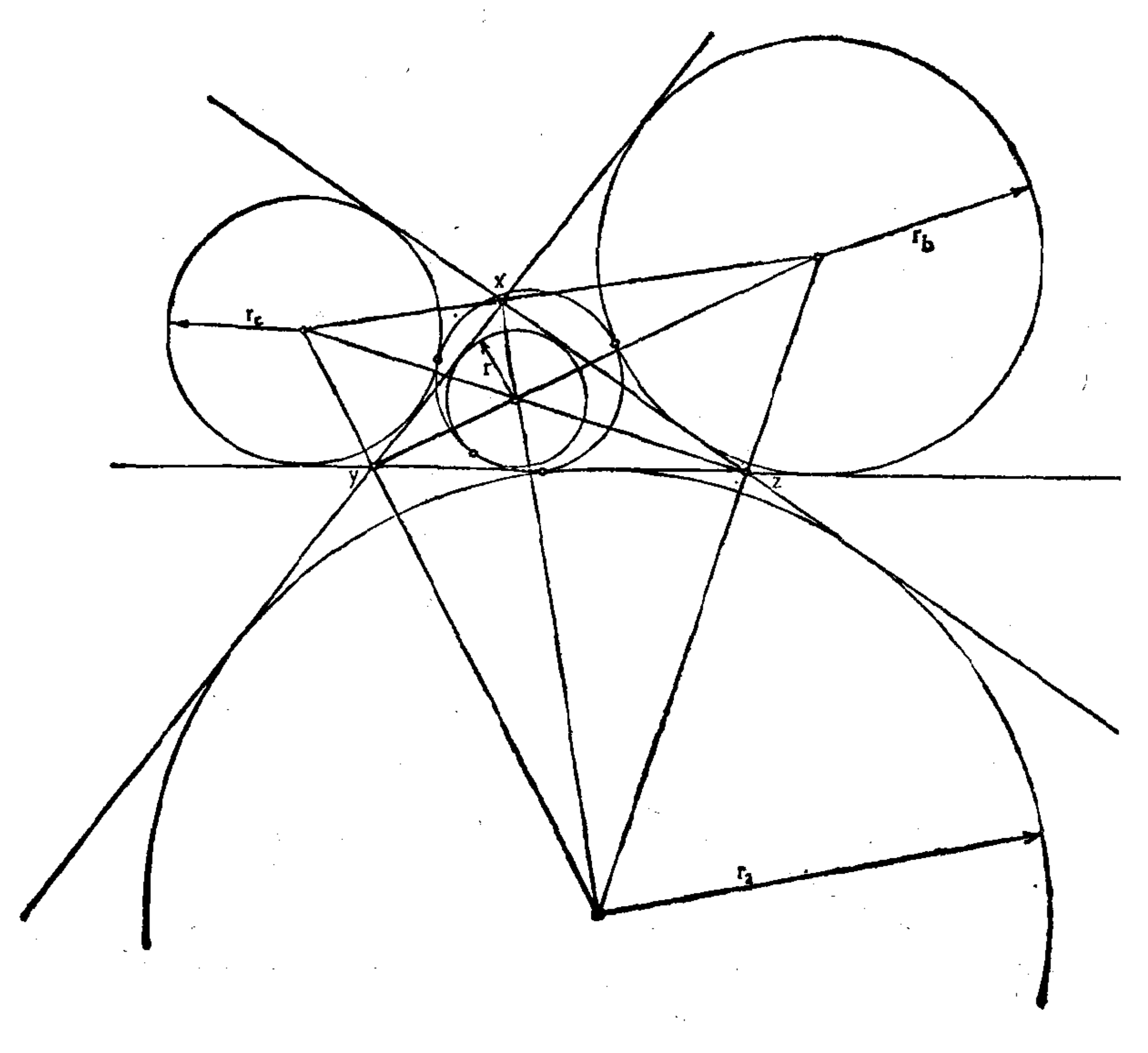


图 10.1.5.

10.2 古典的结果

10.2.1 存在性. 存在使 $xy=c$，$yz=a$，$zx=b$ 的三角形 $\{x, y, z\}$ 的充要条件是 a，b，c 满足以下三个严格三角不等式：

$a<b+c$，$b<c+a$，$c<a+b \Longleftrightarrow |b-c|<a<b+c$.

事实上从公式 10.3.1 可看出只要能找出 $A\in]0,\pi[$ 使 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 就可以了。因此 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\in]-1,1[$，这样就得到了所需结果。另外一种证法是 9.7.3.4 的证明，其中用到了 9.7.3.8.

10.2.2 等腰三角形. $\mathscr{C}$ 是等腰三角形的充要条件是它的两个角相等. 只有$\Leftarrow$需要证明;这可从公式 10.3.1 导出，因为

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$$

可写成 $(a-b)[(a+b)^2-c^2]=0$，再应用 10.2.1 就可得到所需结果.因此一个三角形是等边三角形的充要条件是三个角相等. 它们的公共值是 $\pi/3$，这可从 10.2.4 或 10.3.1 得出.

10.2.3 直角三角形. $\mathscr{C}$ 以 x 为直角顶点的充要条件是 $a^2=b^2+c^2$（参见 9.2.3 或 10.3.1）.

10.2.4 内角之和 我们总是有 $A+B+C=\pi$. 这可应用 8.7.5.3 加以证明：因 $\overrightarrow{xz}$ 在 $\overrightarrow{xy}$ 和 $\overrightarrow{yz}$ 之间，同样 $\overrightarrow{yz}$ 在 $\overrightarrow{xz}$ 与 $\overrightarrow{yx}$ 之间，从而

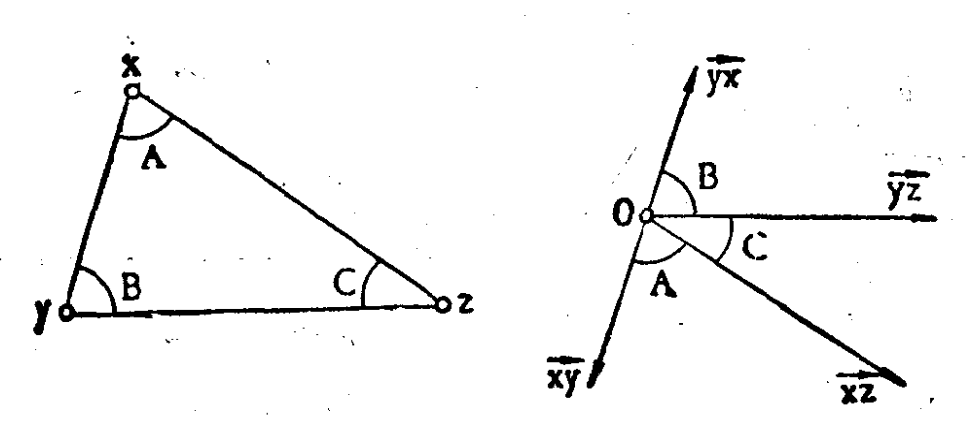


图 10.2.4.

$$\overrightarrow{xy},\overrightarrow{xz}+\overrightarrow{xz},\overrightarrow{yz}+\overrightarrow{yz},\overrightarrow{yx}=\overrightarrow{xy},\overrightarrow{yx}=\pi.$$

以后我们将遇到这样的几何：其中三角形角之和总是$>\pi$（参见18.3.8.4）或$<\pi$（参见19.5.4）。

10.2.5 共点性. 读者在插图中可能已注意到：高、中线、内角平分线(或一条内角平分线与两条外角平分线)、垂直平分线都是共点的.中线的共点性是3.4.10的结果，角平分线的共点性是9.14.3的性质的推论. 垂直平分线的共点性可从9.7.5得到. 只有高的共点性的证明需要一点技巧. 譬如说我们可通过$\mathscr{C}$的顶点作对边的平行线，这样可作出一个三角形$\mathscr{C}'$，它的垂直平分线就是$\mathscr{C}$的高！也请参见10.13.1及17.5.4. $\mathscr{C}$的高的交点称为$\mathscr{C}$的垂心。

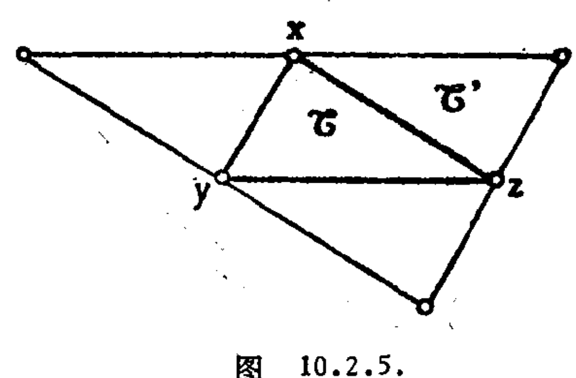


图 10.2.5.

10.2.6 全等的情形. 对于两个三角形$\mathscr{C}$，$\mathscr{C}'$，它们的元素采用10.1.2的记号，必要时加上一撇以作区分，那么以下条件是等价的：

$$\begin{cases}\text{(i) 存在 } f\in \mathrm{Is}(X) \text{ 使得 } f(x)=x',\ f(y)=y',\ f(z)=z';\\ \text{(ii) } a=a',\ b=b',\ c=c';\\ \text{(iii) } A=A',\ b=b',\ c=c';\\ \text{(iv) } A=A',\ B=B',\ c=c'.\end{cases}$$

这可从9.7.1以及公式汇集10.3得出.只是要小心，在利用公式汇集时，正弦的值不能唯一确定0与π间的角，而余弦值却能确定这个角. 因此在“正弦或余弦”$\Longrightarrow$“角”的方向上只能利用余弦，不能利用正弦。

如果两个三角形满足上述条件中的任一个，就称为全等的.

10.2.7 相似的情形. 在同样记号下,以下条件等价:

$$\begin{cases}\text{(i) 存在 } f\in \operatorname{Sim}(X) \text{ 使得 } f(x)=x',\ f(y)=y',\ f(z)=z';\\ \text{(ii) } \dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c};\\ \text{(iii) } A=A',\ B=B',\ C=C'.\end{cases}$$

应用 9.5.3.1 以及公式就能看到 (i) ⇒ (iii) ⇒ (ii). 为了得到 (ii) ⇒ (i)，只需作一个比值为

$$\frac{a}{a'}\left(=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\right)$$

的相似变换,把它归结到全等的情形就可以了.

10.3 公式汇集

记号同 10.1,另外再加上 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ($\mathscr{C}$ 的半周长).这样就有

10.3.1
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

10.3.2
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R;$$

10.3.3
$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bc\sin A=pr$$
$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

10.3.4
$$R=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}};$$

10.3.5
$$r=\frac{S}{p},\quad r_a=\frac{S}{p-a};$$

10.3.6
$$i_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc},$$

$$e_a=\frac{2}{b-c}\sqrt{(p-b)(p-c)bc}\qquad(\text{若 } b>c);$$

10.3.7
$$m_a^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}.$$

10.3.1 的第一个公式就是 8.1.2.4 的公式，再利用 8.6.3 及 9.1.1 转化过来。第二个公式从 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ 得出，第三个则从

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$$

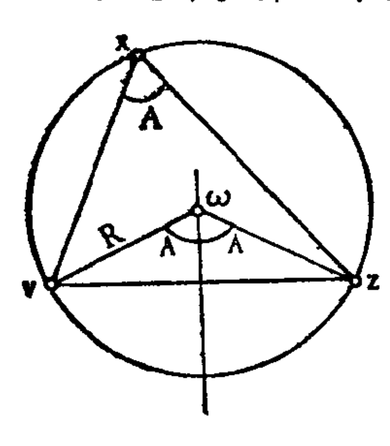


图 10.3.7.1.

得出．为导出 10.3.2，把 $\mathscr{C}$ 的外接圆中心记为 ω，根据 10.9.3，三角形 ωyz 在 ω 的角等于 $2A$，从正弦的定义可得 $a=2R\sin A$。读者可能希望不要涉及到 10.9.3，我们可以利用 9.7.3.7 以得到 10.3.4 以及 10.3.3 的最后一个等式。

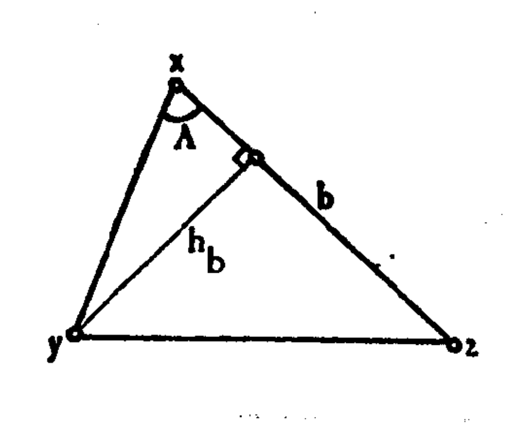
10.3.3 的第一个等式就是 9.12.4.4，第二个等式来自 $h_b=c\sin A$，第三个等式可把 $\mathscr{C}$ 分割成三个三角形：$\mathscr{C}=\{x, y, \alpha\}\cup\{y, z, \alpha\}\cup\{z, x, \alpha\}$ 而得出，其中 α 是 $\mathscr{C}$ 的内切圆心。每个小三角形过 α 的高都是 r，对边分别是 a, b, c，利用 9.12.4.4 就能导出所需等式。最后一个等式是 10.3.1 的推论。

等式 10.3.4 可从 9.7.3.7 导出。这里它也可看成是 10.3.1 及 10.3.2 的直接推论。

至于 10.3.5，可采用与 $S=pr$ 类似的方法，不过取角 A 内的旁切圆的中心为 α'，这样就有

$$\{y, z, \alpha'\}\cup\mathscr{C}=\{x, y, \alpha'\}\cup\{x, z, \alpha'\},$$

因而



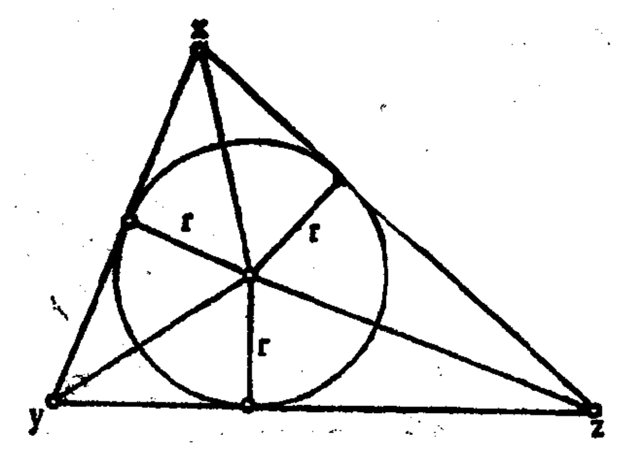


图 10.3.7.2.

$$面积(\mathscr{C}) = 面积(\{x, y, \alpha'\}) + 面积(\{x, z, \alpha'\}) - 面积(\{y, z, \alpha'\}).$$

这三个三角形过 α' 的高都是 r_a，而相应的边长是 b, c, a。

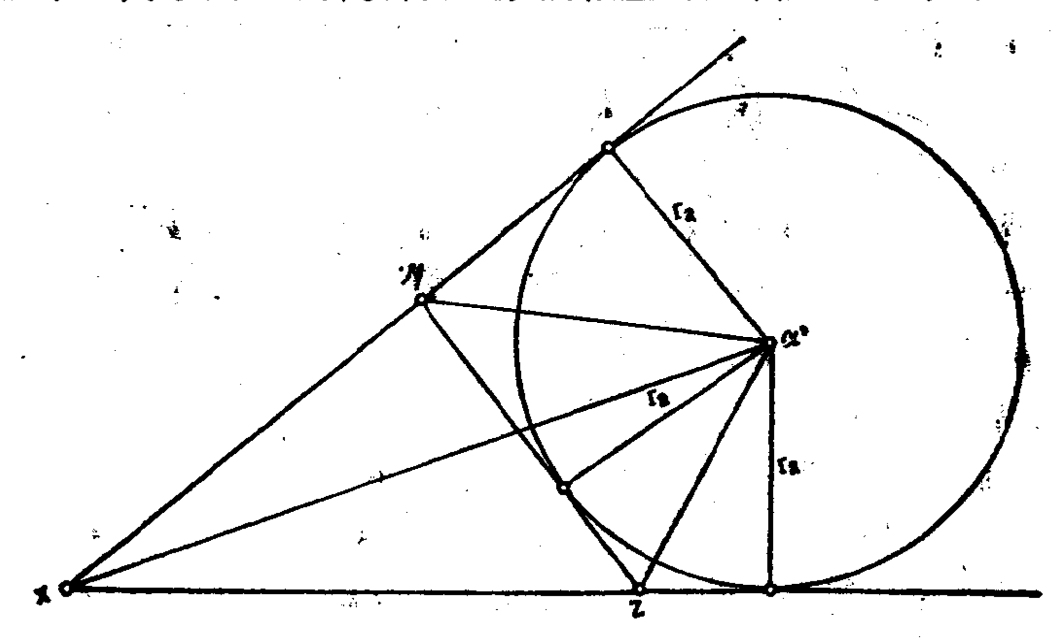


图 10.3.7.3.

公式 10.3.7 就是 9.7.6.5。剩下要证 10.3.6。把 e_a 留给读者。至于 i_a，把过 x 点的角平分线与边 $\langle y, z\rangle$ 的交点记为 s，注意到三角形 $\{s, y, x\}$ 及 $\{s, z, x\}$ 在 s 点的角有相同的正弦，应用 10.3.2 就可得到：

10.3.8 $$\frac{sy}{b} = \frac{sz}{c} = \frac{sy + sz}{b + c} = \frac{a}{b + c}.$$

再次将 10.3.2 应用于三角形 $\{x, s, z\}$，并两次使用 10.3.1，就能得到所需公式。

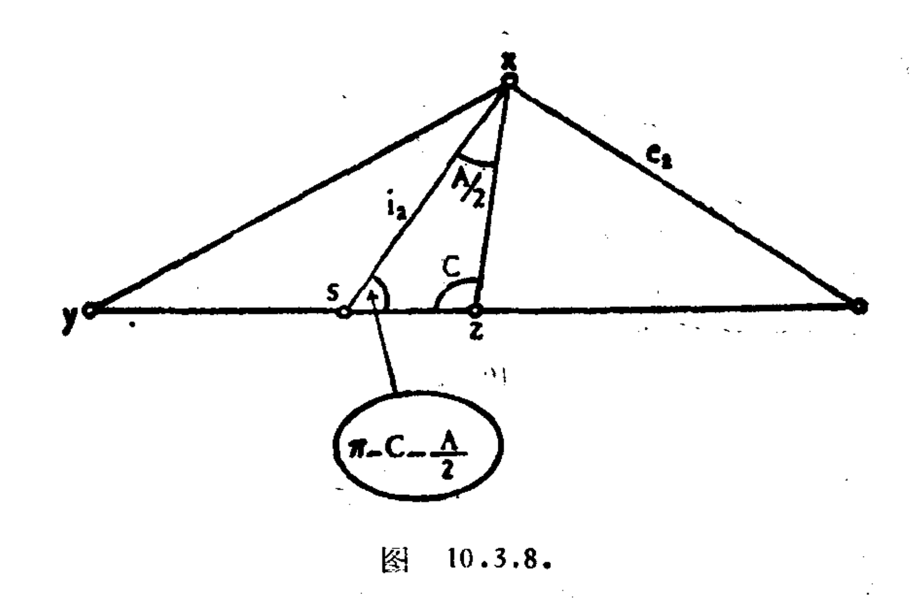


图　10.3.8.

10.3.9　附注. 当三角形是直角三角形时，有一个很好的练习可做：观察前面的公式会变成怎样的形状并且作一些验证.

10.3.10　应用：Morley 定理.

这个定理的结论很简单，但它的证明却不是直接的. 其几何证法可参看 10.13.4 以及 9.14.33.5. 关于由角的三等分线构成的图，请参见 [LB1] 第 173—194 页，以及 9.14.34.5 和 10.13.23. 最后请参看 [CAL].

Morley 定理是这样的：把三角形 $\mathscr{C}=\{x, y, z\}$ 的角（看作 $]0, \pi[$ 内的实数）三等分，它们的交点记为 p, q, r，则三角形 pqr 是等边三角形（为了体会这个定理的意义，最好在阅读后面的证明以前先亲自尝试一下给出几何的或三角的证明）. 置

$$\alpha=\frac{A}{3},\ \beta=\frac{B}{3},\ \gamma=\frac{C}{3};$$

把 10.3.2 应用于 $\{x, y, z\}$ 以及 $\{x, y, r\}$；再应用 10.2.4，可得

$$rx=2R\frac{\sin\beta\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)},$$

其中 R 是 $\mathscr{C}$ 的外接圆半径. 因 $\alpha+\beta+\gamma=\pi/3$，通过三角计算(见 8.7.8 及 8.12.8)，可导出

$$rx = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right).$$

同理

$$qx = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right),$$

即

$$\frac{rx}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)} = \frac{qx}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)} = 8R\sin\beta\sin\gamma;$$

但因$\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)+\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)+\alpha=\pi$，我们可把公式 10.3.2 应用于这样一个三角形：它的一条边是 rx，三个角是 $\frac{\pi}{3}+\gamma$，$\frac{\pi}{3}+\beta$ 及 α，就可证明这个三角形恰好就是 $\{x, r, q\}$，再一次应用 10.3.2 就得出 $rq = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$。同理 qp 和 pr 的长度也是同一个值。

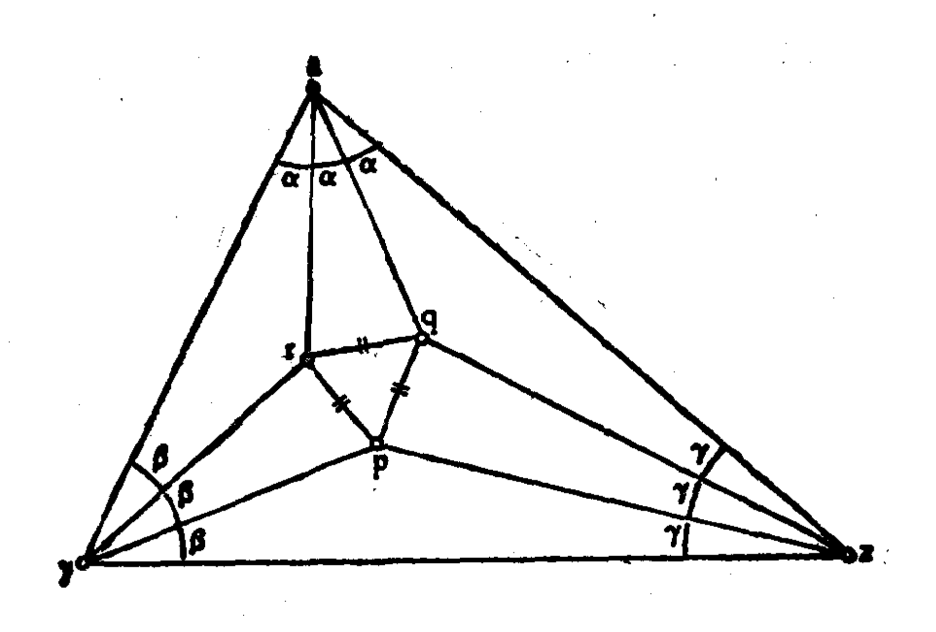


图 10.3.10.

10.3.11 三角形的几何

关于三角形有许多结果。如要连贯的阐述，可参看 [R-C1] 注 III. 如只需几个例子，可见 10.11。

10.4 不等式及极小值问题

10.4.1 等周不等式. 对于任意的三角形，总有 $S \leqslant \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$，而且等式当且仅当等边三角形才能成立.

只需应用 10.3.3 及 11.8.11.6，就能得出

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant \left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

而且等式成立当且仅当 $p-a=p-b=p-c$.

10.4.2 附注. 以后在 10.5 及 12.11.1 将会遇到 10.4.1 的两个推广. 至于三角形的"等直径"不等式（参见 9.13.8），它可直接从 10.3.3 导出，因为 $\mathscr{C}$ 的直径是 $\sup\{a, b, c\}$.

10.4.3 Fermat 问题. 从 9.7.6.3 可导出

$$tx^2 + ty^2 + tz^2 \geqslant gx^2 + gy^2 + gz^2 \quad \forall t \in X,$$

而且只有当 t 处在 $\mathscr{C}$ 的重心 $g = \frac{x+y+z}{3}$ 上时才有等号成立. 运用 10.3.7 及 3.4.10 的结果可把极小值表成 a, b, c 的函数，这样就给出了一个不等式.

令人惊奇的是，对函数 $t \longmapsto tx + ty + tz$ 的极小值的研究要比上述问题困难得多（原因在于距离不是双线性的，而它的平方却是双线性的）. 这就是 Fermat 问题. 9.10.6 已指出它的解，就是找 X 的点 t，使得从 t 看出去三角形 $\mathscr{C}$ 的三条边的视角都是 $2\pi/3$. 完整的结果如下所示：或者 $\mathscr{C}$ 的一个角 $A \geqslant 2\pi/3$，那么极小值仅在 x 点达到；或者 $\mathscr{C}$ 的所有的角都 $< 2\pi/3$，那么存在 X 的唯一点 ω，使得从 ω 看 $\mathscr{C}$ 的三条边时都成 $2\pi/3$ 角，极小值仅在 ω 才能达到.

首先，如果 t 是这个极小问题的解，那么它必须在三角形之内，否则，设 t 和 x 处在被 $\langle y, z\rangle$ 分割的两个不同半平面上，过

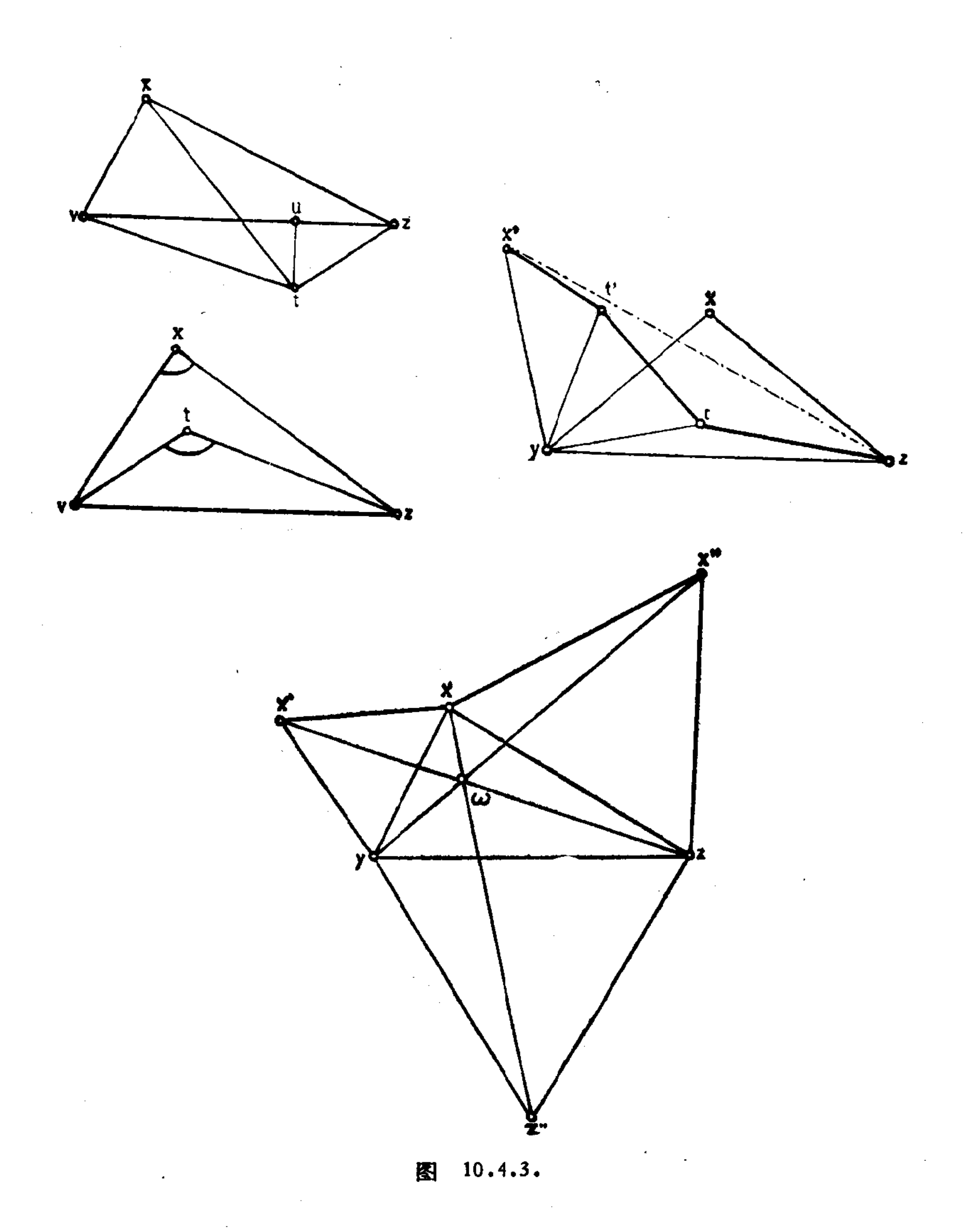


图 10.4.3.

t 向 $\langle y, z\rangle$ 作垂线的垂足设为 u，就有 $tx+ty+tz>ux+uy+uz$（应用 9.2.2）。

如果 $A\geqslant 2\pi/3$，则对 $\mathscr{C}$ 内任意的 $t\neq x$，t 在 $\{t, y, z\}$ 中所成的角 $>2\pi/3$，因此极小值不能在 t 达到。由于 $\mathscr{C}$ 是紧

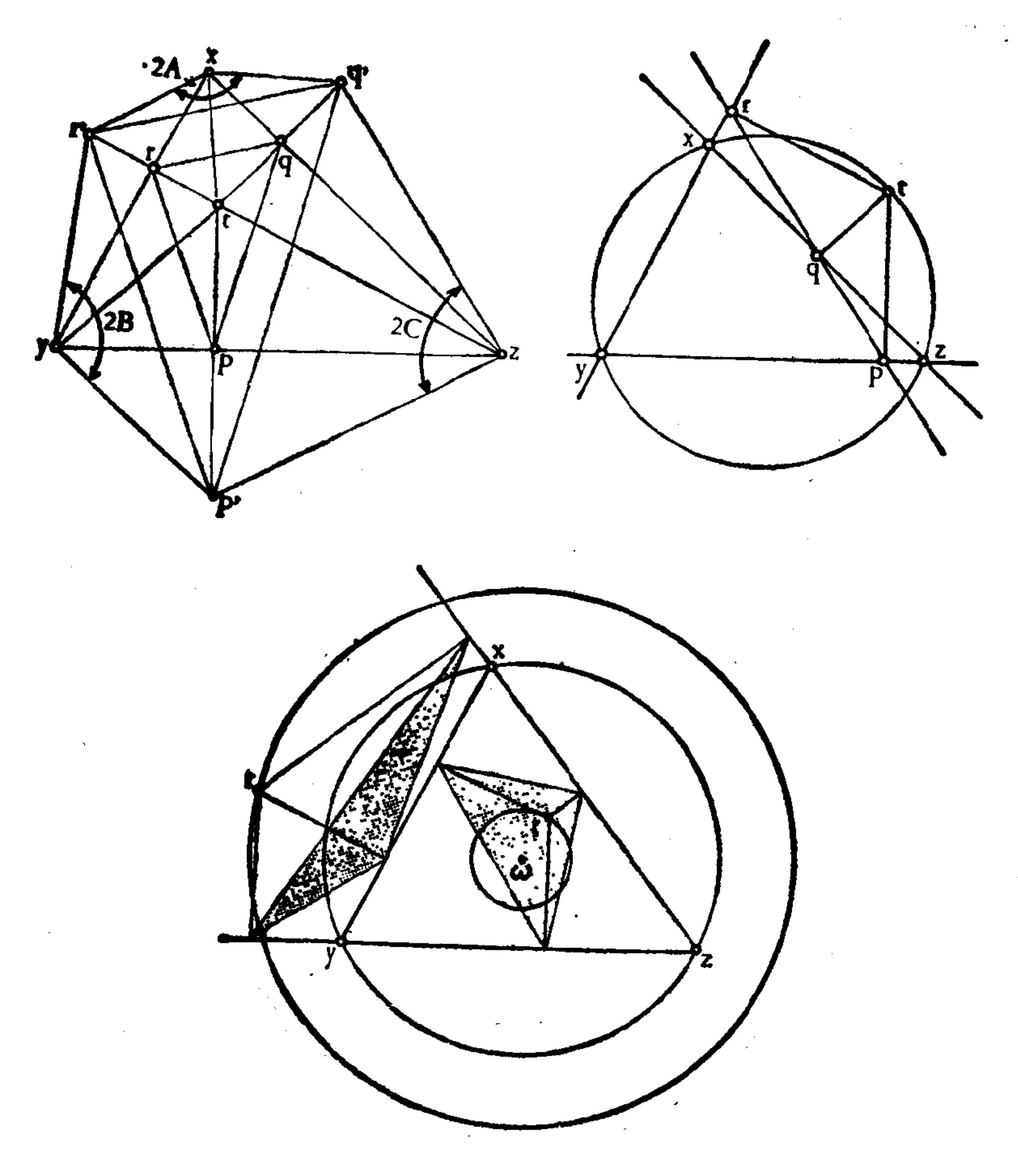


图 10.4.5.

集，故极小值必定在某一点上达到，这个点只能是 x.

现在假设 $\mathscr{C}$ 的三个角严格小于 $2\pi/3$. 把 X 定向，设 f 是以 y 为中心的 $\pi/3$ 角旋转. 对任意的 $t\in X$，记 $t'=f(t)$，$x'=f(x)$，则

$$tx+ty+tz=x't'+t't+tz\geqslant x'z,$$

使等式成立的充要条件是 x'，t'，t，z 在一直线上并且保持正确

的次序．用同样方法作 $z''=f^{-1}(z)$，由于 $\mathscr{C}$ 的角 $<2\pi/3$，直线 $\langle x, z''\rangle$ 与 $\langle z, x'\rangle$ 相交于一点 ω，使得 $x', \omega'=f(\omega), \omega, z$ 共线并且有正确的次序． 于是 ω 实现了 $\omega x+\omega y+\omega z=x'z$，这样就完成了证明．

我们附带证明了一个事实：图 10.4.3 的三条直线 $\langle x', z\rangle$，$\langle x, z''\rangle$，$\langle y, x''\rangle$ 交于一点，而且夹角都是 $\pi/3$．

10.4.4 附注． 9.4 已经研究过有极小周长的 $\mathscr{C}$ 的内接三角形．

10.4.5 垂足三角形的面积． 设三角形 $\mathscr{C}=\{x, y, z\}$，点 $t\in X$，把 t 在 $\mathscr{C}$ 的三条边上的正交射影所成的三元组 $\{p, q, r\}$ 称为 t 的垂足三角形(注意到 p, q, r 共线时 实际上不再是三角形)．我们想研究垂足三角形的面积，譬如说，当 t 取在 $\mathscr{C}$ 内的哪一位置时三角形面积为极大？为此要引进定向三角形及它们的面积．

10.4.5.1 定义． 定向平面 X 上的定向三角形是 X 的点的三元组 (x, y, z)．(x, y, z) 的面积是 $\mathscr{A}(p, q, r)=\lambda\bar{x}(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz})$ (参见 8.11.3)．

可以直接验证 $\mathscr{A}$ 关于循环置换不变，而且

10.4.5.2 $$\mathscr{A}(x, y, z)=\mathscr{A}(t, x, y)+\mathscr{A}(t, y, z)+\mathscr{A}(t, z, x).$$

如果 $\sigma\in \mathrm{Is}^-(X)$，则 $\mathscr{A}(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))=-\mathscr{A}(x, y, z)$．

设 X 是定向的，$t\in X$，$\mathscr{C}$ 是通常三角形．除 p, q, r 外，再引进 t 关于 $\mathscr{C}$ 的边的对称点 p', q', r'，则

10.4.5.3 $$\mathscr{A}(p, q, r)=\frac{1}{2}\mathscr{A}(x, y, z)-\frac{1}{8}\sin 2A\cdot tx^2-\frac{1}{8}\sin 2B\cdot ty^2-\frac{1}{8}\sin 2C\cdot tz^2.$$

其证明方法就是参照图 10.4.5 作代数计算． 事实上六边形 $\{x, r', y, p', z, q'\}$ 的面积是三角形 $\{x, y, t\}$，$\{x, y, r'\}$，$\{y, z, t\}$，$\{y, z, p'\}$，$\{z, x, t\}$，$\{z, x, q'\}$ 的面积之和，也是 $\{p', q', r'\}$，$\{x, r', q'\}$，$\{y, p', r'\}$，$\{z, p', q'\}$ 的面积之和．因此有以下代数式：

$$2\mathscr{A}(x, y, z) = 2\mathscr{A}(t, x, y) + 2\mathscr{A}(t, y, z) + 2\mathscr{A}(t, z, x) = \mathscr{A}(t, x, y) - \mathscr{A}(r', x, y) + \mathscr{A}(t, y, z) - \mathscr{A}(p', y, z) + \mathscr{A}(t, z, x) - \mathscr{A}(q', z, x) = \mathscr{A}(p', q', r') + \mathscr{A}(x, r', q') + \mathscr{A}(y, p', r') + \mathscr{A}(z, q', p').$$

但因 (p', q', r') 是 (p, q, r) 通过以 t 为中心、比值为 2 的位似变换而得到的，所以 $\mathscr{A}(p', q', r') = 4\mathscr{A}(p, q, r)$。并且根据 10.3.3 以及 8.7.7.8，有

$$\mathscr{A}(x, r', q') = \frac{1}{2}\sin 2A \cdot xr' \cdot xq' = \frac{1}{2}\sin 2A \cdot tx^2,$$

这样就得到了 10.4.5.3。

从 10.4.5.3 及 9.7.6 可以知道，只要我们知道质点 $(\sin 2A, x)$，$(\sin 2B, y)$，$(\sin 2C, z)$ 的重心，问题就完全解决了。而这个重心就是 $\mathscr{C}$ 的外接圆的中心 ω，这是因为从 10.3.2 的证明可以看出 ω 满足

$$\sin 2A \cdot \overrightarrow{\omega x} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{\omega y} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{\omega z} = 0 \text{（参看 3.4.6.5）}.$$

10.4.5.4 我们不想对问题作深入讨论，只是导出 9.7.6.2 的几个结论：对于 k 的某些值，X 中使得关于 $\mathscr{C}$ 的垂足三角形的面积(不计符号)取定值 k 的点的轨迹是以 ω 为中心的两个圆，而对于其它的 k 值，轨迹是一个圆。一个没有意料到的额外收获是 X 中使 p, q, r 共线的点的轨迹是 $\mathscr{C}$ 的外接圆（"Simson 直线"定理，参看 10.9.7.1)：事实上 p, q, r 共线的条件就是 $\mathscr{A}(p, q, r) = 0$，而 x, y, z 满足定理条件，因此所求的轨迹应该是以 ω 为中心过 x (以及 y 和 z !) 的圆，就是 $\mathscr{C}$ 的外接圆。我们得到公式：

$$4S = R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C).$$

10.4.5.5 当 x 描绘出 $\mathscr{C}$ 的外接圆时，与它相伴的 Simson 直线的包络是有三个尖点的内摆线。这说明在任一三角形内有一个三阶对称。参看 9.14.34.3.D。

10.4.6 Erdös-Mordell 定理. 以下的定理有个有趣的故事：它

被 Erdös 在 1935 年猜想到，在 1937 年被 Mordell 用一个绝对不是初等的方法加以证明. 尽管它的陈述很简单，还是要等到 1945 年才由 D. K. Kazarinoff 给出初等证明. 我们这里只是叙述一下定理，让读者用这个定理试试自己的能力. 关于完整的参考材料，可参见 [KF] 第 78 页或 [FT1] 第 12 页.

10.4.7 定理. 设 $\mathscr{C}$ 是一个三角形，对 $\mathscr{C}$ 内任意一点 t，设 p，q，r 如同 10.4.5 所定义，则有

$$tx+ty+tz \geqslant 2(tp+tq+tr),$$

只有等边三角形才能使等号成立.

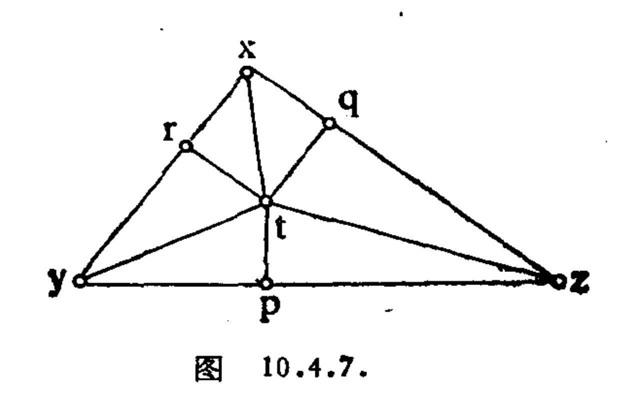


图 10.4.7.

10.4.8 注. 关于三角形内的其它不等式可参看 10.13.5 以及 [GS].

10.5 多 边 形

关于这一主题，我们只给出一些参考资料. 关于一个凸多边形，我们在 9.4 已研究过多边形弹子盘. 与 10.4.3 类似的问题请参看 10.13.8.

10.5.1 10.4.1 的推广如下所述：如果 $\mathscr{P}$ 是 n 边凸多边形，S 是它的面积，P 是周长，则

$$S \leqslant \frac{1}{4n\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}} P^2.$$

当且仅当 $\mathscr{P}$ 是正多边形时才能使等号成立. 关于其证明及进一

步的讨论，请参看 12.12.15 或 [FT1] 第 8—11 页和 [GR] 第 192 页.

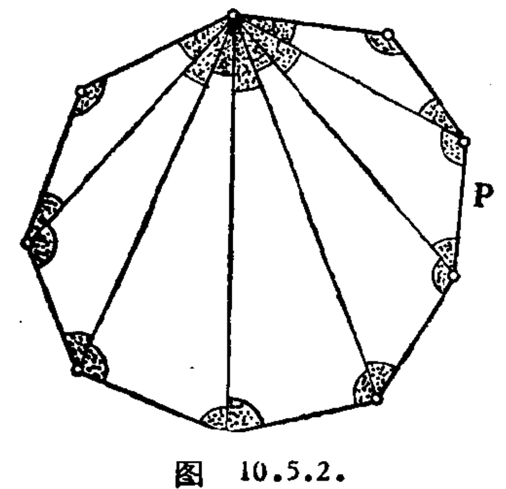


图 10.5.2.

10.5.2 如果 P 是 n 边凸多边形，则 P 的内角之和为 $(n-2)\pi$（参看 12.1.12).

为了得到这个公式，利用凸性把多边形从一个顶点分割成 $n-2$ 个三角形. 把 10.2.4 用到这些三角形上再求和.这样就同时得到 $(n-2)\pi$ 以及 P 的所有内角之和.

10.6 四 面 体

关于四面体我们不准备讲太多的东西. 最使人感兴趣的是指出三角形的某些结果不能推广到四面体，出现了新的现象. 我们只详细讨论这些现象中的一个，即“内切球面”，它出现在对与四面体四个面都相切的球面的研究中. 此外仅提及四面体相对于三角形来说的两个特殊性质. 第 10.6.1 至 10.6.5 节讨论三角形的结论的推广，从 10.6.6 起将讨论特有的现象.

有关四面体几何的参考材料可见 [C-B] 以及 [R-C2] 的注 IV. 关于这一主题，我们在 [C-B] 的前言中可看到早在 1935 年时一些教师就已经抱怨说学生的代数技巧由于新教学大纲而下降了. 如果有哪一位读者能发现一块古埃及的书板其中有同样怨言的话，他将能获得一笔奖金.

10.6.1 设 $\mathscr{C}=\{x, y, z, t\}$ 是四面体(参见 2.4.7). 在这一节里总是假设 $\mathscr{C}$ 位于三维空间 X 内. $\mathscr{C}$ 的棱既是指直线 $\langle x, y\rangle, \cdots$, 又是指距离 $xy, \cdots$. 同样地，$\mathscr{C}$ 的面既是指平面 $\langle x, y, z\rangle, \cdots$, 又是指平面 $\langle x, y, z\rangle$ 的三角形 $\{x, y, z\}$, 也指这个平面上的这个三角形的面积（参见 10.1.5). 把 $\mathscr{C}$ 的体积记为 V（参看 9.12.4)，$\mathscr{C}$ 的外接球面的半径记为 R(参见 9.7.5).

10.6.2 根据 9.7.1，一个四面体被它的六条棱确定到差一个同构（"四面体全等的情形"）。至于给定棱长的四面体的存在性，在 9.7.3.4 中已看到只要六条棱除满足 10.2.1 的四个严格三角形不等式外，再符合条件 $\Gamma(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)>0$. 事实上（参见 9.14.23）从 $\Gamma(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)>0$ 可推导出三角形不等式.

10.6.3 **中线**. 把连接顶点与对面重心的线段称为 $\mathscr{C}$ 的中线，从 3.4.10 可推断得 $\mathscr{C}$ 的四条中线共点. 我们可应用 9.7.6 计算这些中线的长.

10.6.4 定义四面体顶点的角则要困难得多，还颇有些棘手. 这要用到第十八章. 容易做的是引进两个面之间的二面角. 我们不准备讨论它们，可参看 10.13.10.

10.6.5 从 9.7.3.3, 9.7.3.7, 9.12.4.3，可推导出用棱长表示 V 及 R 的公式:

$$V^2=\frac{1}{288}\Gamma(x,y,z,t),\quad R^2=-\frac{1}{2}\frac{\Gamma(x,y,z,t)}{\Delta(x,y,z,t)}.$$

10.6.6 **高**. 四面体的高就是过顶点与对面正交的直线. 一般说来四面体的高不相交. 参看 [C-B] 第 121 页或 [R-C2] 第 643 页.

10.6.7 **Möbius 四面体**. 存在四面体对使得其中一个的顶点都在另一个四面体的面上. 这种现象在射影几何里可以得到很好的解释，参见 4.9.12 及 14.8.12.4.

10.6.8 **内切球面**.

已知四面体 $\mathscr{C}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，要求出与 $\mathscr{C}$ 的四个面相切的球面 S，也就是说 S 的中心 ω 与这四个面等距. 要避免犯的错误是: 从图 10.1.5 加以类比，认为这样的球面有五个: 一个在 $\mathscr{C}$ 的内部，另外四个在 $\mathscr{C}$ 所确定的四个"截锥"内.

为了解答这个问题，首先利用公式 9.2.6.4. 把分别以 $\mathscr{C}$ 的四个面作为核的 X 上四个仿射形式记为 $f_i\ (i=1,2,3,4)$. 另外再假设 $\|\vec{f}_i\|=1\ \forall i$，则 ω 应该满足

$$|f_1(\omega)|=|f_2(\omega)|=|f_3(\omega)|=|f_4(\omega)|,$$

这相当于仿射形式间的八个等式．根据 2.4.8.5，“在一般情形”，即当 f_i 间没有线性关系时，这个问题应该有八个解．按这种方法讨论显然相当困难．为此要在 X 内引入相对于 $\mathscr{C}$ 的重心坐标．对于任意的维数总有以下引理：

10.6.8.1 引理． 设 $(x_i)_{i=1,\cdots,n+1}$ 是 X 的单形．令

$$H_i = \langle x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{n+1} \rangle$$

是单形的第 i 个面．把单形的体积记为 V，把 H_i 的单形 $(x_j)_{j\neq i}$ 的体积记为 a_i，则 $x \in X$ 相对于这个单形的重心坐标 (λ_i) 由以下条件确定：

$$\begin{cases} |\lambda_i| = \dfrac{a_i}{nV} d(x, H_i), \\ \lambda_i \geqslant 0 \text{ 或 } \leqslant 0 \text{ 由 } x \text{ 与 } x_i \text{ 关于 } H_i \text{ 是否在同一半空间内而定} \\ \text{(见 2.7.3).} \end{cases}$$

实际上如果 f_i 是一个仿射形式使得 $\|\vec{f}_i\| = 1$，$H_i = f_i^{-1}(0)$，$f_i(x_i) > 0$，则有(见 9.2.6.4)

$$d(x, H_i) = |f_i(x)| = \left| f_i\left(\sum_j \lambda_j x_j\right) \right| = |\lambda_i| f_i(x_i),$$

特别当 $x = x_i$ 时，$d(x_i, H_i) = f_i(x_i)$，从 9.12.4.4 可知这正是 $\dfrac{nV}{a_i}$.

为了讨论方便，定义四面体 $\mathscr{C}$ 的内部为使所有的 $\lambda_i \geqslant 0$ 的 x 的集合；$\mathscr{C}$ 的截锥是使三个 $\lambda_i \geqslant 0$，另一个 $\leqslant 0$ 的 x 的集合；$\mathscr{C}$ 的三面形是使三个 $\lambda_i \leqslant 0$，另一个 $\geqslant 0$ 的 x 的集合；$\mathscr{C}$ 的顶罩是使两个 $\lambda_i \geqslant 0$，另两个 $\leqslant 0$ 的 x 的集合．与每一个顶点相关的有 4 个截锥与 4 个顶罩．共有六个顶罩，分成三组相对的顶罩对．

如果 r 是与 $\mathscr{C}$ 的四个面相切的球面的半径，则球面中心 ω 的 λ_i 满足以下等式：

$$\frac{|\lambda_1|}{a_1} = \frac{|\lambda_2|}{a_2} = \frac{|\lambda_3|}{a_3} = \frac{|\lambda_4|}{a_4} = \frac{r}{3V},$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1.$$

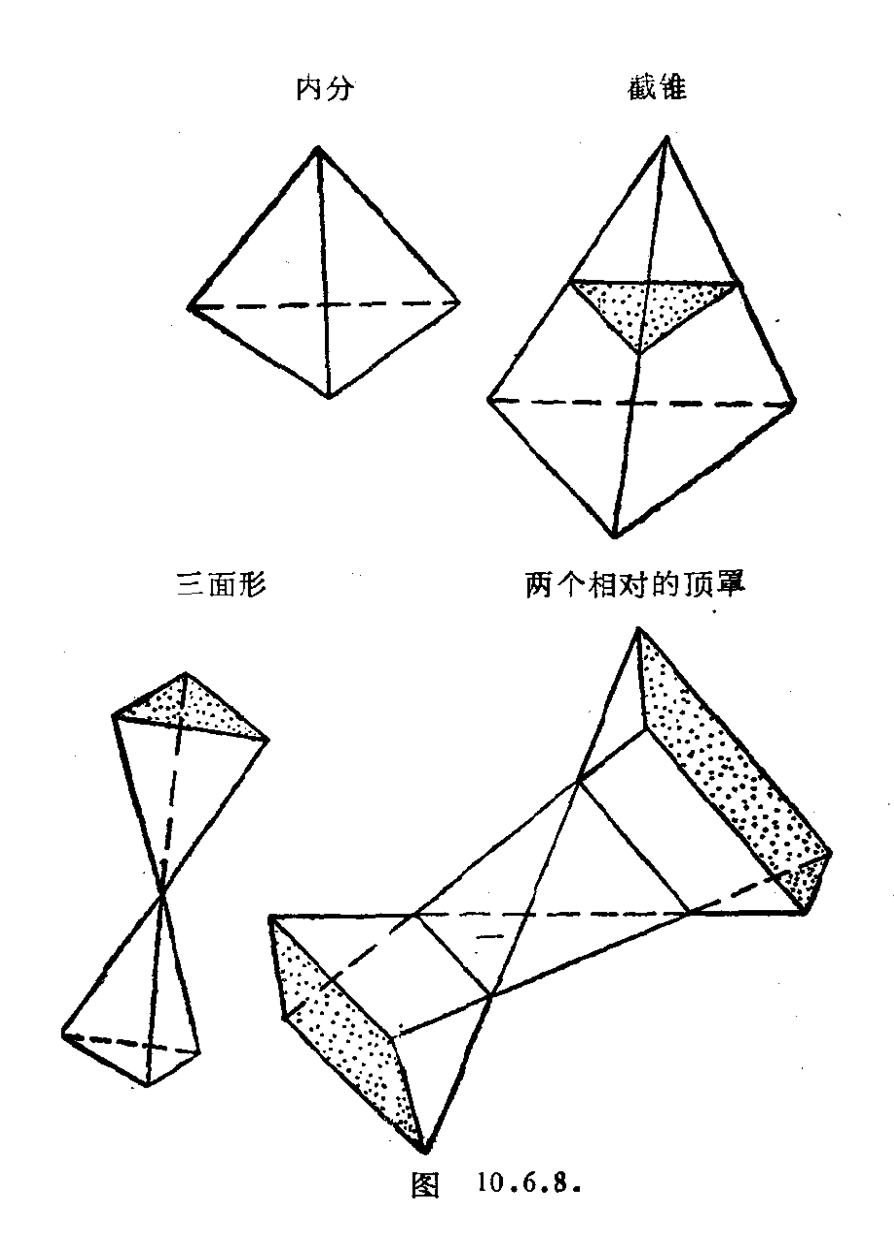


图 10.6.8.

由此可见恰好有一个球面内切于 $\mathscr{C}$，其半径为

$$r=\frac{3V}{a_1+a_2+a_3+a_4};$$

在每个截锥内有且仅有一个相切球面，例如在面 $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ 所确定的截锥内，其半径为 $r=\dfrac{3V}{a_1+a_2+a_3-a_4}$ ($a_4<a_1+a_2+a_3$，这是因为 a_4 是另外三个面在 H_4 上的射影的面积之和，应用 9.12.4.9 后可知这些面积严格地变小了). 而顶罩的情形则不同，因为我们不知道 $a_1+a_2-a_3-a_4$ 究竟是什么，我们只知道如果在一个顶罩内有相切球面，那么在相对顶罩内肯定不会有．为了完成讨论，假设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant a_4$．如果这些面全相等(即有相同

面积)，就只有五个球面，在顶罩内没有球面. 如果 $a_1=a_2>a_3=a_4$，有六个球面，并且只在 $\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，$\lambda_3<0$，$\lambda_4<0$ 的顶罩内有一个. 如果 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3>a_4$ 以及 $a_1+a_4=a_2+a_3$，则有七个球面其中两个在顶罩内. 在所有其它情形都有八个球面.

关于这些球面的详细讨论可参看 [R-C2] 第 653 页. 我们在这里仅限于指出对正四面体（见 12.5.4.1）来说，有 $a_1=a_2=a_3=a_4$. 但是不难作出非正则的四面体使它的四个面有相等面积.

10.7 球 面

在以后几节，我们将把圆和球面放在与其它对象联系的情形中加以研究，有时一次研究几个对象间的关系. 至于对球面本身的研究请参看第十八章. 我们通常假定 $\dim X\geqslant 2$，因为当维数是 1 时，球面仅由两个点构成，因此是毫无兴味的.

10.7.1 定义. 称子集 $S(a,r)=\{x\in X:ax=r\}$ 为以 a 为中心 r 为半径的球面；如果 $n=\dim X=2$ 则称为圆.

10.7.2 与子空间的交集. 设 $S=S(a,r)\subset X$，Y 是 X 的仿射子空间，把 a 在 Y 上的射影记为(参见 9.2.4)，则(见 9.2.3)

$$\begin{cases}\text{如果 } d(a,Y)=ax>r: S\cap Y=\varnothing,\\ \text{如果 } d(a,Y)=ax=r: S\cap Y=\{x\},\\ \text{如果 } d(a,Y)=ax<r:\end{cases}$$

$$S\cap Y=S_Y(x,\sqrt{r^2-az^2})=\{z\in Y: zx=\sqrt{r^2-ax^2}\},$$

10.7.3 附注. 根据我们所研究问题的性质，把半径为零的球面排除在外是合适的. 为了不致使陈述太噜苏，我们把特殊情况留给读者去考虑，反正其中没有本质上的困难.

10.7.4 切超平面. 如果 $d(a,Y)=r$，则称子空间 Y 与 $S=S(a,r)$ 相切，更精确地说是切 S 于点 $Y\cap S$. 在 $x\in S$ 存在一个且仅有一个切超平面，称为 S 在 x 点的切超平面，记为 T_xS. 其特征是含 x 且与 $\overrightarrow{xa}$ 正交. 它也可看成是向量子空间 $x^\perp$，参看

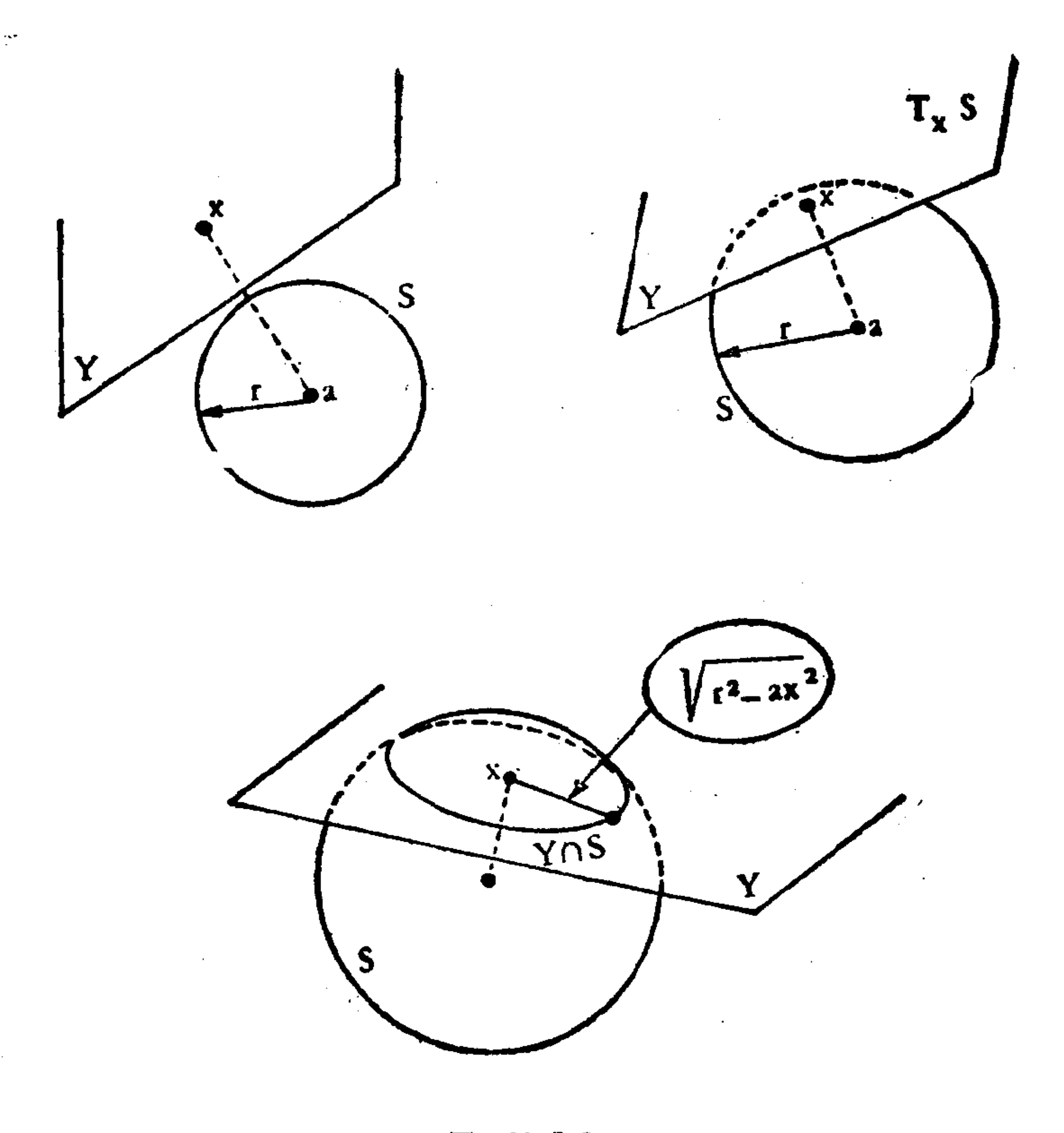


图 10.7.2.

18.1.2.4.

这个超平面与来源于其它理论的切超平面的概念相符：如果把S看成二次超曲面，则它在非退化二次超曲面意义下的切超平面重合于前面所述的切超平面．参见 14.3.8.

如果把 $S \subset X$ 看作微分子流形，它在微分意义下在x点的切空间 $T_x S$ 就是落在S内的X的 C^1 类曲线在x点的切向量的集合，参见 18.3.3．这样定义的切空间与前面所述的切超平面重合．

10.7.5 两个球面的交． 在X内设 $S = S(a, r)$，$S' = S(a', r')$，$a \neq a'$（非同心球面），则从 10.2.1 可得：

$$\begin{cases} \text{如果 } |r-r'| \leqslant aa' \leqslant r+r' \text{ 不满足,则 } S\cap S'=\varnothing, \\ \text{如果 } aa'=r+r' \text{ 或 } aa'=|r-r'|\text{, 则存在 } x \text{ 使 } S\cap S'=\{x\} \text{ 并且 } T_xS=T_xS', \\ \text{如果 } |r-r'|<aa'<r+r'\text{,则存在与 } \overrightarrow{aa'} \text{ 正交的超平面使得 } S\cap S'=S\cap H=S'\cap H \text{ 是} H \text{上以 } \langle a, a'\rangle\cap H \text{ 为中心的球面.} \end{cases}$$

如果 $aa'=r+r'$，则称 S,S' 是外切的；如果 $aa'=|r-r'|$，则称为内切．在第三种情形称 S 和 S' 相割．

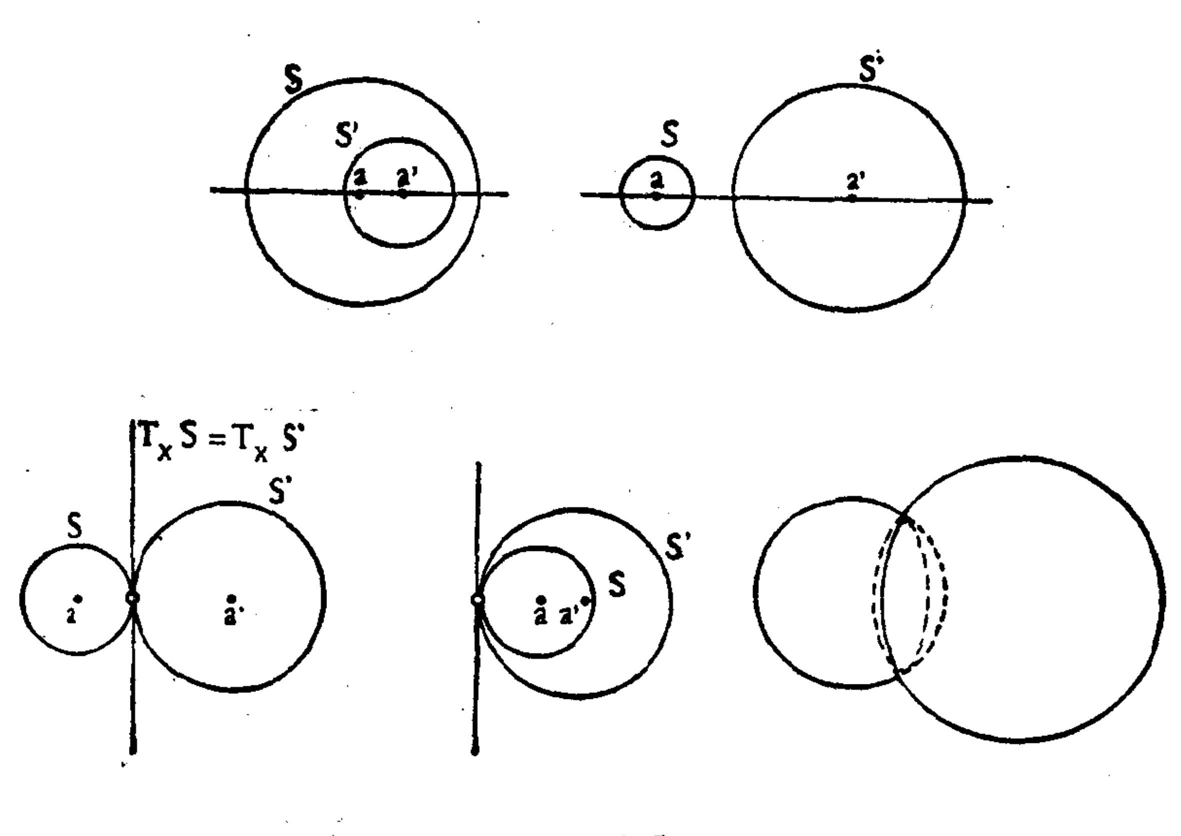


图 10.7.5.

10.7.6 解析几何． 对于球面来说没有太大的困难．把 X 向量化后，$S=S(a,r)$ 的方程就是 $\|x-a\|^2=r^2$，即 $\|x\|^2-2(a|x)+a^2-r^2=0$．反之，若 k，h 是纯量而 α 是 X 的向量（把 X 在任意一个点处向量化)，则当 $k\neq 0$ 时，方程

$$k\|x\|^2+(\alpha|x)+h=0$$

代表

$$\begin{cases} 如果\ \|\alpha\|^2-4kh<0: 空集, \\ 如果\ \|\alpha\|^2-4kh=0: 点\left\{-\dfrac{\alpha}{2k}\right\}, \\ 如果\ \|\alpha\|^2-4kh>0: S\left(-\dfrac{\alpha}{2k}, \sqrt{\dfrac{\|\alpha\|^2-4kh}{4k^2}}\right). \end{cases}$$

举例来说，为了研究 $S\cap S'$（见 10.7.5），我们发现 $S\cap S'$ 被包含在 $\|x\|^2-2(a|x)-r^2=\|x\|^2-2(a'|x)+r'^2$ 内，即当 $a\neq a$ 时含于超平面 $(a'-a|x)+r^2-r'^2=0$ 内。

关于解析几何对球面的应用，可参见 9.7.3.7 以及整个第 20 章。

10.7.7 两个球面的交角. 如果 $S=S(a,r)$，$S'=S(a',r')$ 满足 $S\cap S'\neq\varnothing$，则角 $\varphi=\overrightarrow{xa},\overrightarrow{xa'}\in[0,\pi]$ 与 $x\in S\cap S'$ 无关，被称为 S 与 S' 的交角. 它由

$$\cos\varphi=\frac{r^2+r'^2-aa'^2}{2rr'}$$

所确定. 如果 $\varphi=\pi$，则 S 和 S' 是外切的，如果 $\varphi=0$，是内切的. 如 $\varphi=\pi/2$，则称 S 和 S' 正交，记为 $S\perp S'$.

10.7.8 命题. 已知 n 维空间 X 的 $n+1$ 个球面 $S_i(i=1,\cdots,n+1)$ 以及 $n+1$ 个角 $\varphi_i\in[0,\pi]$，则至多存在两个球面，它们与每个 S_i 交成角 $\varphi_i(i=1,\cdots,n+1)$.

设 $S_i=S(x_i,r_i)$，且 $S=S(x_0,R)$ 是所求的球面. 使用 9.7.3 的记号及结果，对于点 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,n+1}$ 有

$\Gamma(x_0,x_1,\cdots,x_{n+1})=0$ 以及 $d_{0i}^2=R^2+r_i^2-2Rr_i\cos\varphi_i$.

把 $d_{0i}(i=1,\cdots,n+1)$ 的这些值代入 $\Gamma(x_0,x_1,\cdots,x_{n+1})$，再对行与列作些减法，就能得到关于 R 的二次方程：$\alpha R^2+\beta R+\gamma=0$，因而至多只有两个可能的半径. 根据 9.7.1，当 R 已知时 $d_{0i}=x_0x_i$ 也知道了，因此至多只有两个可能的点 x_0.

10.7.9 例. 正交球面的情形是特别的，它至多只能有一个解，因为当所有的 φ_i 都等于 0 时，方程变成 $\alpha R^2+\gamma=0$. 在 10.7.10.2

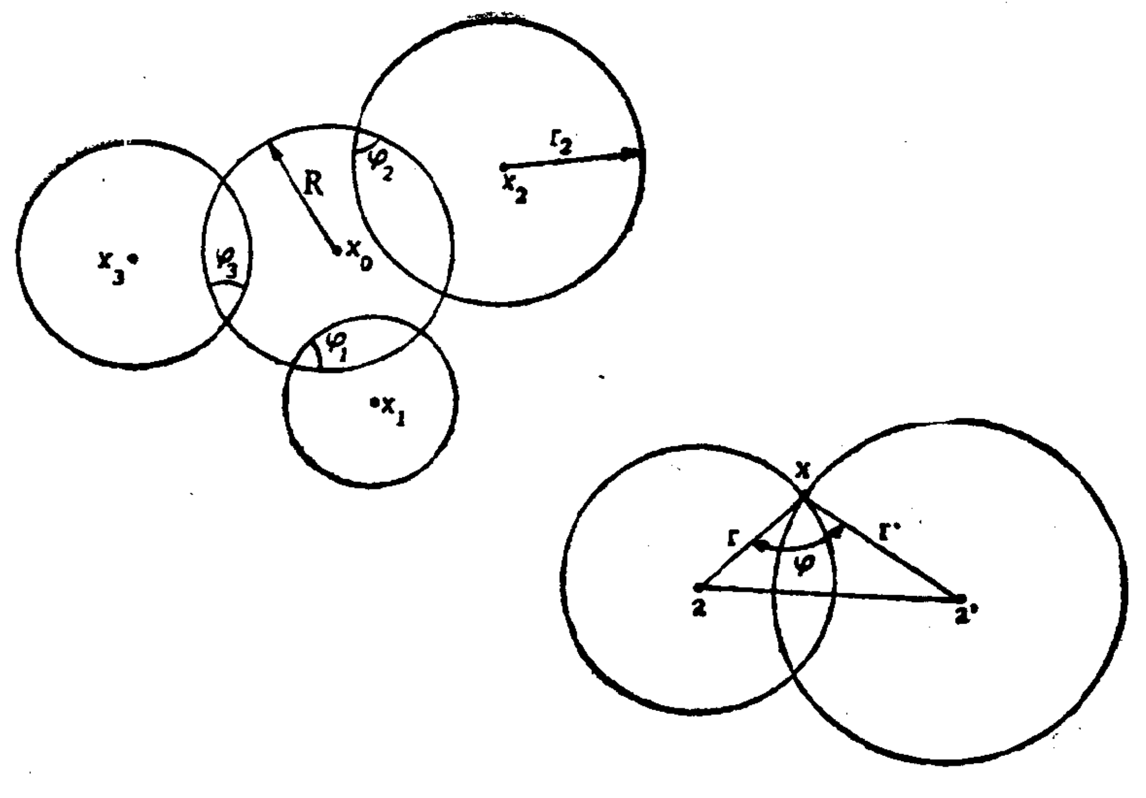


图 10.7.8.

还会遇到这种情形.

与 $n+1$ 个已知球面相切的球面显然可有 2^{n+1} 个解(至多),这是因为 $\varphi_i=0$ 或 π 有 2^{n+1} 种组合,但是如果把所有的 φ_i 都变

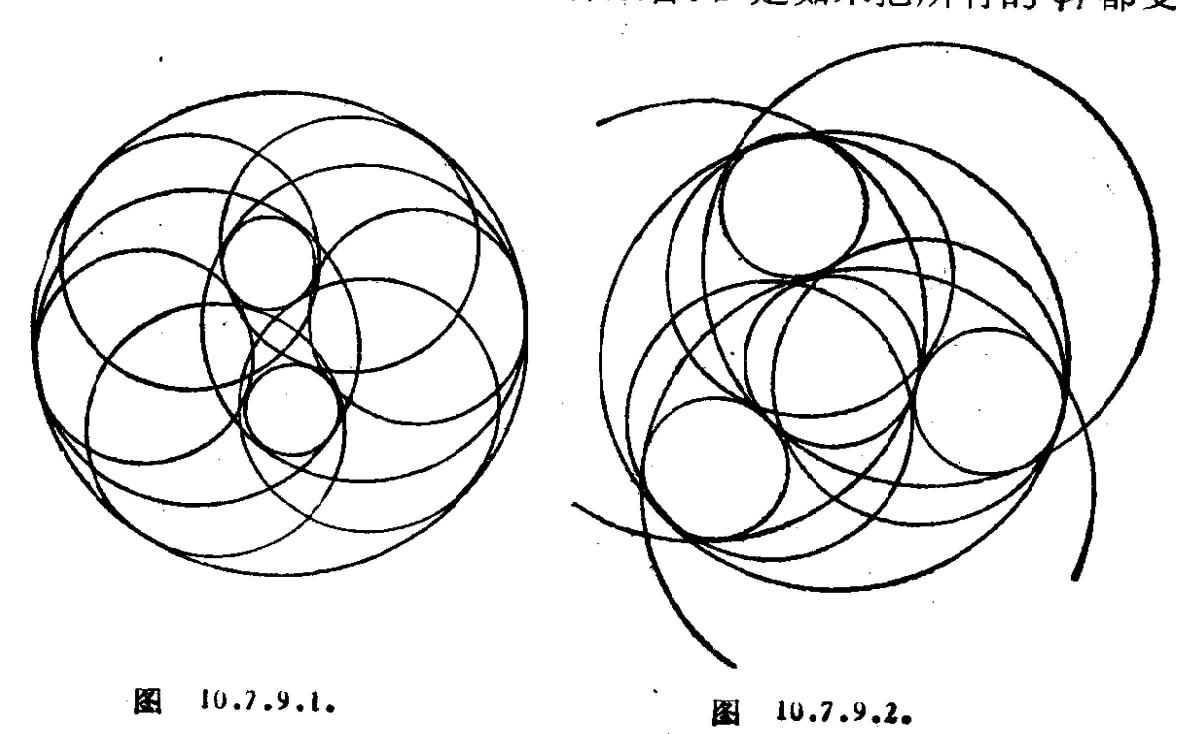


图 10.7.9.1.　　　图 10.7.9.2.

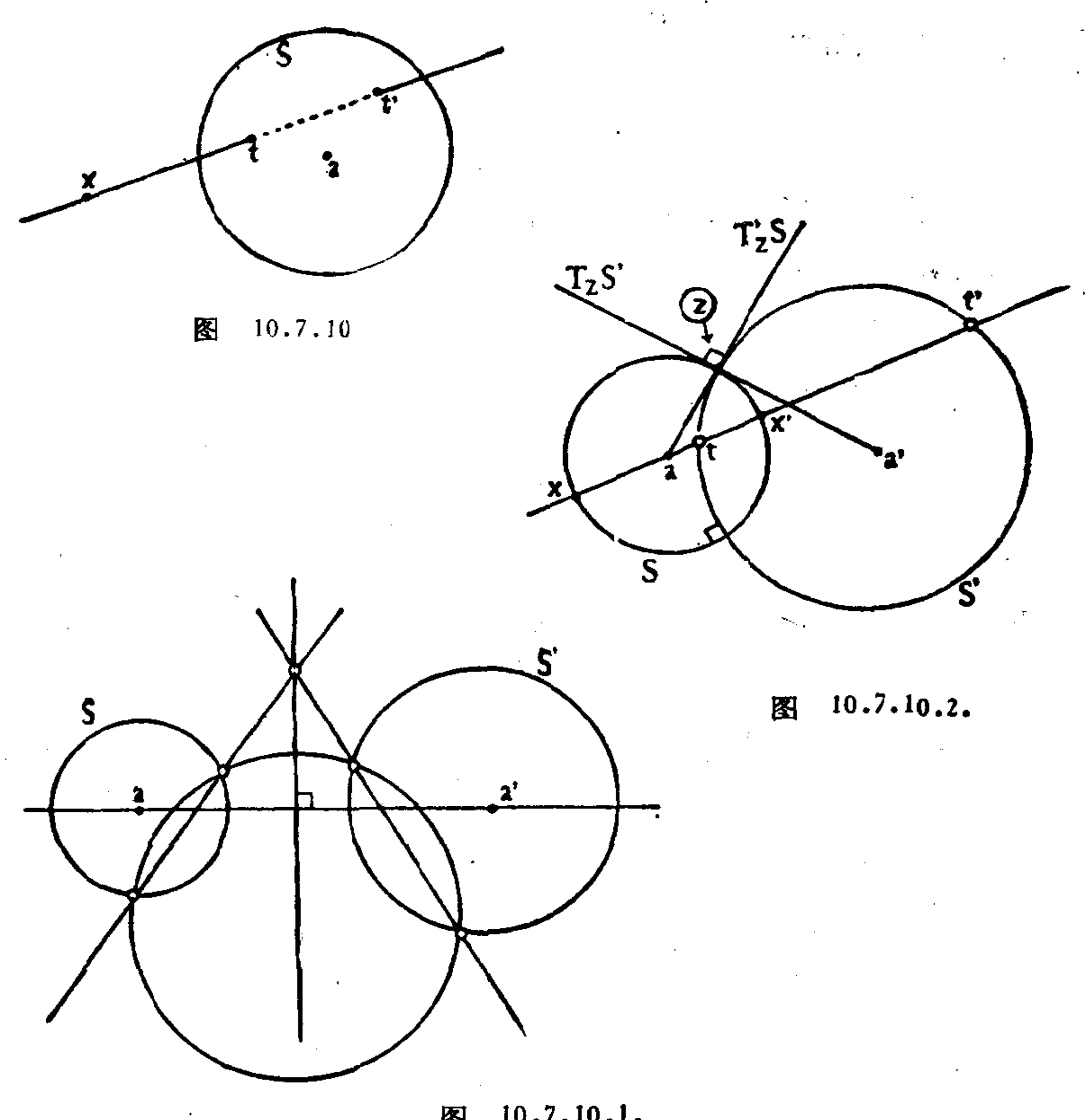


图 10.7.10

图 10.7.10.2.

图 10.7.10.1.

成 $\pi-\varphi_i$，则方程 $\alpha R^2+\beta R+\gamma=0$ 仍然不变，因而至多有 2^{n+1} 个解。而且确实会有 2^{n+1} 个解。并且随着 $\varphi_i=0$ 或 π 的不同选择，有两个解或零个解。图 10.7.9.1 与 10.7.9.2 是平面的情形。但也有零个解的情形！

10.7.10 幂．设 $S=S(a,r)$，$x\in X$，则对任意的过 x 且割 S 于 t，t'（可能有 $t=t'$）的直线 D，数量积 $(\overrightarrow{xt}|\overrightarrow{xt'})$ 是常数且等于 xa^2-r^2，它称为 x 关于 S 的幂，记为 P_xS。

这个数量的绝对值是 $xt.xt'$，符号＋或－随 x 在线段 $[t,t']$ 的外部还是内部而定。

把 $[t, t']$ 的中点记为 h，则证明就是写出下式：

$$(\overrightarrow{xt} \mid \overrightarrow{xt'}) = xh^2 - ht^2 = xa^2 - ah^2 - ht^2 = xa^2 - r^2.$$

在解析几何中，如果 S 的方程以 $\|\cdot\|^2$ 作为首项，则 P_xS 就是通过把 x 代入 S 的方程而得到的.

10.7.10.1 设 $S = S(a, r)$，$S' = S(a', r')$ 是使 $a \neq a'$ 的两个球面，则集合 $\{x \in X : P_xS = P_xS'\}$ 是与 $\overrightarrow{aa'}$ 正交的超平面（利用 9.7.6.5 及解析几何），被称为 S 与 S' 的根超平面（当 $n = 2$ 时是根轴）. 其几何作图法如图 10.7.10.1 所示，它用到了幂的定义.

10.7.10.2 $S = S(a, r)$，$S' = S(a', r')$ 的正交性（参看 10.7.7）可用多种方式表达，因此是一个很有用的概念. 球面 S，S' 为正交的充要条件是 $aa'^2 = r^2 + r'^2$，或 $P_aS' = r^2$，或 $P_{a'}S = r'^2$，或者是存在过 a 的直线 D，它割 S' 于 t，t'，割 S 于 x，x'，使得 $[x, x', t, t'] = -1$（调和分割）. 当然也有

$$T_zS \perp T_zS' \forall z \in S \cap S'.$$

由上所述可以推断出：与一些已知球面正交的球面的中心位于其中任两个球面的根超平面上. 这样就得到了 n 维空间 X 内 $n+1$ 个球面的根心的概念. 我们重新回到了 10.7.9.

10.7.10.3 幂的概念能帮助我们解决一些作图问题：例如在平面上作一个圆使它过两个已知点且与已知圆相切. 切点已在图 10.7.10.3.1 上标出.

另一个例子是图 10.7.10.3.2 的“第六圆”定理. 请不要把这个定理与 Miguel 的六圆定理（见 10.9.7.2）混淆，后者的证明更加复杂. 关于这些定理的新近的参考文献，可见 [DI] 第 256 页.

10.7.11 配极变换. 关于球面的配极变换是关于非退化二次曲线的配极变换的特例. 它并无使人特别感兴趣之处. 反而因涉及到无穷远点，在仿射的范围内会产生例外而使人感到不便（关于二次超曲面的配极变换参看 14.5）. 关于这个配极变换我们只提两个特点. 第一个是：x 关于 $S(a, r)$ 的极超平面 H 总是与 $\overrightarrow{ax}$ 正交，并且由

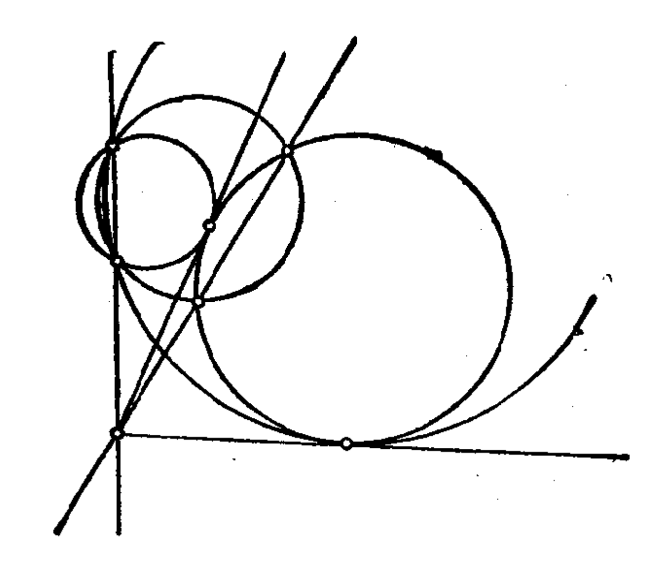


图 10.7.10.3.1.

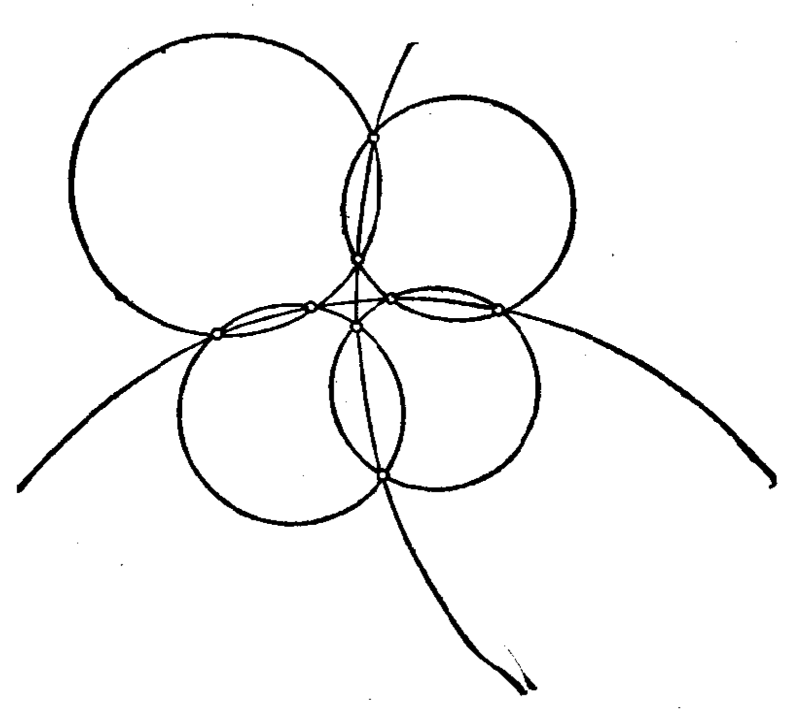


图 10.7.10.3.2.

$$d(a, H) = \frac{r^2}{ax}$$

所确定. 第二点是配极变换可用如下的初等方法定义(这是 10.7.10.2 的结果):两个点 x, y 关于 S 为共轭的条件就是以 xy 为直径的球面正交于 S.

关于配极变换的应用请参看 10.13.14.

10.8 反　演

这里只讲初等理论．为了避免在本节遇到的种种例外情形以及为了能利用二次型这一有力工具，在第 20 章还要在更一般的情形下讨论．这里讲的一些内容是初等的，它将会对第 20 章的讨论有所启发．

10.8.1 定义． 以 c 为极点，以 $\alpha\in\mathbf{R}^*$ 为幂的反演是一个映射 $i=i_{c,\alpha}:X\backslash c\to X\backslash c$，定义为 $i(x)=\dfrac{\alpha}{\|x\|^2}\cdot x$，其中 X 已在 c 点向量化．

10.8.1.1 显然 $i^2=\mathrm{Id}_{X\backslash c}$．仅当 $\alpha>0$ 时才有不动点，而且不动点形成一个球面 $S(c,\sqrt{\alpha})=\{x\in X:i(x)=x\}$，称为反演球面．凡是满足 $P_cS=\alpha$ 的球面 S 都是在 $i_{c,\alpha}$ 作用下稳定的，这可从 10.7.10 立即推导得出．当 Y 是 X 的含极点 c 的子空间时，$Y\backslash c$ 也是稳定的，并且有遗传性：在 Y 内，$i|_{Y\backslash c}$ 也是以 c 为极点而且有相同的幂的反演．

10.8.1.2 我们有

$$i_{c,\alpha}\circ i_{c,\beta}=H_{c,\alpha\beta^{-1}}|_{X\backslash c}.$$

10.8.1.3 对于 $x,y\in X\backslash c$，有 $i(x)i(y)=|\alpha|\dfrac{xy}{cx\cdot cy}$．只要把 X 在 c 点向量化，再作一些计算就能得到此公式．

10.8.2 球面与超平面的变换．设 $i=i_{c,\alpha}$ 是 X 内反演，则任意一个不含 c 的超平面 H 的像 $i(H)$ 是去掉一点后的球面 $S\backslash c$，其中 S 是 X 中过 c 点的球面．反之，设 S 是过 c 点的球面，则 $S\backslash c$ 的像是不含 c 的超平面．不含 c 的球面在 i 下的像仍是不含 c 的球面．

由于 10.8.1.2 的公式，作适当位似变换后可以假设 $\alpha=ch^2$，其中 h 是 c 在 H 上的正交射影．如果令 $i(x)=x'$，$x\in H$，并在 X_c 内计算：

$$x \in H \Longleftrightarrow (x|h) = \|h\|^2, \text{ 不过 } x = \frac{\|h\|^2 x'}{\|x'\|^2},$$

因此

$$x \in H \Longleftrightarrow (x' - h|x') = 0,$$

这相当于 x' 属于以 $[c, h]$ 为直径的球面. 如果 S 是不含 c 的球面，$P_c S = \alpha$，则据 10.8.1.1 有 $i(S) = S$. 在一般情形下，通过应用 10.8.1.2 以及作一个适当的位似变换可转化为上述情形.

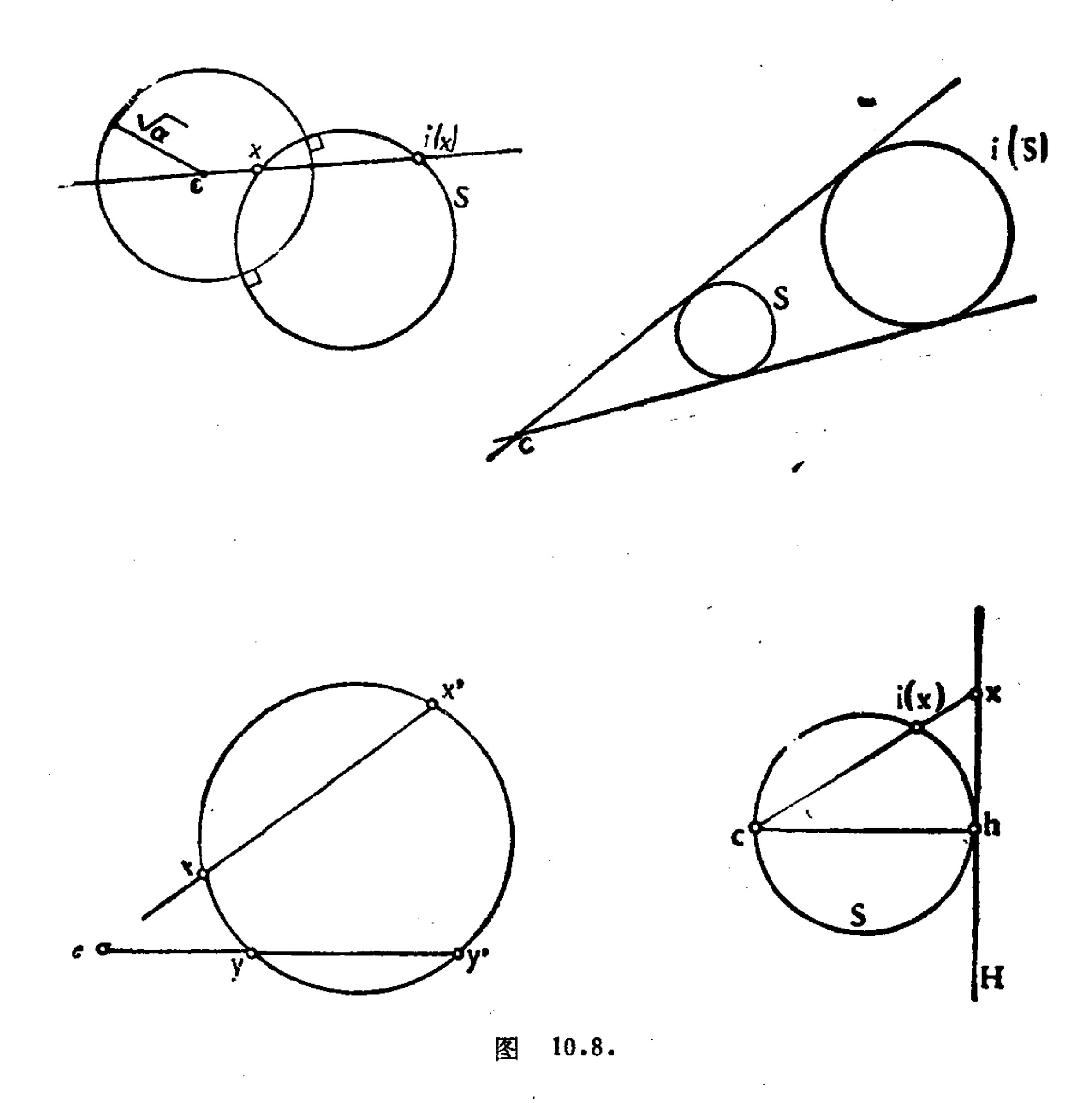


图 10.8.

10.8.2.1 附注. 对"保持球面"的映射的研究，请参看 9.5.3.2，9.5.3.6，18.10.4.

10.8.3 反演器. 这是实现反演变换的机械装置. 其意义在于利

用 10.8.2 的性质把圆周运动转化为直线运动．我们知道从机械上说圆周运动是易于实现的（如圆规、摇手柄等）．但在自然界，直线并非如此易于实现．譬如说为了造一把直尺，必须用好几把直尺作相互研磨才行． 请读者证明图1 0.8.3.1 及 10.8.3.2 的机械确实是反演器：其中 c 点固定，而另一些点是活动的．至于其它的关节装置请参看［LB1］第 64—88 页．也可参看 9.14.34.3.A．

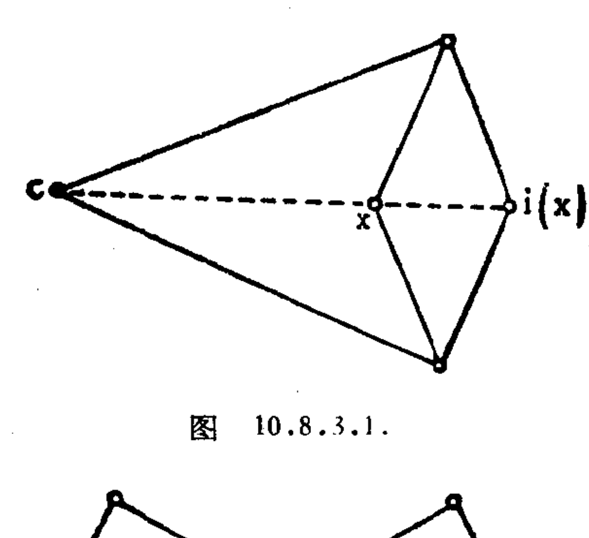


图 10.8.3.1.

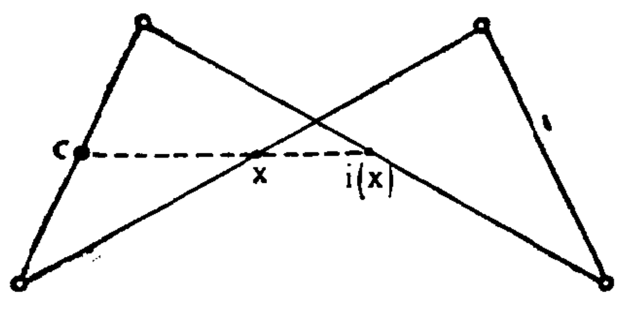


图 10.8.3.2.

10.8.4 演变． 这是群论中的内自同构的几何名称． 其结果如下所述：设 g 是一个反演， f 是以 S 为反演球面（见 10.8.1.1）的反演或者是一个超平面对称 σ_S，则 gfg^{-1}（称为 f 被 g 演变）如下：当 $g(S)$ 是超平面时，gfg^{-1} 是对称 $\sigma_{g(S)}$；当 $g(S)$ 是球面时，gfg^{-1} 是以 $g(S)$ 为反演球面的反演．

10.8.4.1 我们利用以下的判则：两个点 x，x' 在以 S 为反演球面的反演下互逆或者在对称 σ_S 下互相对称的充要条件是一切过 x 与 x' 的球面都与 S 正交（把球面与超平面正交定义为超平面通过球面中心）． 这个判则来源于 10.7.10.2．只要我们知道反演

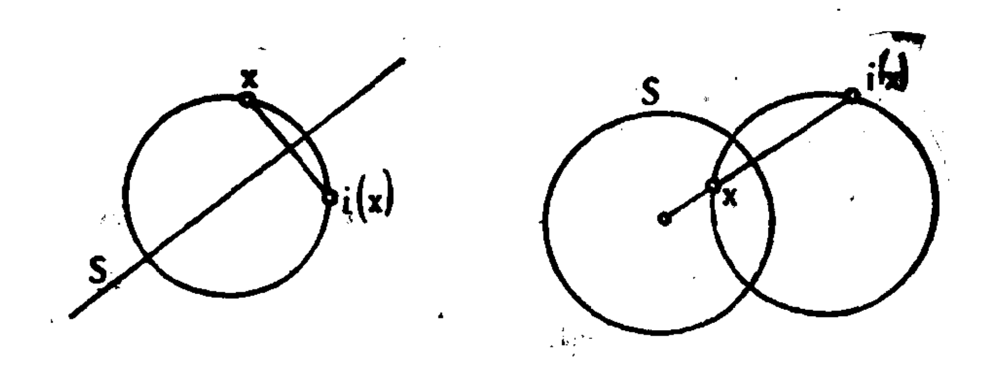


图 10.8.4.

把正交的球面或平面变换成正交的球面或平面，这个判则的证明就不难得出了．而上述结论可从 10.8.5.3 得出．

10.8.4.2 附注．读者可能注意到两件事：首先是需要一种累赘的语言，每次都需说“球面或超平面”．其次，10.8.4 是不正确的，这是指 gfg^{-1} 不是到处都有定义，需要除去对应于 f 和 g 的极点的两个点．正因这两个理由，我们感到需要有一个把球面与超平面统一起来的结构，并使超平面对称与反演的构成不受限制．这将是第 20 章的目的之一．

10.8.5 反演与微分几何．设 $i = i_{c,\alpha}$ 并且在 X_c 内计算，则 $i: X \backslash c \to X \backslash c$ 是 C^∞ 微分同胚．它的导数是：

10.8.5.1 $$i'(x)(y) = \frac{\alpha}{\|x\|^2}\left[y - 2\left(\frac{x}{\|x\|^2}\middle| y\right)x\right].$$

这可从 i 的定义公式及微分法则得到(参见 [CH1])．

10.8.5.2 推论(反演保持交角)．如果 $i_{c,\alpha}$ 是 n 维空间 X 的反演，则在任意一个点 $x \in X \backslash c$ 处，其导数 $i'(x)$ 是一个相似变换，当 $\alpha^n < 0$ 时，这个相似变换是正向的，当 $\alpha^n > 0$ 时，是逆向的特别，这个导数总是保持直线的交角及定向直线的交角，并且当 X 是平面时，对于定向角来说总要改变符号．

事实上，10.8.5.1 表明 $i'(x)$ 是由关于向量超平面 $x^\perp$ 的对称(见 8.2.10) 以及位似比为 $\alpha/\|x\|^2$ 的位似变换所合成．这只需应用 8.8.5 就能得出．

10.8.5.3 作为特例，反演变换保持角度，因此保持球面以及超

平面的正交性．我们当然可以不用微分学而直接证明．

10.8.5.4 附注． 在 9.5.4.6 (Liouville 定理)中，我们已找出了使导数为相似变换的一切微分同胚．

10.8.5.5 反演与密切圆． 如果 i 是以 c 为极点的反演，f 是平面 X 的 C^2 类曲线，则当 $c \notin C$ 时，f 在 $f(t)$ 处的密切圆 C 的像 $i(C)$ 是 $i \circ f$ 在 $i(f(t))$ 处的密切圆．事实上 i 保持圆，并且密切圆是过曲线上相邻三点的圆的极限．

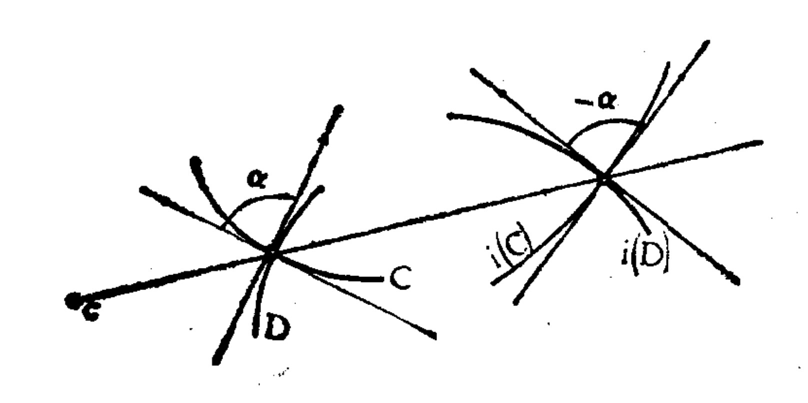


图 10.8.5.2.

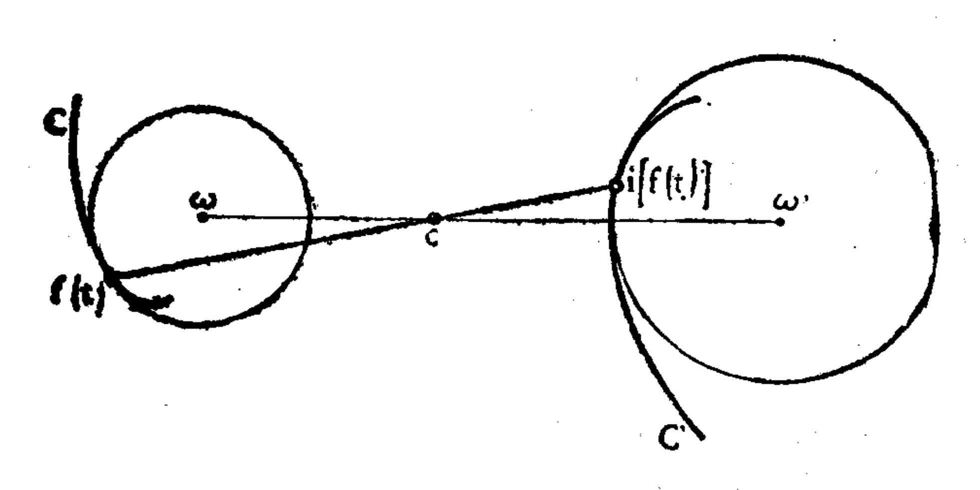


图 10.8.5.5.

10.8.5.5 的有趣的推论如下所述：球面上简单闭曲线的挠率至少在四个点上等于零．为此请参看 [B-G] 第 364 页．除此之

外，前面所述的结果也提供了已知曲线 C 的曲率中心 ω 后求出其反演像 C' 的曲率中心 ω' 的作图法.

10.8.5.6 参见 [BA-WH].

在 10.9 和 10.10 节，我们都在平面内讨论.

10.9 平面上的圆

这是除了平面内直线的几何外最简单的几何. 甚至还可说比直线更简单，因为圆轨比直尺更现成(参见 10.8.3).我们只能提到大量结果中的一部分. 基本工具只有三个: 幂、反演及定向角(见 8.7). 10.9.5 是定向角的主要应用.

10.9.1 记号与约定. 对于两个不同的点 x, y, 在本章的最后几节把它们的连线记为 $\langle x, y\rangle = \overline{xy}$. 如果 $x = y$ 但行文中已指明 x 属于圆 C 时，$\overline{xx}$ 就指 C 在 x 点的切线 T_xC.

基本论题是研究 X 的四个点 x, y, z, t 的共圆性. 第一个判则纯粹是度量上的:

10.9.2 命题 (Ptolémée 定理). 对于平面上四个点 $(x_i)(i=1, 2, 3, 4)$, 记它们的相互距离为 $d_{ij} = x_ix_j$, 则有 $d_{12}d_{34} \leqslant d_{13}d_{42} + d_{14}d_{23}$, 并且当等式成立时,这四个点或共圆或共线. 要使平面上四个点为共圆的充要条件是以下三个等式之一成立:

$$\pm d_{12}d_{34} \pm d_{13}d_{42} \pm d_{14}d_{23} = 0.$$

这已在 9.7.3.8 被证. 但能给一个更初等的证明也是不错的. 令 $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = c$, 设 i 是以 c 为极点、幂为 1 的反演. 对 $x' = i(x)$, $y' = i(y)$, $z' = i(z)$, 据 10.8.1.3 有:

$$x'y' = \frac{xy}{cx \cdot cy}, \quad y'z' = \frac{yz}{cy \cdot cz}, \quad z'x' = \frac{zx}{cz \cdot cx}.$$

从而

$$\begin{aligned} &cz \cdot xy + cx \cdot yz - cy \cdot zx \\ &\quad = (cx \cdot cy \cdot cz)(x'y' + y'z' - x'z'), \end{aligned}$$

如果注意到在共线三点中必有一点在另两点的中间，从 9.1.1.1 及 10.8.2 就能推导出所需结论.

10.9.2.1 附注. Ptolémée 关系式曾被他用来构造一个“绳桌”. 事实上，如果 x, z 是圆的直径，则公式 $xz\cdot yt = xy\cdot tz + xt\cdot yz$ 恰好化为三角公式 $\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\sin b\cdot\cos a$（见 8.7.8.1 及 10.3.2）. 也可参见 9.7.3.8.

10.9.2.2 不过最有用的共圆条件是利用定向角. 我们这里使用 8.7 及 10.9.1 的记号. 以下的命题当某些点重合时仍然有效. 我们只给出一般情形下的证明，把特殊情况留给读者验证. 其思想就是利用切线与半径正交这一特性.

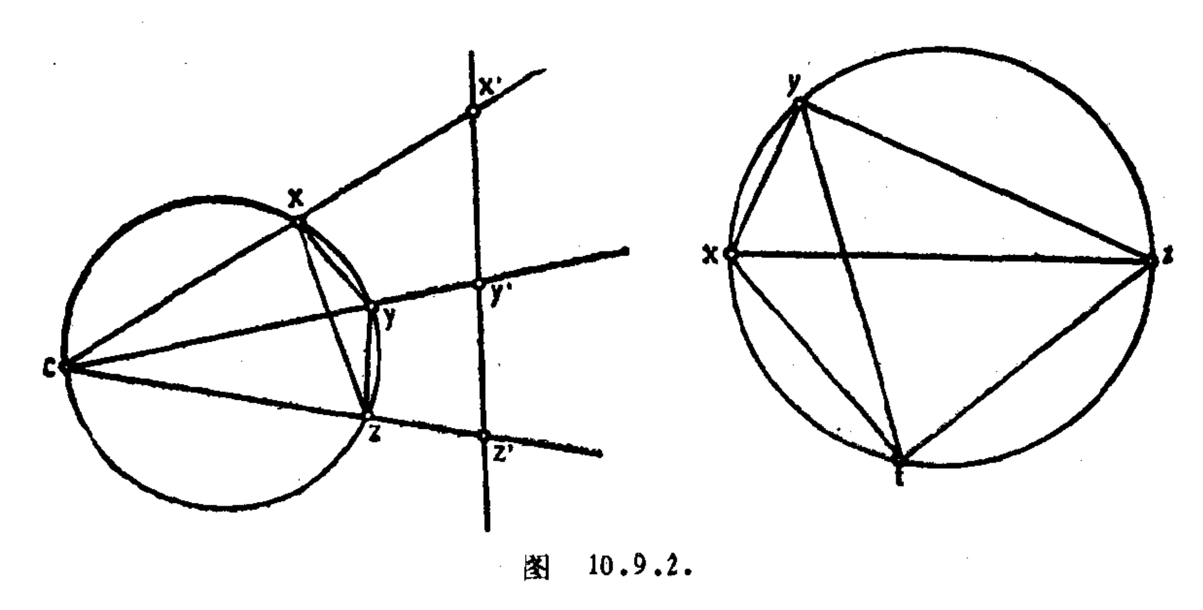


图 10.9.2.

10.9.3 命题（圆周角）. 设 C 是以 ω 为中心的圆，a, b 是 C 上两点，则对任意的 $x\in C$ 有

$$\widehat{\overrightarrow{\omega a},\overrightarrow{\omega b}} = 2\,\widehat{\overline{xa},\overline{xb}} \qquad \text{(见 8.7.7.7).}$$

设 x' 是 x 的中心对称点，据 8.7.2.4(4)，只需证

$$\widehat{\overrightarrow{\omega a},\overrightarrow{\omega x'}} = 2\,\widehat{\overrightarrow{xa},\overrightarrow{xx'}},$$

设 D 是 $\{x, a\}$ 的垂直平分线，σ_D 是关于 D 的对称. 由 8.7.2.4(5) 可得:

$$\widehat{\overrightarrow{\omega a},\overrightarrow{\omega x'}} = \widehat{\overrightarrow{\omega a},\overrightarrow{xa}} + \widehat{\overrightarrow{xa},\overrightarrow{\omega x'}} = \widehat{\overrightarrow{xa},\overrightarrow{x\omega}}$$

$$+\widehat{\vec{xa},\ \vec{x\omega}}=2\,\widehat{\overline{xa},\ \overline{x\omega}}.$$

10.9.4 推论. 设 $a,b\in X$, $a\neq b$, $\alpha\in\mathfrak{A}(\vec{X})\setminus 0$, 则 $\{x\in X:\widehat{\overline{xa},\overline{xb}}=\alpha\}$是过 a, b 两点的圆.

10.9.5 推论. X 的四个点为共圆或共线的充要条件是

$$\widehat{\overline{ca},\ \overline{cb}}=\widehat{\overline{da},\ \overline{db}}.$$

事实上当 a, b 已知时很容易作出点 ω 使 $\omega a=\omega b$ 并且

$$\widehat{\vec{\omega a},\ \vec{\omega b}}=2\alpha.$$

例如可取 ω 为 $\{a,b\}$ 的垂直平分线与一条过 a 且使 $\widehat{\overline{ab},D}=\delta-\alpha$ 的直线 D 的交点（参见 8.7.7.4）. 设 C 是以 ω 为圆心且过 a, b 两点的圆，则对 $x\in C$, 有

$$\widehat{\overline{xa},\ \overline{xb}}=\alpha.$$

反之，如 $\widehat{\overline{xa},\ \overline{xb}}=\alpha$, 则过 a, b, x 三点的圆的中心 ω' 满足

$$\widehat{\vec{\omega' a},\ \vec{\omega' b}}=2\alpha,$$

因此只能是 ω.

当 a, b, c 共线时，第二个推论是显然的，可参见 8.7.7.3. 当

$$\widehat{\overline{ca},\ \overline{cb}}\neq 0$$

时，可从前面的讨论推出.

10.9.6 注. 条件 10.9.5 对于非定向角不成立. 从非定向角的观点看，a, b, c, d 共圆可导致

$$\overline{\overline{ca},\ \overline{cb}}=\overline{\overline{da},\ \overline{db}}\quad\text{或}\quad\overline{\overline{ca},\ \overline{cb}}+\overline{\overline{da},\ \overline{db}}=\pi,$$

但其逆不成立. 因此 10.9.5 有它的好处，特别当涉及到复杂图形时，需要分别考虑的各种情形实在太多了. 也请参看 10.13.15.

请注意当 $\alpha=\delta$ 时，这就是以 a, b 为直径的圆.

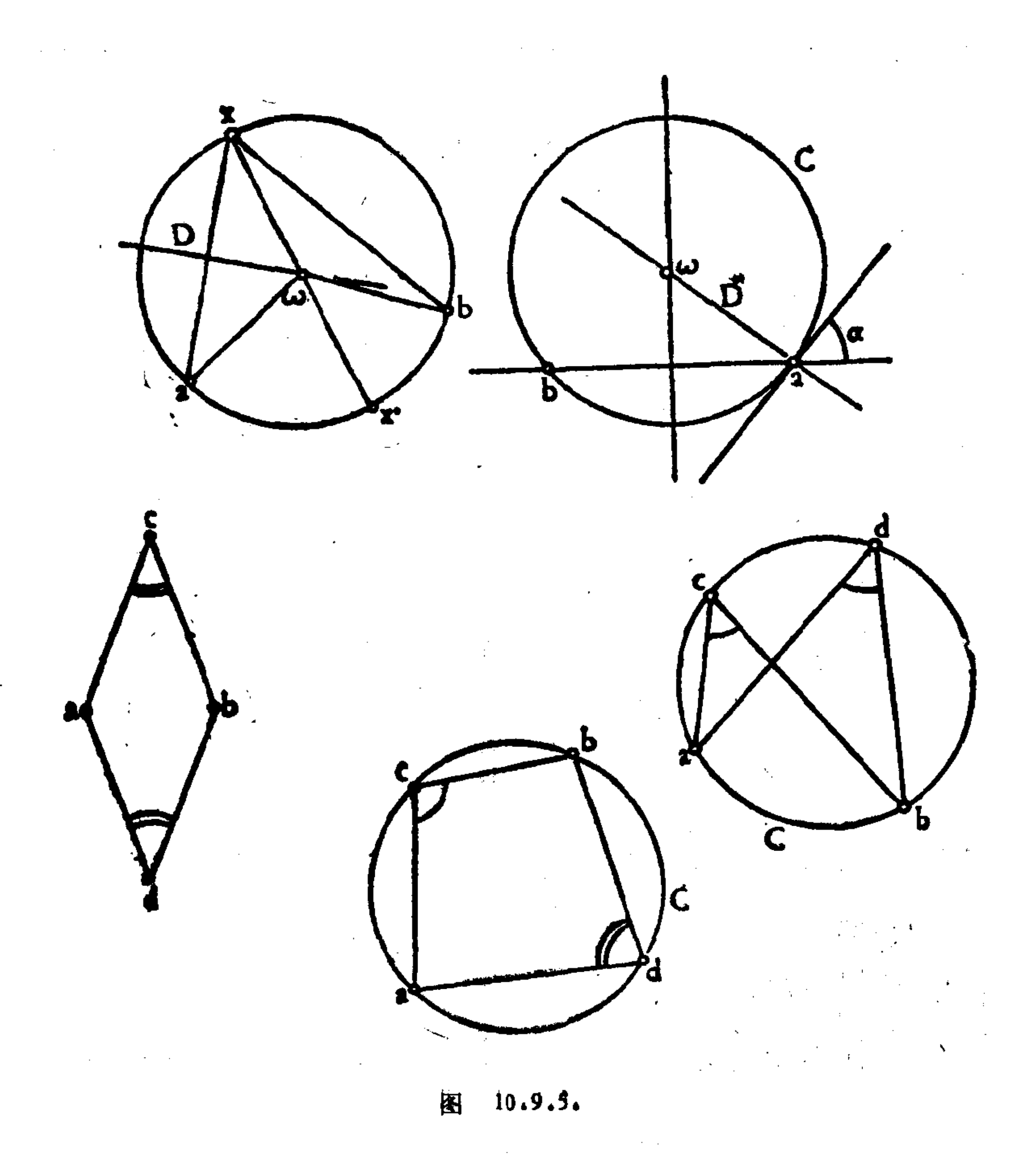


图 10.9.5.

10.9.3 及 10.9.5 亦将作为 17.4.2 关于圆锥曲线的一般定理的特例被证明.

10.9.7 例. 10.9.5 的应用是相当多的.建议读者考虑练习 9.14.3, 10.13.18, 并浏览参考文献 [D-C1], [D-C2], [I-R], [R-C1], [HD1], [R-C2], [HD2] 中的练习.我们只探讨其中两个.首先是 Simson 直线, 它已在 10.4.5.4 中出现过 (也请参看 9.14.34.3.D), 10.4.5.5, 10.9.7, 10.11.3, 10.13.27, 14.4.3.5, 17.8.3.2).

10.9.7.1 设 $\{a, b, c\}$ 是一个三角形. 点 x 在三边的射影

p, q, r 共线的充要条件是它们在 $\{a, b, c\}$ 的外接圆上.

关于这一类证明，我们往往借助于图形得到一系列相等的角，然后可写出如下的定向角：由于 $\widehat{\overline{pc}, \overline{px}} = \delta = \widehat{\overline{qc}, \overline{qx}}$ 以及

$$\widehat{\overline{qa}, \overline{qx}} = \delta = \widehat{\overline{ra}, \overline{rx}},$$

把 10.9.5 使用四次后可得

$$\widehat{\overline{cb}, \overline{cx}} = \widehat{\overline{cp}, \overline{cx}} = \widehat{\overline{qp}, \overline{qx}}$$

以及

$$\widehat{\overline{ab}, \overline{ax}} = \widehat{\overline{ar}, \overline{ax}} = \widehat{\overline{qr}, \overline{qx}}.$$

而"p, q, r 共线"等价于 $\widehat{\overline{qr}, \overline{qx}} = \widehat{\overline{qp}, \overline{qx}}$. 由上面等式可以导出 $\widehat{\overline{cb}, \overline{cx}} = \widehat{\overline{ab}, \overline{ax}}$，根据 10.9.5，这就是"$a, b, c, x$ 共圆"的条件.

长久以来这个"Simson 直线"定理被错误地归功于 Simson，其实它是属于 Wallace 的.

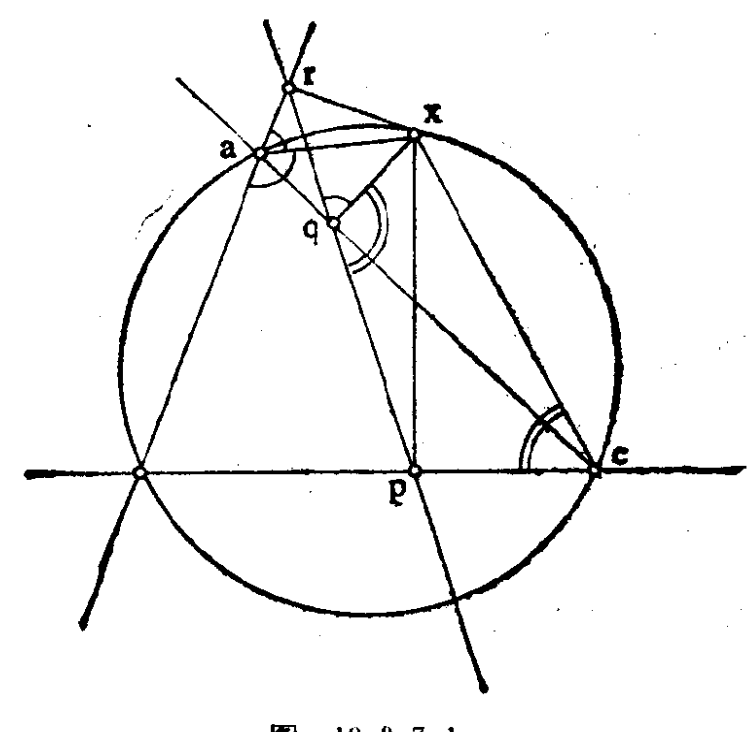


图 10.9.7.1.

10.9.7.2 六圆定理或 Miguel 定理. 设有四个圆 $C_i(i=1, 2, 3, 4)$ 使得 $C_1\cap C_2=\{a, a'\}$, $C_2\cap C_3=\{b, b'\}$, $C_3\cap C_4=\{c, c'\}$, $C_4\cap C_1=\{d, d'\}$, 则 a, b, c, d 共圆的充要条件是 a', b', c', d' 共圆.

利用 Chasles 关系式及四次运用 10.9.5, 可得

$$\widehat{\overline{ba}, \overline{bc}} = \widehat{\overline{ba}, \overline{bb'}} + \widehat{\overline{bb'}, \overline{bc}} = \widehat{\overline{a'a}, \overline{a'b'}} + \widehat{\overline{c'b'}, \overline{c'c}}$$

$$\widehat{\overline{da}, \overline{dc}} = \widehat{\overline{da}, \overline{dd'}} + \widehat{\overline{dd'}, \overline{dc}} = \widehat{\overline{a'a}, \overline{a'd'}} + \widehat{\overline{c'd'}, \overline{c'c}}.$$

相减后再利用 Chasles 关系式:

$$\widehat{\overline{ba}, \overline{bc}} - \widehat{\overline{da}, \overline{dc}} = \widehat{\overline{a'd'}, \overline{a'b'}} - \widehat{\overline{c'd'}, \overline{c'b'}}.$$

从 10.9.5 就能到到所需结论.

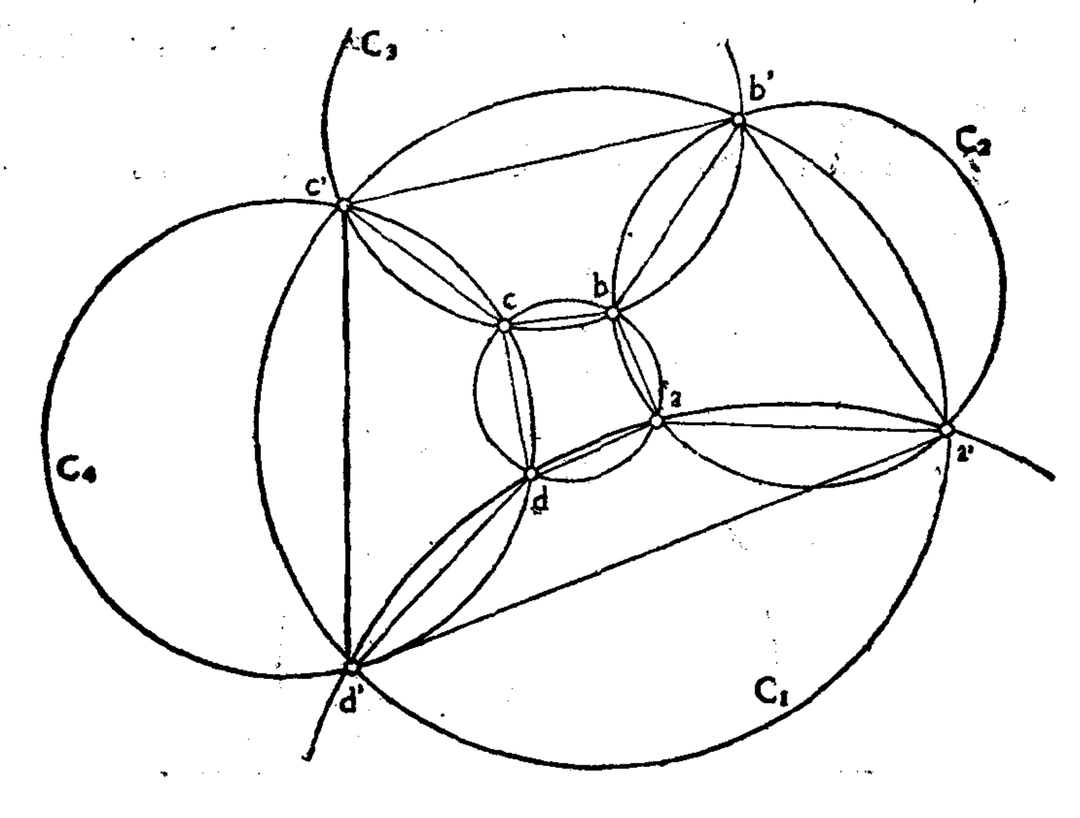


图 10.9.7.2.

10.9.7.3 注. Miguel 定理是一个"定理链"的第一个定理, 请参看 10.13.19. 关于定理链请参看 [PE1] 94.7, 第 431 页以及 [CR1] 的第 262 页和 258 页. 也请参看 10.11.7.

10.10 圆 束

从幂的性质很易得到以下结果(参见 10.7.10).

10.10.1 设 C, C' 是两个不同心的圆. 圆的集合 $\mathscr{F}=\{$圆 Γ: $\Gamma\perp C$ 且 $\Gamma\perp C'\}$ 中的任意两个元素都有相同的根轴, 就是过 C 和 C' 的中心 ω 及 ω' 的直线 $\langle\omega, \omega'\rangle$. 如 $\mathscr{F}$ 这样定义的圆的集合都称为一个圆束. 如果 Γ 和 Γ' 属于一个圆束 $\mathscr{F}$, 则新的圆束 $\{$圆 $C: C\perp\Gamma$ 且 $C\perp\Gamma'\}$ 记为 $\mathscr{F}^{\perp}$ 并称为 $\mathscr{F}$ 的正交束. 我们有 $C\perp\Gamma\forall C\in\mathscr{F}^{\perp}\forall\Gamma\in\mathscr{F}$. 并且 $\mathscr{F}^{\perp\perp}=\mathscr{F}$. 如果 C, C' 是相切的, 则 $\mathscr{F}$ 中的圆也互切, $\mathscr{F}^{\perp}$ 中的圆也互切. 如果 $C\cap C'=\emptyset$,

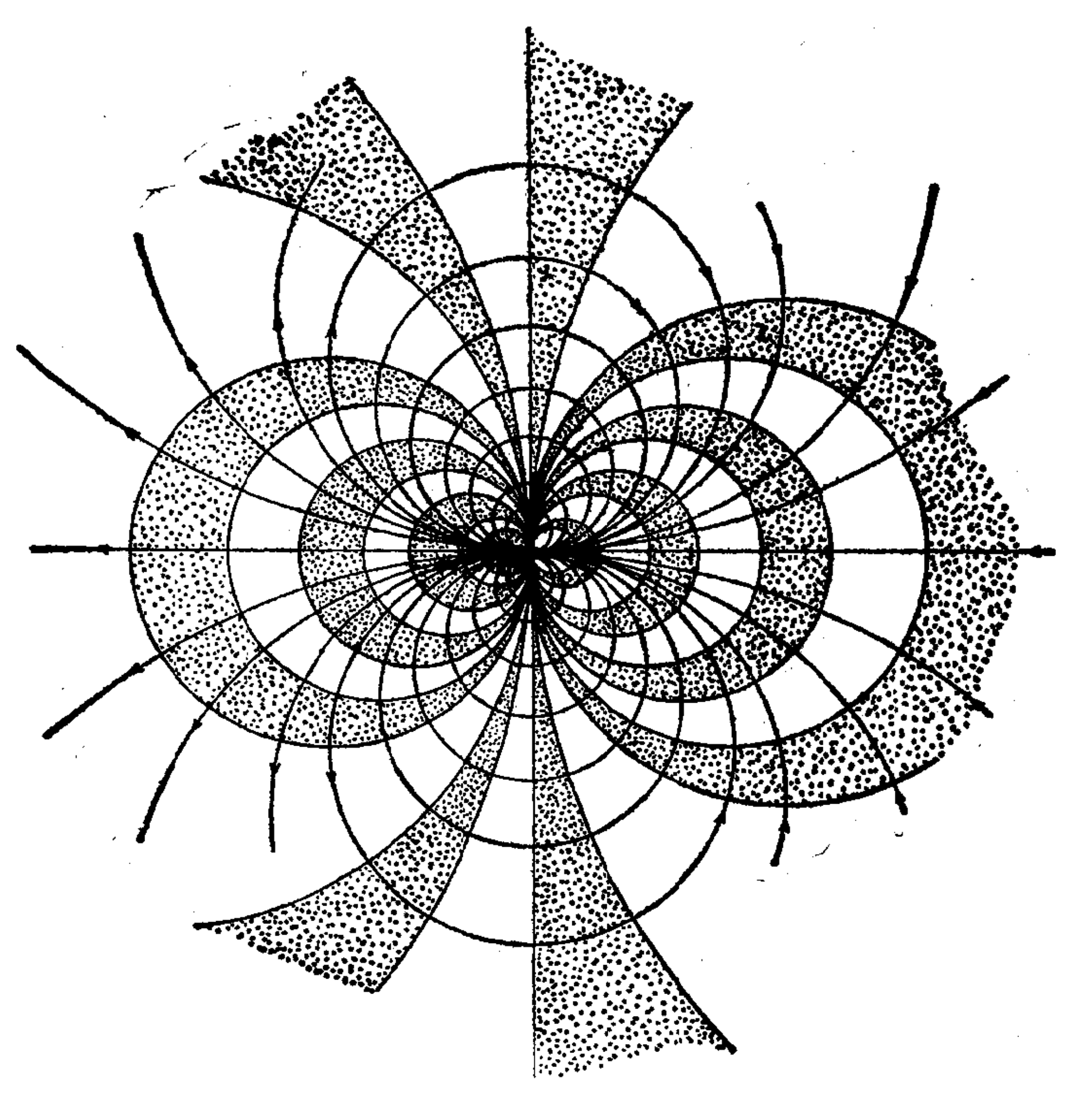


图 10.10.1.1.

则（在 $\langle\omega, \omega'\rangle$ 上）存在两个点 x, y 使 $\mathscr{F}^{\perp} = \{圆\ C: x, y \in C\}$. 点 x, y 称为 $\mathscr{F}$ 的极限点. 如果 $C \cap C'$ = 两个不同的点，则 $\mathscr{F}$ 由互不相交的圆组成.

在第 20 章还会重新遇到圆束.

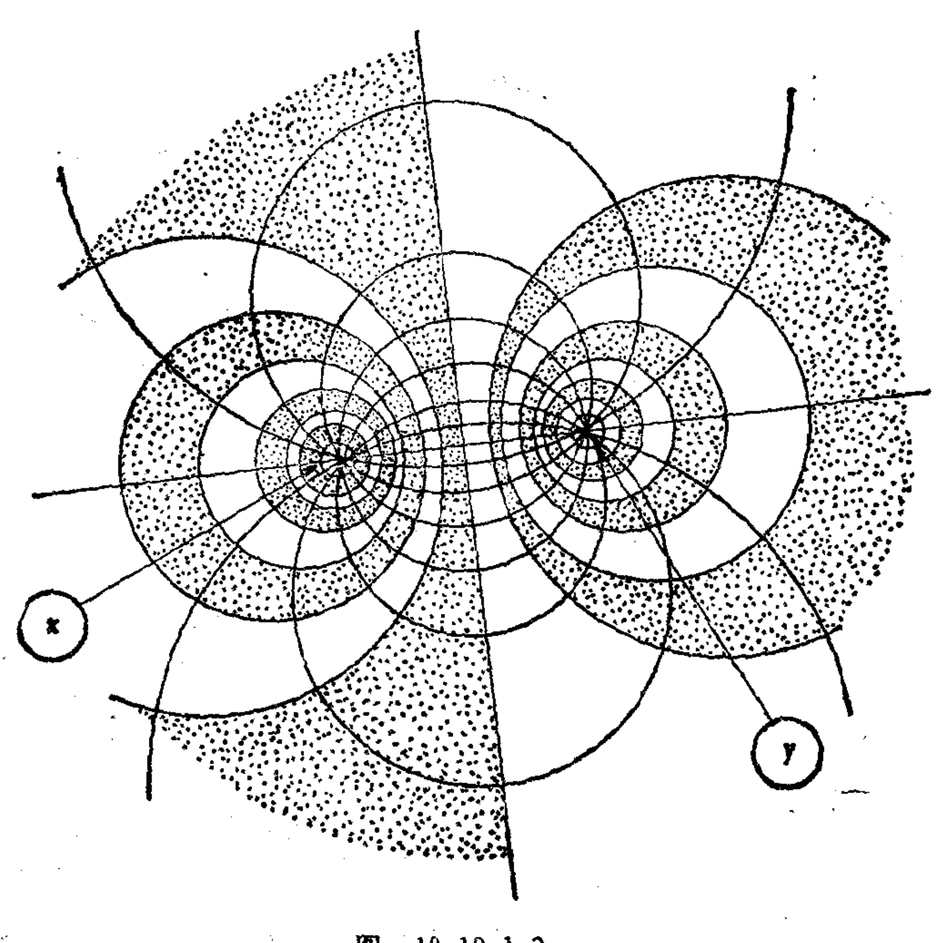


图 10.10.1.2.

10.10.2 两个圆的约化图形. 上一小节的内容以及反演变换的用处之一是：设 C, C' 是两个圆，则总有一个反演把它们变换成两条直线或两个同心圆.

事实上如果 $C \cap C' \neq \emptyset$，我们把反演的极点取在 $C \cap C'$ 内，如果 $C \cap C' = \emptyset$，则可把前述的极限点之一取成极点. 由于反演保持正交性（见 10.8.5.3），因此第二个极限点的反演像具有下述性质：过这个点的直线都与两个圆的反演像正交，这仅当像点是像圆的公共中心时才有可能做到.

10.10.2 的结果使我们能解决很多关于圆的问题. 譬如说：研

究与两个圆相割成等角的圆，或作一个圆使它与三个圆交成三个已知角等等。只要所加的条件在反演下仍然保持就行了。我们再用更深刻的方式表述前面的结果：两个同心圆所成的集合有一个相当大的稳定子群 G，因为 G 由一切使公共圆心不动的等距变换组成。同样可知由两条相交直线构成的集合在以它们的交点为中心的位似变换下保持稳定.用反演作演变后，从 G 可得到群 $\hat{G}$，它使最初考虑的两个圆的集合保持稳定，而且 $\hat{G}$ 由保持圆、直线及角的映射所构成。事实上这不再是从 E 到它自身的映射，而是在 20.1 将要引进的 $\hat{E}$ 的映射。 引入 $\hat{E}$ 正是为了使前面讨论的内容更加精确化。

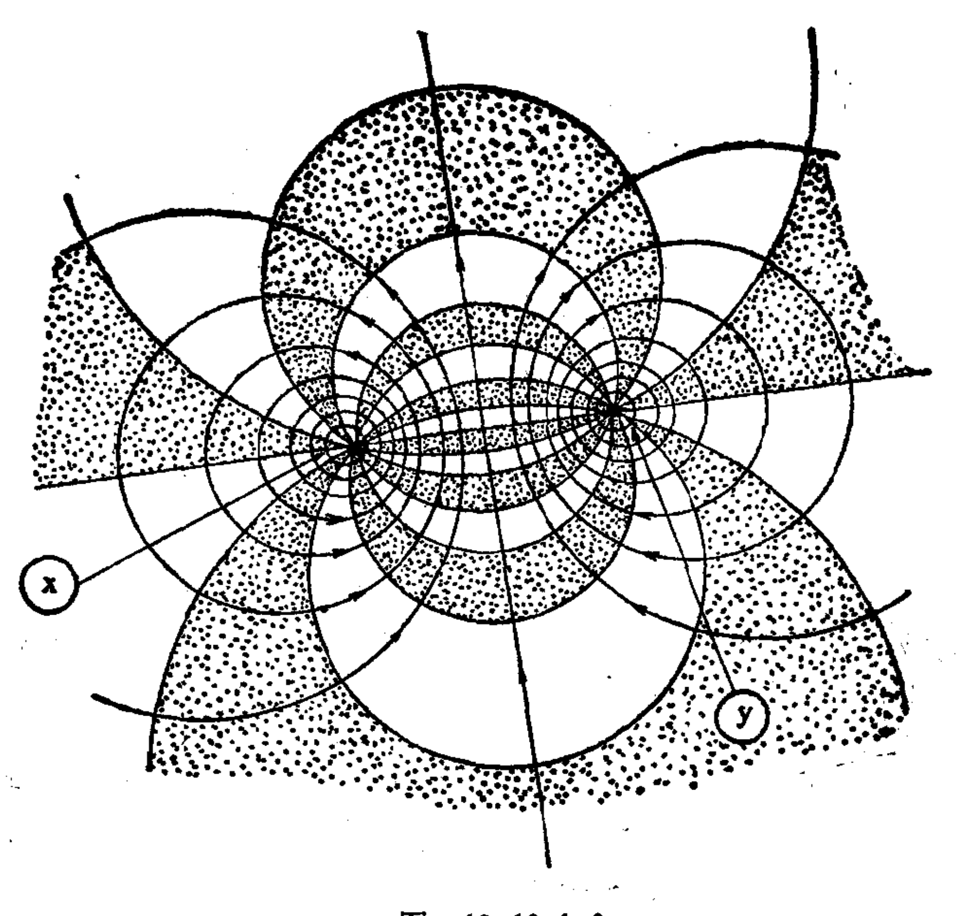


图 10.10.1.3.

现在从一个例子来看 10.10.2 开头部分的应用.

10.10.3 Steiner 互斥性定理. 设 C，C' 是两个圆，C 在 C' 内部，Γ 是外切于 C 又内切于 C' 的圆. 我们用下述方法递推地作出圆链 $\Gamma_i(i=1, 2, \cdots)$：使 Γ_{i+1} 与 Γ_i，C 及 C' 都相切，但又异于

Γ_{i-1}. 如果对一切 $i > 1$，总有 $\Gamma_i \neq \Gamma$，那是我们运气不好. 但是如果有某一个 n 使得 $\Gamma_n = \Gamma_1$，那么对于任意的一个起点圆 Γ'，总有 $\Gamma'_n = \Gamma'_1$.

只要把 C 和 C' 转换成两个同心圆，其证明就是显然的. 因为一对同心圆关于绕它们公共中心的旋转群是稳定的.

因此互斥性定理就是：或者任意一个链都不封闭，或者任意一个链都封闭. 以下是互斥性的另一个例子.

10.10.4 圆的 Poncelet 大定理. 设有两个圆 C，C'，并且 C 在 C' 的内部（同 10.10.3），则从点 $x_1 \in C'$ 出发可由以下条件作

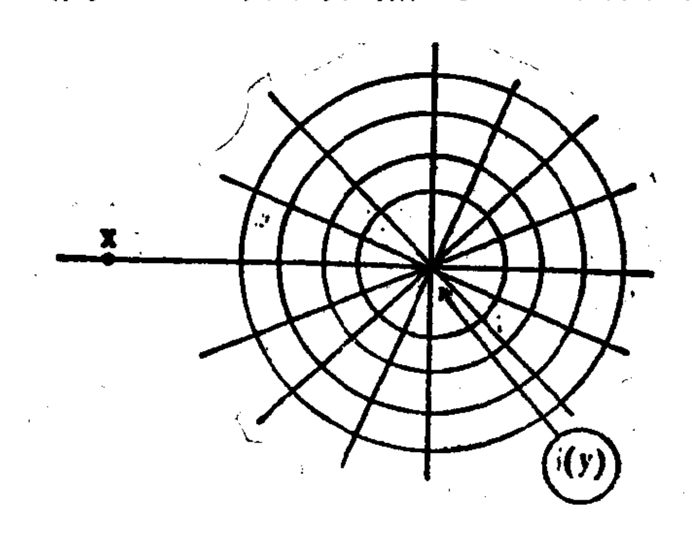


图 10.10.2.

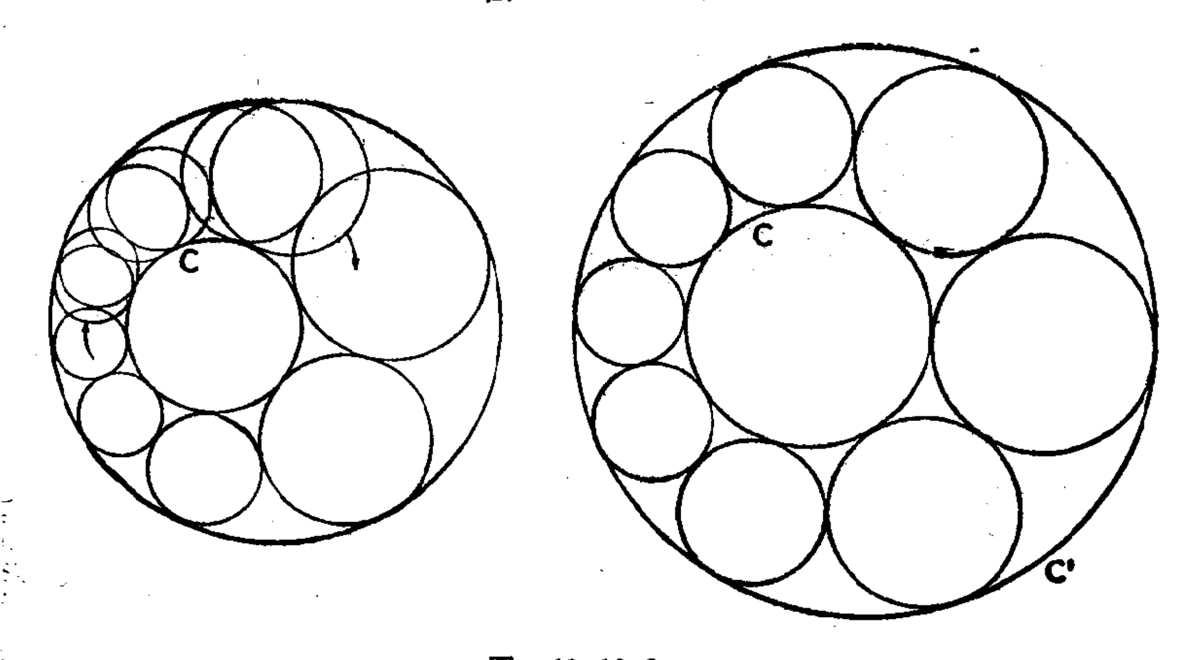
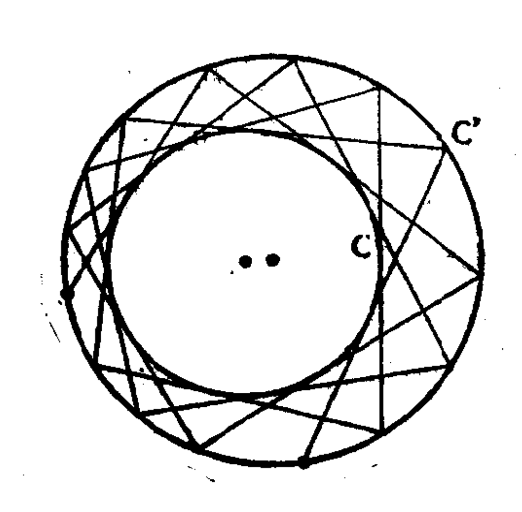


图 10.10.3.

出一连串点 $x_i(i \geqslant 1)$：对一切 i，都有 $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ 与 C 相切并且 $\langle x_i, x_{i+1}\rangle \neq \langle x_i, x_{i-1}\rangle$. 则以下两种情况必居其一：或存在 n，使 $x_n = x_1 \forall x_1 \in C'$，或者 $x_i \neq x_1 \forall x_1 \in C'$ 并且 $\forall i \geqslant 1$.

尽管陈述很简单，这个定理要比 Steiner 互斥性定理困难得多。请参看 16.6。

也请参看 10.13.3，17.6.5 及 [B-H-H]。



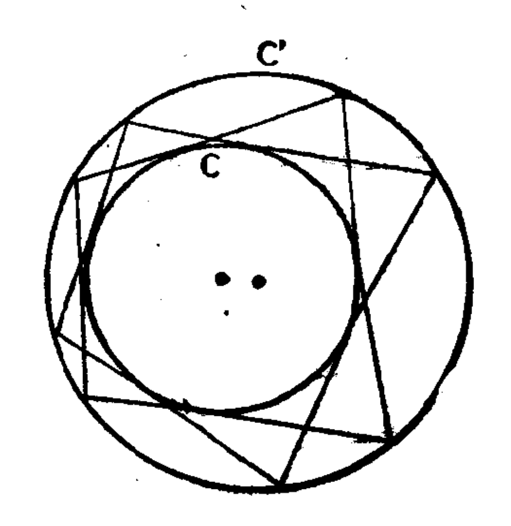


图 10.10.4.

10.11 有关圆的问题

我们要叙述一些关于圆的经典结果. 读者可把它们作为练习进行自我测验，有时我们也给出参考文献.

10.11.1 Appolonius 问题. 这就是作一个圆 Γ 与三个已知圆 C，C' 及 C'' 相切. 我们在 10.7.9 已知道至多有八个解. 最初等的方法是把三个圆的半径减去或加上最小圆的半径，然后再归结为作一个圆使它过一个点并与两个已知圆相切. 从 10.10.2 可以看出这是办得到的（必要时也可参看 9.6.6）. Gergonne 给出了一个更漂亮的方法，用它能得到 Γ 与 C，C'，C'' 的三个切点，如图 10.11.2 所示.

在这个图中，点 ω 是 C，C'，C'' 的根心（见 10.7.10.2），即关于三个圆有相等幂的点，这不难用 10.7.10.1 的方法作出. 直线 D

是连接 C, C' 或 C', C'' 或 C'', C 间的六个位似中心的四条直线之一(这六个中心恰在四条直线上)，而 γ, γ' 和 γ'' 是 D 关于 C, C' 与 C'' 的极点(参见 10.7.11). 那么要找的 C 上的切点就是 C 与直线 $\langle\omega, \gamma\rangle$ 的交点.

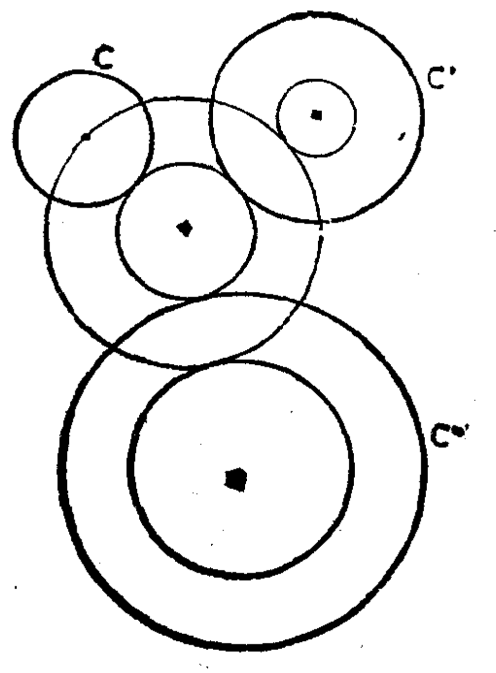


图 10.11.1.

关于 Appolonius 问题的新近的参考文献是 [CR5].

10.11.2 Napoléon-Mascheroni 问题. 只用圆规(参见 10.8.3) 找出已知圆的圆心. 关于这一问题，请参看 [LB1] 第 25 页后面. 也就是 25 页底下的历史注记以及 26 页上对 Mohr-Mascheroni 定理的叙述: **"凡能用圆规直尺作图的，也能单用圆规作出".** [LB1] 的大部分内容读起来像一本小说.

10.11.3 九点圆及 Feuerbach 定理. 设 $\mathscr{C}=\{x, y, z\}$ 是三

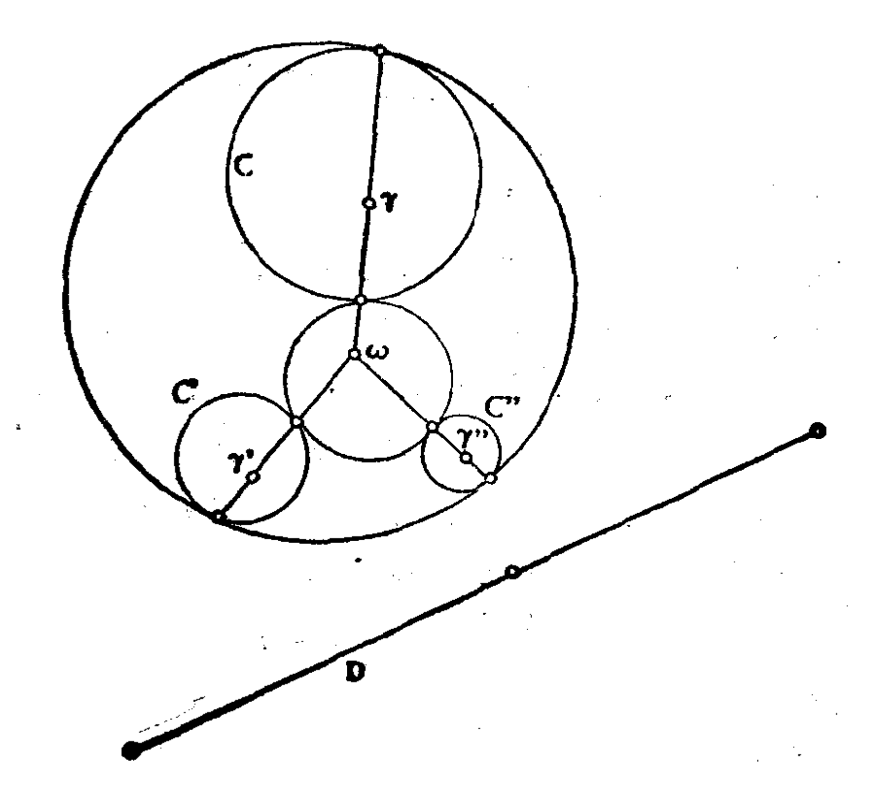


图 10.11.2.

角形，p，q，r 是高的垂足，u，v，w 是边上的中点，l，m，n 是 $\{x, h\}$，$\{y, h\}$，$\{z, h\}$ 的中点，其中 h 是垂心(见 10.2.5)，ω 是 $\mathscr{C}$ 的外接圆中心，g 是重心，则九个点 u，v，w，l，m，n，p，q，r 在同一个圆 Γ 上，并且 Γ 的中心是 $\langle h, \omega\rangle$ 的中点．此外 g 在直线 $\langle h, 0, \omega\rangle$ 上，$\overrightarrow{gh}=-2\overrightarrow{g\omega}$．圆 Γ 又与 $\mathscr{C}$ 的内切圆及三个旁切圆相切(参看 10.1.5 及图 10.1.5)．

其证明方法是引入以 u 为极点以 $up\cdot us$ 为幂的反演，其中 s 是过 x 的内角平分线与对边的交点．此外，Γ 与由 $\mathscr{C}$ 的 Simson 直线包络成的有三个尖点的内摆线相切于三点，参见 10.4.5.5，10.9.7.1 及 9.14.34．

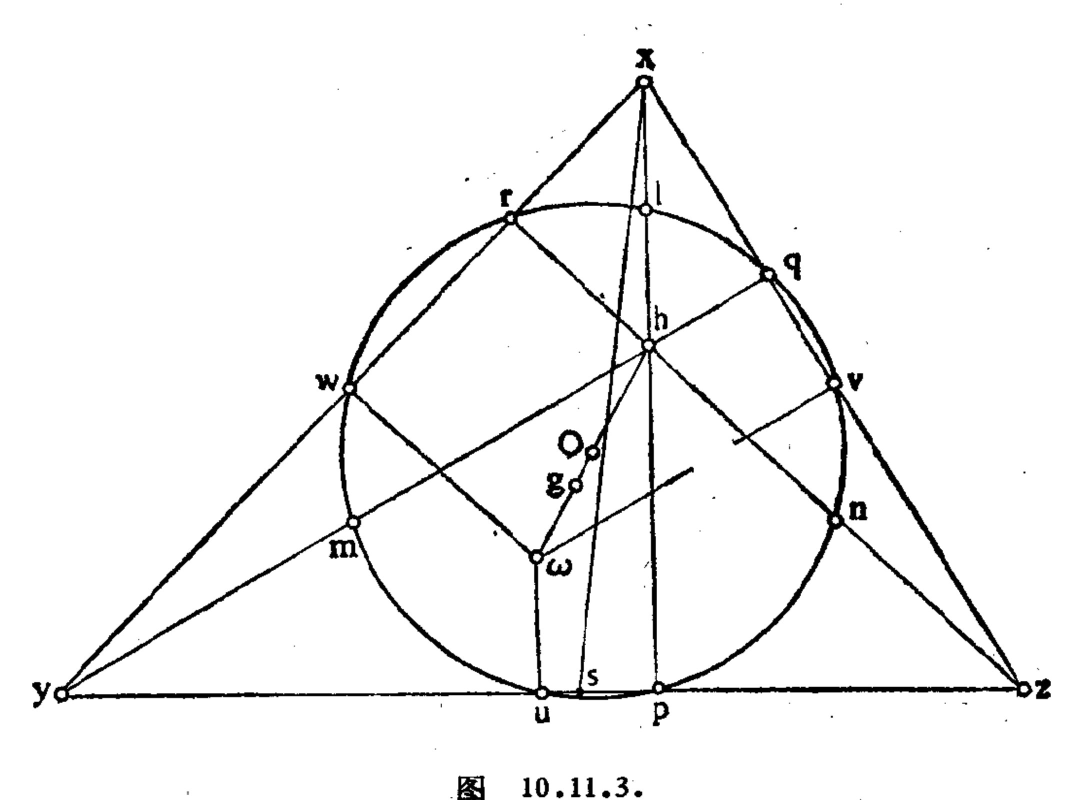


图 10.11.3.

10.11.4 Castillon 问题．已知圆 C 和不在 C 上的点 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$，要找出 C 的内接多边形 $(z_i)_{i=1,\cdots,n}$ 使得 $x_i\in\langle z_i, z_{i+1}\rangle\ \forall i=1,\cdots,n$．有一个相当复杂的解法是作出以 x_i 为极点、使 C 稳定的反演 f_i，然后作这些 f_i 的乘积．不过要使得 $(f_n\circ f_{n-1}\circ\cdots\circ f_2\circ f_1)(z_1)=z_1$，这就归结为寻找 $f_n\circ f_{n-1}\circ\cdots\circ f_2\circ f_1$ 的不动点．有一个对所有的圆锥曲线都适用的更好的方法将在 16.3.10.3 给出，也可参看

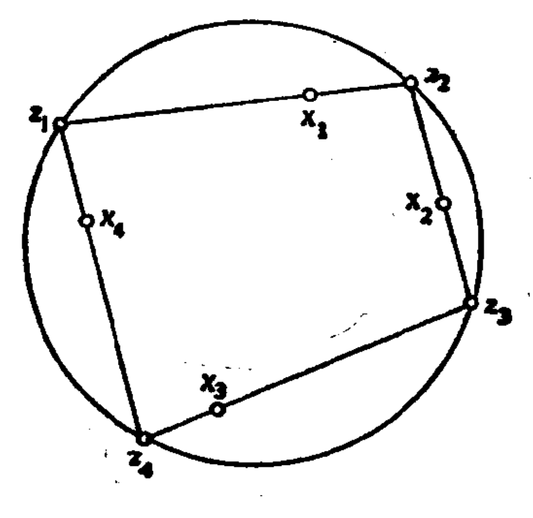


图 10.11.4.

[DO] 第 144 页.

10.11.5 Malfatti 问题. 要在一个已知三角形内作三个圆 C, C', C'', 使它们两两相切并且每个圆又和三角形的两条边相切. 关于这个问题的解请参看 [HD1] 第 310 页或 [RC1] 第 311—314 页或 [DO] 第 147 页.

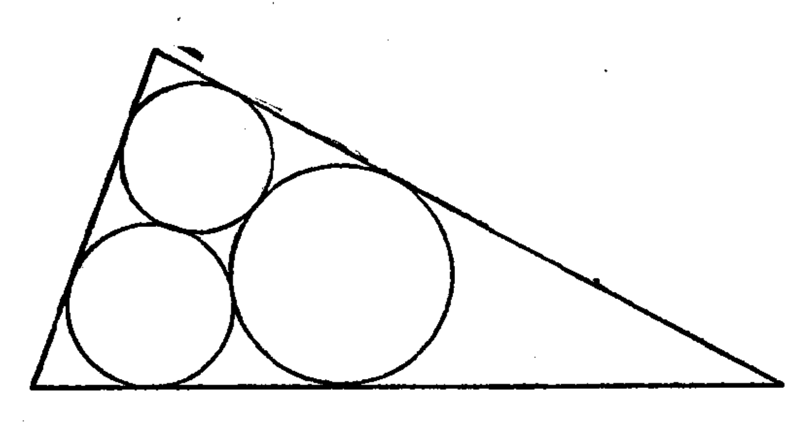


图 10.11.5.

10.11.6 Laguerre 循环. 这是有关定向直线及定向圆的理论, 读者可在 [PE1] 第 426 页找到其介绍.

关于这个理论的代数形式可参看 [BZ] 第 251 页起, 也可参看 [BLA3] 第 4 章. 为了勾画其大致轮廓, 我们用图 10.11.6.1 及 10.11.6.2 表示一个关于定向直线及定向圆的结果, 这些定向直线及定向圆相切并在切点处保持定向. 如果给出的图形无法在切点处保持定向, 则上述结论不成立.

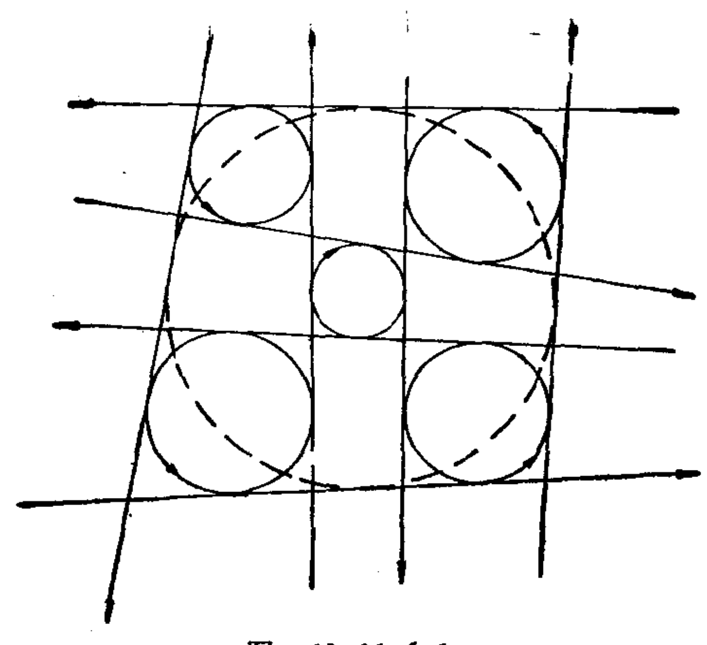


图 10.11.6.1.

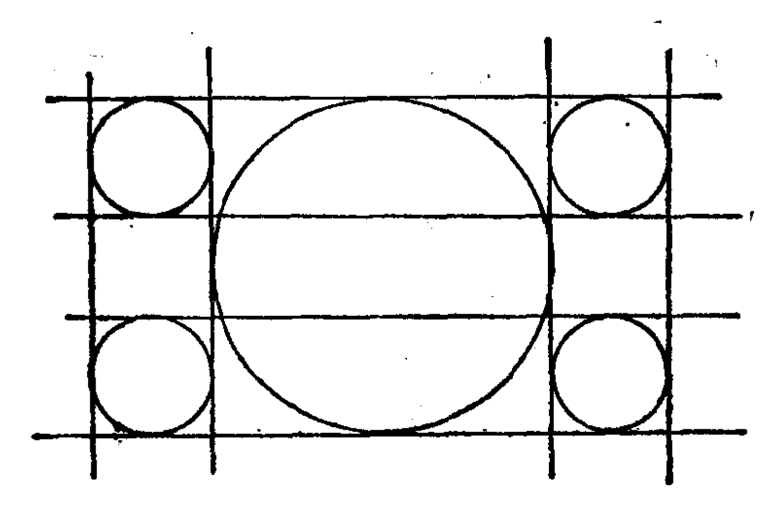


图 10.11.6.2.

10.11.7 七圆定理. 关于这个有趣的结果请参看 C. J. A. Evelyn, G. B. Money-Coutts, J. A. Tyrell 的书《七圆定理》，由 CEDIC 出版。

10.12 挠平行性：第 18.9，20.5，20.7 节的先导

这里涉及到通常空间（即三维空间）中的圆及球面的一系列出乎意料的现象. 对这类现象将用两种方式来解释：第 18.9 节用几何方法，第 20.5.4 节用代数方法。

10.12.1 设 T 是一个环面，即由一个圆绕着与它共面但不相交的直线旋转所成的曲面。这个环面有两族圆：经圆及纬圆。第一个使人惊奇的事实是 T 还含有别的圆，这些圆有时被数学家称为 Villarceau 圆，不过在他以前（1848 年）早已被人所知晓。譬如说当你到斯特拉斯堡去参观圣母事迹博物馆时，就可证实这一点：在螺旋梯柱子的上部装饰着一个雕花环面，其棱脊就是这样的圆。我们也可用一个两处与 T 相切的平面截出这些圆，见图 10.12.1.3.

10.12.2 这些奇特的圆可分为两族：$\{C(t)\}$ 及 $\{\Gamma(\theta)\}$. 两个 $C(t)$ 及 $\Gamma(\theta)$ 总是相交于两个点。两个不同的 $C(t)$ 及 $C(t')$（相应地：$\Gamma(\theta)$ 及 $\Gamma(\theta')$）不仅不相交，而且还是相互交织的（关于交织，参看 B-G］第 279 页），从斯特拉斯堡的雕刻环面就能看到它们的交织.

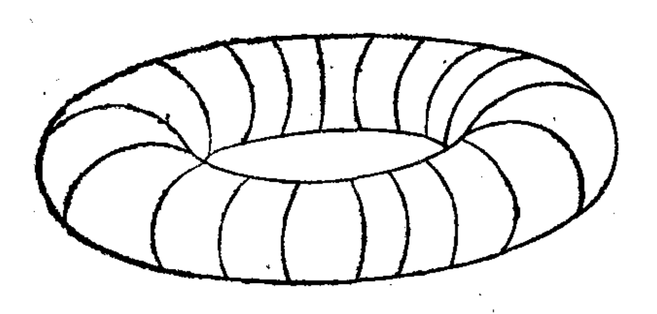


图 10.12.1.1.

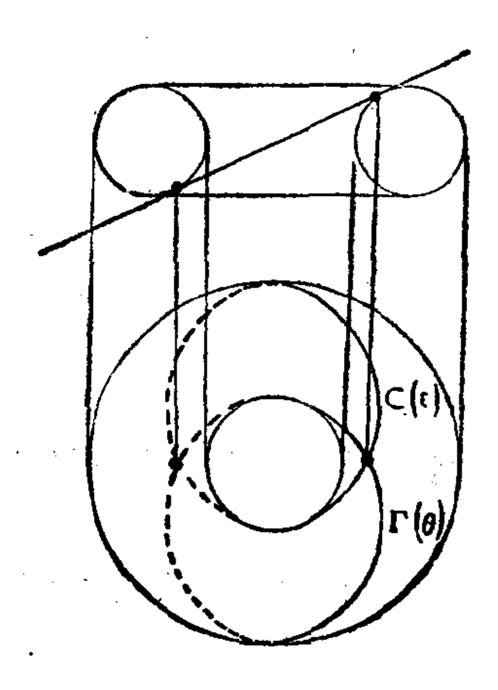


图 10.12.1.3.

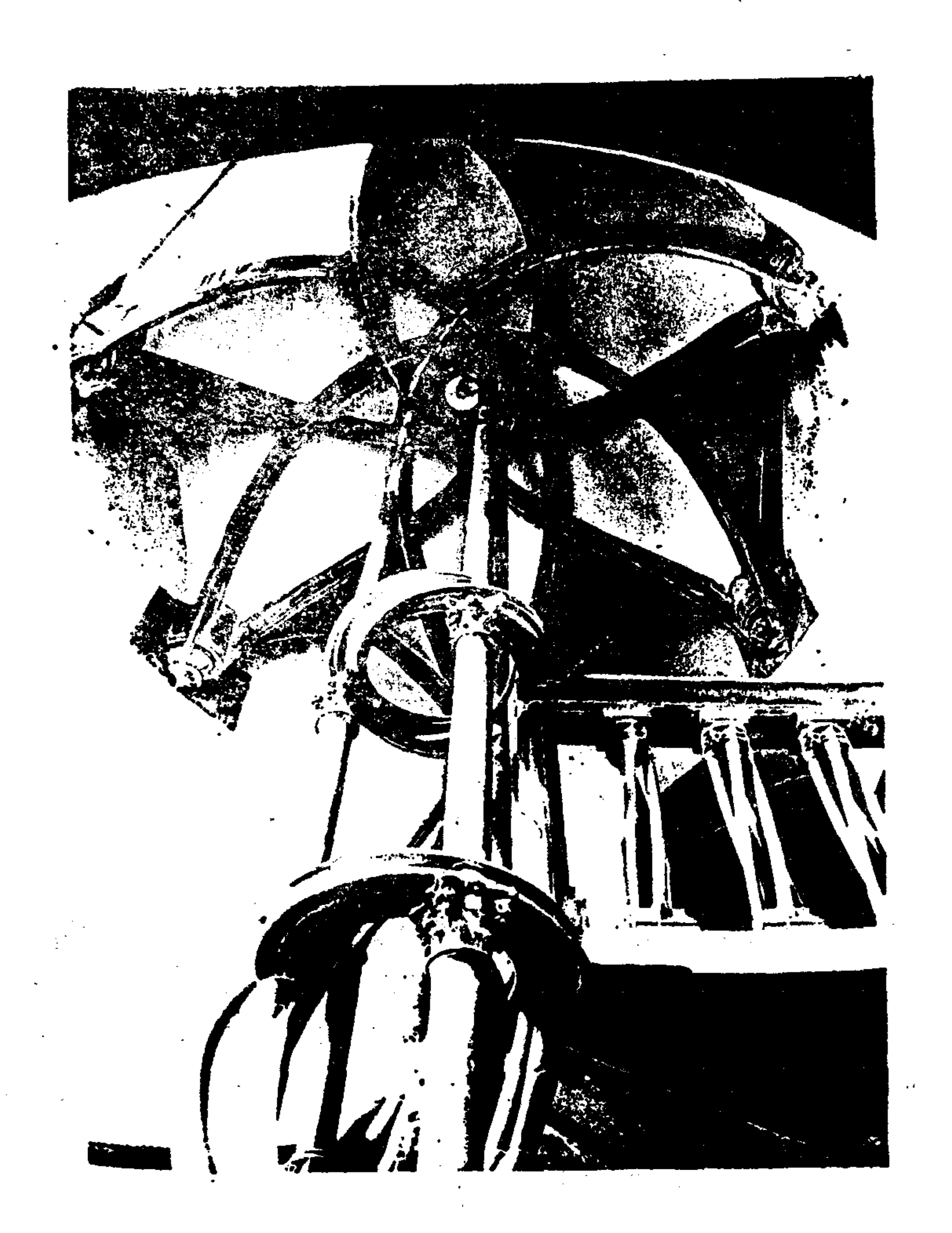


图 10.12.1.2.

10.12.3 这些圆具有一些很强的关于交角的性质. 首先，它们是环面的螺旋线，也就是说所有的子午线都截 $C(t)$ (或 $\Gamma(\theta)$) 成定角 α (对 C 或 Γ 是同一个角). 更重要的是两个不同的 $C(t)$ 及 $C(t')$ (对 $\Gamma(\theta)$ 及 $\Gamma(\theta')$ 也有同样性质) 构成角 α 的挠平行环，

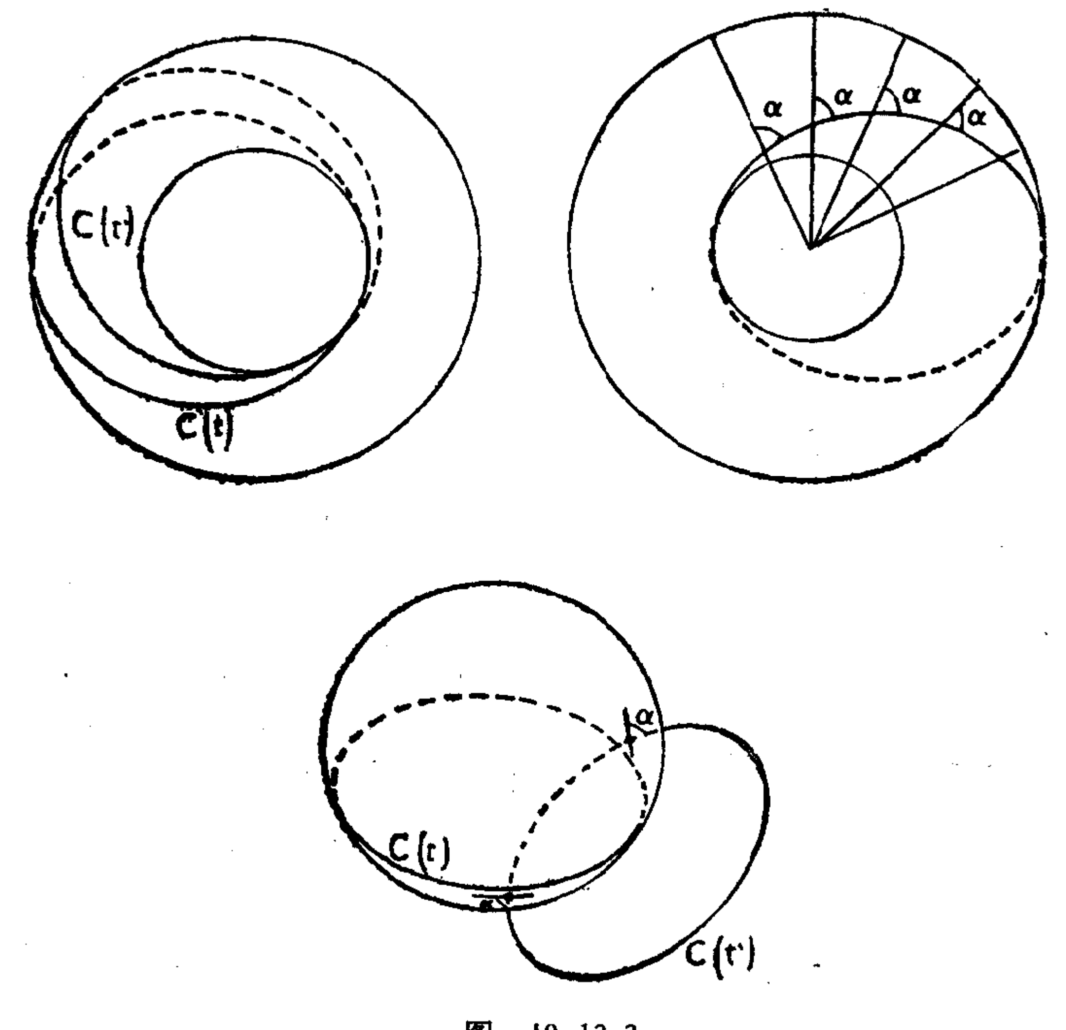


图 10.12.2.

也就是说所有含 $C(t)$ 的球面截 $C(t')$ 成 α 角，同样，所有含 $C(t')$ 的球面截 $C(t)$ 成同一 α 角，而且这个角就是 $C(t)$ 和 $C(t')$ 作为螺旋线的角．（我们把圆与球面的交角定义为在交点处的切线与切面所成的角．）

10.13 练　　习

10.13.1 三角形的高共点．

10.13.1.1 请证明对欧氏平面的任意四点 $\{x, y, z, t\}$ 总有 $(\overrightarrow{xy}|\overrightarrow{zt})+(\overrightarrow{xz}|\overrightarrow{ty})+(\overrightarrow{xt}|\overrightarrow{yz})=0$．由此导出高的共点性．

10.13.1.2 利用 16.5.4 的循环点导出共点性．

10.13.1.3 从 2.8.1 导出共点性．

10.13.2 对公式汇集的补充．对一个三角形证明以下关系式：

$$S^2 = rr_ar_br_c,\quad 4R = r_a + r_b + r_c - r,$$

$$\frac{1}{2Rr} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c},$$

$$p^2 = r_ar_b + r_br_c + r_cr_a,$$

$$2R = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

10.13.3 圆的 Poncelet 大定理：$n=3$ 及 4 的情形． 请证明三角形 $\mathscr{C}$ 的外接圆 C 的半径 R、内切圆 Γ 的半径 r 以及它们中心间的距离 d 满足关系式 $R^2 - 2Rr = d^2$．再证明其逆，即若有两个半径为 R 及 r 的圆 C，Γ，它们的中心距是 d，且满足 $R^2 - 2Rr = d^2$，则对任意的 $x \in C$ 必存在以 x 为顶点的三角形 $\mathscr{C}$，它内接于 C 且外切于 Γ．由此就可导出三角形情形下的圆的 Poncelet 大定理（参见 10.10.4）．对于同时内接于 C 又外切于 P 的四边形，请作类似的研究．

10.13.4 Morley 定理． 首先假设定理为真．试证（见图）三角

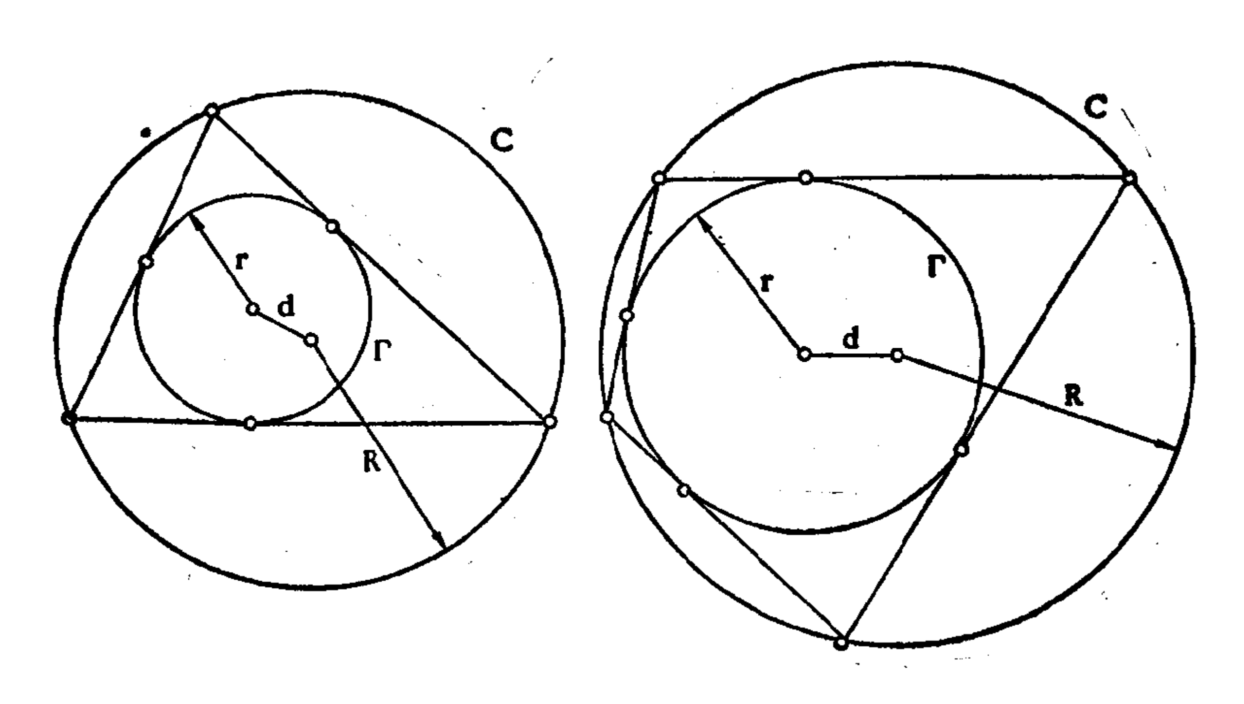


图 10.13.3．

形 $\{u, r, q\}$, $\{v, r, p\}$ 及 $\{w, p, q\}$ 是等腰三角形。并用三角形 $\{x, y, z\}$ 的角表示出上述三个三角形的角，由此可得到 Morley 定理的一个证明，方法如下：从一个等边三角形 $\{r, p, q\}$ 出发，取适当的角作出 u, v, w，然后得到 x, y, z. 再注意到这样作出的三角形相似于原三角形。

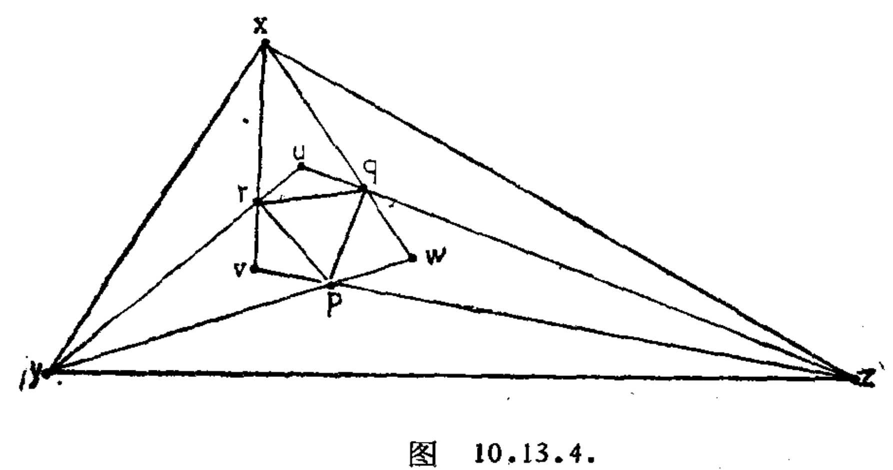


图 10.13.4.

10.13.5 试证对平面上任意一点 t 以及三角形 $\mathscr{C}=\{x, y, z\}$，总有 $tx+ty+tz\geqslant 2\sqrt{\sqrt{3}\,S}$. 仅当等边三角形时才有等号成立。由此导出不等式 $tx+ty+tz\geqslant 6r$.

10.13.6 对 10.4.5.4 作完整的讨论.

10.13.7 对一个圆的内接四边形，用它的四条边 a, b, c, d 表示出对角线的长 x, y. 证明此四边形的面积为

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

其中

$$p=\frac{a+b+c+d}{2}.$$

10.13.8 先对凸四边形，再对椭圆的内接六边形(参见 16.2.13) 研究与 10.4.3 类似的问题.

10.13.9 计算正四面体外接球面的半径.

10.13.10 计算四面体的体积，把它用下列参数表出：

(i) 两个面的面积、它们的公共棱的长及这个棱的二面角；

(ii) 四个面的面积，两个相对的二面角及这两个二面角的棱

长；

(iii) 一个面的面积及三个相邻的二面角.

10.13.11 证明如果四面体的四个面有相等的面积，那么这四个面是全等三角形.

10.13.12 在一个四面体内把对棱间的距离记为 α, β, γ（见 9.2.5），把顶点到对面的距离记为 $h_i(i=1, 2, 3, 4)$，则

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\sum_i \frac{1}{h_i^2}.$$

10.13.13 在一个四面体内，两个相对的二面角的正弦之积与这两个二面角的棱长之积成比例.

10.13.14 **Salmon 定律.** 在欧氏平面内，已知以 a 为中心的圆 C，又给出了两个点 x, y 及它们关于 C 的极线 D_x, D_y. 试证

$$\frac{ax}{ay}=\frac{d(x, D_y)}{d(y, D_x)}.$$

又证若 P 是 C 的内接 $2n$ 边形，则对 C 的任一个点 z，从 z 到 P 的偶数边的距离之积等于从 z 到 P 的奇数边的距离之积. 证明如果 P 是 C 的外切多边形，则从偶数顶点到圆的一条切线的距离之积与从奇数顶点到同一条切线的距离之积的比值是常数(由假设，多边形 P 总有偶数条边).

10.13.15 已知欧氏平面的两个不同点 a, b，α 是一个角，它可以是直线的交角或半直线的交角，也可以是直线的定向角或半直线的定向角. 请研究以下集合：

$$\{x: \widehat{\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}}=\alpha\},\ \{x: \overline{\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}}=\alpha\},$$

$$\{x: \widehat{xa, xb}=\alpha\},\ \{x: \overline{xa, xb}=\alpha\}.$$

10.13.16 **像直线.** 设 $\mathscr{C}$ 是一个三角形. 试证直线 D 关于 $\mathscr{C}$ 的三条边的对称像共点的充要条件是它通过 $\mathscr{C}$ 的垂心. 当直线 D 绕垂心旋转时，这个交点如何变化(也请参看 17.6.2.2)?

10.13.17 利用交比(见 9.6.5.2) 给出 10.9.7.2 的代数证明.

10.13.18 **支轴.** 已知平面内的一个三角形 $\{x, y, z\}$. 证明若

p, q, r 是三角形边上的三点，π 是平面上的点，则当 $\{x, r, \pi, q\}$ 和 $\{y, p, \pi, r\}$ 共圆时，$\{z, q, \pi, p\}$ 也共圆．现在固定支轴 π，使 p, q, r 在边上移动，同时又保持上述的共圆性质．试证 $\{p, q, r\}$ 仍正向相似于自身，从而推导出：与 $\{p, q, r\}$ 正向相似关连的点画出一条直线（例如：垂心，内切圆圆心，外接圆圆心等），而且与 $\{p, q, r\}$ 正向相似关连的直线包络出以 π 为焦点的抛物线（参看 9.6.7）．

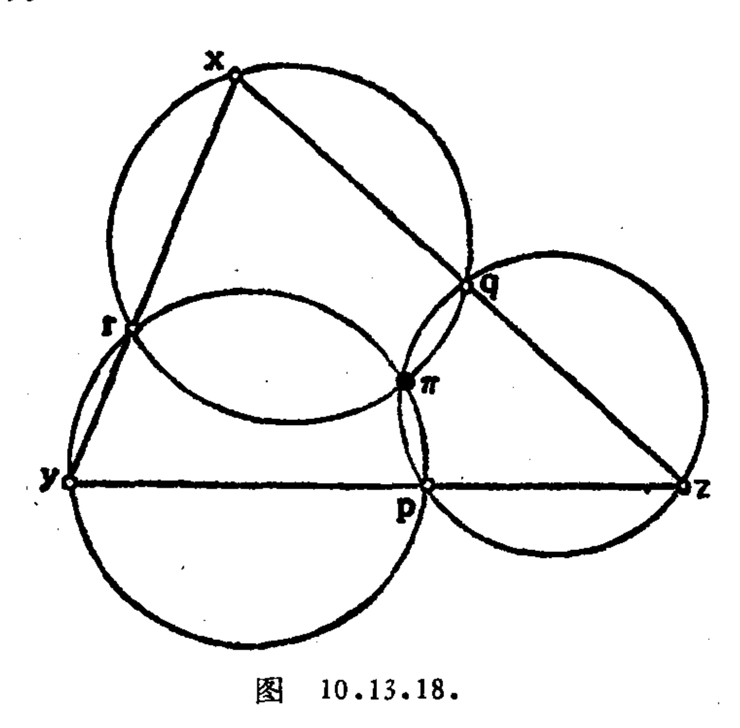


图 10.13.18.

10.13.19 定理链．在这个练习里我们假设所遇到的对象"处于一般位置"．设 $(D_i)_{i=1,2,3,4}$ 是欧氏平面的四条直线，C_i 是由三条直线 $D_j(j \neq i)$ 构成的三角形的外接圆．试证四个圆 C_i 有一个公共点（也请参看 17.4.3.5 的一个解释）．作图．设 $(D_i)_{i=1,\cdots,5}$ 是欧氏平面的五条直线，p_i 是上述定理中得到的与四条直线 $D_j(j \neq i)$ 相伴的点．证明五个点共圆．作图．

请叙述并证明一个定理链，其开头的两条定理就是上述的两个定理．关于定理链请参看 [PE] 第 431 页，练习 9.4.7 及 [CR1] 第 258 页．

10.13.20 等角圆．称圆 Γ 为两个圆 C, C' 的等角圆，只要它与这两个圆交成等角．试证两个相交圆的等角圆正交于一个定圆或

一条定直线．研究两圆不相交的情形．当 Γ 与 C，C' 的交角之和等于 π 时，研究同样的问题．再研究与三个或四个定圆成等角的圆．能否把刚才得到的结果用于问题 10.11.1？请参见 20.4.4 对这个问题的代数研究．

10.13.21 设 C，C' 是与 10.10.3 同样的圆．它们的半径是 R，R'，中心是 a，a'，且 $aa'=d$．证明若 C，C' 具有图 10.10.3 所示的 n 个圆的链，则

$$(R-r)^2-d^2=4Rr\operatorname{tg}^2(\pi/n).$$

10.13.22 证明图 10.12.1.3 中与环面切于两点的平面确实把环面切出两个圆，并且这两个圆是环面的螺旋线．

10.13.23 运用 10.3.10 的技巧证明三角形的内外角的三等分线的交点分布在 27 条直线上．关于这一主题，请参看 9.14.34.5 以及 [LB1] 第 173—208 页．

10.13.24 已知平面上一个三角形，试找出使三角形自配极的圆，即它的顶点关于这个圆两两共轭．在三维空间研究同样的问题．

10.13.25 设三个圆的半径是 a，b，c，而且两两相切，令 $\alpha=a^{-1}$，$\beta=b^{-1}$，$\gamma=c^{-1}$．试证与这三个圆相切的两个圆的半径是：

$$[\alpha+\beta+\gamma+2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^{1/2}]^{-1}$$

及

$$|\alpha+\beta+\gamma-2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^{1/2}|^{-1}.$$

$\alpha+\beta+\gamma-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^{1/2}$ 的符号有什么意义？

10.13.26 设欧氏平面的三角形 $\mathscr{C}$ 的边长是 a，b，c，对于任意一个整数 n，考虑关于 $\mathscr{C}$ 的重心坐标为

$$\left(\frac{a^n}{a^n+b^n+c^n},\ \frac{b^n}{a^n+b^n+c^n},\ \frac{c^n}{a^n+b^n+c^n}\right)$$

的点 $X(n)$．用几何方法刻划 $X(0)$，$X(1)$，$X(2)$ 的特征．当 n 趋向 $+\infty$（或 $-\infty$）时 $X(n)$ 变成什么？

10.13.27 **又回到 Simson 直线！** 设 D，D' 是欧氏平面的不同直线，$a=D\cap D'$，另有一点 $x\notin D\cup D'$．设过 a 及 x 的圆交 D，D' 于 m，m'，则映射 $D\ni m\longmapsto m'\in D'$ 是以 x 为中心的相似变换在 D 上的限制．x 在直线 mm' 上的正交射影点 h 描出怎样的

直线？从这个结果推导出 Simson 直线的定理 10.9.7.1。

10.13.28 已知欧氏平面的四个点 a，b，c，d，求作正方形 $ABCD$ 使 $a\in AB$，$b\in BC$，$c\in CD$，$d\in DA$。

一般，已知平面上两个四边形 Q，Q'，求作四边形 Q'' 使它相似于 Q 且内接于 Q'。然后使它外接于 Q'。

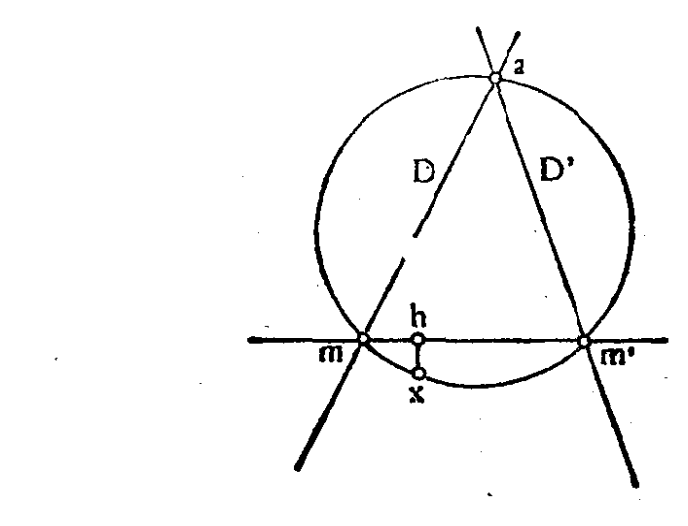


图 10.13.27.

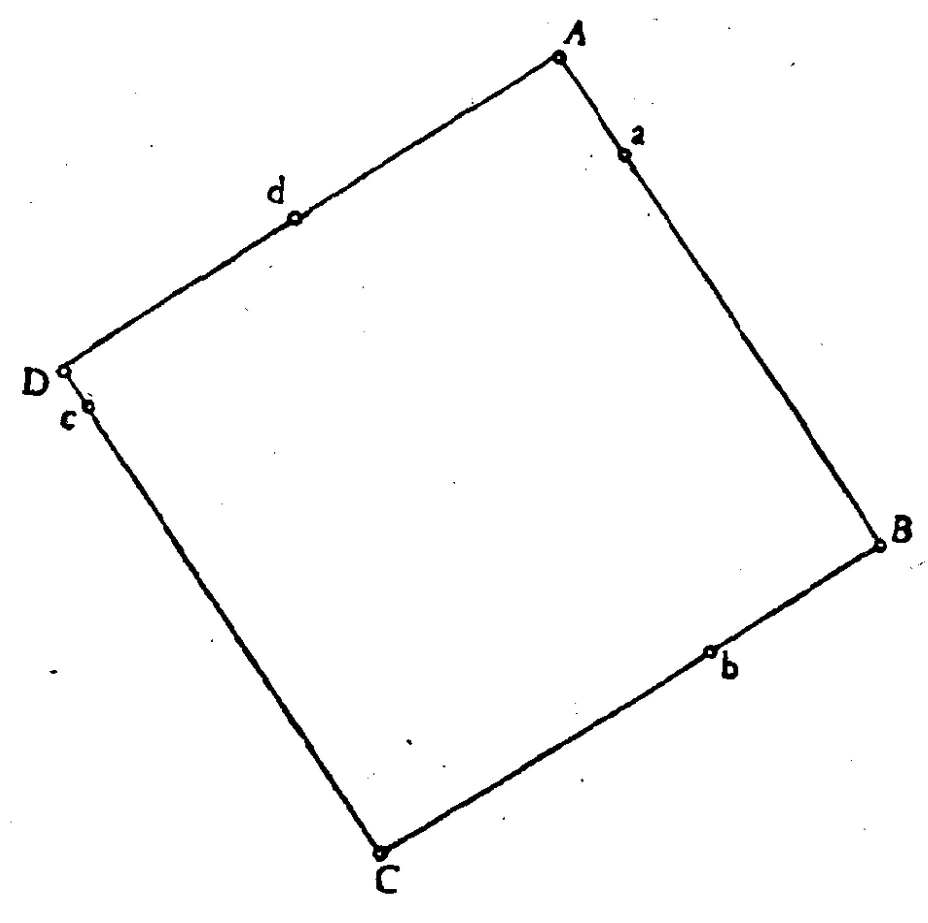


图 10.13.28.

10.13.29 Ford 圆. 如图 10.13.29.1 所示，考虑三个两两相切并与直线D相切的圆. 如果 r, s 是 γ, δ 的半径, ρ 是小圆的半径, 设 a, b, x 是它们与D的交点，将 ρ, $\overline{ax}$, $\overline{bx}$ 表示成 $\overline{ab}$, r, s的函数.

取一个标准正交标架，从方程为 $x^2+y^2-y=0$ 与 $x^2+y^2-2x-y+1=0$ 的两个圆出发，可按图 10.13.29.2 所示的方式递推地作出一系列圆. 证明这些圆与 x 轴的切点的横坐标是有理数. 这样能否得到 [0, 1] 内的一切有理数?

通过沿着这些圆周作复数积分，可使这些 Ford 圆在数论中得到有趣的应用. 请参看 [RA] 第 267 页.

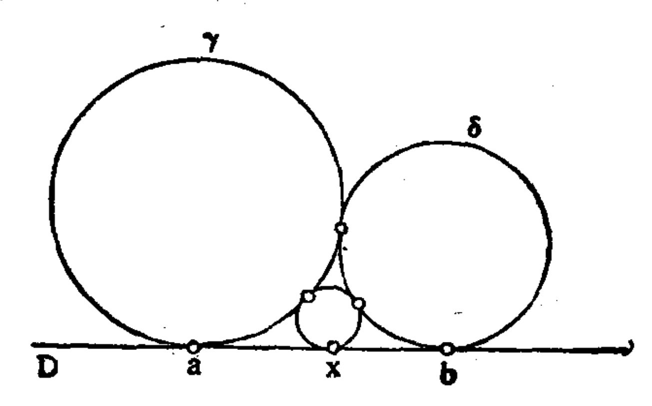


图 10.13.29.1.

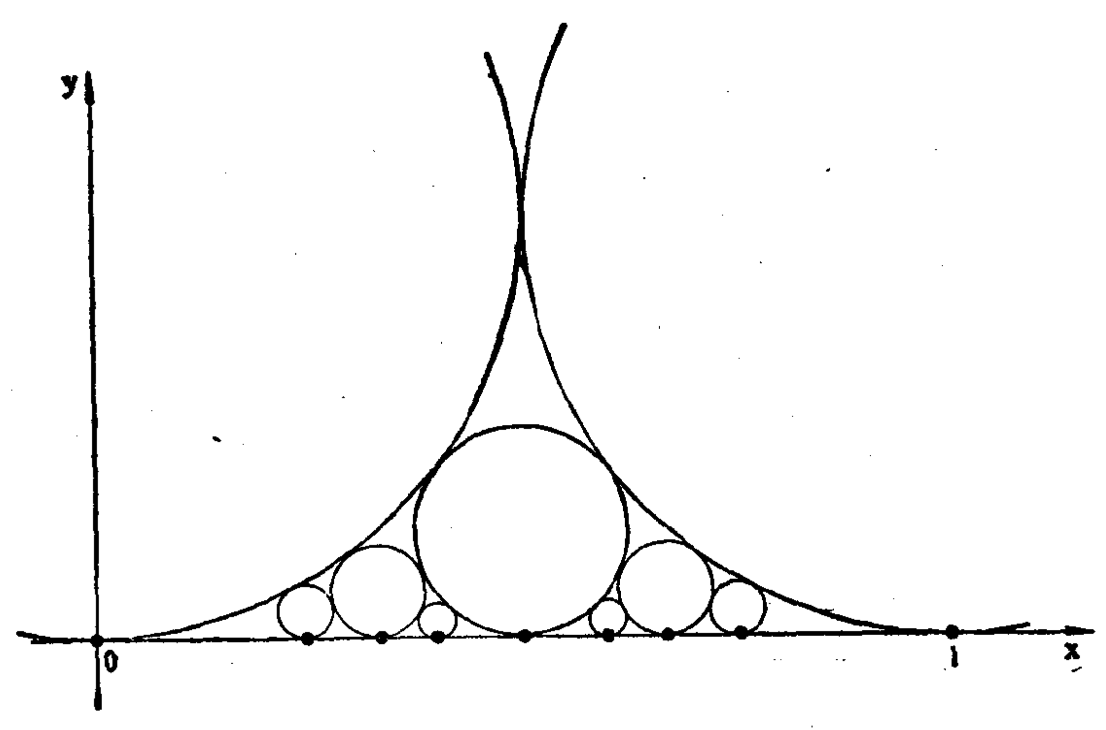


图 10.13.29.2.

参 考 书 目

[A-A] ARNOLD (V. I.) et AVEZ (A.). *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars.

[A-B] ANNEQUIN et BOUTIGNY. *Cours de Physique, Optique*, Vuibert.

[A-B-S] ATIYAH (M. F.), BOTT (R.) et SHAPIRO (A.). *Clifford Modules*, Topology, 3, 1964-1965, supplément, p. 3-38.

[AE] *Astronomie*, Encyclopédie de la Pléïade, Gallimard

[AN] ARTIN (Emil). *Geometric Algebra*, Interscience.

[AR] ARNOLD (V.). *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou.

[AS] ARNAUDIÈS (J.-M.), *Les cinq polyèdres de* $\mathbf{R}^3$ *et leurs groupes*, C.D.U.-S.E.D.E.S., Paris.

[AV] ALEXANDROW (A. D.). *Konvexe Polyeder*, Akademie Verlag, Berlin.

[AW] ALEXANDROW (A.D.). *Die innere Geometrie der konvexe Fläche*, Akademie Verlag, Berlin.

[BA] BIANCHI (L.). *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve el delle superficie*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 25, 1908, p. 291-325.

[BAN] BANCHOFF (Thomas). *Non-rigidity Theorems for Tight Polyhedra*, Archiv der Mathematik, 21, 1970, p. 416-423.

[BA-WH] BANCHOFF (Thomas) et WHITE (James). *The behavior of the total twist and self-linking number of a closed space curve under inversions*. Mathematica Scandinavica 36, 1975, p. 254-262.

[B-B] BECKENBACH (Edwin F.) et BELLMAN (Richard). *Inequalities*, Springer.

[BE] BROUSSE (Pierre). *Mécanique*. Armand Colin.

[BER] BERGER (M.). *Lectures Notes on Geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute. Bombay.

[BES] BESSE (Arthur). *Manifolds all of whose geodesics are closed*. Ergebnisse der Mathematik, Band 93, Springer.

[B-F] BONNESEN (O.) et FENCHEL (W.). *Theorie der konvexe Körper*, Chelsea.

[B-G] BERGER (Marcel) et GOSTIAUX (Bernard). *Géométrie différentielle*, Armand Colin.

[B-H] BOREL (A.) et HIRZEBRUCH (F.). *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces*, American Journal of Math., 80, 1958, p. 458-538.

[B-H-H] BLACK (W. L.), HOWLAND (H. C.) et HOWLAND (B.). *A Theorem about Zigzags between two Circles*, American Math. Monthly, 81, 1974, p. 754-757.

[BI 0] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Théorie des Ensembles, Hermann, 1970.

[BI 1] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Topologie Générale, chapitres 5 à 10, Hermann, 1974.

[BI 2] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre II, chapitre 9, Hermann.

[BI 3] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre V, chapitres 1, 2, 2e édition, Hermann.

[BI 4] BOURBAKI (Nicolas). *Groupes et algèbre de Lie*, chapitre 4, 5, 6, Hermann.

[BI 5] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Algèbre, chapitres 1 à 3, Hermann, 1970.

[B-K] BUSEMANN (Herbert) et KELLY (Paul J.). *Projective Geometry and Projective Metrics*, Academic Press.

[BL] BLUMENTHAL (Leonard M.). *Theory and Applications of Distance Geometry*, Chelsea.

[BLA 1] BLASCHKE (Wilhelm). *Kreis und Kugel*, Chelsea.

[BLA 2] BLASCHKE (Wilhem). *Vorlesungen über Differential Geometrie, II : Affine Differential Geometry*, Springer.

[BLA 3] BLASCHKE (Wilhelm). *Vorlesungen über Differential Geometrie, III : Differential Geometrie der Kreise und Kugel*, Springer.

[BL-BO] BLASCHKE (W.) et BOL (G.). *Geometrie der Gewebe*, Springer, 1938.

[B-M] BLUMENTHAL (Leonard M.) et MENGER (Karl). *Studies in Geometry*, W. H. Freeman.

[BN] BOURGIN (D. G.). *Modern Algebraic Topology*, Mac Millan.

[BO 1] BOREL (Armand). *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes*, American Journal of Math., 76, 1954, p. 273-342.

[BO 2] BOREL (Armand). *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Annals of Math., 57, 1953, p. 115-207.

[BP] BAUDOIN (Paul). *Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal*, Vuibert.

[BR] BAER (R.). *Linear Algebra and Projective Geometry*, Academic Press.

[B-S] BOREVICH (Z. I.) et SHAFAREVICH (I. R.). *Number Theory*, Academic Press.

[B-T] BRUHAT (F.) et TITS (J.). *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées*, Public. Math. I.H.E.S., nº 41.

[BU 1] BUSEMANN (Herbert). *Convex Surfaces*, Interscience.

[BU 2] BUSEMANN (Herbert). *Recent Synthetic Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik, nº 54, Springer.

[BUR] BURCKHARDT (J. J.). *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*, Birkhaüser.

[BV] BONNEVAL (H.). *Photogrammétrie générale (4 volumes)*, Eyrolles.

[BZ] BENZ (Walter). *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer.

[CA] CAIRNS (Stewart Scott). *Introductory Topology*, Ronald Press.

[CAL] CALLAHAN (Francis P.). *Morley polygons*, American Math. Monthly 84, 1977, p. 325-337.

[C-B] COUDERC (P.) et BALLICIONI (A.). *Premier livre du tétraèdre*, Gauthier-Villars.

[CD] CARATHEODORY (C.). *The most general transformation which transform circles into circles*, Bull. Amer. Math. Soc., 43, 1937, p. 573-579.

[C-D-L] COHEN-TANNOUDJI (C.), DIU (B.) et LALOE (F.). *Mécanique quantique, vol. 1*, Hermann.

[CE 1] CARTAN (Elie). *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes*, Oeuvres complètes, tome I, volume 2, p. 1227-1246.

[CE 2] CARTAN (Elie). *The Theory of Spinors*, Hermann ou The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

[C-G] CHEEGER (Jeff) et GROMOLL (Detlef). *On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature*, Ann. of Math., 96, 1972, p. 413-443.

[CH 1] CARTAN (Henri). *Calcul différentiel*, Hermann.

[CH 2] CARTAN (Henri). *Théorie élémentaire des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

[CH-GR] CHERN (S. S.) et GRIFFITHS (P.). *Abel's theorem and webs*, Jahrbericht d. Deutsche Math.-Verein., 80, 1978, p. 13-110.

[CL 1] CONNELLY (Robert). *A counter example to the rigidity conjecture for polyhedra*, Public. Math. I.H.E.S., 47, 1978, p. 333-338.

[CL 2] CONNELLY (Robert). *A flexible sphere*, Math. Intelligencer, 1, 1978, p. 130-131.

[C-M] COXETER (H. S. M.) et MOSER (W. O. J.). *Generators and Relations for Discrete Groups*, 2e édition, Springer.

[CN] CUENIN (R.). *Cartographie générale (2 volumes)*, Eyrolles.

[CO] CONNELLY (Robert). *An attack on rigidity I, II*. Preprints. Cornell University.

[CR 1] COXETER (H. S. M.). *Introduction to Geometry*. John Wiley.

[CR 2] COXETER (H. S. M.). *Regular Polytopes*, Methuen.

[CR 3] COXETER (H. S. M.). *Non-euclidean Geometry*. The University of Toronto Press.

[CR 4] COXETER (H. S. M.). *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press.

[CR 5] COXETER (H. S. M.). *The Problem of Apollonius*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 5-15.

[CS] CASSELS (J. W. S.). *An Introduction to the Geometry of Numbers*. Springer.

[CT] CHOQUET (Gustave). *Cours d'Analyse, tome II* · *Topologie*, Masson.

[CY] CHEVALLEY (Claude). *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press.

[CZ] CONZE (Jean-Pierre). *Le théorème d'isomorphisme d'Ornstein et la classification des systèmes dynamiques en théorie ergodique*. Séminaire Bourbaki, novembre 1972.

[D-C 1] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Géométrie*, J. B. Baillière.

[D-C 2] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Compléments de géométrie*, J. B. Baillière.

[DE 1] DIEUDONNÉ (Jean). *La géométrie des groupes classiques*, 2e *édition*, Springer.

[DE 2] DIEUDONNÉ (Jean). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, 3e *édition*, Hermann.

[DE 3] DIEUDONNÉ (Jean). *Calcul infinitésimal*, Hermann.

[DE 4] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome II*, Gauthier-Villars.

[DE 5] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome III*, Gauthier-Villars.

[DE 6] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome IV*, Gauthier-Villars.

[DE 7] DIEUDONNÉ (Jean). *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press.

[DE 8] DIEUDONNÉ (Jean). *Cours de Géométrie Algébrique* (*tomes* 1 *et* 2), Presses Universitaires de France.

[D-G-K] DANZER (L.), GRÜNBAUM (B.) et KLEE (V.). *Helly's Theorem and its Relatives*, A.M.S. Symposium on Convexity, Proc. Symp. Pure Math., volume 7, 1963.

[DI] DEMBOWSKI (P.). *Finite Geometries*, Ergebnisse der Mathematik, nº 44, Springer.

[DI-CA] DIEUDONNÉ (Jean) et CARRELL (James B.). *Invariant Theory, Old and New*. Academic Press.

[DN] DANJON (André). *Astronomie générale*, J. et R. Sennac.

[DO] DORRIE (Heinrich). 100 *Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover.

[DQ] DUPORCQ (Ernest). *Premiers principes de géométrie moderne*, 3e *édition*. Gauthier-Villars.

[DR] DIXMIER (Jacques). *Cours de mathematiques du premier cycle, deuxième année*. Gauthier-Villars.

[DV] DVORETSKY (Aryeh). *Some results on convex bodies and Banach spaces*, p. 123-160 dans Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces. Jerusalem, 1961.

[DX] DARBOUX (Gaston). *Principes de Géométrie Analytique*, Gauthier-Villars.

[DY] DOUADY (Adrien). *Le shaddock à six becs*, Bulletin A.P.M.E.P., 281, 1971, p. 699.

[EE] *Encyklopädie der Mathematischen Wissenchaften, Geometrie*, III.2.1, Teubner.

[E-K] EELLS (James) et KUIPER (Nicolas O.). *Manifolds which are like Projective Planes*, Public. Math. I.H.E.S., nº 14, p. 5-46.

[EL] ELLISON (W. J.). *Waring's problem*, American Math. Monthly, 78, 1971.

[EN] EGGLESTON (H. G.). *Convexity*, Cambridge University Press.

[ER] ESCHER (M. C.). *L'œuvre graphique*, Solin, Paris.

[E-S] EELLS (J.) et SAMPSON (J. H.). *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, American Journal of Math., 86, 1964, p. 109-160.

[FA] FALCONER (K. J.). *A characterisation of plane curves of constant width*, J. London Math. Soc., 16, 1977, p. 536-538.

[FI] FILLMORE (Jay P.). *Symmetries of surfaces of constant width*, J. of Diff. Geometry, 3, 1969, p. 103-110.

[FL] FRENKEL (Jean). *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann.

[FN] FULTON (William). *Algebraic Curves*, Benjamin.

[FR] FEDERER (Herbert). *Geometric Measure Theory*, Springer.

[FT 1] FEJES-TOTH (L.). *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*. Springer.

[FT 2] FEJES-TOTH (L.). *Regular Figures*, Pergamon.

[GA] GARDNER (Martin). *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*. Scientific American, January 1977.

[GE] GONSETH (F.). *Un théorème relatif à deux ellipsoides confocaux*. Bulletin des Sciences Math., 42, 1918, p. 177-180 et 193-194.

[GG] GREENBERG (Marvin J.). *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin.

[G-G-V] GELFAND (I. M.), GRAEV (M. I.) et VILENKIN (N. Ya). *Generalized Functions, volume 5, Integral Geometry and Representation Theory*, Academic Press.

[GIS] GRIFFITHS (Phillip A.). *Variations on a Theorem of Abel*. Inventiones Math., 35, 1976, p. 321-390.

[GI-WE] GIBBONS (J. C.) et WEBB (C.). *Circle preserving maps of spheres*. preprint. Illinois Institute of Technology, Chicago.

[GK] *Grundzüge der Mathematik, Band IV : Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik*, Vandenhoeck and Ruprecht.

[G-K-M] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.) et MEYER (W.). *Riemannsche Geometrie im Grossen. Lecture Notes in Mathematics*, nº 55, Springer.

[GL] GLUCK (Herman). *Almost All Simply Connected Closed Surfaces are Rigid*, preprint, University of Pennsylvania.

[GM] GRAMAIN (André). *Topologie des surfaces*. Presses Universitaires de France.

[GN] GÉRARDIN (Paul). *Mathématiques Elémentaires Approfondies*, cours polycopié, Université Paris VII, U.E.R. de Mathématiques.

[G-O] GELBAUM (Bernard D.) et OLMSTED (John M. H.). *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day.

[GR] GUGGENHEIMER (Heinrich W.). *Plane Geometry and its Groups*, Holden-Day.

[GR-HA] GRIFFITHS (P.) et HARRIS (S.). *On Cayley's Explicit Solution to Poncelet's Porism*, L'Enseignement Mathématique, 24, 1978, p. 31-40.

[GR-SH1] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The eighty-one types of isohedral tilings in the plane*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 82, 1977, p. 177-196.

[GR-SH2] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The 91 types of isogonal tiling in the plane*, Trans. A.M.S., 242, 1978, p. 335-354.

[GS] *Geometric Inequalities* (BOTTEMA *et alia*). Wolters-Noordhoof.

[GT] GUICHARDET (A.). *Calcul intégral*. Armand Colin.

[GX] GODEAUX (Lucien). *Les géométries*. Armand Colin.

[HA] HALL (M.). *The Theory of Groups*, Mac Millan.

[HA-WR] HARDY (G. H.) et WRIGHT (E. M.). *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press.

[H-C] HILBERT (D.) et COHN-VOSSEN (S.). *Geometry and the Imagination*, Chelsea.

[HD 1] HADAMARD (Jacques). *Lecons de géométrie élémentaire, tome I*, 10e *édition*, Armand Colin.

[HD 2] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome II*, 7e *édition*, Armand Colin.

[H-K] HAUPT (O.) et KÜNNETH (H.). *Geometrische Ordnungen*, Springer.

[H-L-P] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) et POLYA (G.). *Inequalities*, Cambridge University Press.

[HM] HARTMAN (P.). *On Isometries and a Theorem of Liouville*, Mathematische Zeitschrift, 69, 1958, p. 202-210.

[HN] HELGASON (Sigurdur). *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press.

[HOL] d'HOLLANDER (Raymond). *Topologie Générale, tome I : Généralités, Mesure des angles et des distances.* Eyrolles.

[HO-PE] HODGE (W. V. D.) et PEDOE (D.). *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge University Press.

[H-P] HUGHES (Daniel R.) et PIPER (Fred C.). *Projective Planes*, Springer.

[HR] HADWIGER (H.). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Springer.

[HS] HERSCH (Joseph). *Quatre propriétés des membranes sphériques homogènes.* C.R.A.S., 270, 1970, p. 1714-1716.

[HU] HUSEMOLLER (Dale). *Fibre Bundles*, McGraw Hill.

[H-W] HILTON (P. J.) et WYLIE (S.). *Homology Theory*, Cambridge University Press.

[H-Y] HOCKING (John G.) et YOUNG (Gail S.). *Topology*, Addison-Wesley.

[HZ] HURWITZ (M. A.). *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales Ecole Norm., 19, 1902, p. 357-408.

[I-R] ILLIOVICI (G.) et ROBERT (P.). *Géométrie*, Eyrolles.

[JE] JOEDICKE (Jürgen). *Les structures en voiles et coques*, Vincent, Fréal et Cie.

[KE] KRÉE (P.). *Introduction aux mathématiques et à leurs applications fondamentales, M.P. 2*, Dunod.

[KF] KAZARINOFF (Nicholas D.). *Geometric Inequalities*, Random House.

[KG 1] KLINGENBERG (Wilhelm). *Eine Vorlesung über Differential Geometrie*, Springer.

[KG 2] KLINGENBERG (Wilhelm). *Paare symmetrischen und alternierenden Formen zweiten Grades*, Abhandl. Math. Sem. Hamburg, 19, 1955, p. 78-93.

[KH] KUROSH (A. G.). *Lectures in General Algebra*, Pergamon.

[KM] KLOTZ-MILNOR (Tilla). *Efimov's Theorem about Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature*, Advances in Math., 8, 1972, p. 474-543.

[KN 1] KLEIN (Félix). *Lectures on the Icosahedron*, Dover.

[KN 2] KLEIN (Félix). *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer.

[KO-NO 1] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume I*, Interscience.

[KO-NO 2] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume II*, Interscience.

[LB 1] LEBESGUE (Henri). *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars.

[LB 2] LEBESGUE (Henri). *Les coniques*, Gauthier-Villars.

[LB 3] LEBESGUE (Henri). *Octaèdres articulés de Bricard.* l'Enseignement mathématique, 13, 1967, p. 175-185.

[LE] LEKERKERKER (C. G.). *Geometry of numbers*, Walters-Noordhoff.

[LF 1] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Géométrie différentielle*, Masson.

[LF 2] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes.* Mémoires Acad. Royale Belg., Cl. Sci. Mém. Coll. in-8°, 1971, fascicule 5.

[LF 3] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes*, J. of Diff. Geometry, 8, 1973, p. 487-510.

[LF-AR] LELONG-FERRAND (J.) et ARNAUDIÈS (J.-M.). *Cours de mathématiques, tome* 3, Dunod.

[LG 1] LANG (Serge). *Elliptic Functions*, Addison-Wesley.

[LG 2] LANG (Serge). *Analysis II*, Addison-Wesley.

[LM 1] LEMAIRE (J.). *Hypocycloïdes et Epicycloïdes.* Vuibert.

[LM 2] LEMAIRE (J.). *L'hyperbole équilatère*, Vuibert.

[LP] *Le libre du problème, volume* 4 : *la convexité*, CEDIC.

[LR 1] LEHNER (Joseph). *A Short Course in Automorphic Functions.* Holt, Rinehart and Winston.

[LR 2] LEHNER (Joseph). *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, Math. Surveys, number VIII, American Math. Society.

[LS] LEVALLOIS (Jean-Jacques). *Géodésie Générale, tome II : Géodésie classique bidimensionnelle*, Eyrolles.

[LU] LUSTERNIK (Lazar A.). *Convex Figures and Polyhedra.* Heath.

[LY] LEVY (Harry). *Projective and Related Geometry*, Mac Millan.

[LZ] LAZUTKIN (V. F.). *The Existence of Caustics for a Billiard Problem in a Convex Domain*, Math. USSR Izvestia, 7, 1973, p. 185-214.

[MA] MALLIAVIN (Paul). *Géométrie différentielle intrinsèque.* Hermann.

[MD] MARCHAUD (A.). *Les surfaces du second ordre en géométrie finie.* J. Math. pures et appl., 9-15, 1936, p. 293-300.

[MI] MILNOR (John). *A problem in cartography*, American Math. Monthly, 76, 1969, p. 1101-1102.

[MJ] MANDELBROJT (Benoît). *Les Objets fractals.* Flammarion.

[ML] MICHEL (Charles). *Compléments de géométrie moderne.* Vuibert.

[M-P] MODENOV (P. S.) et PARKHOMENKO (A. S.). *Geometric Transformations, volume I*, Academic Press.

[MR] MATHER (J.). *The nice dimensions. Proceedings of Liverpool Singularities. Symposium I.* Lecture Notes in Mathematics n° 192. Springer.

[M-T] MARTINEAU (André) et TREVES (François). *Eléments de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions. fascicule I.* C.D.U.

[MW 1] MOSTOW (G. D.). *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces.* Annals of Mathematical Studies, n° 78, Princeton University Press.

[MW 2] MOSTOW (G. D.). *Discrete Subgroups of Lie Groups.* Advances in Mathematics, 15, 1975, p. 112-123.

[NA] NEVANLINNA (Rolf). *On Differentiable Mappings, Analytic Functions*, p. 3-9, Princeton University Press.

[OA] OBATA (M.). *The Conjecture on Conformal Transformations of Riemannian Manifolds*, J. of Differential Geometry, 6, 1972, p. 247-258.

[OM] O'MEARA (O. T.). *Introduction to Quadratic Forms*, Springer.

[OS 1] OSSERMAN (Robert). *Bonnesen-style Isoperimetric Inequalities*, American Math. Monthly, 86, 1979, p. 1-29.

[OS 2] OSSERMAN (Robert). *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., 84, 1978, p. 1182-1238.

[PA] PALAIS (Richard). *The Classification of G-Spaces*, Memoirs of the A.M.S., n° 36.

[PC] PASCAL (Blaise). *Pensées*, édition Brunschwig.

[PE] PEDOE (D.). *A Course of Geometry*, Cambridge University Press.

[PL] POHL (William F.). *A Theorem of Géométrie finie.* Journal of Differential Geometry, 10, 1975, p. 435-466.

[PN] PAYNE (L. E.). *Isomerimetric Inequalities and their Applications*, SIAM Review, 9, 1967, p. 453-488.

[PO] PORTEOUS (I. R.). *Topological Geometry*, Van Nostrand-Reinhold.

[PR] PORTER (T. I.). *A History of the Classical Isoperimetric Problem. Contributions to the Calculus of Variations.* University of Chicago Press, 1933.

[P-S] POLYA (G.) et SZEGÖ (G.). *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton University Press ou Kraus Reprint Corporation.

[PT] PICKERT (G.). *Projektive Ebenen*, Springer.

[PV 1] POGORELOV (A. V.). *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces.* Israël Programm for Scientific Translation, Jerusalem.

[PV 2] POGORELOV (A. D.). *Complete Solution of Hilbert's Fourth Problem*. Soviet Math. Doklady, 14, 1973, p. 46-49.

[RA] RADEMACHER (Hans). *Topics in Analytic Number Theory.* Grundlehren n° 169, Springer.

[R-C 1] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie*, 1re *partie*. Gauthier-Villars.

[R-C 2] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie*, 2e *partie*. Gauthier-Villars.

[RE] ROUSSARIE (Robert). *Sur les feuilletages de variétés de dimension* 3. Annales de l'Institut Fourier, 21(3), 1971, p. 13-81.

[RM] DE RHAM (Georges). *Sur les polygones générateurs des groupes fuchsiens*. l'Enseignement mathématique, 17, 1971, p. 49-61.

[RN 1] ROBINSON (Raphael M.), *Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane*, Inventiones Math., 12, 1971, p. 177-209.

[RN 2] ROBINSON (Raphael M.). *Undecidable Tiling Problems in the Hyperbolic Plane*, Inventiones Math., 44, 1978, p. 259-264.

[RN 3] ROBINSON (Raphael M.). *Comments on the Penrose Tiles*, preprint, University of California, Berkeley.

[RO] ROMANOV (V. G.). *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations*, Springer.

[RS] ROGERS (C. A.). *Packing and Covering*, Cambridge University Press.

[R-V] ROBERTS (A. Wayne) et VARBERG (Dale E.). *Convex Functions*. Academic Press.

[SA] SHIMURA (G.). *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami Shoten et Princeton University Press.

[SB] STERNBERG (Shlomo). *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall.

[SC 1] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *The plane symmetry groups their recognition and notation*, American Math. Monthly, 85, 1978, p. 439-450.

[SC 2] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *Tiling the plane with congruent pentagons*, Mathematics Magazine, 51 (1978), p. 29-44.

[SD 1] STAUDE (Otto). *Fadenconstructionen des Ellipsoides*, Math. Annalen, 20, 1882, p. 147-184.

[SD 2] STAUDE (Otto). *Die Fokaleigenschaften der Flächen Zweiter Ordnung*, Leipzig, 1896.

[SE 1] SERRE (Jean-Pierre). *Corps locaux*. Hermann.

[SE 2] SERRE (Jean-Pierre). *Cours d'arithmétique*. Presses Universitaires de France.

[SE 3] SERRE (Jean-Pierre). *Algèbres de Lie semi-simples complexes*. W. A. Benjamin.

[SE-TH] SEIFERT (H.) et THRELFALL (W.). *Lehrbuch der Topologie*. Chelsea.

[SF 1] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants of a class of transformation groups*. Aequationes Math., 14, 1976, p. 105-110.

[SF 2] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants à cinq points dans le plan projectif*, C.R.A.S., 285, 1977, p. 127-128.

[SG] SEIDENBERG (A.). *Lectures in Projective Geometry*, Van Nostrand.

[SGR] *Séminaire de Géométrie Riemannienne de l'Université Paris VII*. 1970-1971.

[SK] SPIVAK (Michael). *Differential Geometry, volume II*. Michael Spivak.

[SL 1] SALLEE (G. T.). *Maximal areas of Reuleaux polygons*, Canadian Math. Bull., 13, 1970, p. 175-179.

[SL 2] SALLEE (G. T.). *Reuleaux polytopes*, Mathematika, 17, 1970, p. 315-323.

[SN] STEIN (S. K.). *Tiling Space by Congruent Polyhedra*, Bulletin of the A.M.S., 80, 1974, p. 819-820.

[SO] SANTALO (L. A.). *Introduction to Integral Geometry*, Hermann.

[SR] SPANIER (E.). *Algebraic Topology*, McGraw Hill.

[S-T] SNAPPER (Ernst) et TROYER (Robert J.). *Metric Affine Geometry*, Academic Press.

[STE] STEFFEN (Klaus). *A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices*, preprint, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette.

[ST-RA] STEINITZ (E.) et RADEMACHER (H.). *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Springer.

[SU] SAMUEL (Pierre). *Unique Factorization*. American Math. Monthly, 75, 1968, p. 945-952.

[SW] STEWART (Ian). *Galois Theory*, Chapman and Hall.

[TG] *Seminar on Transformation Groups*, by Armand BOREL, Annals of Mathematical Studies, n° 46, Princeton.

[TM] THOM (René). *Sur la théorie des enveloppes*, J. de Math. pures et appl., 16, 1962, p. 177-192.

[TS] TITS (Jacques). *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer Lecture Notes in Mathematics, n° 386.

[VE] VALENTINE (Frederik A.). *Convex Sets*, McGraw Hill.

[VG 1] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1936, p. 229-231.

[VG 2] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1937, p. 159-160.

[VL] DU VAL (Patrick). *Homographies, Quaternions and Rotations*. Oxford University Press.

[VN] VALIRON (Georges). *Equations fonctionnelles. Applications*. Masson.

[V-Y] VEBLEN (O.) et YOUNG (J. W.). *Projective Geometry*, deux volumes. Ginn and Co.

[WF] WOLF (Joseph A.). *Spaces of Constant Curvature*, J. A. Wolf.

[WK] WALKER (R. J.). *Algebraic Curves*, Dover.

[WL] WEYL (Hermann). *Symmetry*, Princeton University Press.

[WN] WENNINGER (Magnus J.). *Polyhedron Models*, Cambridge University Press.

[WO] WONG (Yung-Chow). *Isoclinic n-Planes in Euclidean 2n-Space, Clifford Parallels in Elliptic (2n − 1)-Space and the Hurwitz Matrix Equations*, Memoirs of the A.M.S., nº 41.

[WR] WARNER (Frank). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott-Foresman.

[Y-B] YAGLOM (I. M.) et BOLTYANSKII (V. G.). *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston.

[ZN] ZISMAN (Michel). *Topologie algébrique élémentaire*, Armand Colin.

[ZR] ZWIKKER (C.). *The advanced Geometry of Plane Curves and their Applications*, Dover.

现代数学译丛

几何

（第三卷）

凸集和多胞形，正多面体，面积和体积

〔法〕M. 贝尔热 著

科学出版社

现代数学译丛

几　　何

（第三卷）

凸集和多胞形，正多面体，面积和体积

〔法〕M. 贝尔热 著

马传渔 译

周克希 校

科 学 出 版 社

1 9 8 9

内 容 简 介

《几何》是法国数学家 M. 贝尔热为大学生撰写的一套教学参考书. 全书共分五卷. 主要内容为: 群在集合上的作用,仿射与射影空间;欧氏仿射空间;凸集与紧多面体; 二次型,二次超曲面与圆锥曲线;球面与椭圆、双曲几何. 本书配有大量的图和例, 并有许多知识性的注释、按语和历史文献介绍. 本书根据原书第二版翻译.

第三卷介绍凸集和多胞形,正多面体,面积和体积.

本书可供高等院校数学系师生和有关的数学工作者参考.

M. Berger

GÉOMÉTRIE

3/Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes

CEDIC/Fernand Nathan, 1979, 2e édition

现代数学译丛

几 何

(第三卷)

凸集和多胞形,正多面体,面积和体积

[法] M. 贝尔热 著

马传渔 译

周克希 校

责任编辑 杜小杨

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989年3月第一版 开本：850×1168 1/32

1989年3月第一次印刷 印张：5 3/8

印数：0001—1,600 字数：141,000

ISBN 7-03-000841-3/O · 214

定价： 4.30 元

目　　录

第11章 凸集合

在几何中很自然地会遇到凸集；而凸集在分析中也具有重要的作用，甚至在算术、微分几何里也会遇到凸集。本书中，除开有关凸函数的很少一部分内容外，我们只考虑凸性概念的几何观点。此外，作为特殊凸集的多面体，将在下一章作详细的研究。

11.1 节介绍凸集的几个较难的例子．这些例子：Minkowski 的加法、一个凸集关于一个球面的对偶凸集（或配极）、一个凸集的 Steiner 对称，在以后都是要用到的。

11.3 节在不计同胚差别的意义上，给出了凸集的分类和它们边界的分类；因而，从代数拓扑观点来看，凸集是容易研究的。当我们能够把研究对象如此容易地进行分类时，就应该利用这一便利。

11.4 节的内容是古典的，它给出了分离定理和 Hahn-Banach 定理的一些推论．它们特别对于证明凸集间的配极关系是良好对偶，以及在 11.6 节研究关于凸集的边界点都是很有用的。边界点和对偶性在第 12 章里将起极为重要的作用。

11.7 节给出 Helly 定理及其一些推论，这是一个很精彩的定理，叙述却很简单。Krasnosel'skii 定理是它的一个有趣的应用。

最后，11.8 节中定义了凸函数，并给出凸函数的一些性质；两个不那么平常的凸函数的例子都是下文中要用到的：等周不等式的Brunn-Minkowski定理在等周不等式证明中要用到，而Loewner-Behrend 定理将作为仿射二次超曲面的一个特征。

在整个这一章里，只讨论维数为有限数 d 的实仿射空间.

11.1 定义、例子

11.1.1 定义. 设 S 是仿射空间 X 的一个子集. 如果 $\forall x, y \in S$, 有 $[x, y] \subset S$(参见 3.4.3), 这里 $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y: \lambda \in [0, 1]\}$, 则称 S 是凸子集,简称凸集.

11.1.2 例子



图 11.1.1.1.

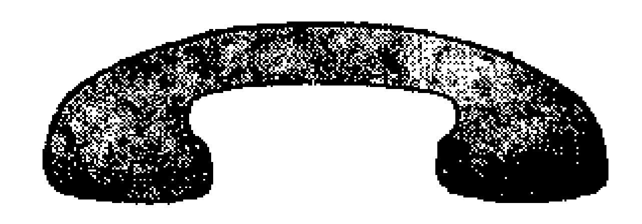


图 11.1.1.2.

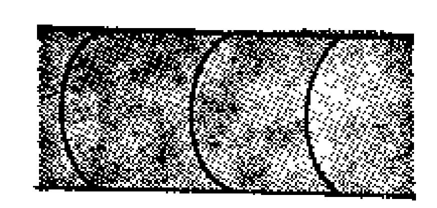


图 11.1.1.3.



图 11.1.1.4.

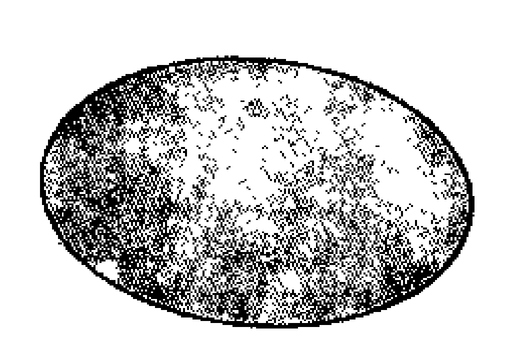


图 11.1.1.5.

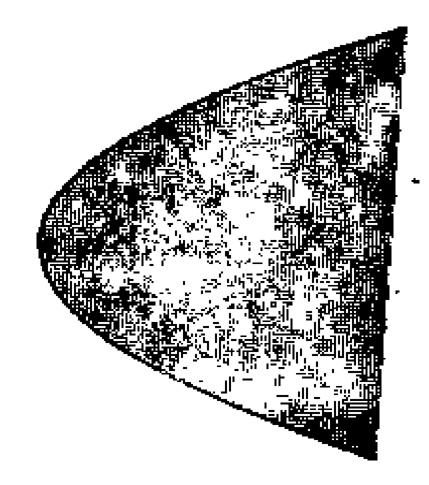


图 11.1.1.6.

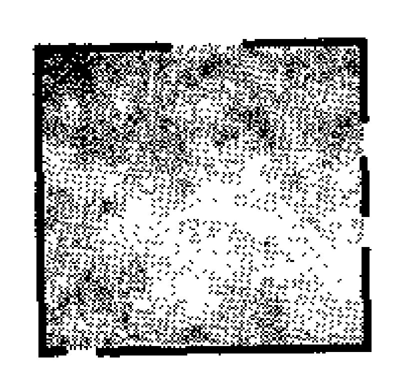


图 11.1.1.7.

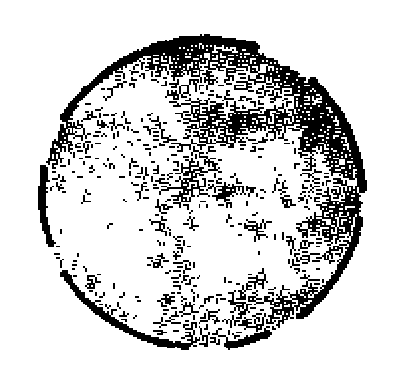


图 11.1.1.8.

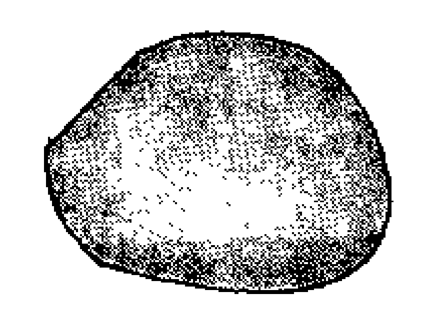


图 11.1.1.9.

11.1.2.1 在上面诸图形中，除图 11.1.1.2 和图 11.1.1.7 外均是凸集。对于图 11.1.1.7 和图 11.1.1.8，更确切地说，图形边界上粗线部分属于所考虑的集合，阴影部分不属于所考虑的集合。图 11.1.1.1 表示平面上一个带形区域；图 11.1.1.3 表示空间中无限延伸的一个圆柱体；图 11.1.1.4、11.1.1.5 和 11.1.1.6 分别表示平面上由双曲线、椭圆和抛物线所决定的区域(参见 17.1.4 节)。

11.1.2.2 整个仿射空间 X，X 的任意一个仿射子空间（参见 2.4)，尤其是点、直线和超平面，都是凸集。空集也是凸集。但正如读者料想得到的那样，这样一来很快就会造成一些似是而非的定理；回想一下 Valintine（[VE] 第 198 页）救援公理是有益的："如果由于集合 A 是空集而使一个定理是错的，那么我们将不言而喻地假设 A 是非空的。我们诚挚地希望以后永远不会再有这类的呼救"。

11.1.2.3 R（或者说 X 在 $d=1$ 时）中的凸集就是区间(任何一种类型的区间)。

11.1.2.4 设 E 是 X 的一个子集，$x\in E$. 若对任意的 $y\in E$，有 $[x, y]\subset E$，则称 E 是一个在 x 处的星形集. 因而，一个凸集在其每一点处都是星形集. 在 11.7.7 节中将看到星形集的一个很漂亮的特征. 星形集是连通的(而且是弧连通的). 特别，凸集是连通的.

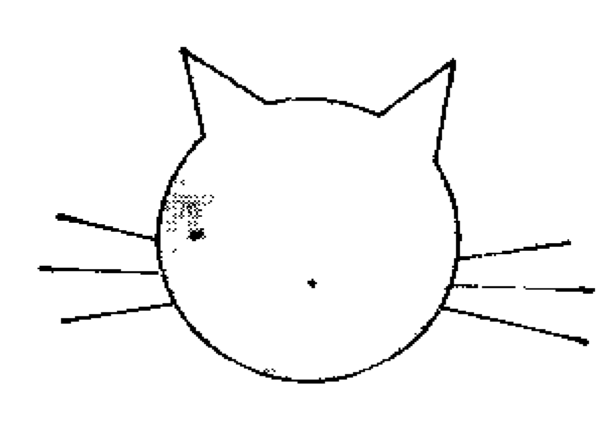


图 11.1.2.4.

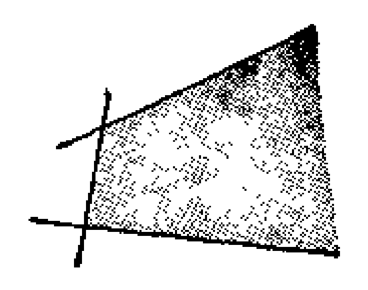
11.1.2.5 在欧几里得仿射空间中，每一个开球 $B(a, r)$ 或闭球 $U(a, r)$ 是凸集. 更进一步(参见图 11.1.1.8)，对于球面 $S(a, r)$ 的任意一个子集 A，$B(a, r)\backslash A$ 总是凸集；对于立方体此结论不成立(参见图 11.1.1.7).

11.1.2.6 设 X, Y 是仿射空间，$S\subset X$ 和 $T\subset Y$ 都是凸集，$f: X\rightarrow Y$ 是一个仿射映射. 则 $f(S)\subset Y$ 和 $f^{-1}(T)\subset X$ 仍为凸集(应用 3.5.1). 特别，如果 $H\subset X$ 是一个超平面，则由它决定的半空间(开的或闭的，参见 2.7.3)是凸的；事实上，如果对于 X 上一个仿射形式 f，$H=f^{-1}(0)$，则这些区域就是 $f^{-1}([0, \infty[)$，$f^{-1}(]0, \infty[)$，…. 而 $[0, \infty[$，$]0, \infty[$ 是 $\mathbf{R}$ 中凸集(参见 11.1.2.3).

11.1.2.7 任意多个(有限多个或无限多个)凸集的交集为凸集. 由此根据(11.1.2.6)推得，半空间的交集为凸集. 特别，有限多个半空间的交集是凸集：称为凸多面体. 凸多面体的研究将是第 12 章的主要内容.

凸集的相交并集仍为凸集.

11.1.2.8 向量空间 E 上的正定二次型构成 $\mathscr{P}_{2}^{*}(E)$ 的一个



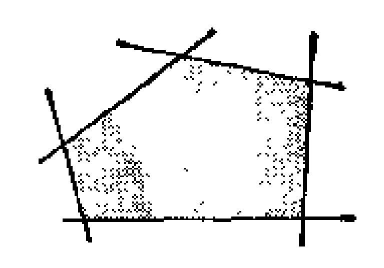


图 11.1.2.7.

凸集．在 11.8.9 节中还将遇到此例。

下面给出依照不同的方法构作的三个比较复杂一点的凸集的例子。

11.1.3 凸集的加法． Minkowski 首先采用下面的运算：设 S, T 是向量空间 X 的两个凸集，则：

11.1.3.1 $\lambda S+\mu T=\{\lambda s+\mu t: s\in S, t\in T\}$ 是凸集，其中 λ, μ 为两个任意的实数．

读者可以直接予以证明，或对映射 $f: X\times X\ni(x, y)\longmapsto \lambda x+\mu y\in X$ 应用 11.1.2.6 亦可。

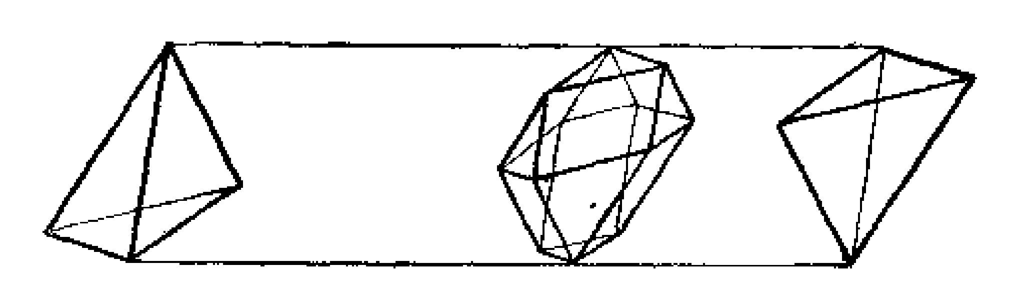


图 11.1.3.1.

如果 X 是仿射空间，上述的加法仅当 $\lambda+\mu=1$ 时才有意义（参见 3.4.1）；否则，$\lambda S+\mu T$ 仅当不计平移差别时，才是确定的，而它的“形状”却总是相同的（参见 2.1.8）．请读者选取 S, T 画出几个 $\lambda S+\mu T$，特别是 $S-T$．一种特殊的情形在以后等周不等式的证明中将是十分重要的(参见 12.10.10)．

11.1.3.2 定义和命题． 设 X 是欧几里得向量空间，A 是 X 的一个子集，$\varepsilon>0$．

置 $U(A, \varepsilon)=\{x\in X: d(x, A)<\varepsilon\}$，

$$B(A, \varepsilon) = \{x \in X: d(x, A) \leqslant \varepsilon\}$$

(参见 0.3), 则有 $U(A, \varepsilon) = A + U(0,\varepsilon)$; 若 A 还是紧的, 则有 $B(A, \varepsilon) = A + B(0, \varepsilon)$.

如果 $d(x, A) < \varepsilon$, 则依 $d(x, A)$ 的定义 (参见 0.3), 存在 $a \in A$, 使得 $d(x, a) < \varepsilon$. 由此推出 $x = a + \overrightarrow{ax} \in A + U(0,\varepsilon)$. 反过来, 如果 $x \in A + U(0, \varepsilon)$, 则有 $x = a + \overrightarrow{ax}$, 使得 $\|\overrightarrow{ax}\| < \varepsilon$. 从而, $d(x, A) \leqslant d(a, x) = \varepsilon$.

在紧的情况下, 我们知道 $\forall x \in X$, $\exists y \in A$, 使得

$$d(x, y) = d(x, A).$$

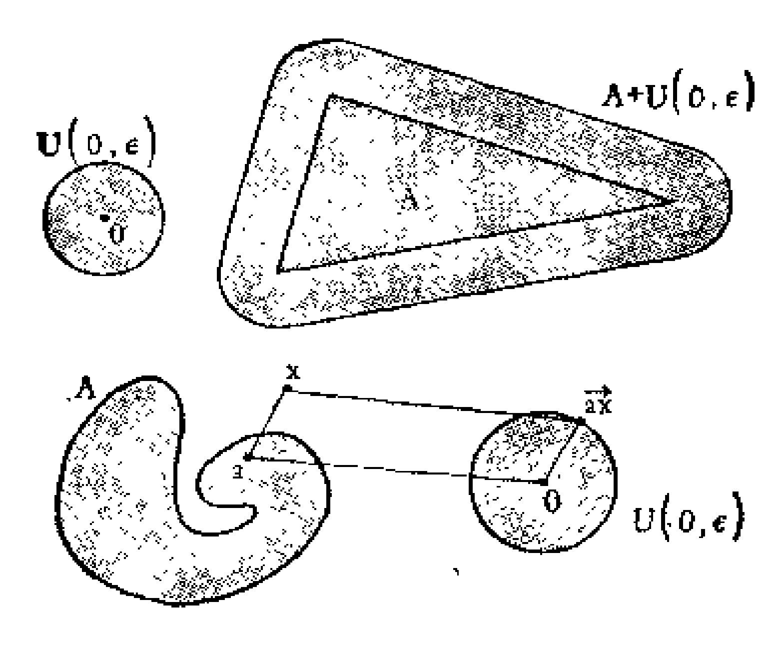


图 11.1.3.2.

11.1.3.3 推论. 如果 A 是凸的, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, $U(A, \varepsilon)$ 也是凸的. 若 A 是紧的, $B(A, \varepsilon)$ 亦然.

11.1.4 凸集的 Steiner 对称化. 采用 9.13 节中的定义和记号:

11.1.4.1 命题. 若 S 是凸的, 则 $\mathrm{st}_H(S)$ 也是凸的.

设 $x, x' \in \mathrm{st}_H(S)$, D 和 D' 分别为过 x 和 x' 的与 H 垂直的直线, $[u, v] = \mathrm{st}_H(S) \cap D$ 和 $[u', v'] = \mathrm{st}_H(S) \cap D'$ 分别是 x 和 x' 所属的线段. 由作法, 又因为 S 是凸的, 可知 $[u, v]$ 和 $[u', v']$ 位于 S 中的两个线段 $[a, b]$ 和 $[a'b']$ 所在直线上. 在由 D 和 D' 所

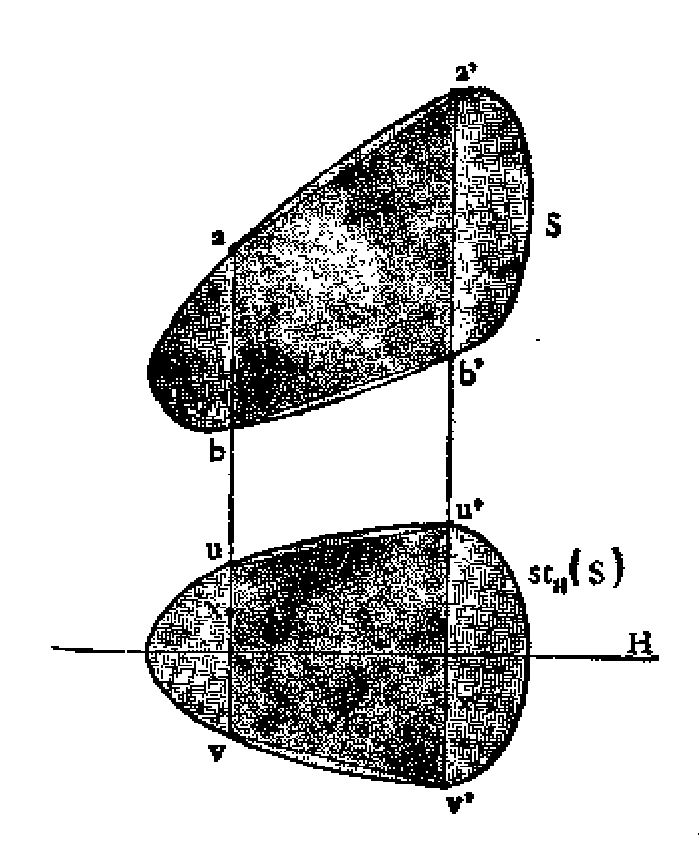


图 11.1.4.

决定的仿射平面内，存在一个仿射映射 f，使得 $a\longmapsto u$，$b\longmapsto v$，$a'\longmapsto u'$，$b'\longmapsto v'$，且由假设条件，f 保持与H垂直的线段长度不变。于是，如果T表示以 a，b，a'，b' 为顶点的梯形，则 $f(T)$ 是以 u，v，u'，v' 为顶点的梯形；但因 S 是凸的，故 $T\subset S$，由此得到 $f(T)\subset st_H(S)$，特别有 $[x, x']\subset st_H(S)$.

11.1.5 凸集的配极，对偶

11.1.5.1 定义. 设A是欧几里得向量空间X的任意一个子集，A的配极子集为

$$A^* = \{y\in X:\ (x|y)\leqslant 1,\ \forall x\in A\}.$$

根据 11.1.2.7，对于任意的 A，A^* 是一个凸集。定义 11.1.5.1 和关于X中单位球面 $S = S(0, 1)$ 的逆配极变换有密切联系；事实上，$x\in X$ 的配极超平面不是别的，就是 $\{y\in X:\ (x|y)=1\}$，参见 10.7.11 和 15.5. 请读者除下述这些图形外，再画若干个 A，并作出相应的 A^*. 在 11.4.8 节中将会看到，如果A取遍内部包含有 0 点的紧凸集，则映射 f；$A\mapsto A^*$ 是一个优异的对偶，这种对

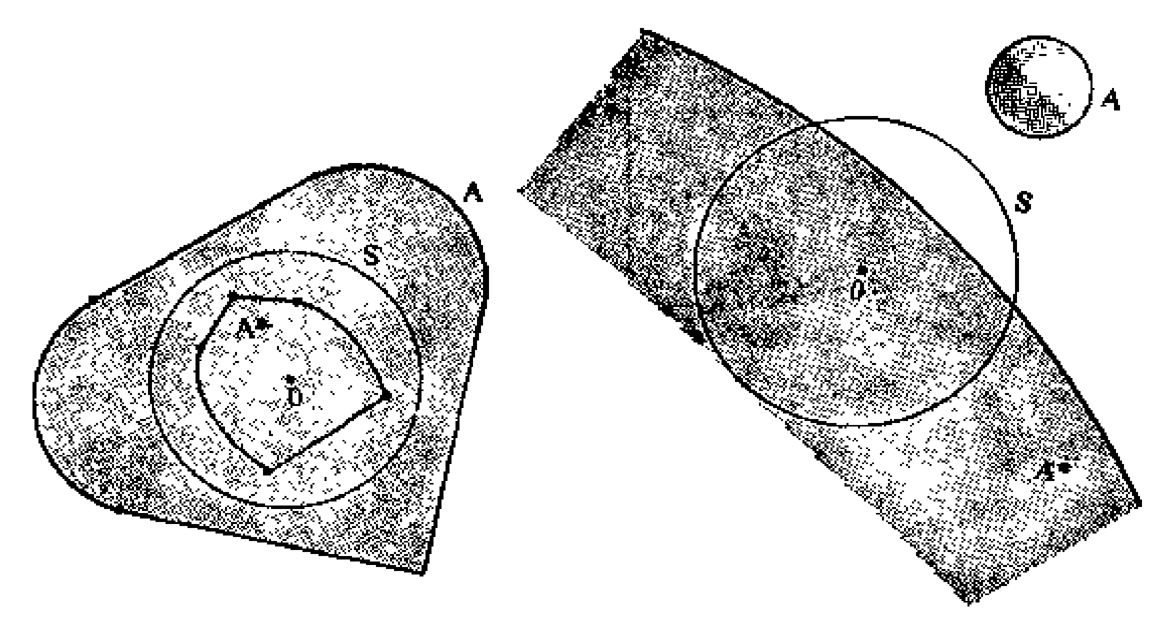


图 11.1.5.

偶在第 12 章中讨论多面体时将要大量地用到.

11.1.6 附注：凸锥. 凸锥是一个重要的概念；一个凸集 C 称为以 x 为顶点的凸锥，意即对于每一个以 x 为中心，比值为 $\lambda \in \boldsymbol{R}_+^*$ 的位似 $H_{x,\lambda}$，C 是稳定的. 我们没有时间研究这个概念，对此例如可参阅 [Bl 3] 第 46 页或者 [VE].

11.1.7 凸集的判定准则. 首先介绍凸集的一个简单的，但很有用也很有趣的性质.

11.1.7.1 命题. 设 S 是欧几里得仿射空间 X 的一个凸集，$x \in X$，则至多存在一点 $y \in S$，使得 $d(x, y) = d(x, S)$（如果 S 是非空闭集，显而易见这样的 y 总是存在的）.

11.1.7.2 引理. 设 S 是 X 的一个凸集，$x \in X$ 和 $y \in S$ 使得 $x \neq y$ 和 $d(x, S) = d(x, y)$，则若 H 表示过 y 并同 $\overrightarrow{xy}$ 垂直的一个超平面，S 必落在由 H 决定的不含 x 的那个闭的半空间内. 如果仅假定 S 是 y 处的一个星形集，本引理依然成立.

采用反证法. 假设 $z \in X$ 为不属于此半空间的一点，则角 $\overrightarrow{yx}$，$\overrightarrow{yz}$ 是锐角，且在 $[y, z]$ 上存在点 t，使得 $d(x, t) < d(x, y)$.

根据 9.22 节，即可由引理推得命题.

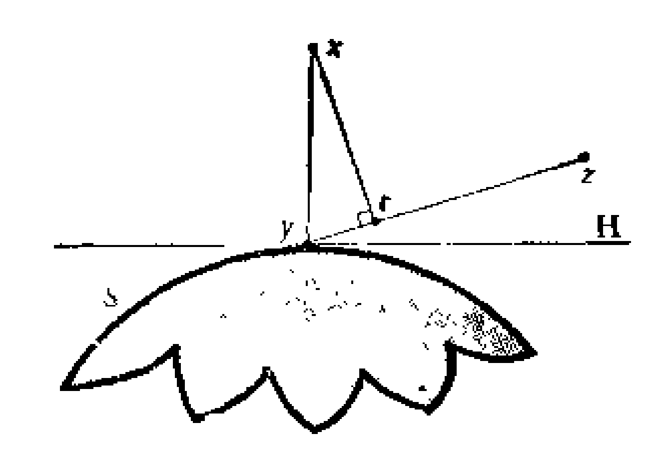


图 11.1.7.

其实性质 11.1.7.1 可作为凸集的特征，这就是 Motzkin 定理：

11.1.7.3 定理. 设 S 是欧几里得仿射空间 X 的一个非空闭集，使 $\forall x\in X$，存在唯一的 $y\in S$ 使得 $d(x, y)=d(x, S)$，则 S 是一个凸集。

本定理的一个证明方法可看 [VE] 第 94 页. 这本著作中还有对 S 中与 x "距离最远"的点的研究，见第 98 页和 ii。

11.1.7.4 借助于支撑超平面的概念，在 11.5.4 节中将给出凸集的第二个特征。

在 [VE] 第 48 页和 ii，还利用"局部凸性"的各种条件给出了凸集的一个特征；这是一个从局部过渡到大范围的例子. 对于这种类型问题可参看 9.5.4.5; 12.8; 16.4; 18.3.8.6。

11.1.8 凸包络

11.1.8.1 从 11.1.2.2 和 11.1.2.7 节用常规的论证可以推出：对于仿射空间 X 的任意一个子集 A，存在一个包含 A 的最小凸



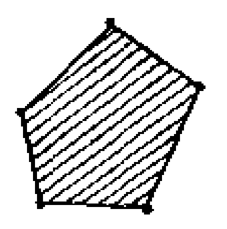


图 11.1.8.

集，即 X 内所有包含 A 的凸集之交．作为定义，这样一个最小的凸集称为 A 的凸包络，记作 $\mathscr{E}(A)$．

11.1.8.2 在 12.1.9 节中（参见 11.6.8）将会看到，X 的有限子集的凸包络的集合和 X 内多面体（紧致）的集合之间有一个恒同关系．

11.1.8.3 为了得到 $\mathscr{E}(A)$，除其它方法外，有两个重要的方法．第二种方法（取包含 A 的所有超平面区域的交集）将放在 11.5.5 节内加以研究．第一种方法是采用重心的办法．

11.1.8.4 命题． 对于 X 的任意一个子集 A，$\mathscr{E}(A)$ 是由 A 内所有作用有正质量的点系的重心所构成的集合，即

$$\mathscr{E}(A)=\Big\{\sum_{i\in I}\lambda_i x_i:\ \forall i,\ x_i\in A,\ \forall\lambda_i\geqslant 0,\ \sum_{I}\lambda_i=1$$
$$(\text{除去有限个 } i \text{ 外 } \lambda_i=0),\ i \text{ 是任意的}\Big\}.$$

证明是平凡的，利用定义 11.1.1 并在 3.4.9 的基础上用归纳法即可得证．

11.1.8.5 我们会很自然地希望把 11.1.8.4 从两个方面弄得更精细些：第一，点系的基数是否仅限于有界的？如果是，这个基数到底等于什么？第二，是否有必要取 A 中所有点的重心？如果不是，取哪些点？Krein 和 Milman 的定理给出了第二个问题的答案，参看 11.6.8，也可看 11.2.9．回到第一个问题，前面任何一个图形都向读者表明，一般有必要使所取的 I 的基数，$\# I\geqslant d+1$．其实，这个条件也是充分的．

11.1.8.6 定理（Carathéodory）． 对于 d 维仿射空间 X 的任意一个子集 A，我们有

$$\mathscr{E}(A)=\Big\{\sum_{i=1}^{d+1}\lambda_i x_i:\ \forall i,\ x_i\in A,\ \forall i,\ \lambda_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{d+1}\lambda_i=1\Big\}.$$

设 $x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i$，$k>d+1$；以任何方式将 X 向量化（参阅 2.1.9 节）．因为 $\dim X=d$，而 $k>d+1$，由线性代数知识可知：存在不全为 0 的 $\alpha_i(i=1,\cdots,k)$，使得 $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i=0$ 和

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0.$$

设 $\Theta = \{\tau \in \mathbf{R}:\ \tau\alpha_i + \lambda_i \geqslant 0\ \forall i = 1, \cdots, k\}$.
Θ 是 $\mathbf{R}$ 的一个闭集(有限个数的广义不等式);因为 $0 \in \Theta$,所以 Θ 是非空的。因为 α_i 不全为 0,所以 $\Theta \neq \mathbf{R}$. 设 τ 是 Θ 的一个边界点,并且相应的 j 满足 $\tau\alpha_j + \alpha_j = 0$,则有

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \tau\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \tau\alpha_i) x_i$$

$$= \sum_{i \neq j} (\lambda_i + \tau\alpha_i) x_i,$$

由引进符号的意义可知 $\sum_{i \neq j} (\lambda_i + \tau\alpha_i) = 1$,从而我们把 x 表作了 $k-1$ 个具有正质量的向量的重心。

11.1.8.7 推论. 若 A 是紧的,则 $\mathscr{E}(A)$ 也是紧的。

事实上,若令 $K = \left\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_{d+1}) \in \mathbf{R}^{d+1}: \forall i \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1\right\}$,

K 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的一个紧集. 并且 11.1.8.6 表明: $\mathscr{E}(A)$ 是 $K \times A^{d+1} \subset \mathbf{R}^{d+1} \times X^{d+1}$ 在连续映射

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_{d+1}, x_1, \cdots, x_{d+1}) \longmapsto \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i$$

下的象。

在 11.9.3 中对 11.1.8.6 作了改进。请看 11.2.2 Hilbert 给出了 11.1.8.6 一个很精彩的应用,对此可参看: W. J. Ellison, Waring's problem. American Mathmatical Monthly. **78** (1971), 特别是第 5 节。

11.1.8.8 若 A 是有界的,则直径 $\operatorname{diam}(\mathscr{E}(A)) = \operatorname{diam} A$. 特别,$\mathscr{E}(A)$ 仍是有界的。

这是 11.8.7.6 的一个推论。

11.2 凸性和一般拓扑．凸集的维数

回想到我们的仿射空间是有限维的，故它有一个典范的拓扑(参见 2.7.1.4)．

11.2.1 命题． 如果 S 是凸的，则它的闭包 $\bar{S}$ 也是凸的．

可用两种方法看出这一点．首先，我们可以利用映射 $(x, y) \longmapsto \lambda x+(1-\lambda)y$ 对任意 λ 的连续性．其次，于 S 所在的仿射空间 X 内装上一个欧几里得结构后，就有 $\bar{S}=\bigcap_{\varepsilon>0} U(S, \varepsilon)$，因而由 11.1.3.3 本命题得证．

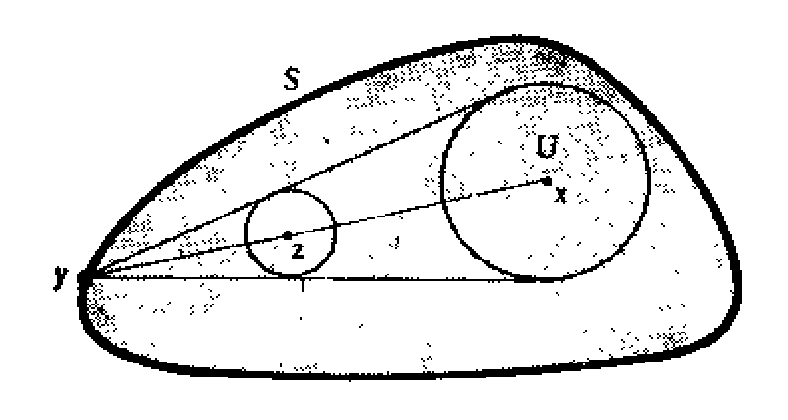


图 11.2.1.

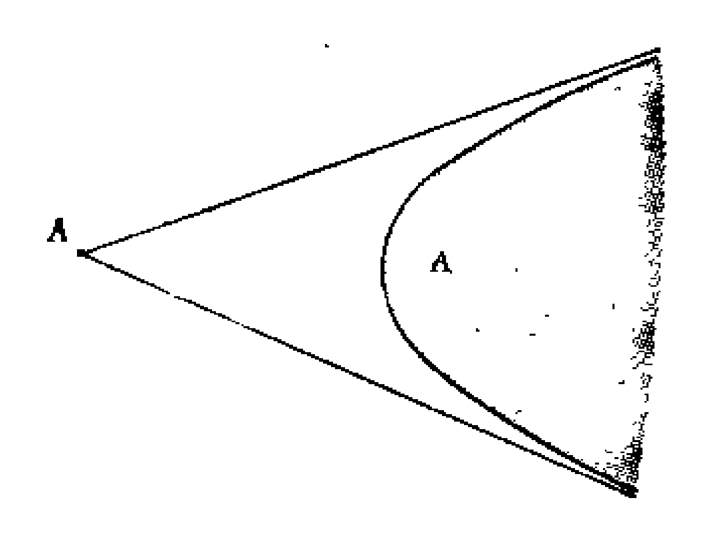


图 11.2.2.

11.2.2 不过要注意：如果 A 是闭的，$\mathscr{E}(A)$ 一般并不是闭的：见图 11.2.2，其中 A 是由一支双曲线的内部和此双曲线的中心所组成的。这也说明了我们为什么要引进下面的概念；那个命题则可直接由 11.2.1 导出。

11.2.3 定义和命题. 包含 A 的所有的凸闭集的交集称为子集 A 的凸闭包络。这个凸闭包络就是 $\overline{\mathscr{E}(A)}$.

11.2.4 引理. 设 S 是凸集，$x \in \mathring{S}$（S 的内部）并且 $y \in \bar{S}$，则 $]x, y[\subset \mathring{S}$（其中 $]x, y[$ 是开线段）.

事实上，如果 $z \in]x, y[$，并且 U 是 S 中含 x 的一个开集，则在以 y 为中心，把 x 变到 z 的位似变换下，U 的位似象是落在 S 内的。

11.2.5 推论. 若 S 是凸的，则 $\mathring{S}$ 也是凸的，且有 $\mathring{S} = \mathring{\bar{S}}$. 如果还有 $\mathring{S} \neq \varnothing$，则 $\bar{S} = \bar{\mathring{S}}$.

读者熟知：对于任意的子集，一般有 $\mathring{S} \neq \mathring{\bar{S}}$ 和 $\bar{S} \neq \bar{\mathring{S}}$（例如可参看图 11.1.2.4）. 另一方面，即使对于凸集也有 $\bar{S} \neq \bar{\mathring{S}}$，例如 S 是 X 的一个超平面的情形。

为了知道一个凸集是否具有非空的内部，一个简单而有趣的判定准则是以下述定义作为基础的。

11.2.6 定义. 一个非空凸集 S 的维数就是由 S 生成的仿射子空间 $\langle S \rangle$ 的维数（参见 2.4.2.5），记作 $\dim S$：$\dim S = \dim \langle S \rangle$.

11.2.7 命题. 对于一个非空凸集，$\dim S = \dim X$ 等价于 $\mathring{S} \neq \varnothing$.

如果 $\mathring{S} \neq \varnothing$，例如根据 3.5.2 就有 $\dim S = \dim X$. 反过来，若 $(x_i)_{i=1,\cdots,d+1}$ 是 S 的一组仿射独立的点，则 $\dfrac{x_1 + \cdots + x_{d+1}}{d+1} \in \mathring{S}$.

11.2.8 因此，我们可以引进凸集的相对内部的概念，它就是在由该凸集 S 所生成的仿射子空间中 S 的内部。

11.2.9 命题. 若 S 是一个紧凸集，则 $S = \mathscr{E}(\mathrm{Fr}\,(S))$.

设 $x \in S$，并且 D 是过 x 的任意一条直线；则 $D \cap S$ 是含 x 的一条线段 $[u, v]$，参阅 11.1.2.3. 因为 $u, v \in \mathrm{Fr}\ S$，故 $x \in \mathscr{E}(\mathrm{Fr}\,(S))$.

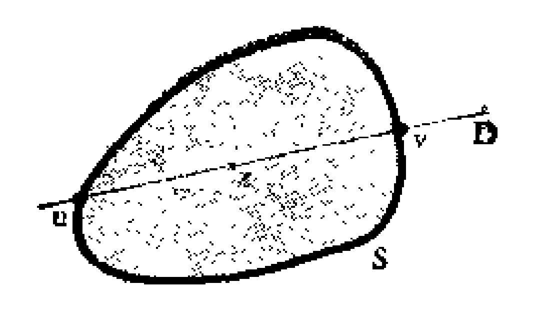


图 11.2.9.

11.3 凸集的拓扑

本节中，对凸集在不计同胚差别的意义下进行了分类；对其边界也进行了分类。所谓分类的含义将在行文的叙述中加以阐明。

11.3.1 命题. 设X是一个d维仿射空间，A是X的一个d维凸集，即 $\dim A = \dim X = d$. 则 $\mathring{A}$ 与 $\mathbf{R}^d$ 同胚. 特别是，d维空间内一切非空的开凸集都是与 $\mathbf{R}^d$ 同胚的.

11.3.1.1 为了进行讨论，赋予X一个以 $O \in \mathring{A}$ 为原点的欧几里得向量空间结构，根据 11.2.7 这是可能的. 设S是A中的单位球面. 对 $y \in S$，设$R(y)$是自原点O引出的过y的一条半直线；根据 11.1.2.3 和 11.1.2.7，$R(y) \cap A$ 是一个区间（包含O点，且为区间 $[O, \varepsilon y[$，其中 $\varepsilon > 0$）. 设 $f(y)$是 $R(y) \cap A$ 的与O点不同的

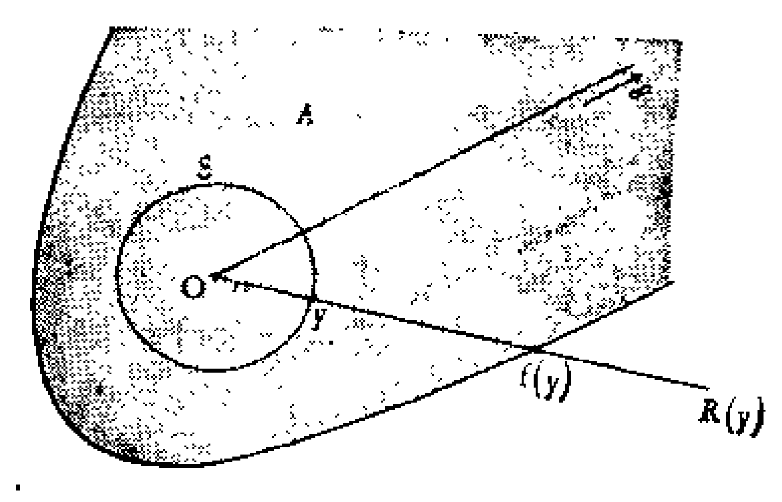


图 11.3.1.1.

另一个端点，它是 $R(y)\cap \mathrm{Fr}(A)$ 中唯一的一个点，其中 $\mathrm{Fr}(A)$ 表示 A 的边界。令 $\delta(y)=\|f(y)\|$。以上做法排除了 $R(y)\subset A$ 的情况，在此情况下，应令 $\delta(y)=\infty$，而 $f(y)$ 则没有定义。

11.3.1.2 证明 $\delta: S\to[0,\infty]$ 是连续的。

采用反证法。首先考虑 $\delta(y)<\infty$ 的情形。假设 (y_n) 是 S 的一个点列，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$。如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(y_n)=\delta(y)$ 不成立，那么存在 (y_n) 的一个子序列，不妨仍记作 (y_n)，使得对任给的 $\eta>0$，有 $\delta(y_n)\leqslant\delta(y)-\eta$ 或 $\delta(y_n)\geqslant\delta(y)+\eta$。而因为 $O\in\mathring{A}$，故存在 A 内一个开球 $U(0,\alpha)\ (\alpha>0)$。从而，A 包含图 11.3.1.2 中加细密点的区域，若 $\delta(y_n)\leqslant\delta(y)-\eta$，则得出矛盾。如果 $\delta(y_n)\geqslant\delta(y)+\eta$，则因由 A 的凸性可推知图 11.3.1.3 中加细密点部分在 A 的内部，又产生矛盾。对 $\delta(y)=\infty$ 的情形，我们利用图 11.3.1.4 中加细密点部分。

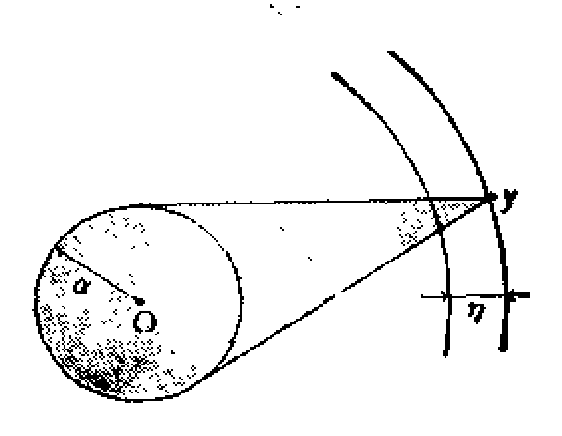


图 11.3.1.2.

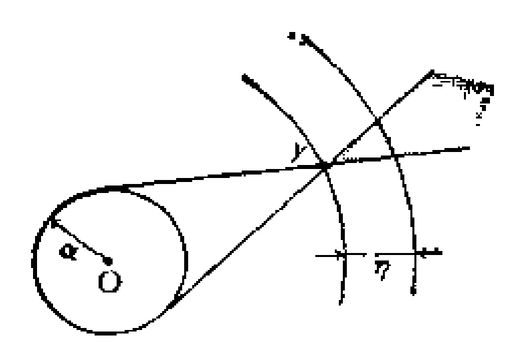


图 11.3.1.3.

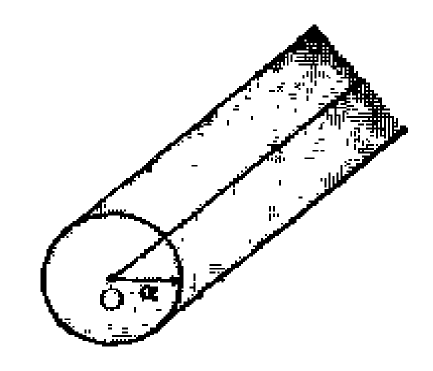


图 11.3.1.4.

11.3.1.3 为了完成证明，只要记住 $\mathbf{R}$ 中的区间 $[0, a[$ $(0 < a < \infty)$ 和 $[0, \infty[$ 是同胚的，并在必要时以连续的方式对 a 运用这一结论. 具体地说，上述的 $\mathring{A}$ 和 X 之间的同胚可定义为:

$$\begin{cases} x \longmapsto x & \text{当 } x = 0 \text{ 或 } x \neq 0 \text{ 而 } \delta\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) = \infty; \\ x \longmapsto \dfrac{\delta\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \cdot \|x\|}{\delta\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) - \|x\|} \cdot \dfrac{x}{\|x\|} & \text{其它的 } x. \end{cases}$$

11.3.2 附注. 由此推出，凸集的边界是零测度的(参见 2.7.4.3): 在每一条 $R(y)$ 上，$R(y) \cap \mathrm{Fr}(A)$ 仅有唯一的一点. 从而，是零测度的. 故我们可应用 Fubini 定理和 11.3.1.2. 在 12.9.2.4 节内能看到另外一种证法.

11.3.3 现在我们注意到，根据例 11.1.2.5，要想对任意凸集进行分类将是徒劳的，因此，在下面的阐述中作了一些限制. 由跟 11.3.1 同样的证明方法可得出下述推论:

11.3.4 推论. 如果 A 是一个有界的凸集，而且 $\dim A = \dim X = d$，则其边界 $\mathrm{Fr}\,A$ 恒与球面 S^{d-1} 同胚. 此外，如果 A 是紧的，则 A 与 d 维闭球同胚. 特别，当 $d = 2$ 时，$\mathrm{Fr}\,A$ 是一条简单闭曲线.

因为在这里 $\forall y \in S$ 有 $\delta(y) < \infty$，所以映射 $y \longmapsto f(y)$ 的逆映射就是所要找的与球面 S^{d-1} 的同胚；而 S 总是与 S^{d-1} 同胚的.

11.3.5 现在，如果凸集 A 是任意维的，即不必一定同外围空间 X 的维数相等. 把 11.3.1 或 11.3.4 应用于由 A 生成的仿射子空间即可看出，这样已经完全把开凸集和紧凸集进行了分类；如果 d' 是它们的维数，则它们分别同胚于 $\mathbf{R}^{d'}$ 和 $\mathbf{R}^{d'}$ 中的单位球.

11.3.6 关于星形集的注.

我们的目的是想让 11.3.1 的证明也适用于 X 的星形集 E(参见 11.1.2.4)，其中 E 是 $x \in \mathring{E}$ 处的一个星形集. 我们总可以在 X 上安装一个欧几里得结构，引入以 x 为中心的单位球面 S 和半直线 $R(y)$，$y \in S$. 只不过，现在区间 $R(y) \cap E$ 的端点(仍记作 $f(y)$)不再只是属于 $R(y) \cap \mathrm{Fr}(E)$ 的一点了；例如猫脸图形 11.1.2.4 中

猫的细须。我们称 $\{f(y): y\in S, \delta(y)<\infty\}$ 的全体集合为星形集 E 的凸包；于是，对于非凸的星形集，一般而言凸包和 $\mathrm{Fr}\, E$ 是不同的。此外，我们可以看到(图 11.1.2.4 或 11.3.6.1) δ 未必是连续的。即使当凸包是紧时，也是如此(在图 11.3.6.3 中，凸包是由两点组成的)。

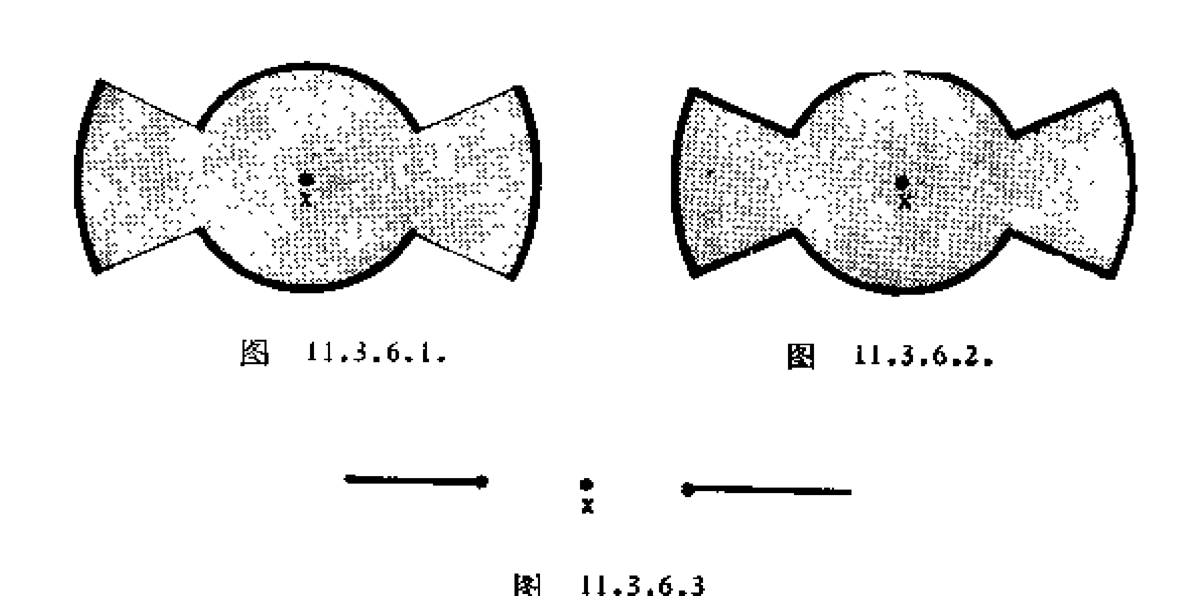


图 11.3.6.1. 　　图 11.3.6.2.

图 11.3.6.3

然而，上面所画的每个星形集看上去都同胚于 $\mathbf{R}^d$；情况确实如此：

11.3.6.1 定理. X 的任意一个开星形集与 X 同胚.

我们在所考虑的星形集 A 的中心处向量化 X. 如果 $X=A$，那就什么也不必证了. 否则 $\mathrm{Fr}A\neq\varnothing$，因而可定义函数

$$\varphi:\ A\ni x\longmapsto\varphi(x)=d(x,\mathrm{Fr}\,(A))\in\mathbf{R}_+^*.$$

显而易见，φ 是连续的. 定义映射 $F:\ A\to X$ 如下：

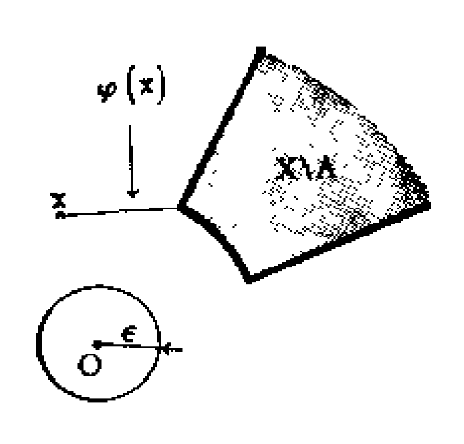


图 11.3.6.4.

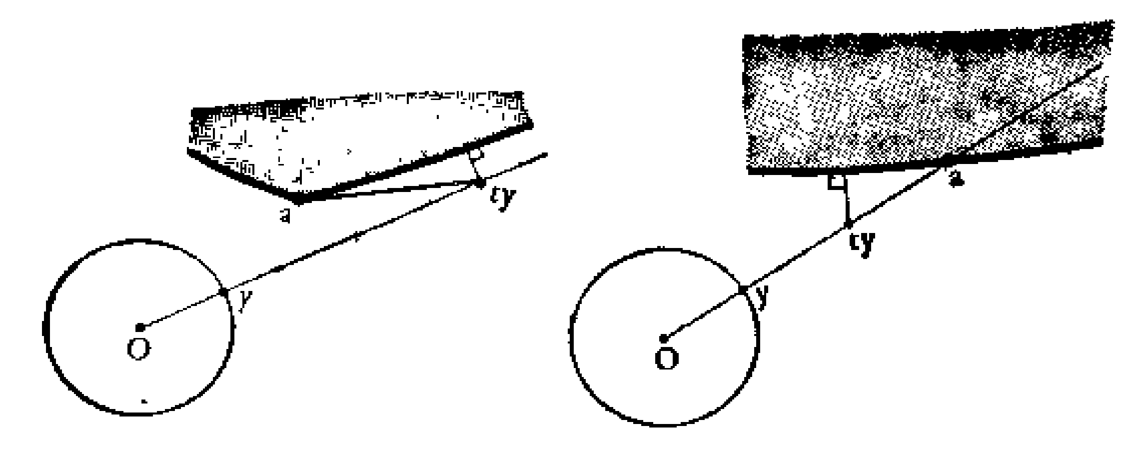


图 11.3.6.5.

11.3.6.2 $F(0)=0$. 而 $x\neq 0$ 时，

$$F(x)=\left[\int_0^{\|x\|}\frac{dt}{\varphi\left(\frac{t}{\|x\|}\cdot x\right)}\right]\cdot\frac{x}{\|x\|}.$$

映射 F 就是要找的同胚. 我们知道，这只要证明 F 是连续的、双射的和固有的(所谓固有的意即任意一个紧集的逆象也是一个紧集)就够了.

首先，F 是连续的：当 $x\neq 0$ 时，从 11.3.6.2 和 φ 的连续性可知 F 是连续的. 在 O 点，由于 A 是开的，故存在 $\varepsilon>0$ 和 $k>0$，使对任意的 $x\in U(0,\varepsilon)$，有 $\varphi(x)\geqslant k$. 因此 F 连续. 现在，关键之处是证明:

11.3.6.3 $\forall y\in S,\int_0^{\delta(y)}\frac{dt}{\varphi(ty)}=+\infty$,

这里，沿用了 11.3.1 的证明中的记号. 分两种情形加以讨论：如果 $\delta(y)=+\infty$，设 a 是 $\mathrm{Fr}\,A$ 中任意一点. 则 $\varphi(ty)=d(ty,\mathrm{Fr}\,(A))\leqslant d(ty,a)\leqslant t+\|a\|$，由此推出

$$\int_0^{\infty}\frac{dt}{\varphi(ty)}\geqslant\int_0^{\infty}\frac{dt}{t+\|a\|}=+\infty.$$

如果 $\delta(y)=k<+\infty$，则有 $\varphi(ty)\leqslant d(ty,ky)=k-t$，仍得

$$\int_0^{k}\frac{dt}{\varphi(ty)}\geqslant\int_0^{k}\frac{dt}{k-t}=+\infty,$$

为了证明F是固有的；由于F已是连续的，而且我们是在有限维向量空间中进行研究，所以只要说明X的任一有界集的逆象是一个有界集就够了。这可从上述的强函数看出：在$\delta(y)=+\infty$的情形，是因为所得出的强函数对y是一致的，在$\delta(y)<+\infty$的情形，则是因为借助于$\delta(y)$，作为对y的单值函数的$\int_0^t \frac{dt}{\varphi(ty)}$是有强函数的。

11.3.6.4 注. 其实A甚至是与X微分同胚的。参见练习11.9.6。

11.3.6.5 推论. 设X是一个d维欧几里得仿射空间，S是以$x\in X$为中心的单位球面，并且C是以O为顶点的一个闭凸锥(参见11.1.6)。此外，假设存在$y\in S\cap C$，而$-y\notin S\cap C$，则$S\setminus(S\cap C)$与$\mathbf{R}^{d-1}$同胚。

置$M=S\cap C$和$y'=-y$。γ是以y，y'为端点的S上的任意一个半大圆。对于$\gamma\cap M$，我们有$y\in\gamma\cap M$，$y'\notin\gamma\cap M$，且因

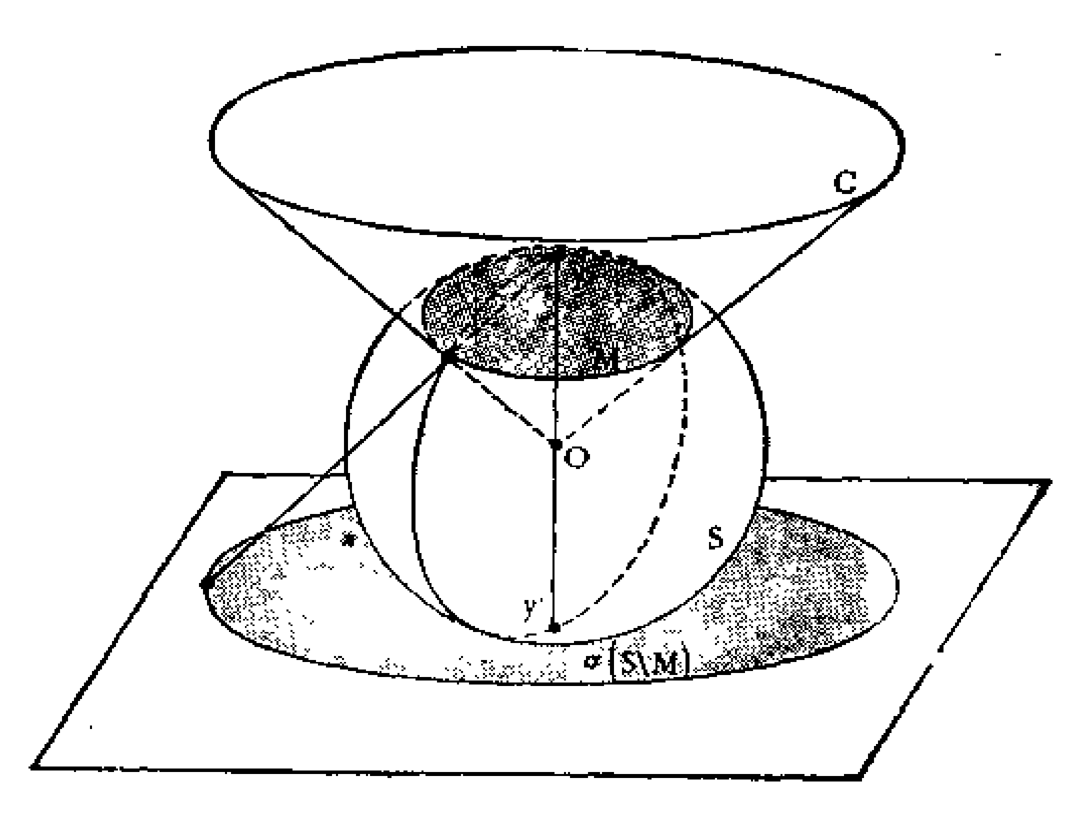
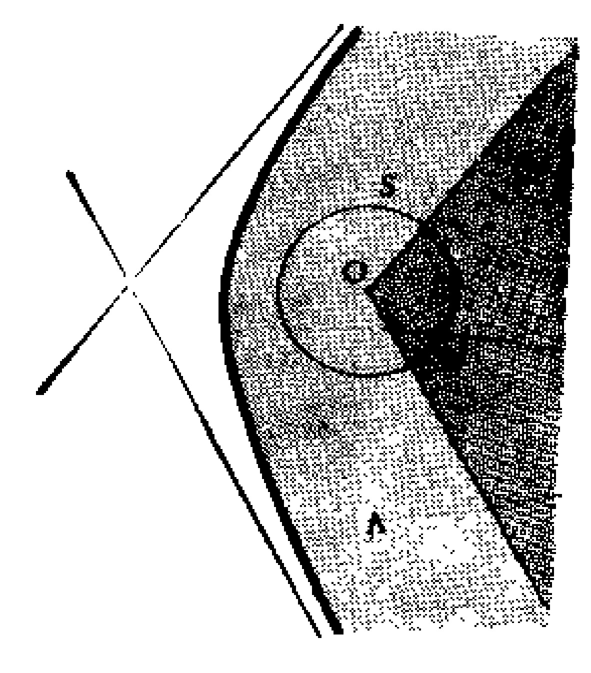


图 11.3.6.6.

C 是凸的，故 $\gamma\cap M$ 是连通的．从而 $\gamma\cap(S\setminus M)$ 是 γ 的一条半开弧 $[y',.[$．特别，如果 H 是 S 在 y' 点的切超平面，σ 表示 S 的以 y 为极点在 H 上的球极投影（参见 18.1.4.3），则前述论证表明，$\sigma(S\setminus M)$ 是 H 在 y' 处的一个星形子集，又因 C 是闭集，故它是开集．根据 18.1.5，从 11.3.6.1 即可推出 11.3.6.5．

11.3.7 在 11.3.5 中我们已把开凸集和紧凸集作了分类．现在，有待于考虑非有界的凸集．由图 11.1.1.1，11.1.1.3，11.1.1.6，11.1.1.5 可见，它们的边界分别同胚于 $\mathbf{R}\times\{-1,+1\}$，$\mathbf{R}\times S^1$，$\mathbf{R}$，$S^1$．这种现象是带有普遍性的：

11.3.8 命题． 设 A 是 X 的一个凸集，$\dim A=\dim X=d$，而且



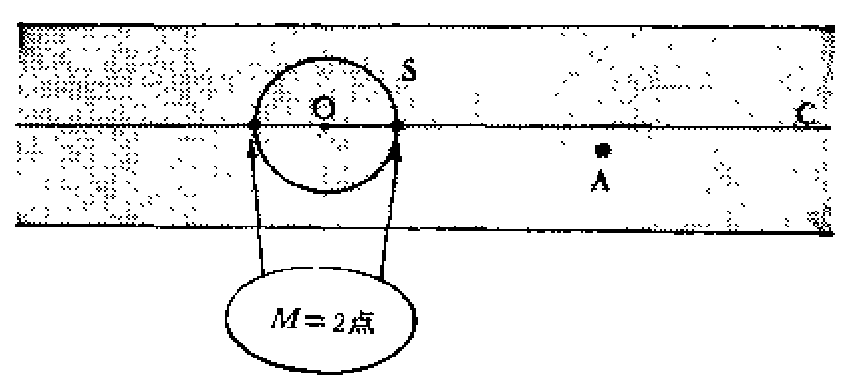


图 11.3.8.1.

Fr $A = \varnothing$，则 Fr A 或同胚于 $\mathbf{R}^{d-1}$，或同胚于 $S^{d-r-1} \times \mathbf{R}^r$ ($0 \leqslant r \leqslant d-1$).

11.3.8.1 沿用 11.3.1.1 中的记号. 如果 A 是有界的，由 11.3.4 可知命题成立. 否则，置 $M = \{y \in S:\ \delta(y) = \infty\}$. 从 A 是凸的，推出 $C = \bigcup_{y \in M} R(y)$ 是一个闭凸锥.

第一种情形是 $M \cap (-M) = \varnothing$，即 $\forall y \in M, -y \notin M$. 这时 M 不再含有两个对映点，这等价于 A 不包含经过 O 点的整条直线. 在此情形下，恰好推论 11.3.6.5 的假设条件都已满足，而 Fr A 同胚于 $S \backslash M$，从而同胚于 R^{d-1}.

11.3.8.2 第二种情形是存在 $y \in M$，使得 $-y \in M$，即 $A \supset D$，这里 D 是通过 O 与 y 两点的仿射直线. 设 V 是被包含在 A 内

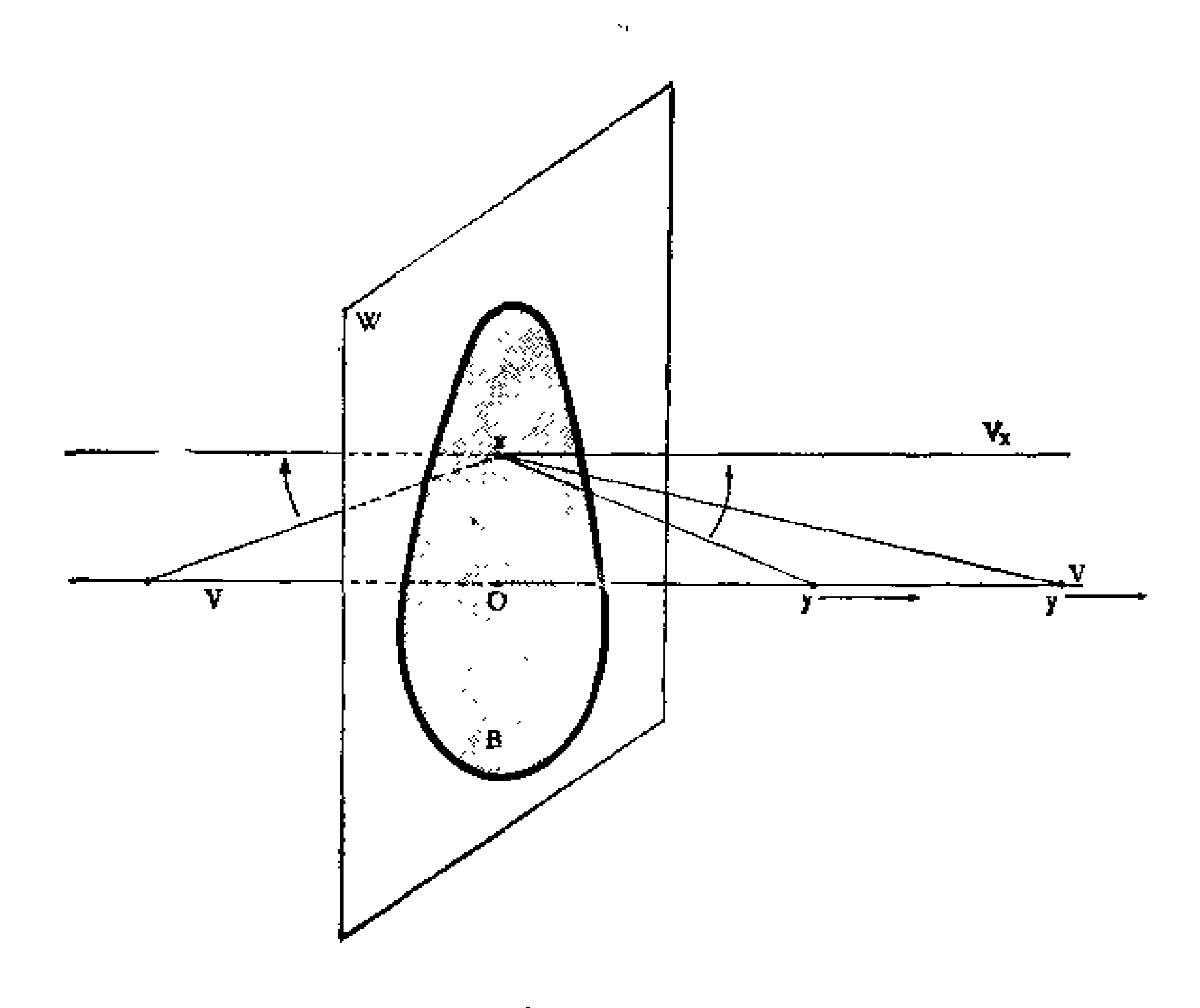


图 11.3.8.2.

的维数最大（设为 $r \geqslant 1$）的仿射子空间，显然，$r \leqslant d-1$，不然的话，因为 $A = X$，就有 $\operatorname{Fr} A = \varnothing$. 设 W 正交于 V；则 W 是 $d-r$ 维仿射子空间，并且 $W \cap A = B$ 是 W 的一个凸集. 如果 $x \in W$，取一点 $y \in V$，让 y 在 V 内按一切可能的方式趋向于 ∞；因为 $[x, y] \subset A$ 和 $V \subset A$，取极限后可知：$\bar{A}$ 包含任意的 V_x，这里 V_x 是过 x 平行于 V 的仿射子空间. 由此得出 $\bar{A} \supset V \times B$；同样可证，$\bar{A} \subset V \times \bar{B}$. 因为 $\operatorname{Fr} V = \varnothing$，故有

$$\operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr} \bar{A} = \operatorname{Fr}(V \times \bar{B}) = V \times \operatorname{Fr} \bar{B} = V \times \operatorname{Fr} B,$$

既然由 V 的最大性可推知，对 B 来说又属于"无对映点"的第一种情形，故从 11.3.4 或者从 11.3.8.1 即可证得本命题.

11.3.9 附注. 11.3.8.2 的证明技巧是带有普遍意义的；最近，在黎曼流形的某些研究中也用到了它：参阅 [C-G] 或 [SGR].

11.3.10 附注

11.3.10.1 欧几里得平面 X 上的一条凸曲线，定义为 X 的一个二维凸集的边界. 命题 11.3.8 表明：一条凸曲线或同胚于圆 S^1，或同胚于直线 $\mathbf{R}$. 请与一维微分流形的分类加以比较，例如可参看 [B-G] 第 127 页. 读者也可用现在的观点去研究 [B-G] 中定理 9.6.2 的证明；参看下面 11.5.4.

11.3.10.2 三维欧几里得空间中的一个凸曲面是一个连通集，按定义它是该空间中一个三维凸集的边界. 因而这样的曲面总是（参见 11.3.8）或同胚于 $\mathbf{R}^2$，或同胚于 $S^1 \times \mathbf{R}$（圆柱面），或同胚于 S^2. 凸曲面是很有意义的研究对象：特别可参看 [PV 1] 或者 [BU 1]，[AW]. 对于可微的情形，参看 [DE 6] 第 344 页，练习 3.

11.3.10.3 最后，从 11.3.8 容易推出闭凸集的拓扑分类.

11.4 凸集和超平面；分离定理

整个这一节是以下述定理作为基础的.

11.4.1 Hahn-Banach 定理. 设 X 是仿射空间，A 是 X 的一

个非空凸开集，且 L 是 X 的一个仿射子空间，使得 $A\cap L=\varnothing$，则存在 X 的一个超平面，它包含 L 且与 A 不相交.

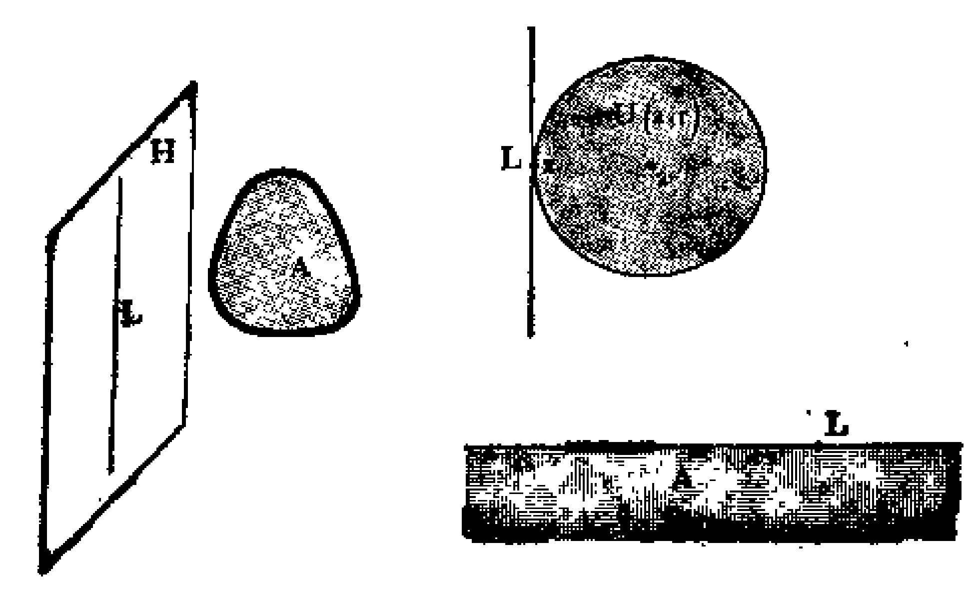


图 11.4.1.1.

A 是开集这个条件不能去掉：取一个开的半平面并添上一条边界线段作为 A，在这边界线段上取一点作为 L，即可作为一个反例. 也可看练习 11.9.9.

请注意，这样的一个定理并不是显而易见的. 这是因为，比如取 A 为一个开球 $U(a,r)$，$L=\{x\}$，使 $x\in S(a,r)$，则得到的超平面是唯一的，它是 $S(a,r)$ 在 x 点的切超平面(参见 10.7.4).

11.4.1.1 证明的第一步在于把它归结为平面的情形. 设 $M\supset L$ 是使 $M\cap A=\varnothing$ 的最大维数的子空间，则必须证明 M 是一个超平面. 用反证法证明之. 首先，在原点 $O\in L$ 向量化 X，并设 p: $X\to X/M$ 为在商空间 X/M 上的典范投影，此时 $p(A)$ 仍是一个开凸集 (11.1.2.6)，而且 $O\notin p(A)$. 设 $Z\subset X/M$ 是一个二维向量子空间，并和 $p(A)$ 相交，则 $B=p(A)\cap Z$ 为非空开凸集；这样的 Z 是存在的，因为由反证法假设条件，有 $\dim(X/M)\geqslant 2$.

11.4.1.2 现在需要证明：Z 内经过 O 点的任意直线都与 B 相交 (B 是 Z 的开凸集，且 $O\notin B$) 是会引出矛盾的.

粗略地说，如果在 Z 上引入一个任意的欧几里得结构，则经过

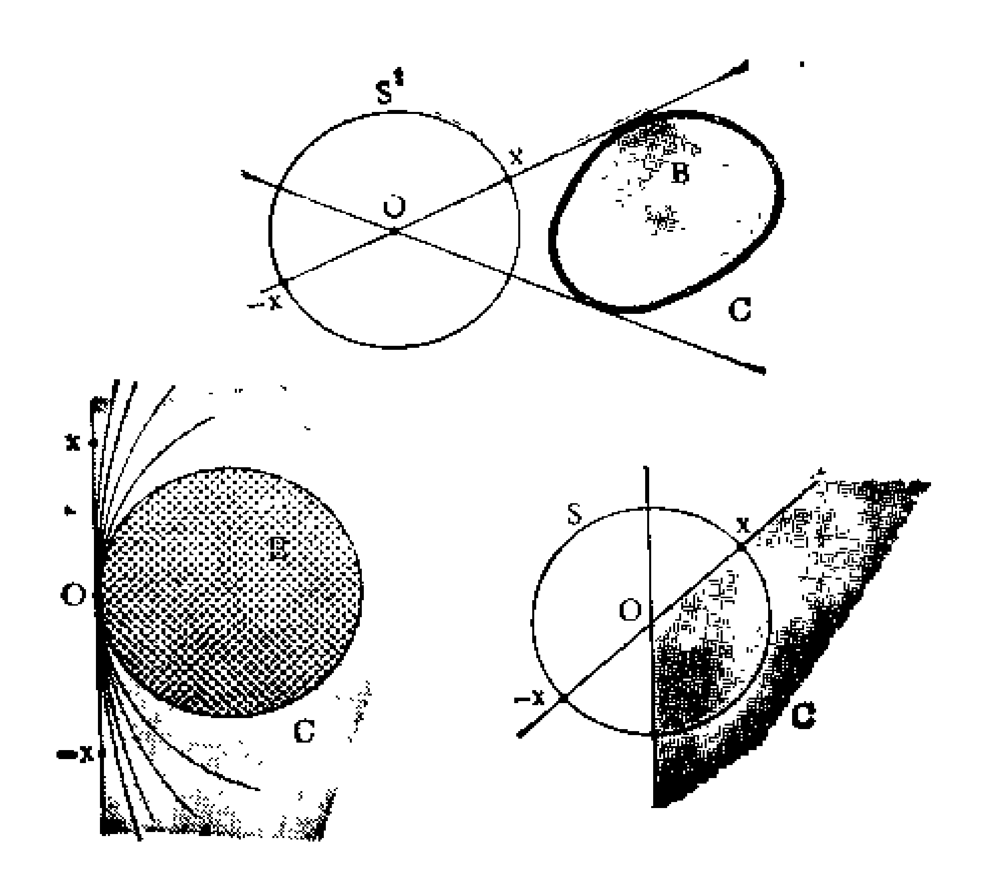
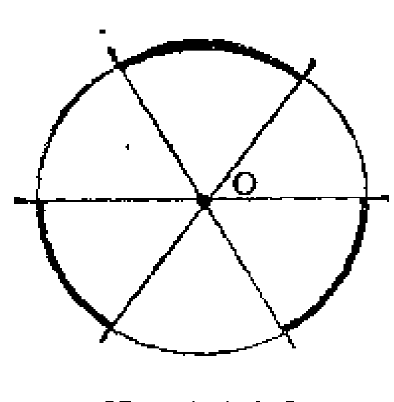


图 11.4.1.2.

O点并与B相交的向量半直线都在 Z 的单位圆 S^1 上截得一段弧，其中包含两个对映点，因为不然的话，连接这两个对映点的直线就会表明 $O\in B$. 因为B是凸集，截得的弧是连通的，故知其长度小于π，由此可知，一条直线是不可能与它相交的，矛盾. 现在，我们所要做的工作只不过是把上述想法写成严密的形式.

引入锥 $C=\bigcup_{\lambda>0}\lambda B$; 它是开的、凸的(证明是容易的，读者自证之)，$O\notin C$ (在图 11.4.1.2 的情形. B 是边界包含O点的开的圆盘，C是一个半平面!). 在 $Z\backslash O$ 内至少存在C的一个边界点 x (不然的话，$C\backslash O$ 就将整个是 $Z\backslash O$ 的一个连通分支——对于 $\mathbf{R}\backslash O$ 也是如此——然而由 $\dim Z=2$ 可知 $Z\backslash O$ 是连通的，参见 8.3.8). 因此由C是开的可知 $x\notin C$，但是又有 $-x\notin C$，这是因为否则可由 $-x\in\mathring{C}$ 和 $x\in\overline{C}$ 推出 $O\in\mathring{C}$，参见 11.2.4. 但现在通过 x 和 O 的直线整个在C的外面，当然在B的外面：这样就得出矛盾.



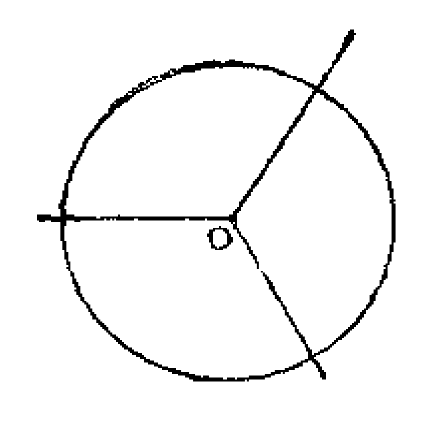


图 11.4.1.3.　　　　图 11.4.1.4.

11.4.2 Hahn-Banach 定理在泛函分析中有重要的应用，其关键乃是超平面和线性形式之间有着对应关系。例如参看 [LG 2] 第 186 页，[M-T] 第 23 页，[Bl 3] 第 65 页。

我们下面只考虑 Hahn-Banach 定理的"几何"应用。

11.4.3 定义. 设 X 是一仿射空间，A 和 B 是 X 的两个子集，H 是一个超平面。我们称 H 分离 A 和 B，意指 A 在由 H 所决定的一个半空间内，而 B 在另一个半空间内。如果上述的半空间均是开的，则称 H 严格分离 A 和 B。

11.4.4 推论. 设 A，B 是仿射空间 X 内两个非空凸集，A 是开的，且 $A\cap B=\emptyset$，则存在一个超平面分离 A 和 B。

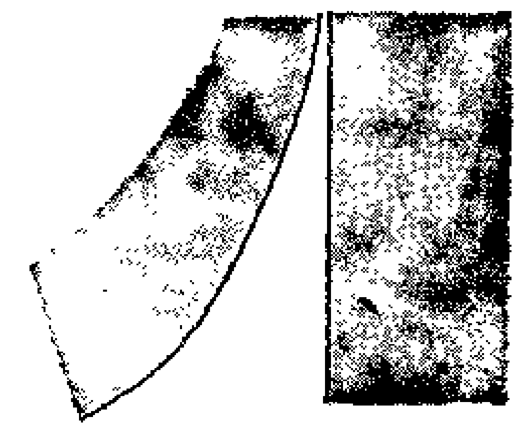


图 11.4.5.

向量化 X，并应用 11.1.3.1 于 $C=A-B$；则可得到一个凸集，它是开的（作为开集的并集），且因 $A\cap B=\emptyset$，故 $0\notin C$。再应用 11.4.1 于 C 和仿射子空间 $\{0\}$ 即可。

因为 H 是由它决定的每一个半空间的边界，可见有：

11.4.5 推论. 设在一个仿射空间内有两个非空、不相交的开凸集，则存在一个超平面把它们严格分离。

对于两个闭集，这个推论是不成立的，图 11.4.5 说明了这一点。相反地，如果两个闭集中有一个是紧的，则有：

11.4.6 推论. 如果 A 和 B 是两个凸集，A 是非空闭集，B 是紧集，且 $A\cap B=\emptyset$，则存在一个超平面把它们严格分离.

事实上，利用一般拓扑学可证：存在一个开球 $U(a,\varepsilon)$，$\varepsilon>0$，使得 $(A+U(a,\varepsilon))\cap(B+U(a,\varepsilon))=\emptyset$；而后面两个集合满足 11.4.5 中的假设条件.

对于一般的两个闭凸集，仅仅有：

11.4.7 推论. 若 A，C 是两个非空、不相交的闭凸集，则存在一个超平面把它们分离.

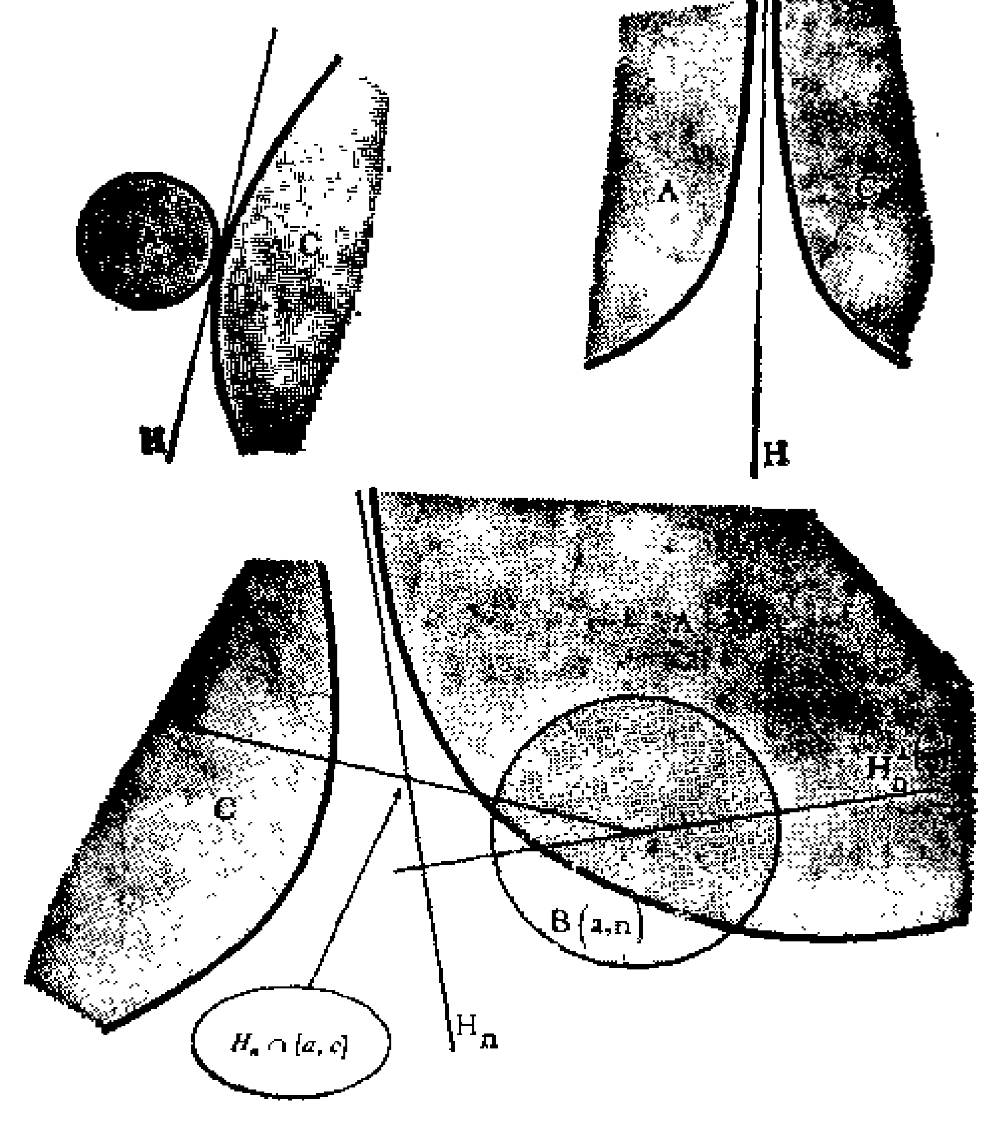


图 11.4.7.

为了便于讨论，在仿射空间上放上一个欧几里得结构. 设 $a \in A$，引入闭球 $B(a, n)$，$n \in \mathbf{N}$. 根据假设，对于任意的 n，两个凸集 $A \cap B(a, n)$ 和 C 满足 11.4.6 中的假设条件；设 H_n 是分离这两个凸集的超平面. 只要证明能从序列 H_n 中抽出一个子序列收敛于一个超平面就够了. 首先，我们能找到一个子序列，其正交方向是收敛的，这是因为空间中过 a 的直线的投影是紧的（参见 4.4.3）；于是只要找出一个子序列的子序列收敛就行了. 然而若 $c \in C$ 是任意一点，由于 $[a, c]$ 是紧的，点列 $H_n \cap [a, c]$ 即为所求的子序列.

现在，我们可以研究 11.1.5 中引入的 $*$ 运算了：

11.4.8 命题. 设 X 是以 0 为原点的欧几里得向量空间.

(i) 如果 A 是有界的，则 $0 \in \mathring{\widehat{A^*}}$；如果 $0 \in \mathring{A}$，则 A^* 是有界的；

(ii) 如果 A 是含 0 点的一个凸闭集，则 $A^{**} = A$.

事实上，若对 $r > 0$ 有 $A \subset B(0, r)$，则 $A^* \supset (B(0, r))^* = B(0, r^{-1})$. 同样，如果存在 $r > 0$，使得 $B(0, r) \subset A$，则 $A^* \subset (B(0, r))^* = B(0, r^{-1})$. 现在，设 A 是含 0 点的闭凸集；首先，由定义 11.1.5.1 有 $A \subset A^{**}$. 设 $a \notin A$；则根据 11.4.6 存在一个超平面 H 严格分离 A 和 a，尤其有 $0 \notin H$. 设 h 是 H 的极点（参见 10.7.11），即 $H = \{z \in X: (z|h) = 1\}$；则 $\forall x \in A$，有 $(a|h) > 1$ 以及 $(x|h) \leqslant 1$，因此 $a \notin A^{**}$，即 $A^{**} \subset A$.

11.5 支撑超平面；应用

A 是凸集、$B = \{x\}$ 且 $x \in A$ 的情形，是一种重要的分离的情形，由它引出下述定义：

11.5.1 定义. 设 A 是仿射空间 X 的任意一个子集. 若 H 是任意一个含点 $x \in A$ 的超平面，而且 H 分离 $\{x\}$ 和 A，则称 H 是 A 的支撑超平面. H 也称为 A 在点 x 处的支撑超平面.

据 11.4.5 前的论述，如果 H 是凸集 A 的一个支撑超平面，则

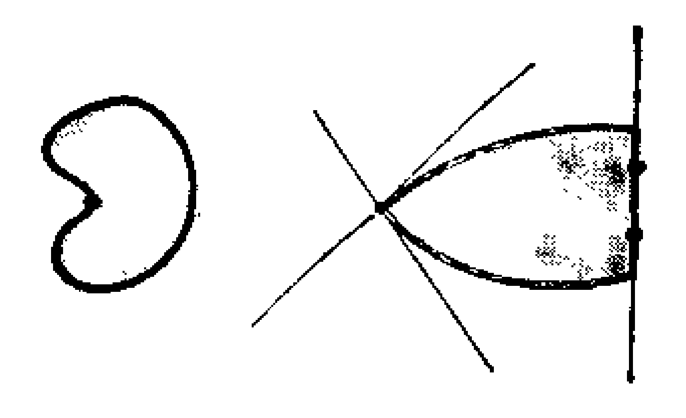


图 11.5.1.

$H\cap\mathring{A}=\emptyset$;另一方面，如果$H$是点$x$处的支撑超平面，则必有$x\in \mathrm{Fr}\, A$.

上述诸图形表明：在一点x处的支撑超平面并不一定存在；也可能不是唯一的，也可能支撑点不止一个．对此在11.6中将进一步阐明。

11.5.2 命题. 设A是一个闭凸集，则经过A的边界上的每一点，有一个在该点处的支撑超平面。

事实上，如果$x\in \mathrm{Fr}\, A$，则$\{x\}\cap\mathring{A}=\emptyset$;对$L=\{x\}$应用定理11.4.1即可。

可以证明,在$\mathrm{Fr}\, A$和支撑超平面上的点之间,有一个11.1.5.1中引进的配极对偶关系。

11.5.3 命题. 设X是以O为原点的欧几里得向量空间．A是一个闭凸集,且$O\in\mathring{A}$,则$\mathrm{Fr}\, A$上点的所有配极超平面构成A^*的支撑超平面集合．此外,如果$x\in \mathrm{Fr}\, A$以H作为配极超平面,则H的支撑点全体就是A在点x处支撑超平面的极点集合．

设$x\in \mathrm{Fr}\, A$．根据定义11.1.5.1，A^*被包含在由H决定的半空间内,这里H是x的配极超平面(参见10.7.11)．同样，如果T是A在点x处的一个支撑超平面，且p是它的极点，则有$p\in H$(参见10.7.11)，且因$A^{**}=A$以及A落在由T决定的含O点的半空间内,故$p\in A^*$．因此,H是A^*在点p处的一个支撑超平面．因为$A^{**}=A$，这样我们就得到了A^*的所有的支撑超平面。

现在,我们可以将11.1.7.4中的说明补充完整了：

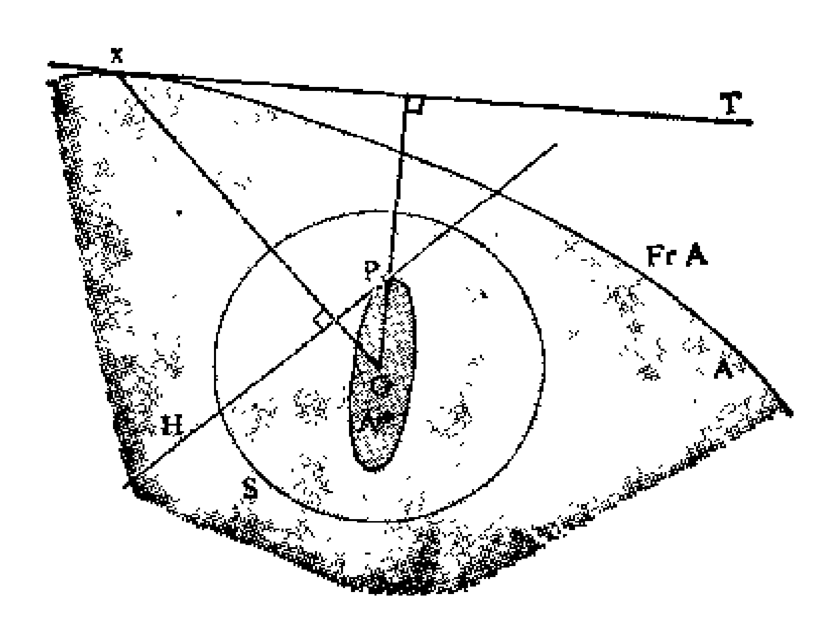


图 11.5.3.

11.5.4 命题. 设 A 是一个内部非空的闭集. 如果 A 的边界上每一点具有一个支撑超平面,则 A 是一个凸集.

采用反证法. 设 $x\in \mathring{A}$, y, $z\in A$, 并且 $t\in[y, z]$ 但 $t\notin A$. 既然 $t\notin A$ 且 $x\in \mathring{A}$, 线段 $[x, t]$ 和 $\mathrm{Fr}\, A$ 至少相交于一点 $u\in]x, t[$, 设 H 是 A 在点 u 处的一个支撑超平面; 则它在由 x, y, z 所生成的仿射平面上的迹线是过 u 点的一条直线. 而过 u 点的任意一条直线总在三角形 $\{x, y, z\}$ 的内部,因而严格地分离了 x 和 y 或严格地分离了 x 和 z.

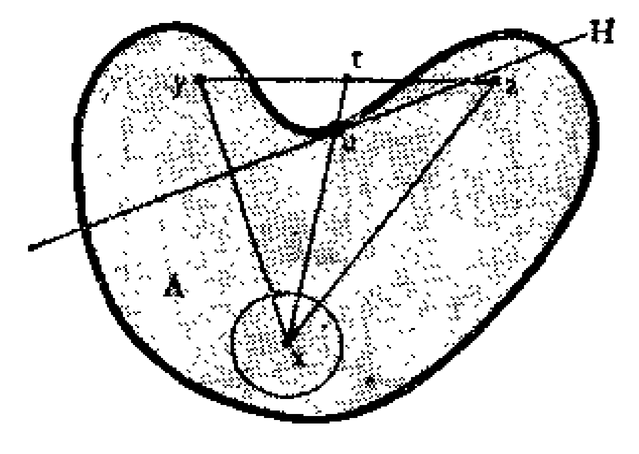


图 11.5.4.

内部非空这一条件是重要的: 参看图 11.5.5. 请把此证法同 [B-G] 第 358 页中的直接证法比较一下.

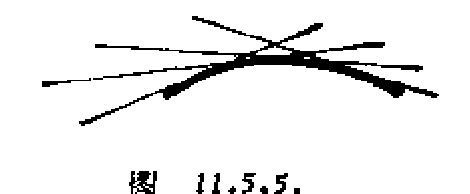


图 11.5.5.

现在,我们能够兑现 11.1.7.4 中的说法了:

11.5.5 命题. 设 A 是一个凸闭集;则 A 是所有包含 A 的闭半空间

的交集.

设 $\mathscr{E}'(A)$ 是此交集：它是含 A 的一个闭凸集(参见 11.1.2.7). 设 $x\in\mathscr{E}'(A)\setminus A$, 对 A 和 $B=\{x\}$ 应用 11.4.6 即得出矛盾.

11.5.6 注. 有一个比 Hahn-Banach 定理更初等的方法，揭示了 A 中子集的支撑超平面的性状，而且其中 A 是凸的或非凸的:

11.5.6.1 设 A 是 X 的一个紧集，V 是 X 的一个超平面方向(参见 2.4.1)，则至少存在一个与 V 平行的 A 的支撑超平面.

事实上，设 $p: X\rightarrow X/V$ 是 X 在商空间 X/V 上的投影(参见 2.2.4)，则 $p(A)$ 是仿射直线 X/V 上的一个紧集. 如果 α 和 β 是它们的边界(可能重合)，$p^{-1}(\alpha)$, $p^{-1}(\beta)$ 是与 V 平行的超平面，并且它们是 $p^{-1}(\alpha)\cap A$ 或 $p^{-1}(\beta)\cap B$ 中任一点处的支撑超平面.

11.5.6.2 此证明还表明：如果 $\mathring{A}=\emptyset$，则至少存在两个这样的超平面. 相反，如果 A 是闭的、非紧的，则这样的超平面可能不存在：见图 11.5.6.2.

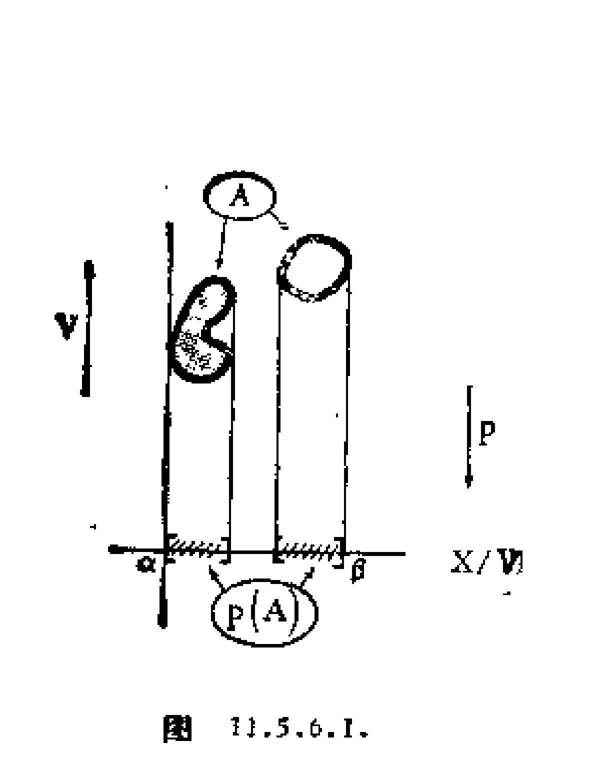


图 11.5.6.1.

图 11.5.6.2.

11.5.6.3 如果 X 还是欧几里得空间，则 X/V 有一个自然的欧几里得结构，紧集 $p(A)$ 的长度(即直径)称为在直线 $\xi=V^{\perp}$ 方

向上的 A 的宽度，记作 $\mathrm{larg}_\xi A$。常宽度的凸集已成为许多研究工作的主要对象；在这方面有好多未曾解决的问题，即使对于二维的情形也是如此。在 12.10.5 里我们将计算一条常宽度曲线的长度；有关图形和参考文献可参看该节。

11.5.6.4 同支撑超平面有联系的另一个概念是支撑函数：看 11.8.12.3。

11.5.7 凸性的概念可使我们对欧几里得空间中"包含一个已给紧集的最小球"问题给予确切的说明。

11.5.8 定理 (Jung). 设 A 是 d 维欧几里得仿射空间 X 的一个紧集。则 A 被包含在唯一的一个半径最小的球内。此外，如果此球的中心为 x，半径为 r，则有

(i) $r \leqslant \sqrt{\dfrac{d}{2(d+1)}} \cdot \mathrm{diam}(A)$,

此不等式是所有可能的估计中最好的结果。

(ii) $x \in \mathscr{E}(A \cap S(x, r))$.

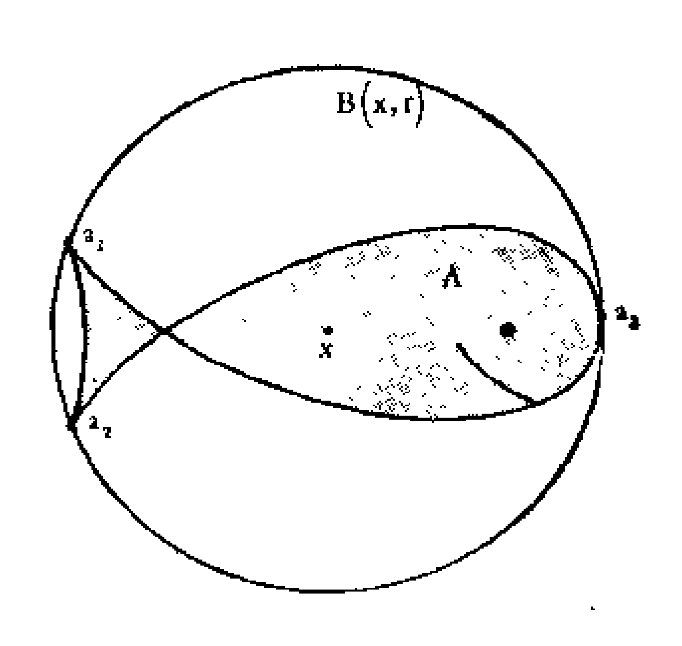


图 11.5.8.1.

对于任意的 $t \geqslant 0$，置 $Y_t = \{y \in X : B(y, t) \supset A\}$。因为 A 是有界的，所以 $T = \{t \in R : Y_t \neq \emptyset\} \neq \emptyset$。另外由 $t \leqslant t'$ 可推出

$Y_t \subset Y_{t'}$, 且 Y_t 紧致. 因为紧集的递减序列的交集是非空的(参见 0.4), 故若令 $r = \inf T$, 就有 $Y_r = \bigcap\limits_{t>r} Y_t \neq \emptyset$.

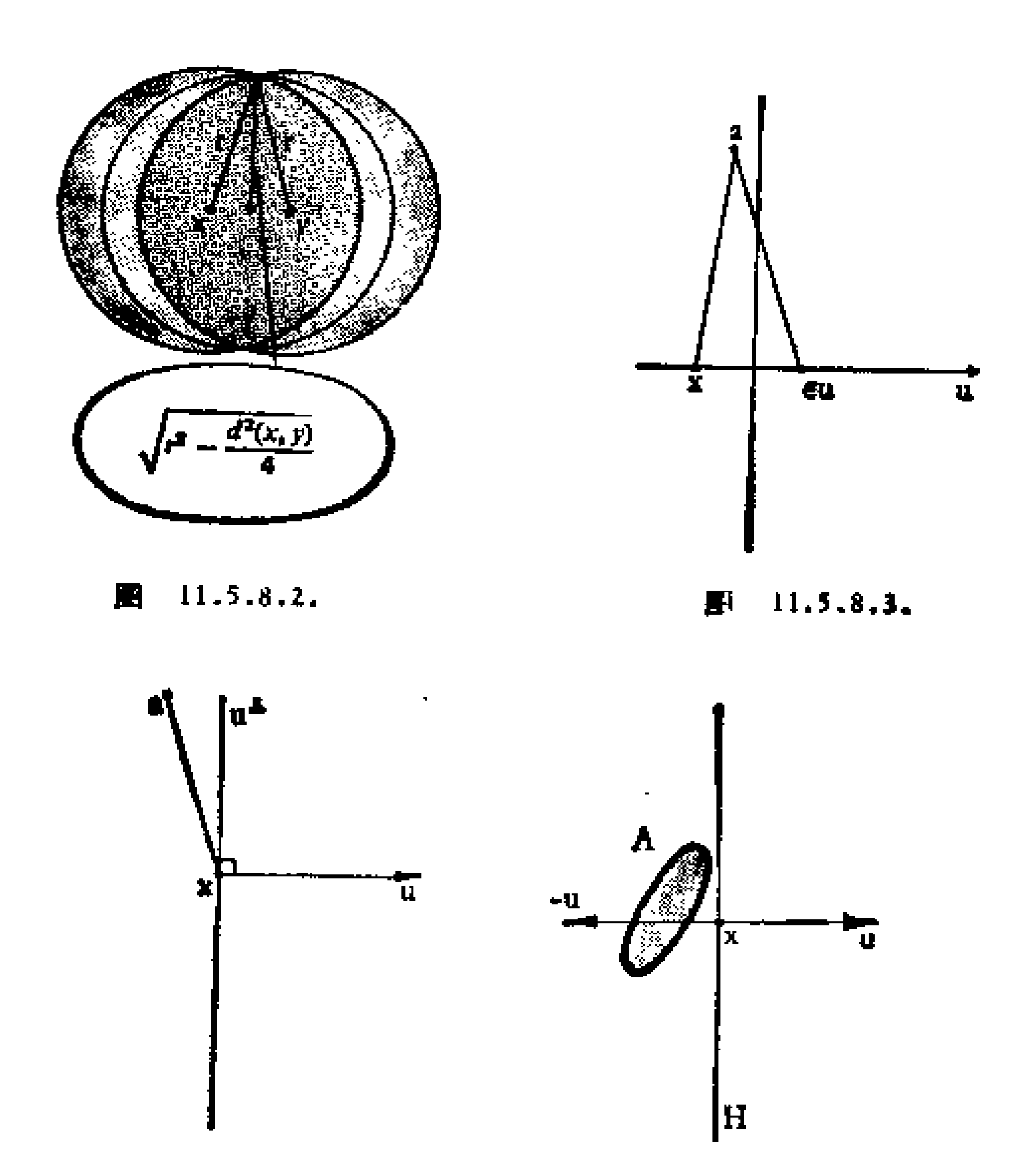


图 11.5.8.2.

图 11.5.8.3.

图 11.5.8.4.

如果 $x, y \in Y_r$, 且 $x \neq y$, 则产生矛盾(图 11.5.7.1):

$\sqrt{r^2-\frac{\overline{xy}^2}{4}} < r$, 同时 $\sqrt{r^2-\frac{\overline{xy}^2}{4}} \in T$; 于是, $Y_r = \{x\}$.

现在还须证明 (i) 和 (ii). 为了进行这一工作, 在 x 处向量化 X. 设 $u \in S(x,1)$, $\varepsilon > 0$ 任意; 根据 x 和 r 的定义,我们有:

$$\exists\ a \in A \mid d(x,a) \leqslant r < d(a, \varepsilon u).$$

因为 A 是紧的，令 $\varepsilon \to 0$ 并求极限，则对任意的 $u \in S(0,1)$ 可找到一点 $a \in A$，使得 $(a|u) \leqslant 0$ 和 $d(x,a) = r$。由此即推得 (ii)，因为，如果 $x \notin \mathscr{E}(A \cap S(x,r))$，则将存在一个超平面 H 严格分离 x 和 $A \cap S(x,r)$（应用 11.4.6），而把前述结果同时应用于 u 和 $-u$ 有：

$$\{u\} \cup \{-u\} = S(x,1) \cap H^{\perp}，得出矛盾。$$

为了证明 (i)，我们利用 Carathéodory 定理 11.1.8.6：

$$x = \sum_i \lambda_i a_i, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1, \quad (a_i)_{i=1,\cdots,d+1} \subset S(x,r) \cap A.$$

特别，对于任意的 $i \neq j$，$d(a_i, a_j) \leqslant \delta = \operatorname{diam}(A)$。

首先固定一个 i：$1 - \sum_{j \neq i} \lambda_j = \lambda_i$，则因 $d(a_i, a_i) = 0$ 就有

$$(1-\lambda_i)\delta^2 \geqslant \sum_{j \neq i} \lambda_j d^2(a_i, a_j) = \sum_j \lambda_j d^2(a_i, a_j)1$$

然而，

$$d^2(a_i, a_j) = \|a_i\|^2 + \|a_j\|^2 - 2(a_i|a_j) \geqslant 2r^2 - 2(a_i|a_j),$$

由此推出：

$$(1-\lambda_i)\delta^2 \geqslant \left(\sum_j \lambda_j\right) 2r^2 - 2\left(a_i \middle| \sum_j \lambda_j a_j\right) = 2r^2 - 2(a_i|x) =$$

$2r^2$（因为在 x 处的向量化空间 X 中有 $x = 0$）。对 i 从 1 到 $d+1$ 求和，得 $\sum_i (1-\lambda_i)\delta^2 = d \cdot \delta^2 \geqslant 2(d+1)r^2$，(i) 得证。仅当对任意 $i \neq j$，$d(a_i, a_j) = \delta$ 成立时，才能取等号。对在 $\mathbf{R}^{d+1}$ 中 d 维超平面：$\sum_i \lambda_i = 1$ 上考虑的正则单形 $S_d = \left\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_{d+1}) \in \mathbf{R}^{d+1} : \lambda_i \geqslant 0 \, \forall i, \sum_i \lambda_i = 1\right\}$（参见 12.1.2.5），则等号总是成立的。

11.5.9 附注

11.5.9.1 定理 11.5.8 还提供了正则单形 S_d 外接球面的半径的计算法（参见 9.7.3.7）。也可参看 11.9.18。

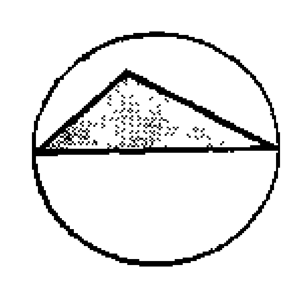
11.5.9.2 除正则单形外，(i) 中等式对其它的 A 也可能成立，

例如 Reuleaux 三角形：图 12.10.5.1。

11.5.9.3 值得注意：与 A 典范相连的点 x，一般来说与 A 的重心是不同的(参见 2.7.5.6)。

11.5.9.4 也要注意(图 11.5.9)有可能

$\#(S(x,r)\cap A)<d+1$ (即证明中的某些 a_i 可能是重合的)。



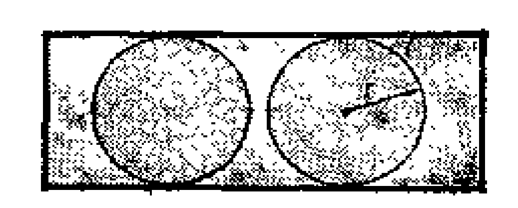


图 11.5.9.

11.5.9.5 我们也可以研究包含在已给紧集 A 内的半径最大的球：这时，可找到一个最大的半径，但是，不再是唯一的了。借助于 A 的最小宽度，对于这一最大半径同样可作出一个不等式：参见 11.9.12 或 [EN] 第 112 页。

11.5.9.6 也请参见 11.9.23。

11.6 凸集的边界，顶点，端点

现在，我们来研究一个凸集的不同类型的边界点。

11.6.1 定义. 设 A 是 X 的一个 d 维闭凸集，且 $x\in \operatorname{Fr} A$。所谓 x 的阶为 α，意即 A 在点 x 处的所有的支撑超平面的交集作为仿射子空间其维数为 α。若 x 的阶 $\alpha=0$，则称 x 是 A 的一个顶点；而若 $\alpha=d-1$ (即点 x 处的支撑超平面是唯一的)，则称 A 在点 x 处是光滑的。

图 11.6.1.1 表示一个圆；其上每一点都是光滑的，连顶点一个也没有。单形 11.6.1.2 具有阶数为 0，1，2 的边界点；更一般地，一个 d 维单形具有阶数为 0，1，…，$d-1$ 的边界点；任意一个多胞

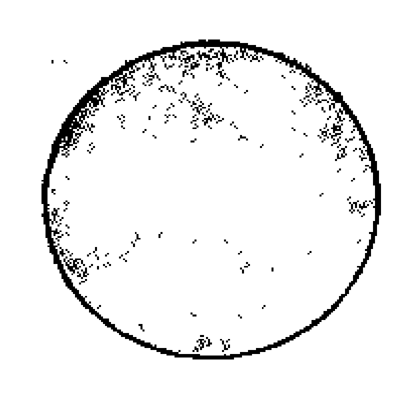


图 11.6.1.1.

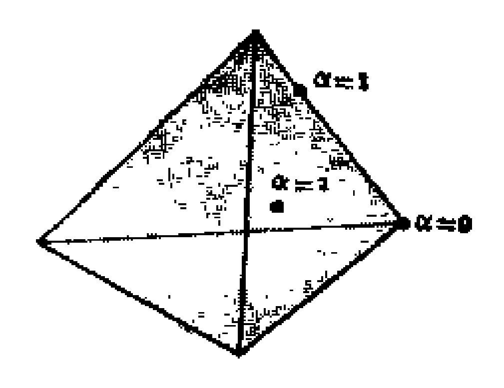


图 11.6.1.2.

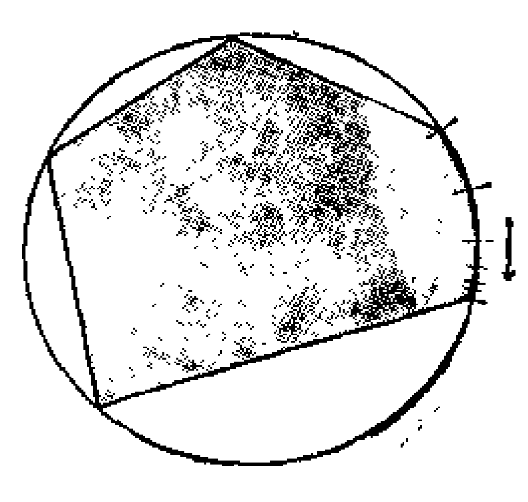


图 11.6.1.3.

形也是如此，参看 12.1.9。图 11.6.1.3 表示具有无限多个顶点的一个凸集。然而，一个凸集不可能有过多的顶点。

11.6.2 命题. 凸集的顶点总是可数的。

赋予 X 一个欧几里得结构。对于任意 $x\in \operatorname{Fr} A$，设 CN_x 是如下定义的 A 在点 x 处的法锥：CN_x 是自始点 x 引出的所有这样的半直线的并集，这些半直线同 A 在点 x 处的支撑超平面正交，并位于 A 所不在的超平面的那一边；换言之：

$$CN_x=\{y\in X:\ (\overrightarrow{xy}\,|\,\overrightarrow{xz})\leqslant 0\quad \forall z\in A\}.$$

如果 A 在点 x 处是光滑的，则锥 CN_x 缩成为一条半直线；否则，称 x 是一个顶点就等价于 $\overset{\circ}{\widehat{CN_x}}\neq\emptyset$。取定 $a\in X$，让 x 取遍 X 的所有顶点，将 CN_x 平移成以 a 为顶点的 CN'_x。由 A 的凸性推知

$\forall x \neq y\ \overset{\circ}{\widehat{CN}}_x \cap \overset{\circ}{\widehat{CN}}_y = \emptyset$；事实上，不然的话将存在 $z \in X$，使得三角形 xyz 在 x 处和 y 处的角度为锐角：$(\overrightarrow{xy}|\overrightarrow{xz}) > 0$ 和 $(\overrightarrow{yx}|\overrightarrow{yz}) > 0$，与法锥的定义矛盾。

由古典知识可知，CN'_x 是可数多个（因为在 X 内放上一个可数点集，它在 X 内是处处稠密的）。

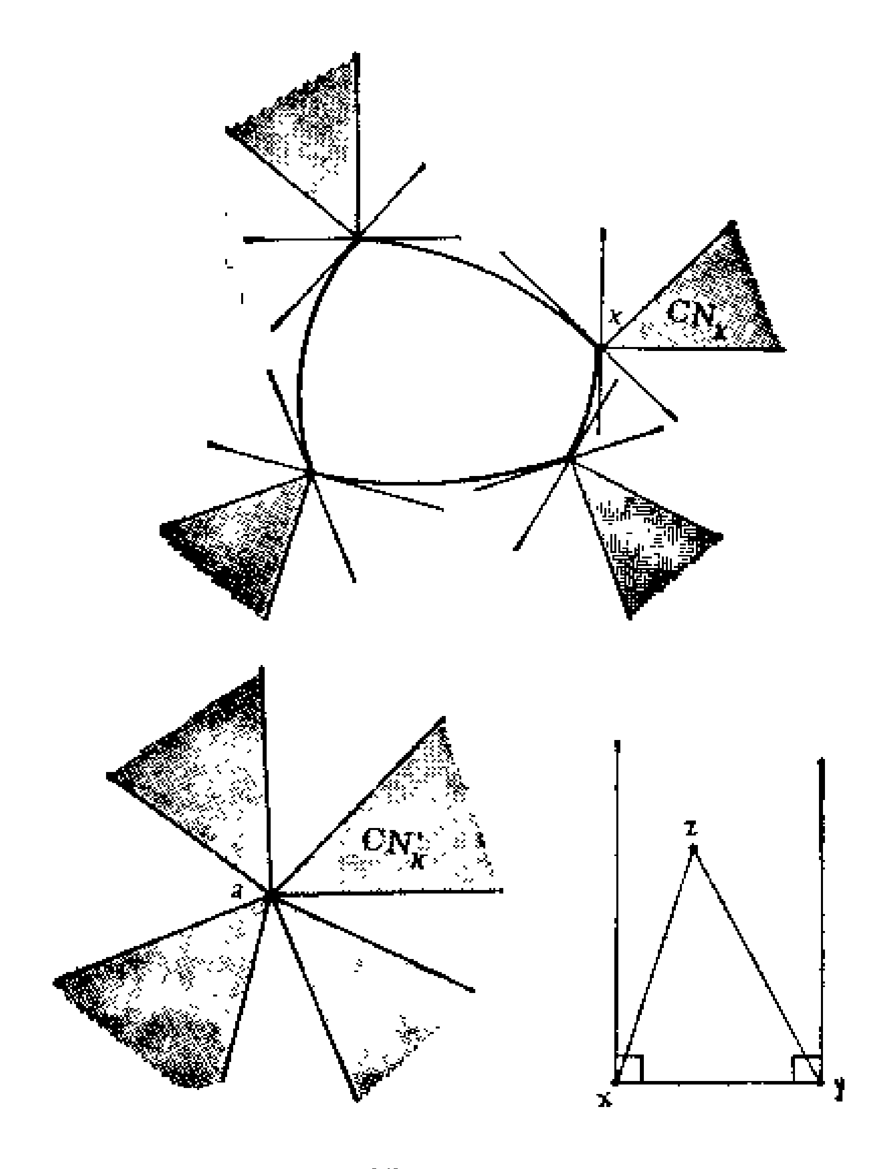


图 11.6.2.

11.6.3 关于顶点有一个更细致的定理，参看 [VE] 第 136 页。

11.6.4 **定义.** 设 A 是一凸集，$x \in \mathrm{Fr}\, A$。若在点 x 处存在一个支撑超平面 H，使得 $H \cap A = \{x\}$，则称 x 是暴露点。若由 $y, z \in A$，

$x=\frac{y+z}{2}$ 总有 $y=z$，则称点 x 为端点。如果一个凸集的所有的边界点均是暴露点，则称此凸集为严格的凸集。

11.6.5 附注

11.6.5.1 顶点必是端点，但反之不然（图 11.6.5.1）；然而在 12.1.9 中将可看到，对于多面体两者是一致的。

11.6.5.2 暴露点必是端点，但反之不然（图 11.6.5.2）。

11.6.5.3 全体端点所成的集合未必是闭的：图 11.6.5.3。然而，$d=2$ 时，结论为真，参见练习 11.9.8。

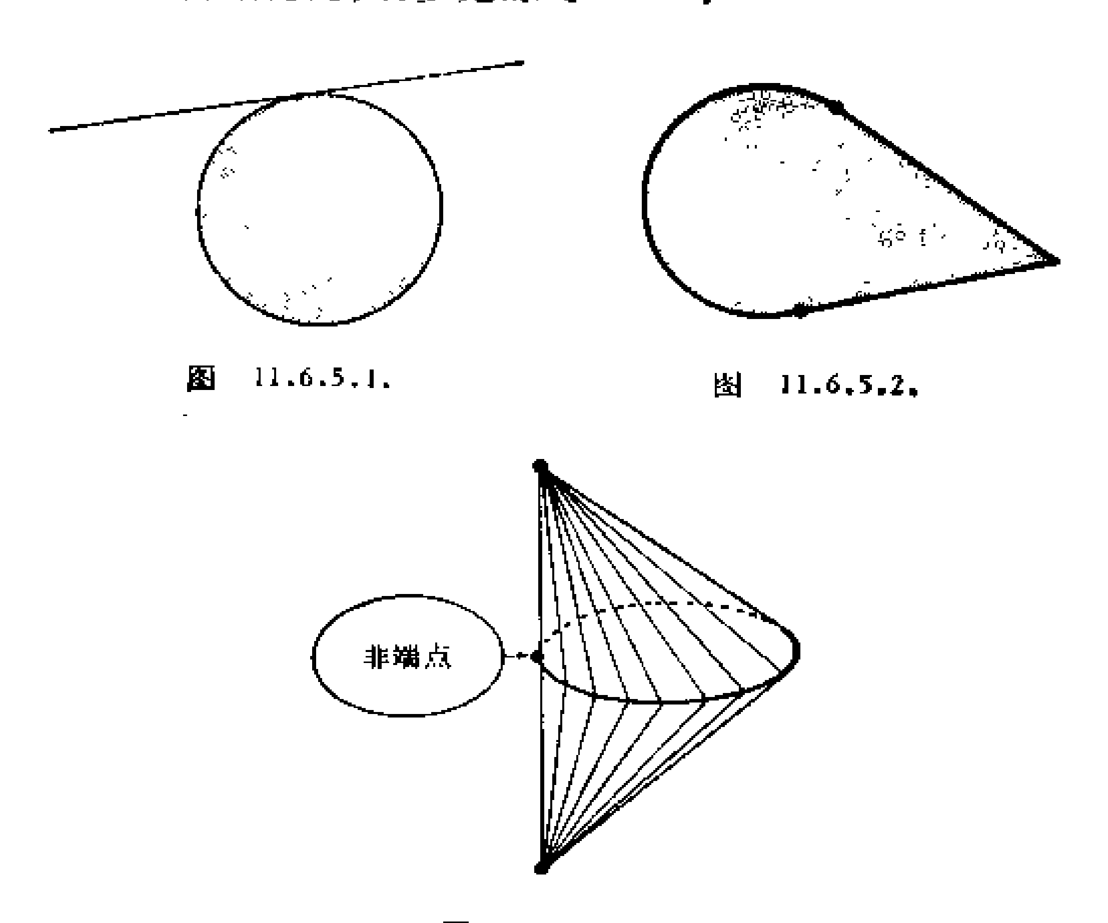


图 11.6.5.1.

图 11.6.5.2.

图 11.6.5.3.

11.6.5.4 设 $x\in \operatorname{Fr} A$，且 x 是端点。则 x 是一端点等价于 $A\setminus x$ 仍是凸集：参见图 11.1.1.7 和 11.1.1.8。

11.6.5.5 端点的一个应用为 11.8.10.9。

11.6.6 例子

11.6.6.1 一个紧区间的端点就是它作为区间的端点。

11.6.6.2 在测度论里，端点起重要的作用(其实，在那里涉及的是无限维空间，参见 [DE 4]，第 147 页问题 8。

11.6.6.3 在应用数学里也会遇到端点。例如，双随机矩阵全体构成一个凸集，此凸集的端点为置换矩阵；参见 11.9.7 和 [KE] 第 21 章或者 [R-V] 第 V 章应用部分。

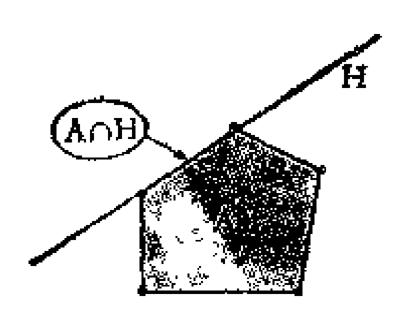


图 11.6.8.

11.6.7 现在我们可以回答从 11.1.8.5 开始期待已久的问题了，这就是：

11.6.8 定理 (Krein 和 Milman)。 一个紧凸集是其端点的凸包络。

用 Extrem(.) 表示一个凸集所有端点的集合。易见，对于 A 的任一支撑超平面 H，由定义 11.6.4 可推出 $\operatorname{Extrem}(A\cap H)=(\operatorname{Extrem}(A))\cap H$。下面对 X 的维数 d 用归纳法证明 11.6.8。当 $d=1$ 时，从 11.6.6.1 即可推出定理。现设定理对 $d-1$ 成立。根据 11.2.9，从 $\operatorname{Fr} A\subset\mathscr{E}(\operatorname{Extrem}(A))$ 可断言 $A=\mathscr{E}(\operatorname{Extrem}(A))$。设 $x\in\operatorname{Fr} A$，并且 H 是 A 在点 x 处的一个支撑超平面 (参见 11.5.2)；则 $A\cap H$ 是 H 的一个凸集，于是，由归纳假设：

$$x\in H\cap A=\mathscr{E}(\operatorname{Extrem}(A\cap H))=\mathscr{E}(\operatorname{Extrem}(A)\cap H)$$
$$=\mathscr{E}(\operatorname{Extrem}(A))\cap H\subset\mathscr{E}(\operatorname{Extrem}(A)).$$

11.6.9 有关边界点的其它结果，可看 [VE]，第 138—139 页。

11.7 Helly 定理及其应用

下述的 Helly 定理几何性很强，它有好些相当了不起的应用。饶有兴味的是，我们可以注意到，这个 Helly 定理提出的日期相对来说是很近的：1921 年，而 Krasnosel'skii 定理则还要近：1946 年。

11.7.1 定理 (Helly)。 设 X 是一个 d 维仿射空间。$\mathscr{F}$ 是 X 的一个基数大于 $d+1$ 的凸集族。如果 $\mathscr{F}$ 满足下述两个条件：

(i) $\mathscr{F}$ 的任意 $d+1$ 个元素所成的子族，其交集是非空的；

(ii) $\mathscr{F}$ 的所有元素是紧的或者 $\mathscr{F}$ 是有限的，则整个族 $\mathscr{F}$ 其交集是非空的。

11.7.2 注

凸集的条件是必不可少的：参看图 11.7.2.1. 条件 (i) 中的 $d+1$ 是所有可能情况中最好的结果：参看图 11.7.2.2 和 11.7.2.3. 条件 (ii) 也是必要的：不然的话，可取 $\mathscr{F}=\{[n,\infty[;\ n\in\mathbf{N}\}$.

最后，我们注意到 11.7.1 是一个构造性的定理。

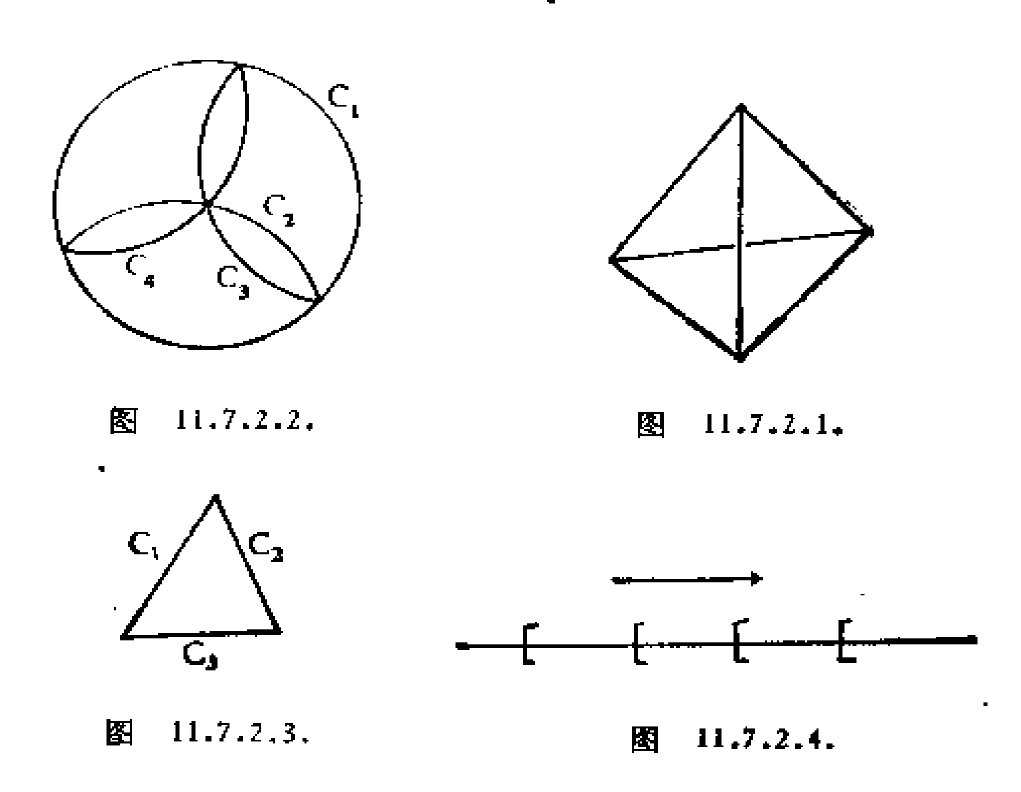


图 11.7.2.2.　图 11.7.2.1.

图 11.7.2.3.　图 11.7.2.4.

11.7.3.1 第一种情形：$\mathscr{F}$ 是有限的，并且 $\mathscr{F}$ 的所有的元素是紧集。

通过初等集合论的论证，问题可以归结为对 $\#\mathscr{F}=d+2$ 情形的讨论。下面我们对 $d=\dim X$ 用归纳法证明。当 $d=0$ 时，定理是显然的。设 $\mathscr{F}=\{C_1,\cdots,C_{d+2}\}$ 并利用反证法：假定 $\bigcap_{i=1}^{d+2}C_i=\emptyset$；则必要时通过对 $\mathscr{F}$ 作重新编号，总可假定

$$A=C_1\cap\cdots\cap C_{d+1}\neq\emptyset,\ \text{而}\ A\cap C_{d+2}=\emptyset.$$

设超平面 H 严格分离 A 和 C_{d+2}（参见 11.4.6），考虑 H 的 $d+1$ 个子集 $H\cap C_1,\cdots,H\cap C_{d+1}$；它们中的 $d-1$ 个总是满足 (i) 的，

这是因为 $C_1, \cdots, C_{d+1}$ 中任意 d 个将同 C_{d+2} 有非空的交集(根据对 $\mathscr{F}$ 的条件 (i)),因而同集合 A 也有非空交集，于是利用凸性可知同 H 也是如此。根据归纳假设，就有 $H \cap C_1 \cap \cdots \cap C_{d+1} \neq \emptyset$，这同 H 的选取矛盾。

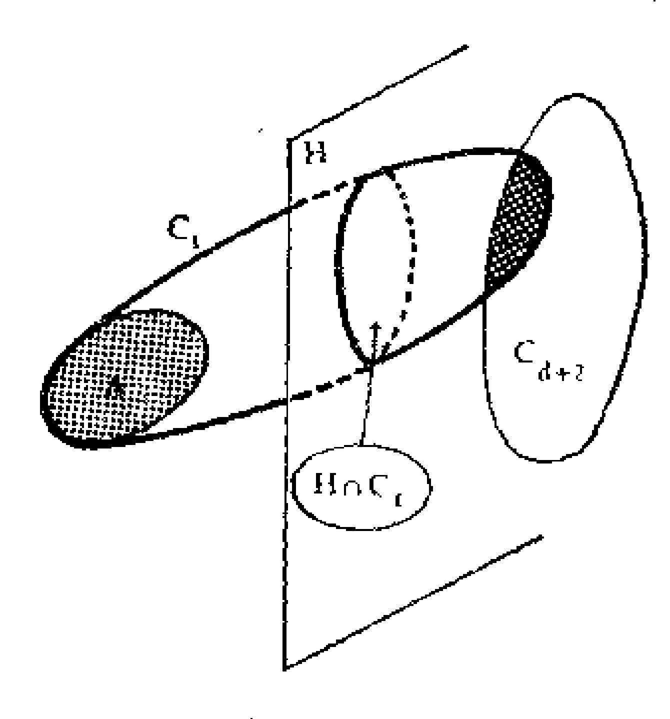


图 11.7.3.1.

11.7.3.2 第二种情形： $\mathscr{F}$ 不一定是有限的，但 $\mathscr{F}$ 的所有的元素是紧集. 根据 11.7.3.1 可知：$\mathscr{F}$ 的任意一个有限子族其交集非空；根据一般拓扑学的经典结论，由此可推出 $\mathscr{F}$ 本身的交集是非空的. 我们不妨回想一下其论证过程：用反证法，假设 $\forall x \in F_1$，$\exists F_x \in \mathscr{F}$ 使得 $x \notin F_x$，则 $\exists U_x \in O_x(X)$，使得 $U_x \cap F_x = \emptyset$. 然而，由紧性，可用有限个 $U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}$ 覆盖 F_1，与 $F_1 \cap F_{x_1} \cap \cdots \cap F_{x_n} \neq \emptyset$ 矛盾.

11.7.3.3 第三种情形： $\mathscr{F}$ 中的元素不一定是紧集，但 $\mathscr{F}$ 是有限的.

如同 11.7.3.1 中开头所述，可归结为 $\# \mathscr{F} = d + 2$ 的情况加以讨论. 于是，设 $\mathscr{F} = \{C_1, \cdots, C_{d+2}\}$ 使其任意 $d + 1$ 个元素构成的子族的交集是非空的. 我们要构作紧集 $K_i \subset C_i$ $(i = 1, \cdots, d + 2)$，使得任意 $d + 1$ 个元素构成的子族其交集仍是非

空的；这样，从 11.7.3.1 即可推得定理成立。今构作 K_1 如下：依假设存在 $p_i\in\bigcap_{j\neq i} C_j\ (i=2,\cdots,d+2)$；置 $K_1=\mathscr{E}(p_2,\cdots,p_{d+2})$。这样 $K_1\subset C_1$，并且族 $\{K_1,C_2,\cdots,C_{d+2}\}$ 仍满足 (i)，这是因为对于任意的 $i=2,\cdots,d+2$，$K_1\cap\bigcap_{\substack{j\geq 2\\ j\neq i}} C_j\ni p_i$。然后，按同样的方式构作 $K_2,\cdots$。

11.7.4 注

11.7.4.1 对第三种情形，Radon 有一种证明，是以线性代数作为基础的：参见 11.9.11。

11.7.4.2 在 Helly 定理和 Carathéodory 定理之间（参见 11.1.8.6）存在着密切的联系：参见 [EN] 第 39 页和 [VE] 第 72—73 页上 Helly 定理的第三种证明。

11.7.5 推论. 设在一个仿射平面 X 内，族 $\mathscr{F}$ 由有限个平行线段组成，并且每三个线段具有一条共同的割线，则整个族 $\mathscr{F}$ 具有一条共同的割线。

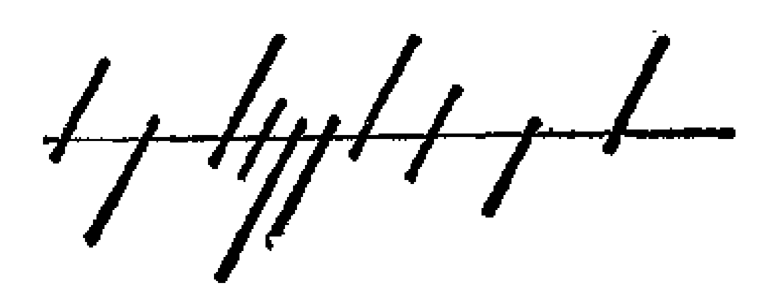


图 11.7.5.

下面我们排除每两条线段位于同一条直线上的情形：那时，$\mathscr{F}$ 中所有的线段将位于同一条直线上，结论成立。如果不是这样的情况，在 X 内选取坐标系，使得 Oy 轴是这些线段的公共方向；对于一条线段 $S\in\mathscr{F}$，置 $S'=\{(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$：直线 $y=\alpha x+\beta$ 与 S 相交$\}$。下面验证 S' 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个凸集。根据假设条件每三个 S' 具有一个公共点，因而它们有一个非空的交集，从而 $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$ 决定了一条直线 $y=\alpha x+\beta$，它同 $\mathscr{F}$ 中每一个元素 S 相交。

下述推论表明，d 维仿射空间中的紧凸集至多对 d 缺乏对称性。当 $d=1$ 时，任意一个线段是关于它的中心对称的。有关其它的类似结果，例如可看练习 12.12.21 或 [VE] 第 190 页命题 12.5。尤其是令人惊叹的 Dvoretsky 结论断言：对于适当的维数，一个凸集总具有几乎是球面的截面（见 Some results on convex bodies and Banach spaces, Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, p.123—160, Jerusalem 1961）。

11.7.6 推论. 对于 d 维仿射空间 X 的任意一个紧凸集 A，至少存在一点 $z\in A$，使得 A 中过 z 的任意一条弦 $[u, v]$（参见 11.2.9 和 2.4.6）满足

$$\frac{1}{d} \leqslant \frac{\overrightarrow{zu}}{\overrightarrow{vz}} \leqslant d.$$

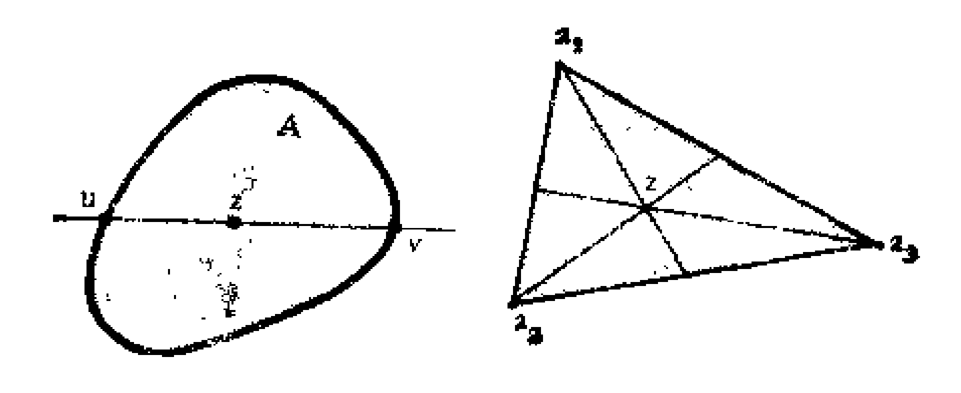


图 11.7.6.1.

首先，我们注意到 d 是所有可能的情形下最好的界，以任意一个单形为例即可说明这一点，对于这样的单形，读者可验证存在唯一的这样的 z，即此单形的重心。

为了证明 11.7.6，对于任意的 $x\in A$，引入（与 11.1.3 比较）：

$$A_x = \frac{1}{d+1}\cdot x + \frac{d}{d+1}\cdot A,$$

它就是位似 $H_{x,d/d+1}(A)$（参见 2.3.3.8）。这些 A_x，$x\in A$ 满足 Helly 定理的假设条件，且此时每一个集合都是紧的：事实上，设

$\{x_i\}_{i=1,\cdots,d+1}\subset A$，并且其重心为 $y=\frac{1}{d+1}\sum_i x_i$。

对于任意的 $i=1,\cdots,d+1$，因为 A 是凸集，故有

$$y=\frac{1}{d+1}\cdot x_i+\frac{d}{d+1}\left[\sum_{j\neq i}\left(\frac{1}{d}x_j\right)\right]\in A_x$$

(参见 11.1.8.4)。因而设 $z\in\bigcap_{x\in A}A_x$，并且 $[u,v]$ 是过 z 的一条弦；由 $z\in A_u$ 即可推出 $z\in H_{u,d/d+1}([u,v])$。于是 $\frac{\overrightarrow{uz}}{\overrightarrow{uv}}\leqslant\frac{d}{d+1}$，由此推出 $\frac{\overrightarrow{zu}}{\overrightarrow{vz}}\leqslant d$。交换 u 和 v，即推得结论。

下面推论表明：例如，对于平面的情况，设对一个博物馆里的任意三幅画，一位参观者总能找到一个地方，在那里能看到这三幅画，则他就能找到一个地方，在那里同时能看到这博物馆内所有的画(可能他得有很好的目力，或者有一个远距离镜头，不过他可以坐在那儿了)。当然，此推论是判定一个集合是星形集的判定准则。

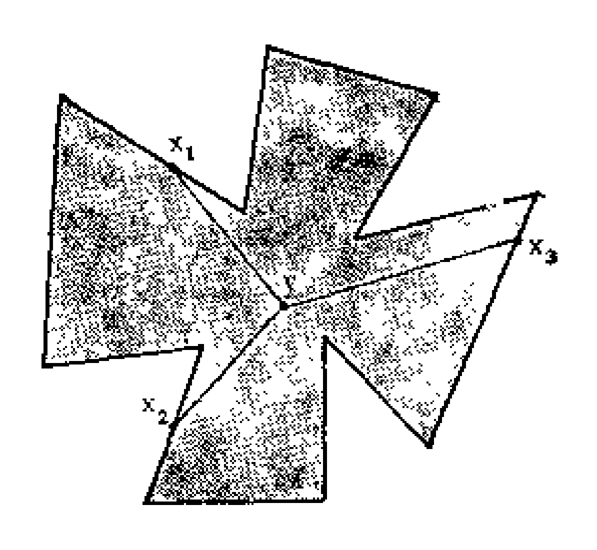


图 11.7.6.2.

11.7.7 推论 (Krasnosel'skii). 设 A 是 d 维欧几里得仿射空间 X 中的一个紧集。又假设对于任意的 $\{x_i\}_{i=1,\cdots,d+1}\subset A$，存在 $y\in X$，使得 $[x_i,y]\subset A$ 对于任意的 $i=1,\cdots,d+1$ 成立。则 A 是一个星形集。

基本思想是，对每点 $x\in X$ 引入以 x 为中心、含在 A 内的最大星形集，即

$$V_x=\{y\in A;\ [x,y]\subset A\}.$$

这些 V_x 是紧的，特别，它们的凸包络 $\mathscr{E}(V_x)$ 也是紧的(参见 11.1.8.7)。推论中的假设条件十分明确：这些 V_x，更不必说

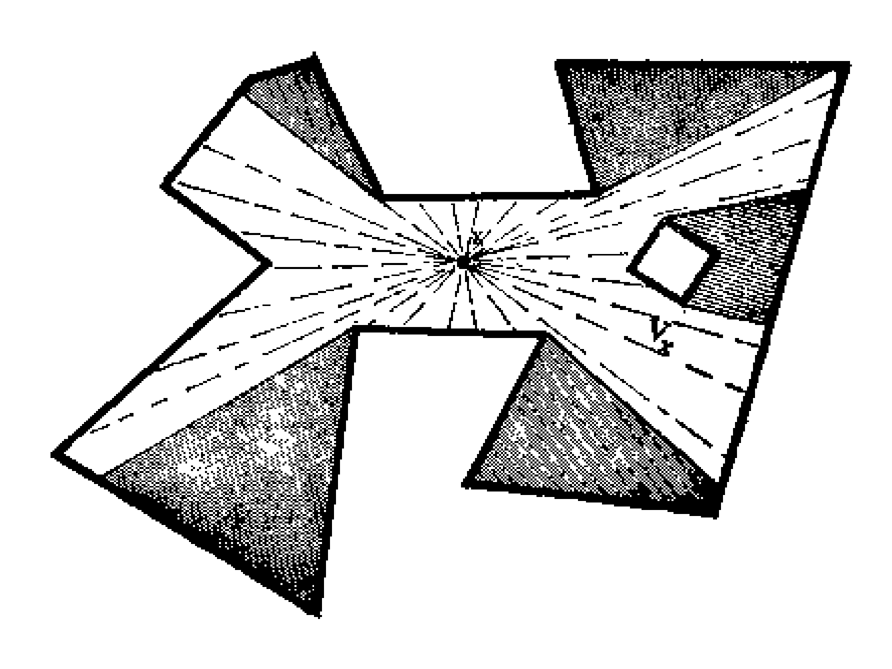


图 11.7.7.1.

$\mathscr{E}(V_x)$ 都是每 $d+1$ 个必有非空交集的。于是(参见 11.7.1)，存在 $y \in \bigcap_{x \in A} \mathscr{E}(V_x)$。我们证明 A 是点 x 处的一个星形集。当然，困难在于事先并不知道 $y \in \bigcap_{x \in A} V_x$ (而且，一般而言 V_x 不是凸的，故不能对它们应用 Helly 定理)。

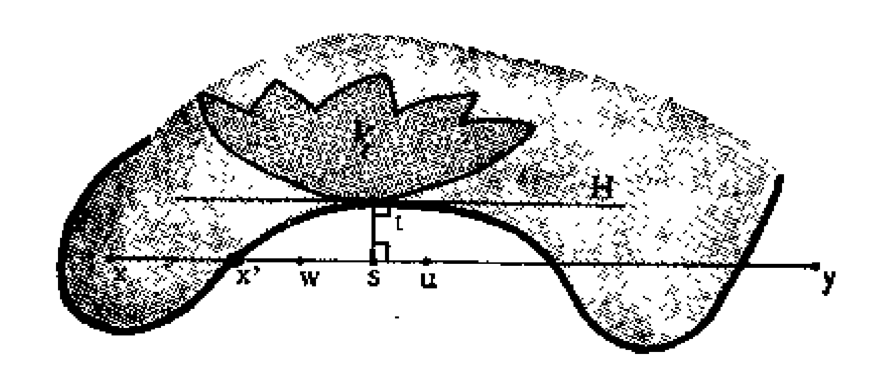


图 11.7.7.2.

用反证法证明：假设 $x \in A$，且使 $[x, y] \not\subset A$。在 X 上引入欧几里得结构。设 x' 是闭区间 $[x, y]$ 上从 x 引出的使得 $[x, x'] \subset A$ 成立的最后的那一点。任取 $[x, y] \setminus A$ 上一点 u，根据连续性，存在 $w \in]x', u]$ 使得 $d(w, x') < d(u, A)$。现在，设 $s \in [u, w]$ 和 $t \in A$，使得 $d(s, t) = d([u, w], A)$。由上述作法可知 $s \neq u$；

应用两次 11.1.7.2；一次是在 s 对于 A，另一次是在 t 对于 $[u, w]$，可见 $(\overrightarrow{st}|\overrightarrow{sy})\leqslant 0$ 以及 V_t（因而 $\mathscr{E}(V_t)$）整个位在由超平面 H 决定的区域内，这里，超平面 H 过点 t，与 $\overrightarrow{st}$ 正交，且不含点 s'。而由这两个条件就推知 $y\notin\mathscr{E}(V_t)$。

11.7.8 Helly 定理的其它应用，可看 [VE] 第 6 部分，[EN] 第 2 章和 [D-G-K]。

11.8 凸 函 数

11.8.1 我们记得，设 $f: I\to\mathbf{R}$ 是一个函数，这里 I 是 $\mathbf{R}$ 的一个区间，如果 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x, y\in I$ 恒有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$，则称 f 是一个凸函数。

更一般地，我们给出：

11.8.2 定义. 设 $A\subset X$ 是仿射空间 X 的一个凸集；映射 $f: A\to\mathbf{R}$. 如果 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x, y\in A$ 恒有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$，则称 f 是凸函数。

这样的条件仅当 A 是凸集时才有意义。我们还可以给出一个等价的定义，但写成命题的形式如下：

11.8.3 命题. 设 $f: A\to\mathbf{R}$，这里 A 是一个凸集.则"f 是凸函数"等价于"f 的图域是 $X\times\mathbf{R}$ 的一个凸集"，这里 f 的图域是指

$$\operatorname{Epigr}(f)=\{(x,t)\in X\times\mathbf{R}:\ x\in A \text{ 和 } t\geqslant f(x)\}.$$

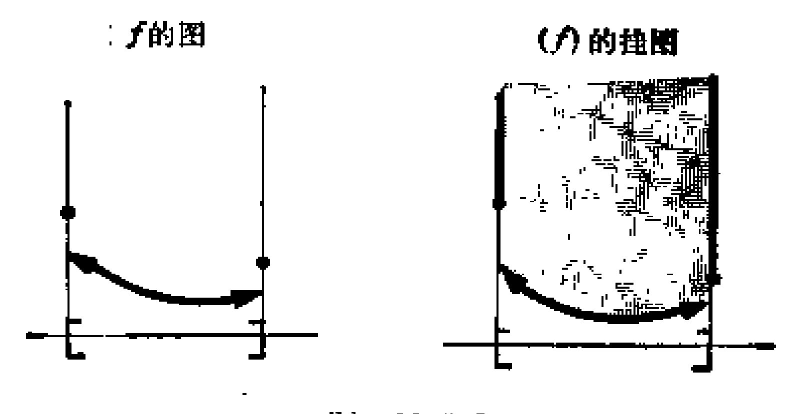


图 11.8.3.

如果 f 是凸的，容易用归纳法证明：

11.8.4 $\forall\lambda_i$: $\lambda_i\geqslant 0\ \forall i$ 和 $\sum_i \lambda_i=1$, $\forall(x_i)\subset A$, 有

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right)\leqslant \sum_i \lambda_i f(x_i).$$

11.8.5 定义. 设有函数 f: $A\to\mathbf{R}$, 这里 A 是一个凸集. 如果 $\forall\lambda\in]0,1[$, $\forall x, y\in A$ 和 $x\neq y$ 恒有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$, 则称 f 是严格凸函数.

11.8.6 定义. 设有函数 f: $A\to\mathbf{R}$. 如果 $-f$ 是凸的，则称 f 是凹函数；即若对任意的 $\lambda\in[0,1]$, $x, y\in A$ 有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$, 则称 f 是凹函数。

11.8.7 例子

11.8.7.1 图 11.8.6 表明，一个凸函数未必是连续的. 更一般地，一个紧集上的凸函数一般而言甚至不是有界的：取 $A=B(0,1)\subset\mathbf{R}^2$, $f|_{\mathring{A}}=0$ 而在 $S(0,1)=A\setminus\mathring{A}$ 上，f 取为任意的正值函数。关于凸函数的连续性可参看 11.8.10.4.

11.8.7.2 一个仿射形式 f: $X\to\mathbf{R}$（参见 2.4.8.3）是凸的，但是根据 3.5.1，在 11.8.4 内总能取到等号，故 f 绝不是严格凸的。

11.8.7.3 在 $\mathbf{R}$ 上定义的 $x\longmapsto x^2$, $x\longmapsto x$ 是严格凸的.

11.8.7.4 如果 $\forall i$, f_i: $A\to\mathbf{R}$ 是凸的，所有的 c_i 均大于或等于零，则 $\sum_i c_i f_i$ 仍是凸的。

11.8.7.5 如果 $\forall i$, f_i: $A\to\mathbf{R}$ 是凸的，则它们的上包络是凸的：因为，上包络的图域为 f_i 的图域之交，故应用 11.8.3 即可。

11.8.7.6 如果 x, y, z, t 是欧几里得仿射空间中的四个点，则函数

$$[0,1]\ni\lambda\longmapsto d(\lambda x+(1-\lambda)y, \lambda z+(1-\lambda)t)\in\mathbf{R}$$

是凸的. 事实上，$d(\lambda x+(1-\lambda)y, \lambda z+(1-\lambda)t)=\|\lambda\overrightarrow{xz}+(1-\lambda)\overrightarrow{yt}\|$, 于是从 9.2.2 的证明可推得所求的不等式。

现在给出凸函数的两个比较不那么平常的例子；这两个例子

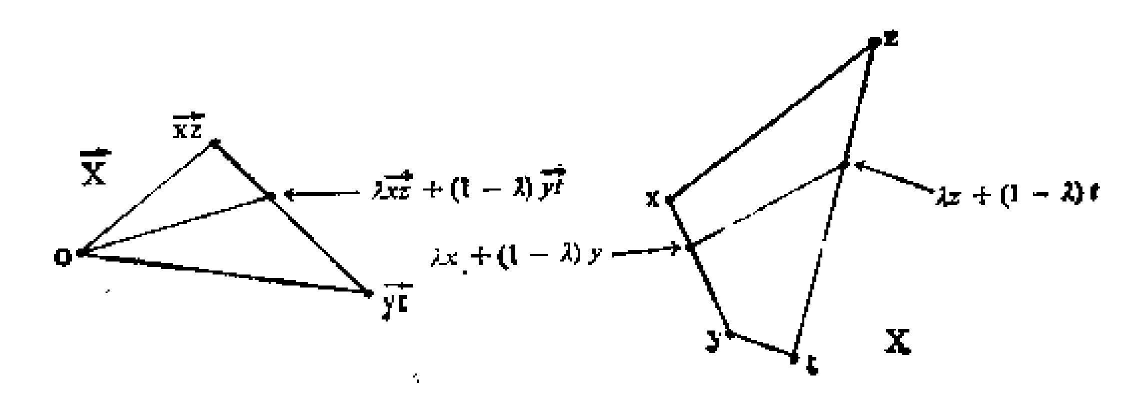


图 11.8.7.

对于下面的内容是很重要的：参看 12.11.3 和 15.5.9。

11.8.8 Brunn-Minkowski 定理

11.8.8.1 定理（**Brunn-Minkowski**）。设 A 和 B 是仿射空间 X 中的两个 d 维紧集，并且 $\mathfrak{L}$ 是 X 上的 Lebesgue 测度，则函数

$$[0,1]\ni\lambda\longmapsto\mathfrak{L}(\lambda A+(1-\lambda)B)^{1/d}\in\mathbf{R}$$

是凹的（有关 $\lambda A+(1-\lambda)B$ 的定义参见 11.1.3）。

我们赋予 X 一个欧几里得结构，$\mathfrak{L}$ 是该结构的 Lebesgue 测度，并选用一个正交标架。把棱边平行于所考虑的标架的开的平行六面体集合记作 $\mathscr{F}$。

11.8.8.2 第一种情形。A 和 B 都属于 $\mathscr{F}$。用 a_i 和 b_i $(i=1,\cdots,d)$ 表示 A，B 的棱；则 $\lambda A+\mu B\in\mathscr{F}$，并以 $\lambda a_i+\mu b_i$ 作为它的棱 $(\forall\lambda,\mu\geqslant 0)$。从而有 $\mathfrak{L}(A)=\prod_i a_i$，$\mathfrak{L}(B)=\prod_i b_i$，$\mathfrak{L}(\lambda A+\mu B)=\prod_i(\lambda a_i+\mu b_i)$。置

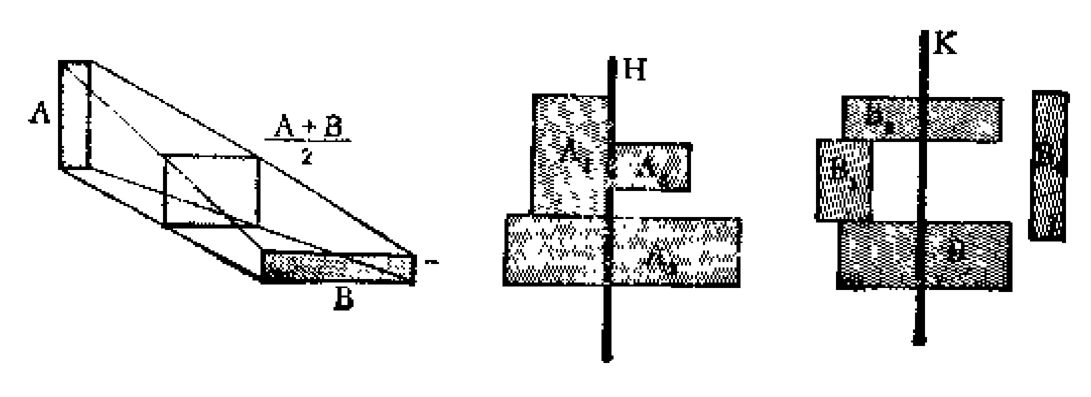


图 11.8.8.

$$u_i = \frac{a_i}{\lambda a_i + \mu b_i}, \quad v_i = \frac{b_i}{\lambda a_i + \mu b_i},$$

使得 $\lambda\mu_i + \mu v_i = 1$。根据 11.8.11.6，我们有

$$\frac{\lambda\mathfrak{L}(A)^{1/d} + \mu\mathfrak{L}(B)^{1/d}}{\mathfrak{L}(\lambda A + \mu B)^{1/d}} = \lambda \prod_i u_i^{1/d} + \mu \prod_i v_i^{1/d}$$

$$\leqslant \frac{\lambda}{d} \sum_i u_i + \frac{\lambda}{d} \sum_i v_i$$

$$= \frac{\sum_i (\lambda u_i + \mu v_i)}{d} = 1.$$

11.8.8.3 第二种情形. 设 $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$，$B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$，这里 $A_i, B_j \in \mathscr{F}\ \forall i, j$，并且 $A_i \cap A_{i'} = \varnothing$，$B_j \cap B_{j'} = \varnothing$，$\forall i \neq i', j \neq j'$。这时对整数 $m + n$ 用归纳法来进行证明；例如，我们假设 $m > 1$，于是，存在一个超平面 H，它平行于一个坐标超平面，并且，至少严格分离 A_i 中的两个，于是可写 $A = A^+ \cup A^-$，其中 A^+ 和 A^- 是和 A 同类型的，但前者含 m^+ 个，后者含 m^- 个，使得 $m^+ < m$ 和 $m^- < m$。根据连续性，我们可以看出，存在一个与 H 平行的超平面 K，它把 B 割为 B^+ 和 B^-，且使得 $\frac{\mathfrak{L}(A^+)}{\mathfrak{L}(A^-)} = \frac{\mathfrak{L}(B^+)}{\mathfrak{L}(B^-)}$；我们有 $\mathfrak{L}(A) = \mathfrak{L}(A^+) + \mathfrak{L}(A^-)$，$\mathfrak{L}(B) = \mathfrak{L}(B^+) + \mathfrak{L}(B^-)$；此外，$B^+$ 和 B^- 是和 B 同类型的，且使 $n^+ \leqslant n$，$n^- \leqslant n$。因而，对 $\lambda A^+ + \mu B^+$ 和 $\lambda A^- + \mu B^-$ 应用归纳法假设条件，就有：

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\lambda A + \mu B) &= \mathfrak{L}(\lambda A^+ + \mu B^+) + \mathfrak{L}(\lambda A^- + \mu B^-)\\ &\geqslant (\lambda\mathfrak{L}(A^+)^{1/d} + \mu\mathfrak{L}(B^+)^{1/d})^d\\ &\quad + (\lambda\mathfrak{L}(A^-)^{1/d} + \mu\mathfrak{L}(B^-)^{1/d})^d\\ &= (\lambda\mathfrak{L}(A)^{1/d} + \mu\mathfrak{L}(B)^{1/d})^d.\end{aligned}$$

11.8.8.4 第三种情形. 现在 A 和 B 是任意的紧集；不过，根据 Lebesgue 测度的标准理论，我们可用 11.8.8.3 的类型的集 A_n，B_n 逼近 A，B，使得 $|\mathfrak{L}(A) - \mathfrak{L}(A_n)| < \varepsilon$，$|\mathfrak{L}(B) - \mathfrak{L}(B_n)| < \varepsilon$，由此得到结论。

11.8.8.5 推论. 对于任意的紧集 A, B, 恒有

$$\mathfrak{L}(A+B)^{1/d} \geqslant \mathfrak{L}(A)^{1/d} + \mathfrak{L}(B)^{1/d}.$$

11.8.8.6 注. 我们可以证明：所研究的函数是严格凹的充分必要条件为集合 A 和 B 不能通过扩张互化；但证明要难得多，请参看 [EN] 第 97 页，或 [HR] 第 187 页.

11.8.9 Loewner-Behrend 函数

11.8.9.1 沿用 8.2.5.2 中的记号，E 是 d 维实向量空间，$Q(E)$ 是 E 上欧几里得结构全体所成的空间，它是向量空间 $\mathscr{P}_2^\bullet(E)$ 中一个开的凸集．今在 E 上取定一个 Lebesgue 测度 $\mathfrak{L}$．对于每一个 $q\in Q(E)$，配以椭球面 $q^{-1}(1)$（参见 15.3.3.3），其凸包络为实心椭球 $\mathscr{E}(q)=q^{-1}([0,1])$；我们打算计算它的体积 $\mathfrak{L}(\mathscr{E}(q))$（参见 9.12.4）.

图 11.8.9.

11.8.9.2 设 A, A' 分别是 q 关于 E 中基底 $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ 的矩阵（参见 13.1.3.6），则 $A'={}^tSAS$，这里 S 是 $f\in \mathrm{Isom}(E)\,|\,f(\mathscr{B})=\mathscr{B}'$ 关于 $\mathscr{B}$ 的矩阵．特别，若 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}'$ 是 E 关于 $\mathfrak{L}$ 的单位基底，也就是相伴的同构 $\boldsymbol{R}^d\to E$ 是 2.7.4.2 类型的，则尤其有 $\det S=1$ 和 $\det A=\det A'$．于是，对于 $\mathfrak{L}$ 和 $q\in Q(E)$，我们可以定义其行列式：

11.8.9.3 $\det_{\mathfrak{L}} q=\det A$,

这里，A 是 q 在任何一个单位基底 $\mathscr{B}$ 下的矩阵．这样一来，我们就有

11.8.9.4
$$\boxed{\mathfrak{L}(\mathscr{E}(q))=\beta(d)(\det_{\mathfrak{L}} q)^{-1/2}}$$

这里 $\beta(d)$ 的定义见 9.12.4.7.

事实上，我们赋予 E 一个以 $\mathfrak{L}$ 为典范测度的辅助欧几里得结构（参见 9.12），并设 $f\in \mathrm{Isom}(E)$，使得 $f(B(0,1))=\mathscr{E}(q)$，亦即（参见 13.1.3.9）$f^*q=\|\cdot\|^2$，其中 $\|\cdot\|$ 是欧几里得结构的范数，特别（参见 13.1.3.10），既然 $\|\cdot\|^2$ 的矩阵是 I，故 A 矩阵满足

$I = {}^tUAU$，这里 U 是 f 在任一标准正交基底下的矩阵。特别有 $\det A \cdot |\det f|^2 = 1$。根据 2.7.4.3，

$$\mathfrak{L}(\mathscr{E}(q)) = |\det f| \cdot \mathfrak{L}(B(0, 1)) = |\det f| \cdot \beta(d)$$
$$= \beta(d)(\det_{\mathfrak{L}} q)^{-1/2}.$$

在 11.8.10.7 中给出 Loewner-Behrend 定理的证明时，要用到：

11.8.9.5 命题. 函数 $Q(E) \ni q \to \mathfrak{L}(\mathscr{E}(q)) \in \boldsymbol{R}$ 是严格凸的。

设 $q, q' \in Q(E)$；根据 13.5.5，存在一个同时对角线化的基底，并不妨假设它们都是 $\mathfrak{L}$ 单位化的，使

$$q = \sum_i a_i x_i^2, \quad q' = \sum_i a_i' x_i^2.$$

相对于这个基底，q 和 q' 的行列式顺次为

$\det q = \prod_i a_i$, $\det q' = \prod_i a_i'$，而且当 $\lambda, \lambda' \geqslant 0$, $\lambda + \lambda' = 1$ 时，我们有

$$\det(\lambda q + \lambda' q') = \prod_i (\lambda a_i + \lambda' a_i').$$

多次应用 11.8.11.4 可得：

$$(\det(\lambda q + \lambda' q'))^{-1/2} = \prod_i (\lambda a_i + \lambda' a_i')^{-1/2}$$
$$\leqslant \prod_i (a_i^{\lambda} a_i'^{\lambda'})^{-1/2}$$
$$= \left[\left(\prod_i a_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\lambda} \left[\left(\prod_i a_i'\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\lambda'}$$
$$\leqslant \lambda(\det q)^{-1/2} + \lambda'(\det q')^{-1/2}.$$

仅当对于每一对 (a_i, a_i') 等号成立时，上式等号才成立；因而，仅当 $\forall i \ a_i = a_i'$，即 $q = q'$ 时等号才成立。

11.8.10 凸函数的一些性质. 我们在 11.8.7.1 中已经看到，一个凸函数甚至在一个紧集上也未必是连续或有界的；然而，我们马上可以看到，可能引起麻烦的只是边界上和上界；情况正如 11.8.7.1 中的例所假设的那样。

11.8.10.1 命题. 凸函数 f: $A \to \mathbf{R}$ 在 A 的相对内部(参见

11.2.8) 的任意一个紧集上是界于上的；f 在 A 的任一有界集上是界于下的。

按照惯例，仅考虑 $\mathring{A} \neq \emptyset$ 的情形．设任意一点 $x \in \mathring{A}$，并且 H 是 Epigr (f) 在点 $(x, f(x))$ 处的一个支撑超平面（参见 11.8.3 和 11.5.2）．又设 $g: X \to \mathbf{R}$ 是一个仿射形式，满足 $H = g^{-1}(0)$．根据作法，有 $f \geqslant g$，而仿射形式在任意一个有界集上是有界的。

设 $K \subset \mathring{A}$ 是一个紧集．对于任意的 $x \in K$，存在 X 的一个单形 S_x，使得 $S_x \subset \mathring{A}$ 和 $x \in \widehat{\mathscr{E}(S_x)}$．利用紧性，可用有限多个这样的单形覆盖 K；根据 11.8.4 可知 $f(x)$ 在任意点 $x \in K$ 处的值是被 f 在这些单形的有限个数顶点处的值所界于上的。

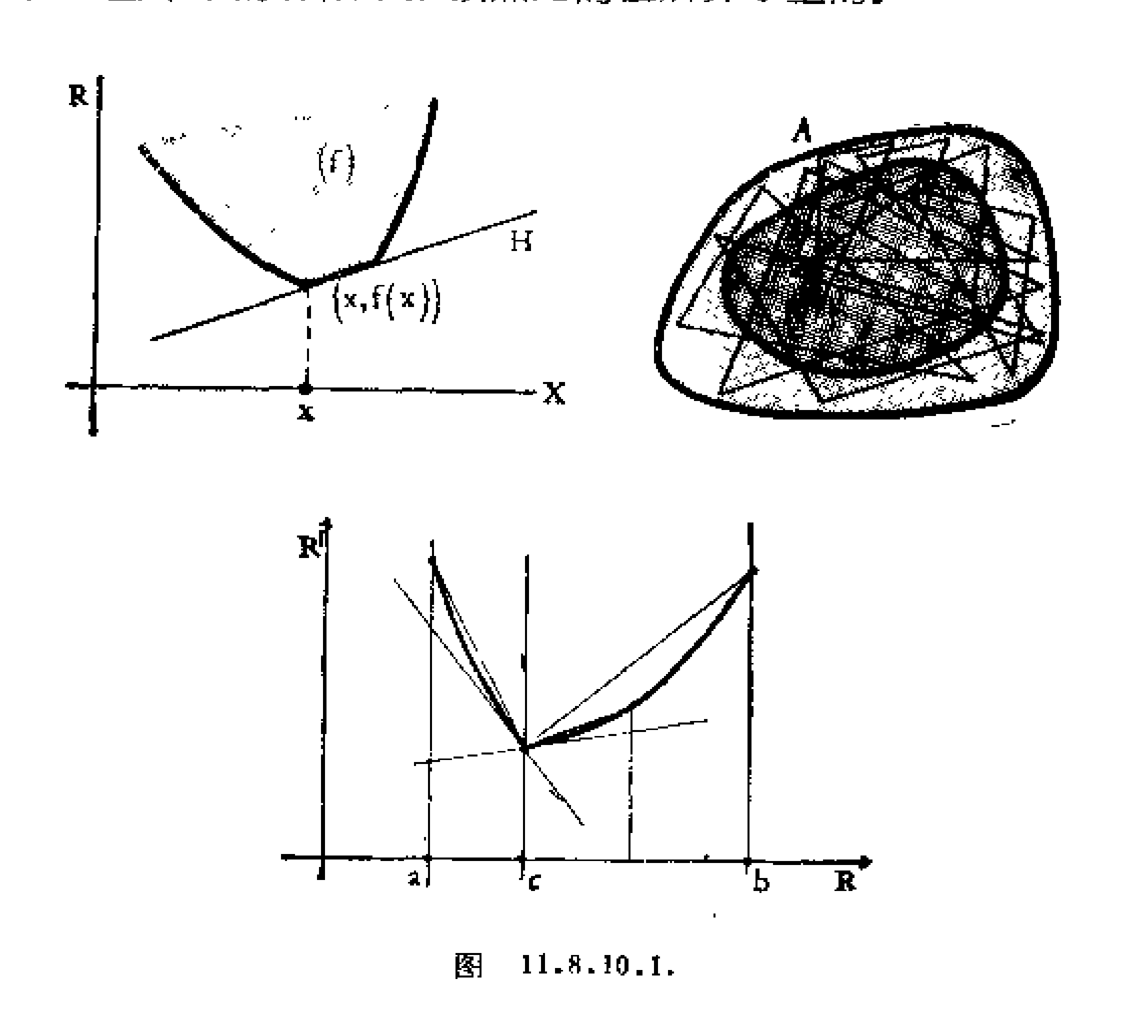


图 11.8.10.1.

11.8.10.2 引理． 设 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ 是凸的，$c \in]a, b[$；则

(1) 函数 $[a, b] \backslash c: t \longmapsto \dfrac{f(t)-f(c)}{t-c}$ 是递增的。

(ii) f 在 c 点具有右导数 $f'_d(c)$ 和左导数 $f'_g(c)$，并且 $f'_g(c) \leqslant f'_d(c)$；特别 f 在 c 点是连续的.

(iii) 若 f 在 $]a, b[$ 上可导，则它的导函数是递增的；若 $f''(c)$ 存在，则 $f''(c) > 0$.

由定义可推出递增性，参看图形. 当 $t > c$ 时，$t \mapsto \frac{f(t)-f(c)}{t-c}$ 是递增的，并以 $\frac{f(a)-f(c)}{a-c}$ 作为它的下界，于是

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)-f(c)}{t-c} = f'_d(c)$$

是存在的. 同样，$f'_g(c)$ 也存在，且有 $f'_g(c) \leqslant f'_d(c)$. 至于 f'，如果它存在，因为 $\forall c, d \in]a, b[$，$f'(c) \leqslant \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \leqslant f'(d)$，所以它是递增的. 引理中最后一个断言是熟知的.

11.8.10.3 附注. 从引理的证明容易看出，

$$\{c \in]a, b[: f'_g(c) = f'_d(c)\}$$

是可数集. 关于凸函数更细致的性质以及无限维的情形，可看 [R-V] 的第 IV 章.

从引理可得，如果 $f: A \to \mathbf{R}$，$A \subset X$，X 是任意维的，则 f 在点 $a \in \mathring{A}$ 处自 A 引出的每一条半直线上具有方向导数. 现在，我们将应用这个想法.

11.8.10.4 命题. 设 $f: A \to \mathbf{R}$ 是凸的，则 f 在 A 相对内部的任意一点是连续的.

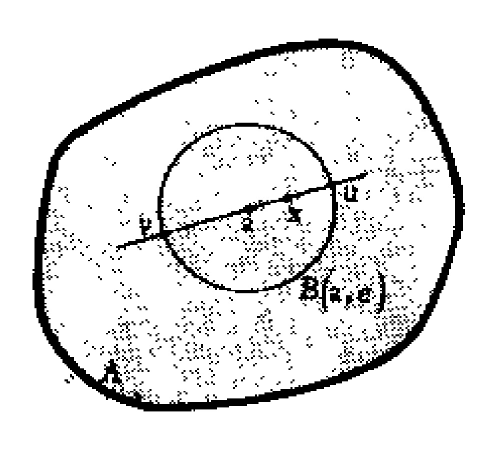


图 11.8.10.4.

实向量空间，赋有一个 Lebesgue 测度，若K是E的一个具有非空内部的紧集，则存在唯一的一个包含K且体积极小的椭球体。

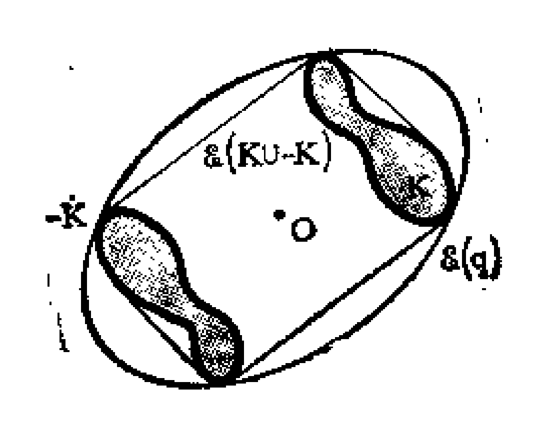


图 11.8.10.7.

根据 11.8.10.5, 11.8.9.5 和 $q \longmapsto \mathfrak{L}(\mathscr{E}(q))$ 连续这一事实，只要证明在 $Q(E)$ 的一个适当的凸紧集上能找到我们的极小值就可以了。因为K是有界的，故至少存在一个含K的实心椭球面 $\mathscr{E}(q_0)$；引入

$$A = \{q \in Q(E):\ \mathscr{E}(q) \geqslant K \text{ 以及 } \det_\varepsilon q \geqslant \det_\varepsilon q_0\}.$$

于是，只要证明A是 $Q(E)$ 的一个凸紧集. 由于条件 $\det_\varepsilon q \geqslant \det_\varepsilon q_0$，根据 11.8.9.5 可知它是一个凸集. 包含K的这一条件也是成立的：

$$\mathscr{E}(q) = \{x \in X:\ q(x) \leqslant 1\},\ \mathscr{E}(q') = \{x \in X:\ q'(x) \leqslant 1\}.$$

因而如果 $\forall x \in K,\ q(x),\ q'(x) \leqslant 1$，就可推出

$$(\lambda q + (1-\lambda)q')(x) = \lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \leqslant 1.$$

从对于连续函数用广义不等式所给出的定义可知，集合A在 $\mathscr{P}_2^\bullet(E)$ 中是一个闭集，但是，我们得当心，因为 $Q(E)$ 是 $\mathscr{P}_2^\bullet(E)$ 的一个开集；然而它的边界是由退化的二次型构成的，于是 $\det_\varepsilon \cdot = 0$，从而$A$确实是一个闭集.

最后证明A是有界的. 首先注意到 $\mathscr{E}(q) \supseteq K$，由此可导出 $\mathscr{E}(q) \supseteq \mathscr{E}(K \cup (-K))$，这里 $-K$ 是K关于原点的对称集. 还有，因为 $\mathring{K} \neq \varnothing$，所以 $\overset{\circ}{\widehat{\mathscr{E}(K \cup (-K))}} \neq \varnothing$. 在$E$上安装一个欧几里得结构，并设 $\varepsilon > 0$，使得 $B(0,\varepsilon) \subset \mathscr{E}(K \cup (-K))$. 如果我们

要有 $\mathscr{E}(q) \supset B(0, \varepsilon)$, $q \in Q(E)$ 关于所考虑的欧几里得结构的特征值 λ_i 就应该满足：$\forall i$, $\lambda_i \leqslant 1/\varepsilon$；这正说明了 A 是有界的。

在 15.5.9 中我们将要用到 11.8.10.7，但是，我们已经指出过，它提供了 8.2.5 中介绍过的第三种证明方法(不用到积分理论的证明，因为椭球体的体积其实就是平常的行列式！)。

11.8.10.8 推论. 设 G 是 $\mathrm{GL}(E)$ 的一个紧子群；则存在 $q \in Q(E)$，在 G 下不变。

事实上，设 H 是 E 的任意一个内部非空的紧集，$K = G(H)$ 是在 G 作用下 H 的轨道，并设 $\mathscr{E}(q)$ 是包含 K 且具有极小体积的椭球。这一 $\mathscr{E}(q)$ 在任一 $g \in G$ 下不变；事实上，对于任意的 $g \in G$，按作法，$g(K) = K$，于是 $g(\mathscr{E}(q)) \supset K$。最后，

$$\mathfrak{L}(g(\mathscr{E}(q))) = \mathfrak{L}(\mathscr{E}(q)),$$

这是因为 $\forall g$, $\det g = 1$ (否则，$\det(g^n) = (\det g)^n$，致使 G 不是紧的)；因为具有极小体积的椭球是唯一的，就有 $g(\mathscr{E}(q)) = \mathscr{E}(q)$。从而二次型 q 使 $\forall g \in G$, $g^* q = q$。

回到凸函数的极值性质上来。

11.8.10.9 命题. 设 $f: A \to \mathbf{R}$ 是连续的凸函数；则 f 至少在 A 的一个端点处达到它的极大值，即

$$\sup_A f = \sup_{\mathrm{Extrem}(A)} f \text{ (参见 11.6.8)}.$$

根据 11.1.8.6 和 11.6.8，任意一点 $a \in A$ 是端点的有限重心；于是，如果 $M = \sup_{\mathrm{Extrem}(A)} f$，则根据 11.8.4，$\forall a \in A$，恒有 $f(a) \leqslant M$。

11.8.10.10 附注. 命题 11.8.10.9 在极大值问题的具体应用中是十分重要的。例如，它在博奕论、对策论和线性程序设计方面都有应用：见 [KE] 第 86 页及以后几页；如果要找的极大值那个函数是凸的，只要知道函数在 Extrem (A) 上的值就够了。例如当 A 是一个多面体时，这些点只有有限多个 (参见 12.1.9)。关于这方面的细节和例子，例如可参见 [KE] 和 [R-V] 的第 V 章。

11.8.11 凸集的判定准则，例子

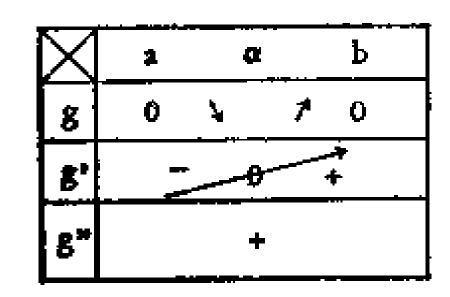
11.8.11.1 命题. 设 $I \subset \mathbf{R}$ 是一个区间，$f: I \to \mathbf{R}$ 是二次可

导的。f 是一个凸函数的充分必要条件为 $\forall x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$; 为使 f 是一个严格的凸函数,只要 $\forall x \in I$, $f''(x) > 0$ 即可。

对 $a, b \in I$, 令

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a);$$

必须证明在 $[a, b]$ 上 $g \leqslant 0$. 然而 $f'' = g''$, 于是 g' 是递增的。因为 g' 在 $[a, b]$ 上 α 处取零值(比如说 g 在 α 处取到极小值),则在 α 的左边, $g' \leqslant 0$; 而在 α 的右边 $g' \geqslant 0$, 于是, g 从 $g(a) = 0$ 开始递减,然后又递增到 $g(b) = 0$, 故而 $g \leqslant 0$。



⊠	a	α	b
g	0 ↘		↗ 0
g'	−	0	+
g''		+	

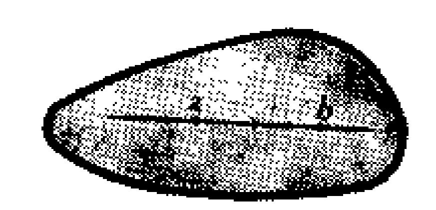


图 11.8.11.

11.8.11.2 推论. 设 f: $A \to \mathbf{R}$ 是 C^2 类的, 这里 A 是 X 的一个开集. f 是凸函数的充分必要条件是二阶导数

$$f''(x): \vec{X} \times \vec{X} \to \mathbf{R}$$

对于每一 x 是一个正二次型, 即 $\forall y \in \vec{X}$, $f''(x)(y, y) \geqslant 0$. 若 $\forall x \in A$ 和 $\forall y \in \vec{X} \backslash 0$, $f''(x)(y, y) > 0$, 则 f 是严格凸的。

事实上, 对于任意的 $a, b \in A$, 只要应用 11.8.11.1 于函数 $t \to f(a + t\overrightarrow{ab})$ 就够了, 该函数的二阶导数等于 $f''(a + t\overrightarrow{ab})(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ab})$。

11.8.11.3 例子. 函数 $-\log x$ 在 $\mathbf{R}_+^*$ 上是严格凸的, 因为 $(-\log x)'' = \frac{1}{x^2}$, 从而 $-\log(\lambda a + \lambda' a') \leqslant -\lambda \log a - \lambda' \log a'$ ($\lambda, \lambda' \geqslant 0$, $\lambda + \lambda' = 1$). 由于 log 是递增函数,就由此得出:

11.8.11.4 $\forall$ 使 $\lambda + \lambda' = 1$ 的 $\lambda, \lambda' \geqslant 0$, 有

$$\lambda a + \lambda' a' \geqslant a^{\lambda} a'^{\lambda'};$$

更一般地有：

11.8.11.5 $\forall$ 使 $\sum_i \lambda_i = 1$ 的 $\lambda_i \geqslant 0$，有

$$\sum_i \lambda_i a_i \geqslant \prod_i a_i^{\lambda_i}.$$

特别，我们得到一个所谓"几何平均值"不等式：

11.8.11.6 $a_1 a_2 \cdots a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^n$，

因为 $-\log x$ 是严格凸的，等号仅当所有的 a_i 都相等时才成立。当 $n = 2$ 时，这就是初等不等式 $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$。

11.8.11.7 例子。对任一实数 $p > 1$，函数 $\mathbf{R}_+^*$：$x \longmapsto x^p \in \mathbf{R}$ 是严格凸的，这是因为 $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$。从而有：

11.8.11.8 $\forall a_i > 0$，$\forall$ 使 $\sum_i \lambda_i = 1$ 的 $\lambda_i \geqslant 0$，有

$$\left(\sum_i \lambda_i a_i\right)^p \leqslant \sum_i \lambda_i a_i^p.$$

由此推出 Hölder 不等式：

11.8.11.9

$$\sum_i x_i y_i \leqslant \left(\sum_i x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_i y_i^q\right)^{1/q},$$

其中

$$p > 1, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ x_i \geqslant 0, \ y_i \geqslant 0.$$

当 $p = 2$ 时，此不等式即 8.1.3。但是，11.8.11.9 要困难得多。为了从 11.8.11.8 推出 Hölder 不等式，必须找到 λ_i，a_i，k，使得

$$\lambda_i a_i = x_i y_i, \ \lambda_i a_i^p = k x_i^p, \ \sum_i \lambda_i = 1.$$

上述方程式的解是 $\lambda_i = \left(\sum_i y_i^q\right)^{-1} y_i^q$，$a_i = \left(\sum_i y_i^q\right) x_i y_i^{1-q}$。取这些值并应用 11.8.11.8 即可推得 11.8.11.9。

11.8.11.10 从 11.8.11.9 最后可推出：对任意的 $p > 1$，

$\mathbf{R}^d$: $(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$ 是 $\mathbf{R}^d$ 上的一个范数．我们必须证明

11.8.11.11

$$\left(\sum_i |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_i |y_i|^p\right)^{1/p}$$

(Minkowski 不等式)；此不等式可从下述计算得出，其中我们两次应用了 11.8.11.9：

$$\sum_i |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leqslant \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_i |x_i + y_i|^p\right)^{p-1/p},$$

$$\sum_i |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \leqslant \left(\sum_i |y_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_i |x_i + y_i|^p\right)^{p-1/p},$$

$$\sum_i |x_i + y_i|^p \leqslant \left(\sum_i (|x_i| + |y_i|)(|x_i + y_i|^{p-1})\right)$$

$$\leqslant \left(\sum_i |x_i + y_i|^p\right)^{p-1/p} \left[\left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_i |y_i|^p\right)^{1/p}\right].$$

11.8.11.12　附注． 不等式 11.8.11.9 和 11.8.11.11 今天已是在分析中最基本的不等式，从它们出发就可以定义"L_p 空间"．

对于其它的一些所谓"凸性"不等式，例如可看 [DE 3] 第 46 页及以后几页，[R-V] 第 VI 章，以及其中提到的参考文献，特别是古典的 [H-L-P] 和近代的 [B-B]．

11.8.12　凸集与凸函数的对比

在 11.8.3 中，我们已经看到了凸函数和凸集合两者之间的一个联系．下面给出更为一般的两个联系，但不作详尽讨论，读者可参看 [EN] 第 54 页．

11.8.12.1　在这一节内，X 恒为欧几里得向量空间．设 $f: X \to \mathbf{R}$ 是任意一个凸函数，若 $\forall x, \forall \lambda > 0$ 有 $f(\lambda x) = \lambda f(x)$，则称 f 是 X 上的规范．例如，X 上的范数是一个规范．

11.8.12.2　如果 f 是一个规范，则 $C(f) = \{x \in X: f(x) \leqslant 1\}$ 是 X 的一个凸集．反过来，如果 C 是一个紧凸集，且有 $0 \in \mathring{C}$，则

$f_C(x) = \inf\{\lambda: \lambda > 0, x \in \lambda C\}$ 是一个规范，但它仅当 $C = -C$，即当C 是对称时，才是一个范数. C 的边界是 $f_C^{-1}(1)$；我们称 f_C 是C 的距离函数.

11.8.12.3 如果C 是X 的一个有界集，则 $h_C(x) = \sup\{(y|x): y \in X\}$ 也是一个规范，称为X 的支撑函数.

11.8.12.4 从 11.1.5 和 11.4.8 可得出 h_C 和 f_C 之间的关系式. 如果C 是凸的紧集，且 $0 \in \overset{\circ}{C}$，则有 $f_{C^*} = h_C$，$h_{C^*} = f_C$.

11.8.12.5 一旦一个规范在单位球面 $S = S(0, 1)$ 上的限制已知时，则此规范就被确定了；但是在 $h = h_C$ 给定时找出 C（在S 上），一般却不是显然可以做到的. 如果 h 是可微的，我们可以说：C 是当 t 取遍S 时超平面 $H_t = \{x \in X: (x|t) = 1\}$ 的包络，或者说C 是曲面 $h^{-1}(1)$ 关于S 的逆极交换的象. 对于平面的情形，h 的已知条件就是我们称为曲线 Fr(C) 的 Euler 方程的式子.

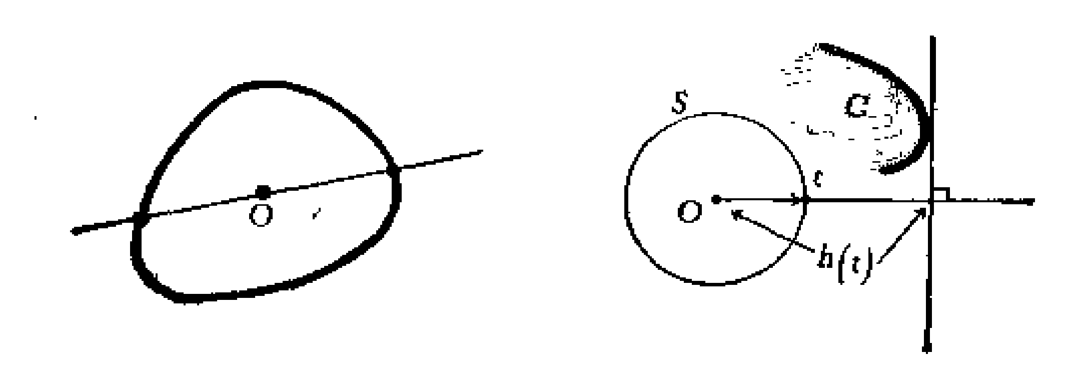


图 11.8.12.

11.8.12.6 支撑函数对于凸集的几何研究是一个有力的工具. 参考文献例如可看[EN]第 54 页和整个第V章，[BU 1]第II章第6节. 也可看 11.9.14.

11.9 练　习

11.9.1 证明 Minkowski 加法满足关系式：

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

$$(A \cup B) + C = (A + C) \cup (B + C),$$

$$(A\cap B)+C=(A+C)\cap(B+C).$$

而且对于位似变换有: $H_{a,\lambda}(A+B)=H_{a,\lambda}(A)+H_{a,\lambda}(B)$,

$$H_{a,\lambda}(A)+H_{a,\mu}(A)\supset H_{a,\lambda+\mu}(A);$$

何时等号成立?

11.9.2 对于有界集,是否恒有 $\operatorname{diam}(\mathscr{E}(A))=\operatorname{diam}(A)$?

11.9.3 设X是一个 d 维仿射空间,A是X中至多具有 d 个连通分支的子集;则 $\mathscr{E}(A)$ 的任意一点是A的 d 个点的重心.

11.9.4 Hilbert 几何. 设A是X的一个内部非空的紧凸集.对于$\mathring{A}$内不同两点 x, y, 令 $d(x,y)=|\log[x,y,u,v]|$, 这里 u,v 是直线 $\langle x,y\rangle$ 和A的边界的两个交点. 证明: 由上述的 d, 加上 $\forall x\in\mathring{A}\ d(x,x)=0$ 来定义的 d: $\mathring{A}\times\mathring{A}\to\mathbf{R}$ 是 $\mathring{A}$ 上一个距离.证明这个度量是优异的(参阅 9.9.4.4). 讨论三角形严格不等式和A的边界点性质之间的关系. 有关这一几何中的面积概念, 可看 [B-Y] 第 167 页.

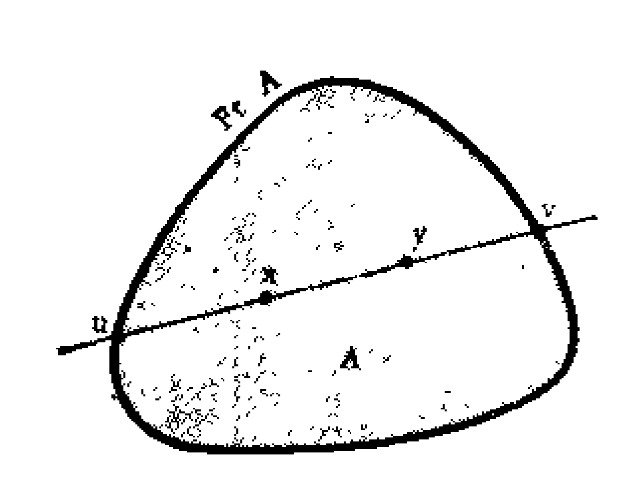


图 11.9.4.

11.9.5 设X是维数大于1的仿射空间, f: X↺是一个双射. 证明: 若对于任意凸集 A, $f(A)$ 为凸集, 则 f 是仿射映射.

11.9.6 设在 $\mathbf{R}^2$ 内, 子集 $B=\{(x,y): x\geqslant 1 \text{ 或 } x\leqslant -1\}$, 而 $A=\mathbf{R}^2\setminus B$ 是点 $(0,0)$ 处的一个星形集: 见图 11.3.6.3. 又设 F: $A\to\mathbf{R}^2$ 是在 11.3.6.1 的证明中所构作的同胚; 画出 $\mathbf{R}^2$ 中的圆周在F下的逆象.

11.9.7 设E是实系数 n 阶方阵所成的向量空间,并且K是由双随机矩阵全体构成的E的子集, 即矩阵 (a_{ij}) 满足: $\forall i,j,\ a_{ij}\geqslant 0$; $\forall j,\ \sum_i a_{ij}=1$; 对 $\forall i,\ \sum_j a_{ij}=1$. 证明$K$是$E$ 的一个紧多面

体. 并且它的顶点恰好是置换矩阵，即矩阵中每一行或每一列里只有一个非零元素，且等于1.

11.9.8 对于二维空间中的一个凸集来说，全体端点构成一个闭集.

11.9.9 在$\mathbf{R}^3$内考虑一个用不等式组$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $z^2 \leqslant xy$定义的闭凸锥C. 证明由方程组$x=0$, $z=1$所定义的直线同C是不相交的，但是不存在含D而不与C相交的平面.

11.9.10 **Kirchberger 定理**. 设A和B是d维空间X的两个有限集. 若对任何基数为$d+2$的子集Y，总能找到一个超平面严格分离$A \cap Y$和$B \cap Y$，则存在一个超平面严格分离A和B.

11.9.11 **Radon 代替 Helly**. 设$A_i(i=1,\cdots,r)$是$\mathbf{R}^d$中凸集，其中$r > d+1$. 并且这些A_i中任意$r-1$个具有非空交集. 证明所有的A_i也有一个非空的交集：设$x_i \in \bigcap_{j \neq i} A_j(i=1,\cdots,r)$，则存在不全为0的$\lambda_i$使得$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 0$和$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i = 0$，分$\lambda_i \geqslant 0$和$\lambda_i < 0$两种情形即可得出结论.

11.9.12 **最大宽度和最小宽度**. 设C是一个紧凸集. 当方向ξ取遍所有的直线方向时（参见11.5.6.3），C沿ξ方向的宽度的上确界称为C的最大宽度，记作$D(C)$；其下确界称为最小宽度，记作$d(C)$. 证明$D(C)=\operatorname{diam}(C)$，其中$\operatorname{diam}(C)$是$C$的直径.

C的内半径，记作$r(C)$，就是包含在C内的球面的半径的上确界. 若用d表示外围空间的维数，证明：

$$\text{若 } d \text{ 为奇数，则 } r(C) \geqslant \frac{d(C)}{2\sqrt{d}};$$

$$\text{若 } d \text{ 为偶数，则 } r(C) \geqslant \frac{\sqrt{d+2}}{2(d+1)} \cdot d(C).$$

如有需要，可参看［EN］第112页—114页. 这些不等式是否是所可能的最好估计？

11.9.13 设A是一个开凸集，f: $A \to \mathbf{R}$. 如果$\forall x, y \in A$，f满足

$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$，则 f 是凸的．如有需要可看 [VE] 第 130 页．

11.9.14 **支撑函数．** 具体计算球 $B(a, r)$ 上一点的支撑函数和以原点为中心的立方体上一点的支撑函数．证明：如果 f 和 g 分别是 A 和 B 的支撑函数，则 Minkowski 和集 $\lambda A+\mu B$ 的支撑函数就是 $\lambda f+\mu g$．

11.9.15 **凸函数的可微性．** 设 A 是一个开凸集，并且 $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ 是一凸函数．证明对于外围空间的一个标架 $\{e_i\}$ 来说，如果在一点 $a \in A$ 处存在偏导数 $\partial f/\partial x_i$，则 f 在 a 点是可微的．由此借助于 11.8.10.3 推出 f 是几乎处处可微的(利用 Fubini 定理)．

11.9.16 **凸集和数的几何．** 设 Λ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的单位网格，即 $\Lambda=\{(x, y): x, y \in \mathbf{Z}\}$．又设 C 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个紧凸集，且是对称的，即 $-C=C$．证明：如果 C 的面积(参见 9.12 或 12.2)满足 $\mathcal{L}(C) \geqslant 4$，则 $C \cap(\Lambda \backslash(0, 0)) \neq \varnothing$，即 C 含有两个坐标都是整数且不全为零的点(Minkowski 定理)．推广到任意的 d 维空间中去．再从 Minkowski 定理推出：如果 $f(x, y)=a x^2+2 b x y+c y^2$ 是一个正定的二次型，判别式 $D=a c-b^2$，则存在两个全不为零的整数 x, y 使得 $f(x, y) \leqslant \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{D}$．关于"数的几何"最简单的结果的发展情况，可看一本很出色的书 [CS]．也可看 [DE 3] 第 230—231 页和 [LE]．

11.9.17 证明对于欧几里得仿射空间 X 内的任意紧凸集 A，有 $\operatorname{Is}_A(X)=\operatorname{Is}_{\operatorname{Extrem}(A)}(X)$．

11.9.18 在 11.5.8 Jung 定理和 11.7.1 Helly 定理之间是否存在一个关系？

11.9.19 **Kakutani 引理．** 设 C_1 和 C_2 是两个不相交的凸集，且 $x \notin C_1 \cup C_2$．用 Γ_i 表示 $\{x\} \cup C_i$ 的凸包络 $(i=1, 2)$．证明两个集合 $\Gamma_1 \cap C_2$ 和 $\Gamma_2 \cap C_1$ 中至少有一个为空集．

11.9.20 **核．** 使 A 关于 x 是星形集的 $x \in X$ 所成的集合 $N(A)$ 称

为仿射空间X中子集A的核(参见 11.1.2.4)。证明$N(A)$恒为凸的。研究若干个子集A的核$N(A)$。

11.9.21 Lucas 定理. 设P是一个复系数多项式，并且P'是其导数多项式。证明：在$X = C$时，P'的所有的根属于多项式P的根集的凸包络。

若P是三次多项式，且有三个不同的根，认为a, b, c；p, q为P'的根。证明存在一个以p, q为焦点的椭圆，使得三角形$\{a, b, c\}$的三条边相切于此椭圆(如有需要，可利用 17.6.3.6)。

11.9.22 找出把平面分成两个凸集的所有的划分。

11.9.23 Kritikos 定理. 设C是欧几里得空间E中一个内部非空的紧凸集K的边界。对于K的内部的任意一点m，用$R(m)$表示以m为中心、包含K的最小球面的半径，用$r(m)$表示以m为中心被包含在K内的最大球面的半径。证明：在K内存在唯一的一点m，使得差$R(m) - r(m)$为极小。

证明：对于此点m，相伴的外接球和内切球分别至少同C有两个公共点。

由此推出，对于E的任意一个紧的、凸的可微超平面C，至少存在这样的一点，由该点至少可以引出C的 4 条法线。

第 12 章　多胞形，紧凸集

这一章是重要的；由于在前面积累了不少知识，我们在这里已能证明许多困难的结果。多胞形是内部非空的紧多面体；它们是平面上凸多边形和三维空间中凸多面体的推广。

前面三节叙述多胞形的基础内容：面、体积、面积、对偶性和标准的例子。

12.4，12.5，12.6 三节用来介绍正多胞形。它是在第 1 章里已经见过的平面上正多边形和三维空间中正多面体的推广，尽管它们看起来简单，但是对正多胞形的确切定义必须多加小心；由于这个缘故，12.4 节是用来讨论正多边形的，以便读者为接受一般的定义作好准备。12.5 节的主要内容是正多胞形的一些例子；其中有些是很容易的，仅仅是把三维空间中的正四面体、立方体和正八面体推广到任意维空间中去。比较困难的是证明三维空间中十二面体和二十面体的存在性，在第 1 章中已经指出过这一点。最后，列出了四维空间中三个多胞形，其中有两个是相当复杂的。

12.6 节则是给出正多胞形的分类：结论可能会使人感到意外；不仅二维的情形（无限多个正多边形）很特别，而且，当维数 $d \geqslant 5$ 时，事情更为简单，那时，只有三个正多胞形：立方体，余立方体和正则单形。在三维和四维的情形，既有十二面体、二十面体，又有上面介绍的四维空间中三个正多胞形，所以三维和四维的情形是例外的。有关这方面的内容，在 12.6.8 中给出一个带有启发性的注解。

12.7 节证明 Euler 公式：对于任意一个三维多面体，顶点数减去棱数加上面数，恰好等于 2，这是代数拓扑的入门内容。

12.8 节用于研究 Cauchy 定理，该定理表明，同平面多边形的情形相反，三维的凸多面体是不能绕它的棱弯曲的。这是一个

叙述很简单，但证明很难的定理。

最后三节给出下述等周不等式的证明：在面积给定的紧凸集中，球面具有最大的体积。为了得到这一结果，首先必须定义紧凸集的面积，而在 9.12.7 中我们已经注意到，对于任意一个紧集，要定义其面积是颇为困难的。在这里，解决问题的关键是理想地用多胞形去逼近紧凸集，从而利用连续性可把多胞形的面积延拓成为紧凸集的面积。我们给出了等周不等式的两种古典证明，原因是这两种证法都很简洁漂亮。证明只有球面具有最大体积是更为困难的。有关这一问题的历史发展情况的参考文献，是在这一章中陆续列出的。

对于三维多面体，我个人认为，用纸(或硬纸板)、圆规、剪刀和胶水构作不同类型的多面体是有益而且有趣的；对此，如有需要，可参阅基本的参考文献 [WN]。也可参看 [LP]。

我们考虑的每一个空间 X 均是维数为有限数 d 的实仿射空间。除 12.1 节和 12.7 节外，在 X 上都已安装了一个欧几里得结构。在 12.4 节中维数为 2，在 12.7 和 12.8 中维数为 3。

12.1 定义，例子，面

12.1.1 定义. X 的一个凸多面体是 X 的这样一个子集，它是闭半空间的有限交(参见 2.7.3)；一个多胞形就是一个内部非空的紧凸多面体(参见 11.2.7)。当 $\dim X = 2$ 时，一般不说多胞形，而称之为多边形。

12.1.2 例子

12.1.2.1 平行六面体. 如果 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,d}$ 是一个单形，则平行六面体

$$P = \left\{x_0 + \sum_{i=0}^{d} \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i} :\ \lambda_i \in [0,1]\ \forall i\right\}$$

是一个多胞形(参见 9.12.4.2)。

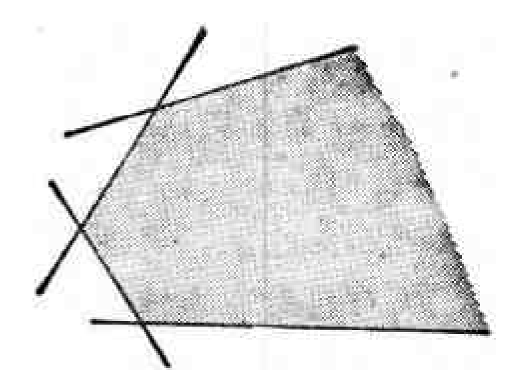


图 12.1.1.1

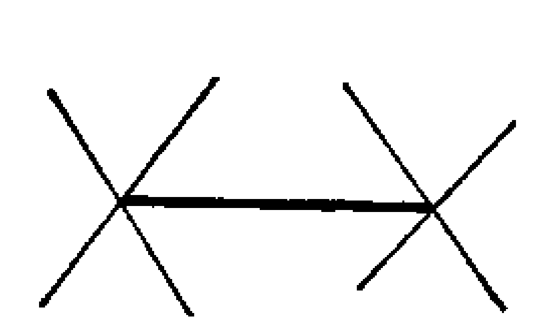


图 12.1.1.2.

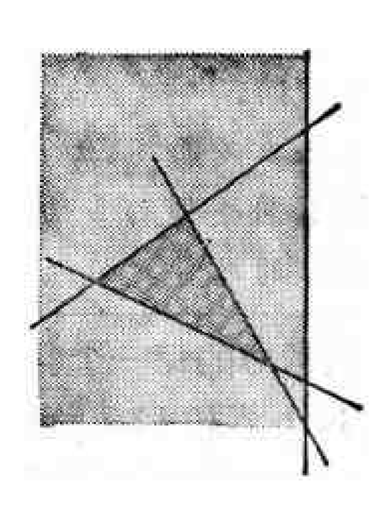


图 12.1.1.3.

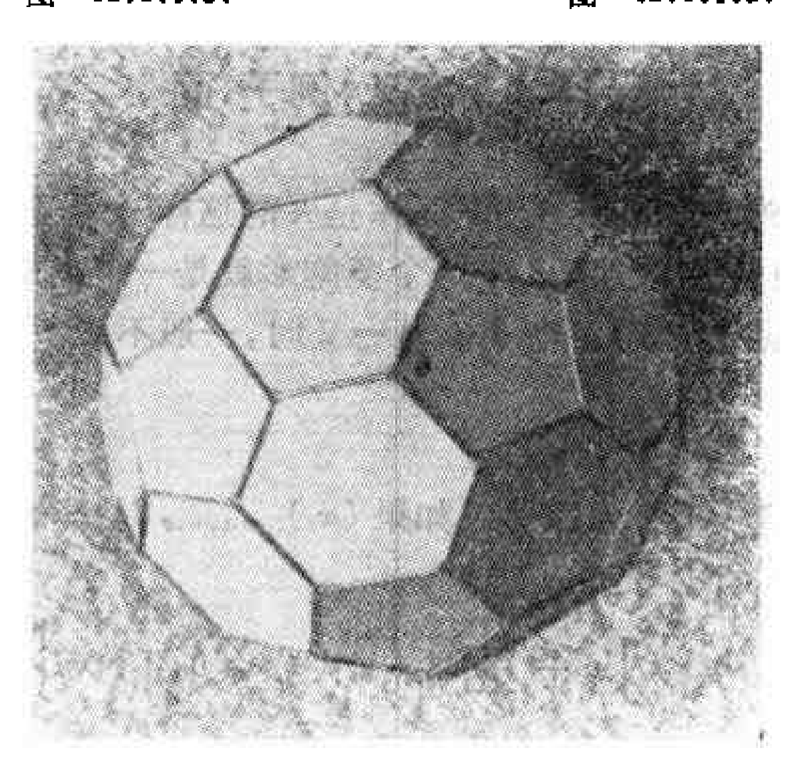


图 12.1.1.4.

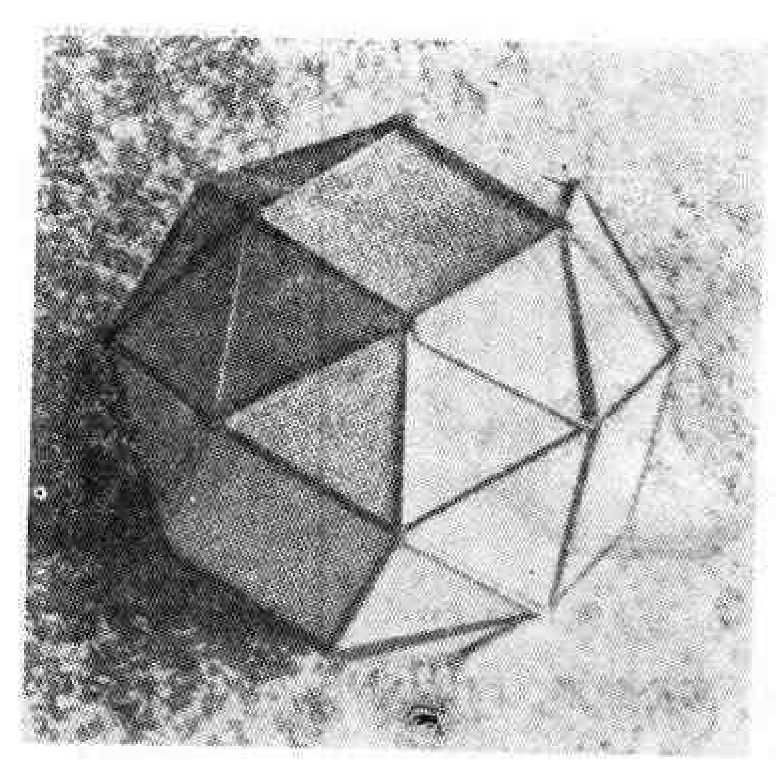


图 12.1.1.5. A. Holden，《形状、空间和对称》，CEDIC 出版社。

图 12.1.1.6. Coxeter，《正则复形多胞形》，剑桥大学出版社。

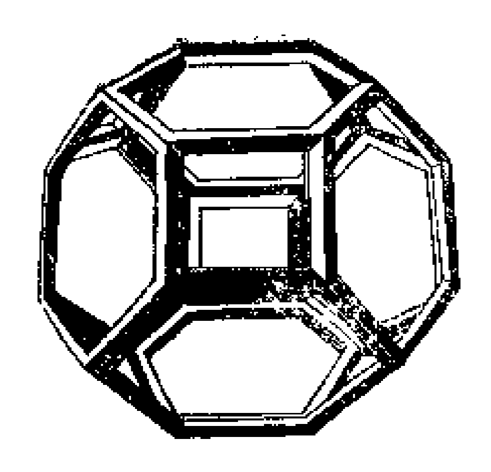



图 12.1.1.7. 达·芬奇为 Luca Paccidi 长老《神奇的比例》一书所作的插图.

12.1.2.2 实心单形. 同样

$$S=\left\{\sum_{i=0}^{d}\lambda_i x_i:\ \lambda_i\geqslant 0,\sum_i\lambda_i=1\right\}$$

也是一个多胞形.

12.1.2.3 一个球是一个紧凸集. 然而，只要 $d\geqslant 2$，它就不是多胞形.

12.1.2.4 凸多面体的有限交仍是凸多面体. 一个凸多面体和一个仿射子空间之交仍是此仿射子空间中的一个凸多面体；如果此子空间同一个多胞形的内部相交，则上述结论对于该多胞形依然成立.

12.1.2.5 三个标准的多胞形是必须掌握的:

——标准立方体 $\mathrm{Cub}_d=\{(x_1,\cdots,x_d):\ |x_i|\leqslant 1\ \forall i=1,\cdots,d\}$,

——标准余立方体 $\mathrm{Coc}_d=\left\{(x_1,\cdots,x_d):\ \sum_i|x_i|\leqslant 1\right\}$,

——标准实心单形 $\mathrm{Simp}_d=\left\{(x_1,\cdots,x_{d+1}):\ \sum_i x_i=1,\ x_i\geqslant 0\ \forall i\right\}$;

立方体和余立方体是 $\mathbf{R}^d$ 中的多胞形，而 Simp_d 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的超平面 $H=\left\{(x_1,\cdots,x_{d+1}):\ \sum_i x_i=1\right\}$ 中的一个多胞形. 我们分别把

欧几里得空间中每个与 Cub_d, Coc_d 和 Simp_d 相似的(参见 9.12.3)多胞形称为 d 维立方体，d 维余立方体和 d 维实心单形. 我们注意到，当 $d=2$ 时，立方体和余立方体是恒同的. 但当 $d\geqslant 3$ 时，立方体和余立方体是不同的，例如可从 12.1.11.2 和 12.1.11.3 看出这一点.

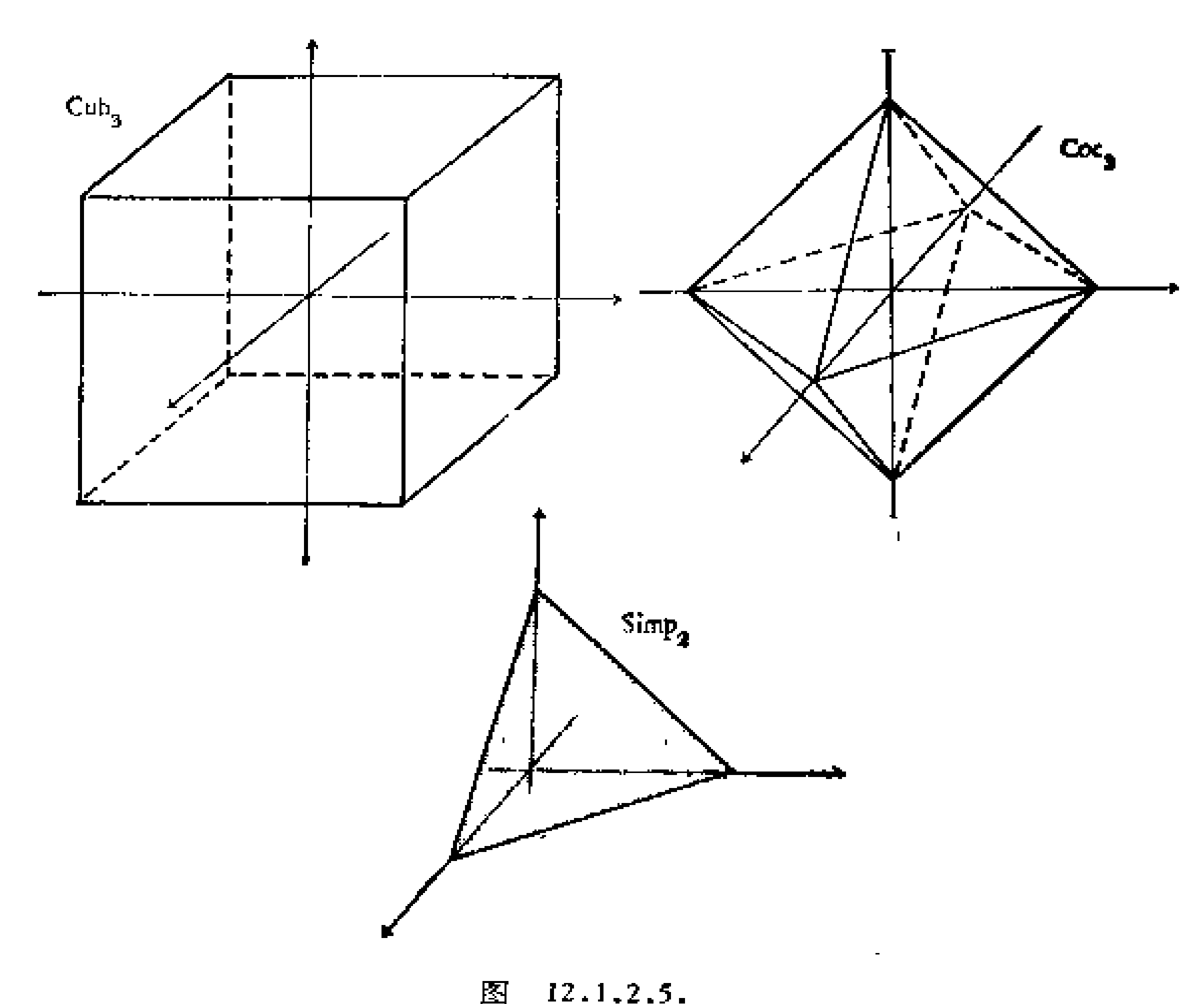


图 12.1.2.5.

12.1.2.6 对偶. 在这一节中，X 是一个欧几里得向量空间；设 $(a_i)_{i=1,2,\cdots,n}$ 是 X 中有限个点，且 $Q=\mathscr{E}(a_1,\cdots,a_n)$ 是 $(a_i)_{i=1,2,\cdots,n}$ 的凸包络，则凸集 Q^*，即 Q 的配极 (参见 11.1.5) 是一个凸多面体；若还有 $0\in\mathring{Q}$，则 Q^* 是一个多胞形，称为 Q 的对偶.

由定义：$Q^*=\left\{x\in X:\left(x\middle|\sum_i\lambda_i a_i\right)\leqslant 1\ \ \forall\lambda_i\geqslant 0,\ \sum_i\lambda_i=1\right\}$；因而 $Q^*=\bigcap_i\{x\in X:\ (x|a_i)\leqslant 1\}$ 是一个凸多面体. 接下

来再应用 11.4.8 即可.

12.1.2.7 例子. Cub_d 的对偶是 Coc_d, Coc_d 的对偶是 Cub_d. 注意,我们很快就会看到,在多胞形全体和有限多个点的具有非空内部的凸包络全体之间有一个恒等关系(参见 12.1.15). 从而,我们证明了下述的命题:

12.1.2.8 命题. 设 X 是一个已给的欧几里得向量空间. 对于任意一个多胞形 Q, 若 $0\in Q$, 则 Q^* 仍是一个内部含有 0 点的多胞形,而且 $Q^{**}=Q$. 称 Q^* 是 Q 的对偶.

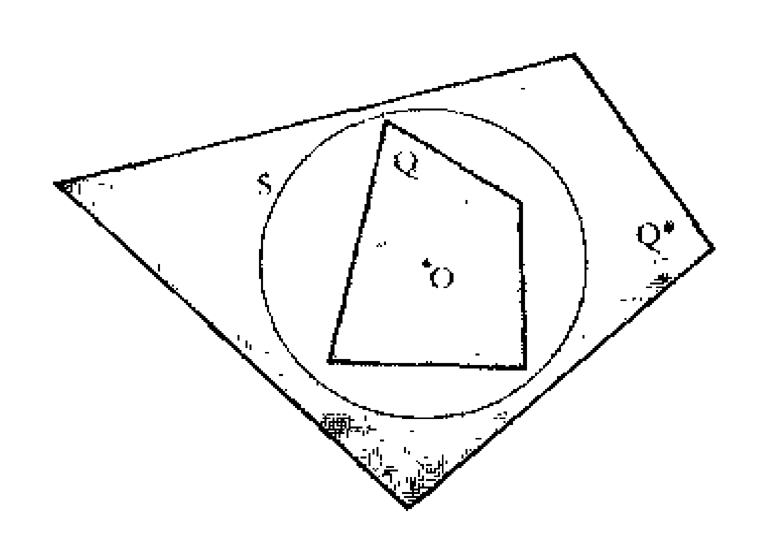


图 12.1.2.8.

12.1.3 附注

12.1.3.1 多面体(未必是凸的)是指什么呢? 有一种定义是这

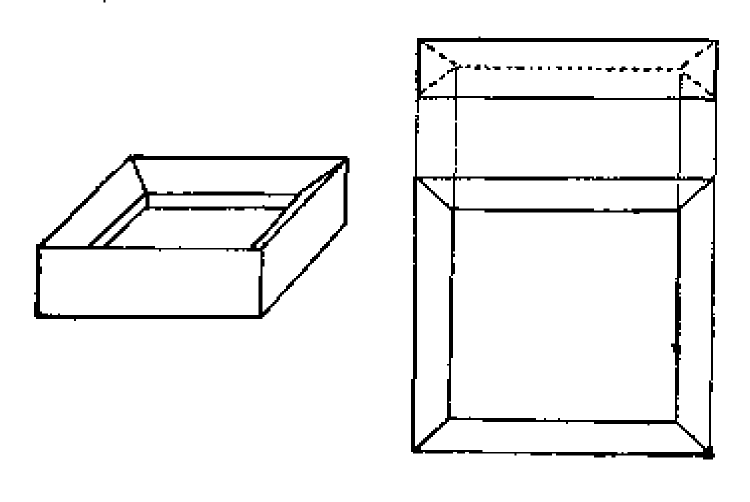


图 12.1.3.1.

样的：一个多面体是紧凸多面体的有限并集．我们注意到这些多面体不一定是凸的，甚至不一定是单连通的．在某些几何中就采用上述的定义，例如可参看[HR]；对于别的定义和其它的观点，

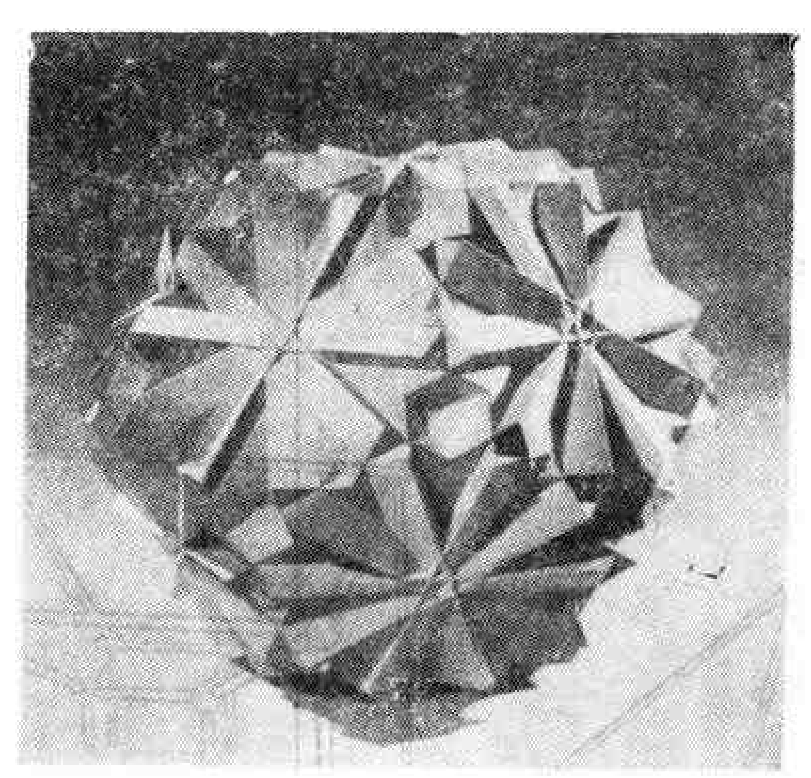


图 12.1.3.2.1. Wenninger，«多面体模型»，剑桥大学出版社.

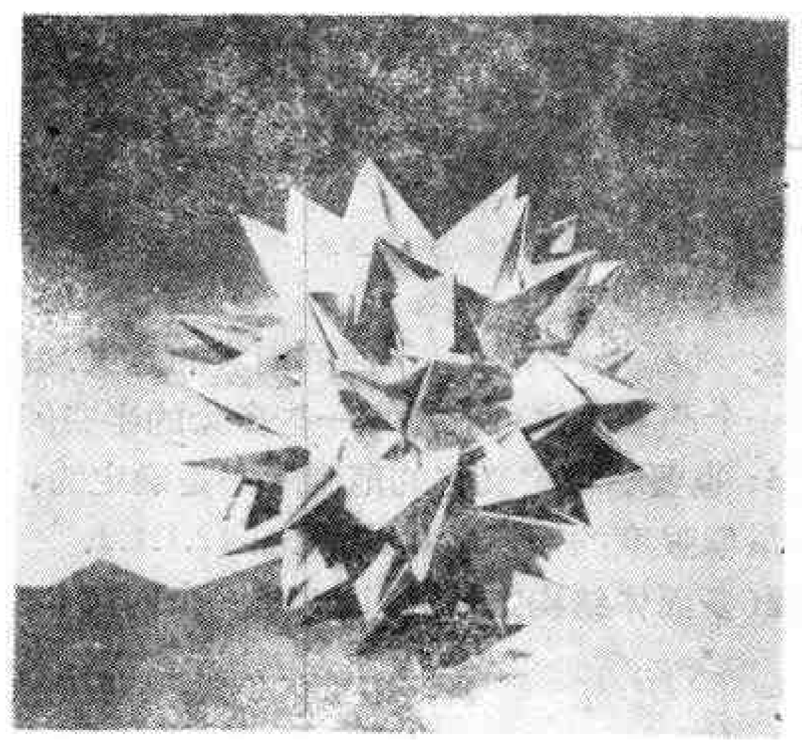


图 12.1.3.2.2. Wenninger，«多面体模型»，剑桥大学出版社.

例如可看[AV],[ST-RA],[ZN]第229页.

12.1.3.2 关于用纸板手工构作多面体及其形形色色的变体,基本参考文献是[WN];要花好几个钟头才能制作出图12.1.3.2.2中的多面体.

12.1.3.3 为了在2维平面上表示3维、4维或者维数更高的多面体,可采用好几种办法;例如图12.1.1.7,12.1.3.3,12.5.6.1—12.5.6.5所示.关于这些图形的说明或者其它的方法,参考文献有[H-C]第145—147页,[CR 2]第VIII章和[FT 2]最末插页中的立体摄影望远镜.

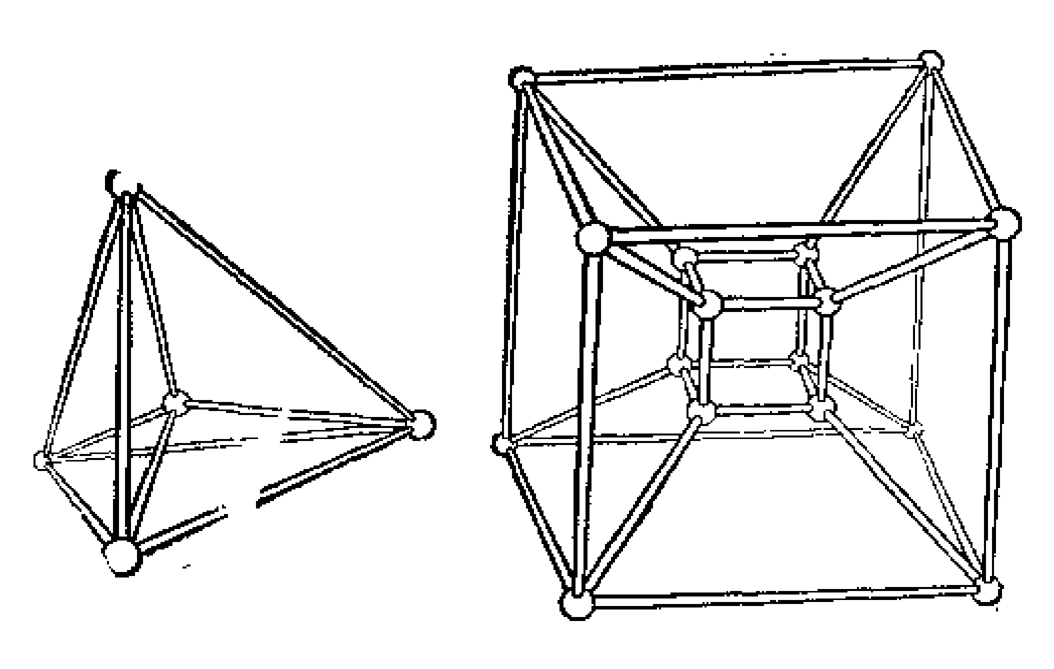


图 12.1.3.3.

12.1.4 注意. 为了很好地领会下面的内容的意义.很重要的一点是要明瞭一个凸多面体可能是用一些多余的半空间来定义的,见图12.1.1.3;也要明瞭定义它的范围未必是确定的,甚至在半空间个数已达最低限度的情形亦如此,见图12.1.1.2.

12.1.5 定理(多面体结构定理). 设P是一个内部非空的凸多面体,且设$P=\bigcap_{i=1}^{n} R_i$是一个最低限度的写法,即R_i都是闭半空间,并且P不能写作个数比n更小的有限多个闭半空间之交,则

(i) 若不计次序，则 R_i 都是确定的；

(ii) 若 H_i 表示定义 R_i 的超平面 $\mathrm{Fr}\, R_i$，则 $H_i\cap P$ 是 H_i 内一个内部非空的凸多面体，称为 P 的第 i 个面(当 $d=2$ 时，称为第 i 条边)，记作 $\mathrm{Face}_i P$；

(iii) $\mathrm{Fr}\, P=\bigcup_i \mathrm{Face}_i P$.

12.1.6

约定：以后凡将一个内部非空的凸多面体写为 $P=\bigcap_i R_i$ 时，总是指最低限度写法。

设固定 i，$P'=\bigcap_{j\neq i} R_j$；则由于是最低限度写法，故存在 $x\in P'\backslash R_i$。设 $a\in \mathring{P}$，根据 11.2.4，有 $y=[a,x]\cap H_i\in \mathring{P}'$，于是，$y$ 在 H_i 中属于 $H_i\cap P'$ 的内部。因为 $\mathring{R}_i=R_i\backslash H$ 以及 $\mathring{P}=\bigcap_i \mathring{R}_i$，故有

$$\mathrm{Fr}\, P=\bigcup_i\left[\mathrm{Fr}\, R_i\cap\left(\bigcap_{j\neq i} R_j\right)\right]=\bigcup_i (H_i\cap P)=\bigcup_i \mathrm{Face}_i P.$$

最后，因为所有的 H_i 都是不同的，公式 (iii) 表明：所有的面都是作为 X 的子集而由 P 决定的，R_i 自然更是如此。

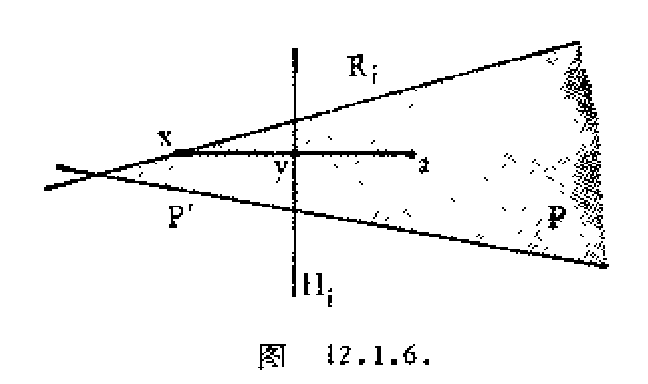


图 12.1.6.

12.1.7 例子. 如果 P 是一个多胞形，它的面仍为多胞形。如果 H 是 X 的一个超平面，$H\cap\mathring{P}=\varnothing$，并且 P 是一个多胞形，则 $H\cap P$ 是 H 的一个多胞形，$H\cap P$ 的面则是 $H\cap \mathrm{Face}_i P$。因为我们可以在 P 的面上再开始作“面”运算，故有下述的定义：

12.1.8 定义. 设 P 是一个内部非空的凸多面体。把 P 的 $(k+1)$

维面中的一个面称为 P 的 k 维面．其中的面是从 P 的 $(d-1)$ 维面开始的 $(k=0,1,\cdots,d-1)$．一维面称为棱（当 $d=2$ 时，称为边）．两个 k 维面的交集如果为 $(k-1)$ 维面，则称这两个 k 维面是相邻的．

现在，读者想必会猜到，0 维面就是 11.6.1 的意义下的顶点；确切地说：

12.1.9　命题． 设 P 是一个内部非空的凸多面体；则

(i) 设 $x\in \operatorname{Fr} P$，则所有带有包含 x 的面的超平面的交集与 P 在点 x 处的支撑超平面的交集是一致的．特别，P 的阶数为 α 的点都是 P 的 α 维面的相对内部的点；于是，P 的顶点和 0 维面是一致的；

(ii) P 的顶点和 P 的端点是一致的．

如果 H 是 P 的支撑超平面，则由 H 定义的一个半空间，比如说 R，必满足 $P=P\cap R$，于是由 12.1.5 可知：如果 H 不是 H_i 中的某一个，则不必加以考虑，由此得到 (i)．如果 $x\in \operatorname{Fr} P$ 不是端点，则存在一线段 $[y,z]\subset \operatorname{Fr} P$，而 $x\in\ ]y,z[$，故 x 的阶数大于 0．

12.1.10　推论． 设 X 是欧几里得向量空间．Q 是一个多胞形，使得 $0\in \overset{\circ}{Q}$，则 Q 的 k 维面集合同对偶多胞形 Q^*（Q 关于单位球面的配极，参见 10.7.11）的 $(d-k-1)$ 维面集合之间存在双射如下：如果 Y 是决定所考虑的 k 维面的 k 维子空间，则确定 Q^* 的相应的面的子空间 Y^* 是 Y 的所有点的配极超平面的交集．

从 12.1.9 和 11.5.3 即得推论．

12.1.11　标准的例子

12.1.11.1　标准单形． 设 $(e_i)_{i=1,\cdots,d+1}$ 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 空间的一个典范底．因为标准单形是这 $d+1$ 个向量的凸包络，故顶点必在这 $d+1$ 个点之中．这样，它就恰好有 $d+1$ 个顶点，这是因为采用的已是最低限度写法．同样的理由，$(e_i)_{i=1,\cdots,d+1}$ 中任取 $i+1$ 个元素组成一个子集，其凸包络为标准单形的一个 i 维面，并且不存在其它的 i 维面了．所以 i 维面是 $\binom{d+1}{i+1}$ 个，并且，每一个均

是正则单形.

12.1.11.2 标准立方体. 标准立方体的面是 $2d$ 个超平面 $x_i = \pm 1$ ($i = 1, \cdots, d$), 这是因为其中没有一个是多余的(参见 12.1.5). 但一个这样的面是 $(d-1)$ 维的立方体, 因而 Cub_d 所有的面都是立方体. 一个这样的 k 维面可如下具体写出: 将 x 的 $d-k$ 个坐标值取定为 ± 1, 其它坐标的绝对值小于、等于 1; 因此立方体具有 $\binom{d}{k} 2^{d-k}$ 个 k 维面. 特别, 它具有 2^d 个顶点和 $2d$ 个面; 这 2^d 个顶点是 $(\pm 1, \cdots, \pm 1)$.

12.1.11.3 标准余立方体. 我们应用 12.1.2.7, 12.1.11.2 和 12.1.10 可以推出: Coc_d 的每一个面是正则单形, 并且, k 维面有 $\binom{d}{k+1}\binom{d}{k+1} 2^{k+1}$ 个. 特别, 它有 $2d$ 个顶点 $\pm e_i$, 这里 $\{e_i\}$ 是典范基底. Coc_d 有 2^d 个面.

12.1.12 多胞形的二面角. 我们注意到, d 维多面体的任意一个 $(d-2)$ 维面 A, 都恰好有两个面 F, F' 经过它. 事实上, 利用对偶性 (参见 12.1.10), 这归结为找一条棱的顶点, 而此棱作为一条线段, 正好含有两个顶点.

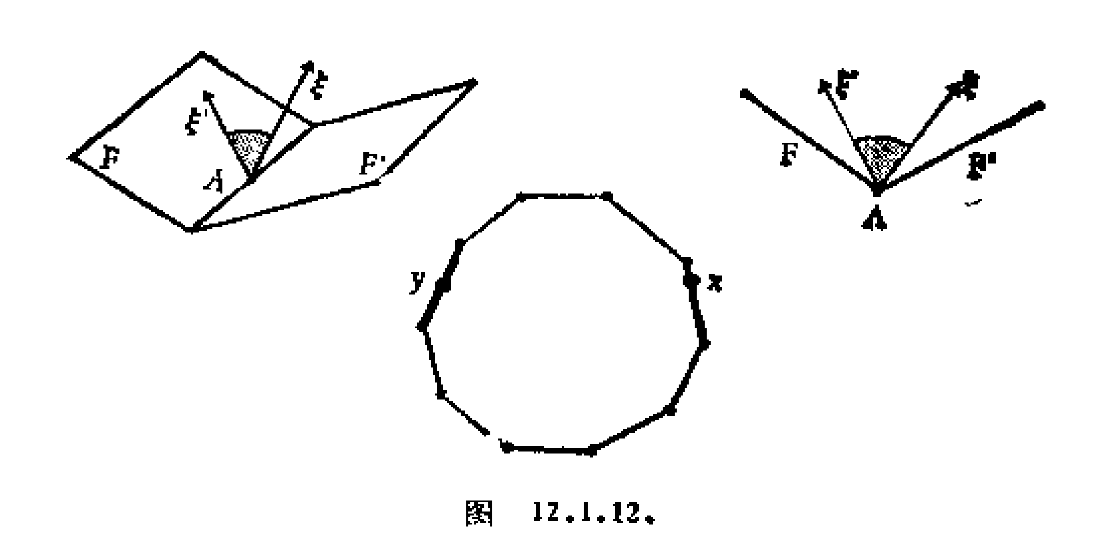


图 12.1.12.

超平面 F 和 F' 确定了 X 的两个单位向量 ξ, ξ', 其中 ξ 是与 F 正交的, 并且在 F 靠 F' 的一侧, 因而是定义好的, ξ' 也是如此.

作为定义，P 在 $(d-2)$ 维面 A 处的二面角就是角度 $\overline{\xi\xi'} \in]0,\pi[$；如果 $d=2$，二面角就是角，而 A 是 P 的一个顶点。

12.1.13 命题. 对一个多胞形的任意两个面，总能通过一连串相邻的面把它们联系起来。

设任有 $x, y \in P$. Y 是 X 中包含 x 和 y 的一个平面；则 $Y \cap P$ 是一个多边形，它的边是 P 的面和 Y 的交集。于是，问题归结为在 P 是一个多边形的情形来证明命题；但是，如果 F 是一条边，$\bar{F}$ 是含 F 的所有的边并含与其中任一边相邻的那些边的集合，则 $\bar{F}$ 是 $\mathrm{Fr}\,P$ 的一个开集，且又是闭集；而 $\mathrm{Fr}\,P$ 是连通的。

12.1.14 附注. 当 P 用定义它的半空间的显式方程给出时（其中可能有多余的半空间），具体地研究 P 的顶点是应用数学中一个重要的课题（参见 11.8.10.10）。与顶点研究有关的算法方面的参考文献可看 [KE] 第 86 页或 [R-V] 第 V 章。

12.1.15 命题. 一个多胞形 P 的顶点个数是有限的，P 则是它们的凸包络。反过来，有限多个点的凸包络是一个紧的凸多面体。

更一般地，任意的 k 维面 $(k=0,1,\cdots,d-1)$ 的个数是有限的，因为从一条线段具有两个端点这一事实出发，利用归纳法即可看出这一点。对反过来的情形，我们可以假设凸包络 Q 是内部非空的，并把它安放到由它生成的子空间中去(参见 11.2.7)；在它的内部一点向量化 X，赋予它一个欧几里得结构，并考虑多胞形 Q^*（参见 12.1.2.8）；根据命题的第一部分，Q^* 是有限多个点的凸包络，因此，再应用一次 12.1.2.8，即证得 $Q^{**}=Q$ 为一多胞形。

12.1.16 推论. 若 P 是 X 的一个多胞形，且 $f \in A(X, Y)$，则 $f(P)$ 是 $f(Y)$ 的一个多胞形。

12.1.17 推论. 设 P, Q 是两个多胞形；则它们的 Minkowski 和集 $\lambda P+(1-\lambda)Q$ 仍是一个多胞形 $\forall\lambda$（参见 11.1.3）。

设 $P=\mathscr{E}((a_i))$，$Q=\mathscr{E}((b_j))$. 由于 $\lambda P+(1-\lambda)Q$ 是一个凸集，故首先有

$$\lambda P+(1-\lambda)Q \supset \mathscr{E}((\lambda a_i+(1-\lambda)b_j)).$$

但又有

$$\lambda P + (1-\lambda)Q \subset \mathscr{E}((\lambda a_i + (1-\lambda)b_j)).$$

这是因为：设 $p = \sum_i \lambda_i a_i$，$q = \sum_j \mu_j b_j$ 使得

$$\sum_i \lambda_i = 1,\ \sum_j \mu_j = 1,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \mu_j \geqslant 0 \quad \forall i \forall j,$$

则有 $\lambda p + \mu q = \sum_{i,j} (\lambda_i \mu_j)(\lambda a_i + (1-\lambda)b_j)$.

从 12.2 到 12.6 各节中，X 是欧几里得仿射空间。

12.2 多胞形的体积

现在，X 是一个欧几里得空间，我们采用 9.12 中关于体积的记号和定义。特别，多胞形有一个体积。

12.2.1 设 H 是一个超平面，$x \notin H$，K 是 H 的一个紧集，并且 $C = \mathscr{E}(\{x\} \cup K)$ 是"以 x 为顶点，K 为底的角锥体"，则有：

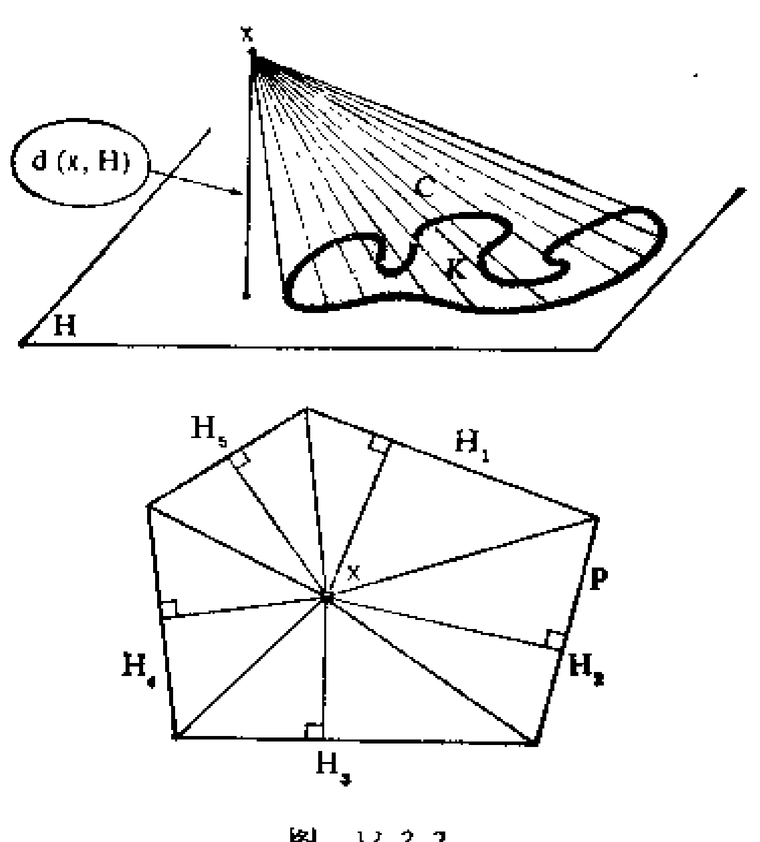


图 12.2.2.

12.2.2 $\mathfrak{L}(C)=\frac{1}{d}\cdot d(x,H)\mathfrak{L}_H(K)$.

事实上,不加改动地沿用 9.12.4.4 的证明即可.

12.2.3 命题. 设 $P=\bigcup_i R_i$ 是一个多胞形(参见 12.1.6),$a\in\mathring{P}$;则有

$$\mathfrak{L}(P)=\frac{1}{d}\sum_i d(a,H_i)\mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P).$$

事实上,根据 12.1.5 (iii) 有 $P=\bigcup_i \mathscr{E}(\{a\}\cup\mathrm{Face}_i P)$. 而

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}(\mathscr{E}(\{a\}\cup\mathrm{Face}_i P))\cap\mathscr{E}(\{a\}\cup\mathrm{Face}_j P)\\&=\mathfrak{L}(\mathscr{E}(\{a\}\cup(\mathrm{Face}_i P\cap\mathrm{Face}_j P)))=0,\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{Face}_i P\cap\mathrm{Face}_j P$ 是被包含在一个 $(d-2)$ 维子空间内的.因此,利用加法,从 12.2.2 即得 12.2.3.

12.2.4 附注. 在练习中将要证明:对于任意一点 $a\in X$,如果用代数距离 $d'(a,\cdot)$ 代替"几何"距离 $d(a,\cdot)$,则 12.2.3 依然成立.这里,$d'(a,\cdot)$ 定义如下:

$$d'(a,H_i)=\begin{cases}d(a,H_i) & 当\ a\in R_i,\\-d(a,H_i) & 当\ a\notin R_i.\end{cases}$$

12.2.5 多胞形的初等体积.

正如标题所表明的那样,读者可以看出,用 Lebesgue 测度去定义多胞形的体积这种相当初等的对象,实在是代价过于昂贵;至于平面多边形的面积,甚至三角形的面积就更是如此了.实际上,我们能用非常初等的方法证明:

12.2.5.1 定理. 给定一个欧几里得空间 X 和 X 的一个边长为 1 的立方体 C,则存在唯一的一个映射 Φ,把多胞形 P 的集合映到 $\mathbf{R}_+$ 中,且满足三条公理:

(VE I) 对于 X 的任意一个平移 t 和任意一个多胞形 P,有 $\Phi(t(P))=\Phi(P)$,

(VE II) 对于任意的多胞形 P,Q,若 $\mathring{P}\cap Q=\varnothing$,且 $P\cup Q$ 是一个多胞形,则 $\Phi(P\cup Q)=\Phi(P)+\Phi(Q)$,

(VE III) $\Phi(C) = 1$.

证明是初等的，但是很长.一个很好的参考文献是［HR］的第2章. 关于定理的证明应该注意几点：首先是要证明对任意选取的一个 a，Φ 必应由按照 12.2.4 改写的公式 12.2.3 给出. 其次，要证明这个公式实际上已提供了一个 Φ，满足全部三条公理. 从而，对于任意一个 $f \in \mathrm{Is}(X)$ 可推得 $\Phi(f(P)) = \Phi(P)$，因而 Φ 实际上不依赖于立方体 C 的选取(这一点可使我们放心了). 这个 Φ 称为多胞形的初等体积.

12.2.5.2 在［HR］中，我们能发现许多有关初等体积的有趣内容，也能找到许多关于 $(d-1)$ 维测度的许多有趣内容（参见 9.12.7). 关于初等体积，尽管它看上去很简单，然而还是有大量的问题提了出来. 其中之一是著名的 Hilbert-Dehn 问题，这个问题的背景是这样的：读者在研究证明 12.2.5 时，将会看到其中有分析的论证：一则用到了 Φ 的连续性，二则，为了证明一个单形 S 的体积等于 $\frac{1}{d}\times$(高度)$\times$(底体积)，先用内接棱柱多胞形逼近 S，再通过求极限的过程完成证明. 对于 $d=2$ 的情形，没有这个必要，因为一个平行四边形是两个对称三角形的和，于是，我们可用 $t \in \mathrm{Is}(X)$ 代替 (VE I) 中仅有的平移，强化公理 (VE I)，用更初等的方法来构作 Φ，例如参看［HD I］第 292 页. Hilbert 提出的

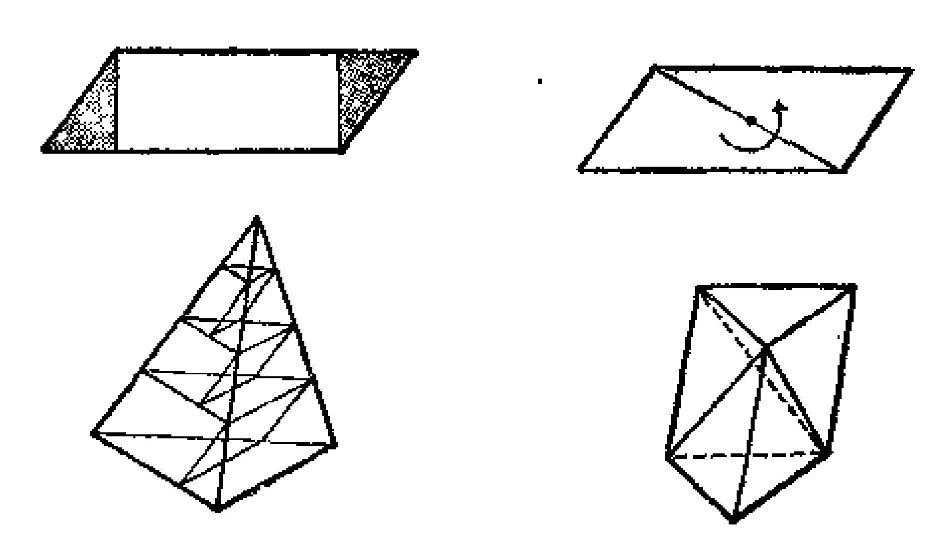


图 12.2.5.

问题如下：X 中两个体积相等、维数大于或等于 3 的多胞形是不是总能分解成相互等距的一些多胞形？Dehn 首先对 $\mathbf{R}^3$ 中多胞形作了考察，他证明了这是不可能的. 事实上，Dehn 对此问题给出了明确的判定准则. 最简单的反例是取一个单位立方体和一个体积为 1 的正则单形（参见 12.1.2.5），参见 [HR] 第 49—52 页. 对此，V. G. Boltianskii 在《Hilbert 第三问题》(John Wiley 出版社，1978 年)一书中用图形作了很好的阐述.

12.3 多胞形的面积

设 $P=\bigcap\limits_i R_i$ 是欧几里得空间 X 的一个多胞形；它的面 $\mathrm{Face}_i P$ 分别是欧几里得空间 $H_i\subset X$ 中的多胞形，因此它们的体积为 $\mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P)$. 从而，根据 12.1.5 (iii)，$P$ 的边界 $\mathrm{Fr}\,P=\bigcup\limits_i \mathrm{Face}_i P$ 容有一个自然的 $(d-1)$ 维体积（参见 9.12.7），它等于 $\sum\limits_i \mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P)$：我们援用通常的三维空间的情形，称它为多胞形的面积，以免老是要写 $d-1$. 最后，这可写成：

12.3.1 定义. 一个多胞形 $P=\bigcap\limits_i R_i$ 的面积，记作 $\mathfrak{A}(P)$，是正的数量 $\mathfrak{A}(P)=\sum\limits_i \mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P)$（当 $d=2$ 时，就是周长）.

12.3.2 例子.

如果 f 是 X 的一个比值为 μ 的相似，则对任意一个多胞形 P，我们有

$$\mathfrak{A}(f(P))=\mu^{d-1}\mathfrak{A}(P).$$

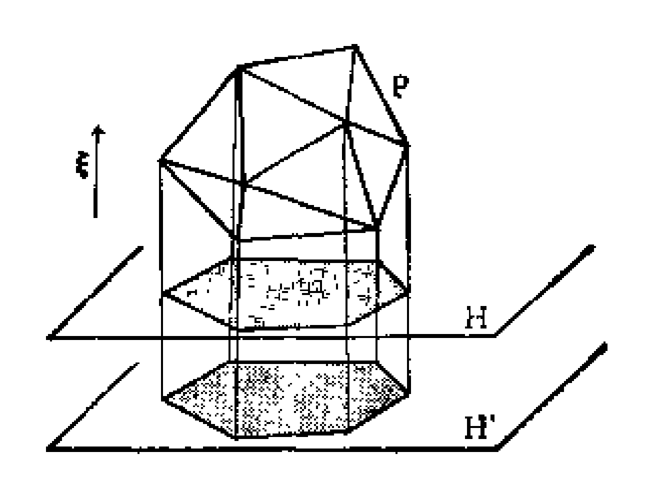
从定义和 9.12.3 可得出此结果.

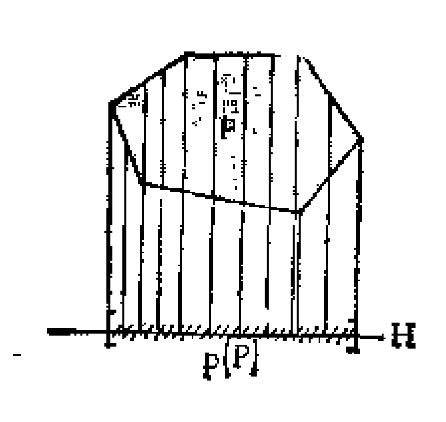
下面的公式表明：在适当的意义下，一个多胞形的面积是对于空间中全体超平面方向而言，该多胞形在这些超平面上投影体积的平均值. 为了把它写成公式，设 K 是 X 的一个紧集，H 是一个超平面，并且 $p\colon X\to H$ 是 X 到 H 上的正交投影，则我们注意到，

$\mathfrak{L}_H(p(k))$ 只依赖于 H，而同 H 无关．如果 ξ 是 X 的一个单位向量，即 $\xi \in S = S(0,1)$，S 是 $\vec{X}$ 的单位球面，则称 $\mathfrak{L}(p_\xi(K))$ 是 K 在任意一个使 $\xi \in \vec{H}^\perp$ 的超平面 H 上的投影 $p(K)$ 在 H 内的体积．利用 9.12.9.5 中的记号，就有：

12.3.3 定理 (Cauchy 公式)． 对于任意的 $d \geqslant 2$ 和任意的多胞形 P，如果 σ 表示 S 的典范测度(参见 18.3.7)，我们有

$$\mathfrak{A}(P) = (\beta(d-1))^{-1}\int_{\xi\in S}\mathfrak{L}(p_\xi(P))\sigma.$$





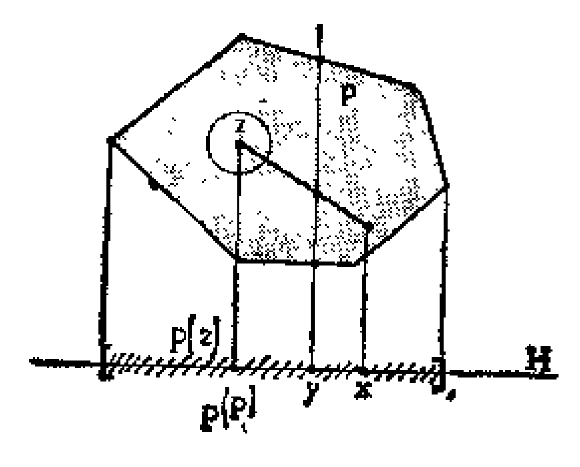


图 12.3.3.

12.3.3.1 第一步． 现在取定一个 $\xi \in S$，满足唯一的条件：$\forall i$，$\xi \notin \vec{H}_i$，这里 H_i 是 $P = \bigcap_i R_i$ 的面的超平面．我们预先注意到，由这些 ξ 所组成的集合在 S 内有一个零测度的补集，对于这样的一个 ξ，我们来证明 $\sum_i \mathfrak{L}(p_\xi(\mathrm{Face}_i P)) = 2\mathfrak{L}(p_\xi(P))$；应证在上

述图形中该式显然成立，即如果不计零测度集合，那么 $p(P)$ 内任意一点恰好是 $\mathrm{Fr}(P)$ 中两点在 p 下的象点，这里 $p: X \to H$，并且 $\xi \in (\vec{H})^{\perp}$.

然而，我们有 $\mathfrak{L}(p(P)) = \mathfrak{L}(\widehat{p(P)}^{\circ})$. 设 $y \in \widehat{p(P)}^{\circ}$；必须证明 $p^{-1}(y) \cap \mathring{P} \neq \emptyset$，因为这时 $p^{-1}(y)$ 才不是缩成为一点的一条线段，而且它的边界恰好有两点. 任取 $z \in \mathring{P}$；如果 $p(z) = y$，则已证毕，否则，存在 $x \in p(P)$，使得 $y \in [z, x[$，且对于任意的 $u \in p^{-1}(x)$，根据 11.2.4 有 $t \in p^{-1}(y) \cap [z, u] \in \mathring{P}$.

12.3.3.2 第二步. 对于每一个 H_i，固定一个 $u_i \in S$，使 $u_i \in \vec{H}_i^{\perp}$. 根据 9.12.4，$\mathfrak{L}(p_\xi(\mathrm{Face}_i P)) = |(\xi|u_i)| \cdot \mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P))$，于是，由 11.3.1 就有

$$\int_{\xi \in S} \mathfrak{L}(p_\xi(P))\sigma = \frac{1}{2}\int_{\xi \in S}\left(\sum_i \mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P)\right)|(\xi|u_i)|\sigma$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i \left[\mathfrak{L}_{H_i}(\mathrm{Face}_i P)\int_{\xi \in S}|(\xi|u_i)|\sigma\right].$$

然而，对于任意一个单位向量 u，有

$$\int_{\xi \in S}|(\xi|u)|\sigma = 2\beta(d-1);$$

这是一个古典的公式，用微积分就可以证明，参见 12.12.19，但是，不用微积分也可证明如下：因为在等距变换下是不变的，所以，这是一个与 ξ 无关的数量 $k(d)$，应用 12.10.4.1 就能找到 $k(d)$.

公式 12.3.3 有其独立的意义；此外，我们在 12.10 中用它来定义任意一个紧凸集的面积.

12.3.4 附注. 由 Minkowski 所解决的一个令人瞩目的问题是：当各个面的体积和方向给定时，确定这个多胞形. 对此问题有下列很好的文献：[LU]，[AV] 和 [PV 1].

12.3.5 关于多胞形的 Steiner-Minkowski 公式.

设 P 是一个多胞形；我们记得

$$B(P, \lambda) = \{x \in X: d(x, P) \leqslant \lambda\} (\lambda \in \mathbf{R}_+).$$

我们打算研究体积 $\mathfrak{L}(B(P, \lambda))$ 和它在 λ 处的性状. 下面两个图

形说明：当 $d=2$ 时，可见 $B(P,\lambda)$ 包括三个部分：P 本身；在 P 的各边上构作的高为 λ 的矩形的并集；半径为 λ 的一些扇形的并集。依 $\mathfrak{A}(P)$ 的定义，第二部分的面积为 $\sum_i \lambda \mathfrak{L}_{H_i}(\text{Face}_i P) = \lambda \mathfrak{A}(P)$。为了计算第三部分，我们把这些扇形通过平移汇集到同一个中心处，从而看出它们形成一整个圆盘，因而其面积为 $\pi\lambda^2$（参见 9.12.4.4）。所有这一切，都在不计零测度集的差别的条件下成立，因此就有

$$\mathfrak{L}(B(P,\lambda)) = \mathfrak{L}(P) + \mathfrak{A}(P)\lambda + \pi\lambda^2.$$

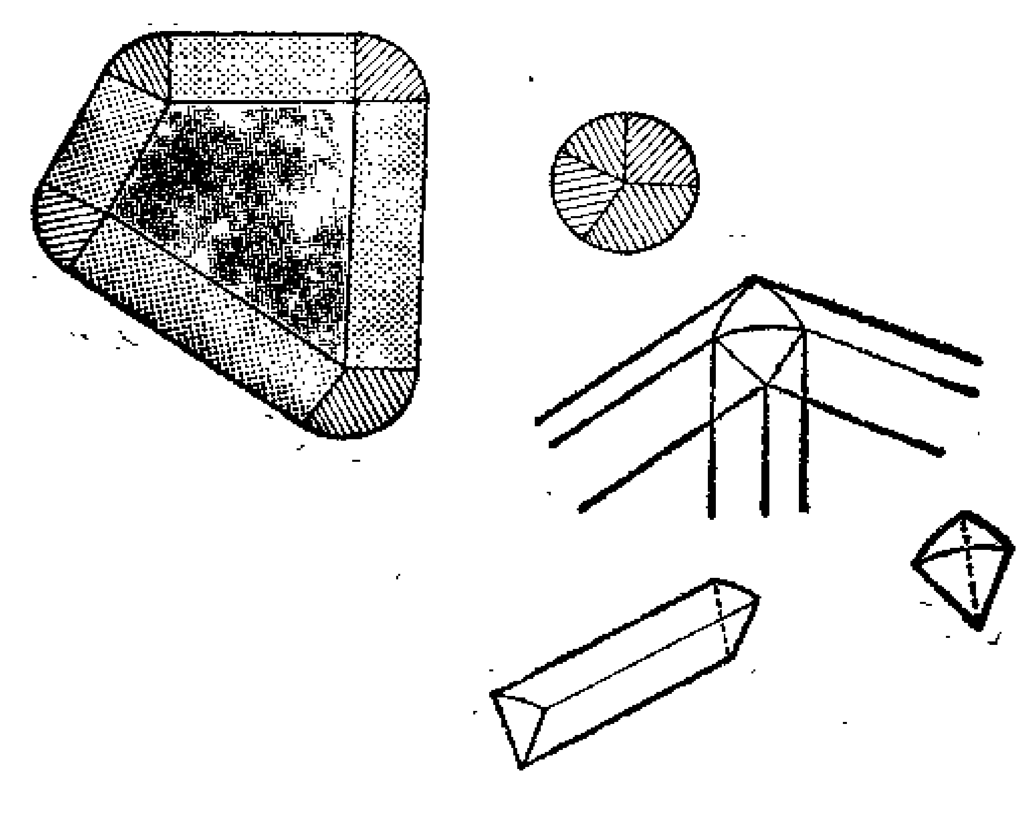


图 12.3.5.

当 $d=3$ 时，可见 $B(P,\lambda)$ 自然地由 4 个部分所组成：P 本身；P 的各个面上构作的高为 λ 的直平行六面体的并集；扇形与棱的正交乘积的并集；以及其并恰好是整个球的球块。第三部分的体积为 λ^2. 上述粗略的设想，可形式化地归结为下述的命题和它的证明。

12.3.6 命题. 对于任意一个 d 维多胞形 P，伴有数量 $\mathfrak{L}_i(P) \in \mathbf{R}$；

$(i=0,1,\cdots,d)$，使得

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}_+^*,\ \mathfrak{L}(B(P,\lambda))=\sum_{i=0}^{d} \mathfrak{L}_i(P)\lambda^i.$$

此外，

$$\forall P,\ \mathfrak{L}_0(P)=\mathfrak{L}(P),\ \mathfrak{L}_1(P)=\mathfrak{A}(P),\ \mathfrak{L}_d(P)=\beta(d).$$

12.3.6.1 设 $y \in P$ 并且有唯一的 $x \in P$，使得 $d(x,y)=d(y,P)$（参见 11.1.7.1）。从 9.2.2 和 11.6.2 的证明推出：对于任意的 $k \geqslant 0$，我们有 $d(x+k\overrightarrow{xy},P)=kd(x,y)$。如果 CN_x 是点 $x \in \operatorname{Fr} P$ 处的一个法锥，置 $S_x=CN_x \cap S(0,1)$，它是 $\vec{X}$ 的单位球面上的一个子集（参见 11.6.2）；据前所述，恰好有

$$B(P,\lambda)\backslash \mathring{P}=\bigcup_{\substack{x\in \operatorname{Fr} P\\ \xi \in S_x}} [x,x+\lambda\xi].$$

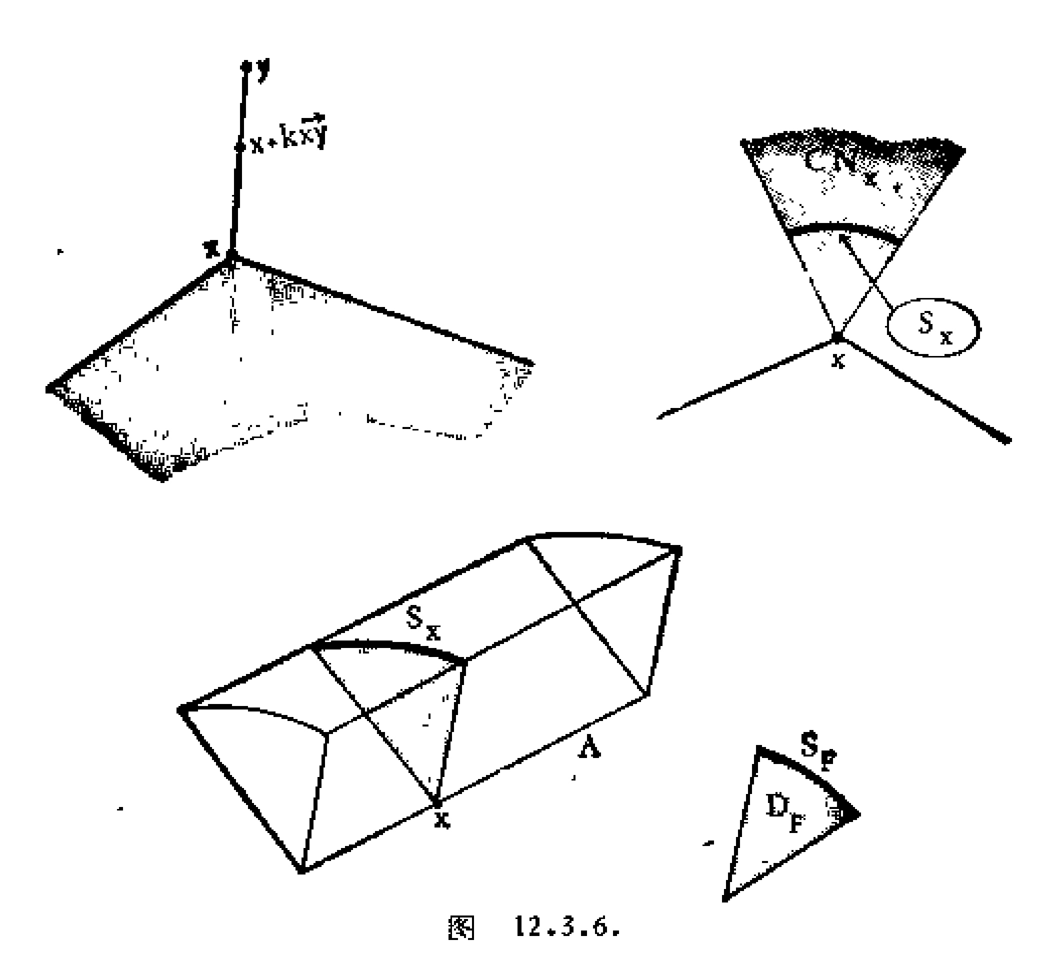


图 12.3.6.

12.3.6.2 对 $x \in \operatorname{Fr} P$，用 ω_x 表示它的阶数，并置

$$\Omega_i=\{x \in \operatorname{Fr} P:\ \omega(x)=i\}\quad (i=0,1,\cdots,d-1).$$

这就是说，Ω_i 是 P 的 i 维面的相对内部的并集：参见 12.1.9. 对于 $i=0,1,\cdots,d-1$，令

$$B_i(\lambda)=\bigcup_{x\in\Omega_i}\bigcup_{\xi\in S_x}[x,x+\lambda\xi].$$

由此推出

$$B(P,\lambda)\setminus\mathring{P}=\bigcup_{i=0}^{d-1}B_i(\lambda).$$

这样得到了 $B(P,\lambda)\setminus\mathring{P}$ 的一个分解，从而

$$\mathfrak{L}(B(P,\lambda))=\mathfrak{L}(P)+\sum_{i=0}^{d-1}\mathfrak{L}(B_i(\lambda)).$$

12.3.6.3 现在，特别应该注意，当 x 在一个给定的面 F 的相对内部 F^* 上取遍一切值时，锥 CN_x 是不动的，因此 S_x 也不动；从而可记之为 S_F 并令 $D_F=\bigcup_{\xi\in S_x}[0,\xi]$. CN_x 由含 x 的那些面的超平面所决定，而当 x 取遍 F^* 时它的面是不会改变的，由此可有前面的做法.

如果 F 是一个给定的 i 维面，则有下面的等式

$$\bigcup_{x\in F^*}\bigcup_{\xi\in S_x}[x,x+\lambda\xi]=F^*\times([0,\lambda]S_F).$$

其实，在这里用到了一个等距和直线的正交直积.

应用 9.12.3 中的两个例子，我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(F^*\times([0,\lambda]S_F))&=\mathfrak{L}(F^*)\mathfrak{L}([0,\lambda]S_F)\\&=\mathfrak{L}(F)\mathfrak{L}(D_F)\lambda^{d-i},\end{aligned}$$

这里体积 $\mathfrak{L}(F)$，$\mathfrak{L}(D_F)$ 分别是在使它们有意义的 i 维和 $(d-i)$ 维的空间中考虑的.

12.3.6.4 用 Φ 表示 P 的全体 i 维面的集合. 由前所述可知：

$$\mathfrak{L}(B_i(\lambda))=\mathfrak{L}_{d-i}(P)\lambda^{d-i}$$

且

$$\mathfrak{L}_{d-i}(P)=\sum_{F\in\Phi_i}\mathfrak{L}(F)\mathfrak{L}(D_F).$$

特别当 $i=d-1$ 时，因为 $D_F=[0,1]$，故有

$$\mathfrak{L}_1(P)=\sum_{F\in\Phi}\mathfrak{L}(F)=\mathfrak{A}(P).$$

当 $i=0$ 时，前述内容和 11.6.2 表明：
$\bigcup_{x\in\Phi} S_x = S$ 或者 $\bigcup_{F\in\Phi} D_F = B(0,1)$，因为 F 是一个点，并且 $\mathfrak{L}(F)=1$，故由此推出 $\mathfrak{L}_d(P)=\mathfrak{L}(B(0,1))=\beta(d)$。

在 12.10.6 中，我们要用到下述命题：

12.3.7 命题. 已给 $a\in X$ 和 $r>0$。则在包含于 $B(a,r)$ 内的多胞形集合上，函数 $\mathfrak{L}_i(.)$ 是有界的。

固定一个 $\lambda>0$，则有 $B(P,\lambda)\subset B(a,\lambda+r)$ 以及 $\mathfrak{L}(B(P,\lambda))\leqslant\beta(d)(r+\lambda)^d$。因为

$$\mathfrak{L}(B(P,\lambda))=\sum_i \mathfrak{L}_i(P)\lambda^i\leqslant\beta(d)(r+\lambda)^d$$

中的每一项均是正的，故对任意的 i，有

$$\mathfrak{L}_i(P)\leqslant\beta(d)\frac{(r+\lambda)^d}{\lambda^i}.$$

12.3.8 注. 现在，我们可以来阐明在 9.12.7 中提到的"涂漆"的思想了。在给 P 涂漆时，我们若涂上厚度很小(为 λ) 的均匀的一层，则在略去不计 $\lambda^2,\lambda^3,\cdots$ 等项时，体积应为 $\mathfrak{L}(B(P,\lambda))-\mathfrak{L}(P)=\mathfrak{A}(P)\lambda$；从而油漆的总量必定同面积 $\mathfrak{A}(P)$ 成比例。在 12.10.7 中，我们将继续这一讨论。

12.4 正多边形

在这一节和下面两节中，X 是欧几里得仿射空间，d 表示它的维数。在本节中 $d=2$。

本节很简单，是为任意维正多胞形的定义作准备的。

12.4.1 定义. 若多边形的各边长度相等，且各角也相等，则称为正多边形。

上述两个条件都是必要的。根据 10.5.2，如果 n 表示多边形的边数，则角度的公共值为 $\frac{n-2}{n}\cdot\pi$。

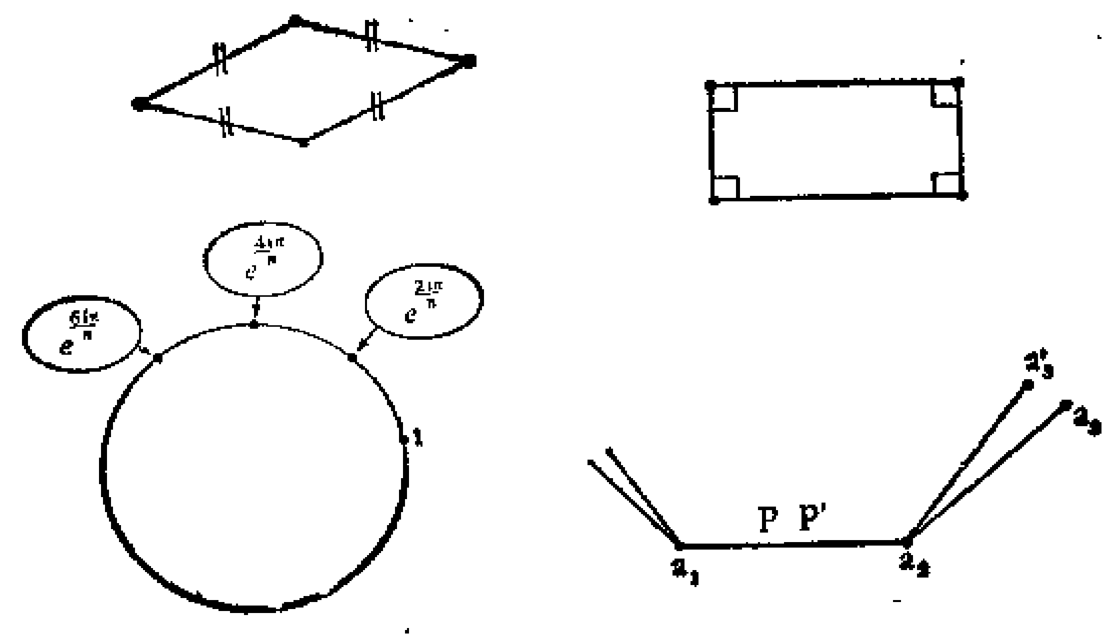


图 12.4.1.

12.4.2 命题. 对于任一整数 $n \geqslant 3$，总存在一个 n 边正多边形. 两个边数相等的正多边形必是相似的.

为证存在性，取 $\{e^{2ik\pi/n};\ k=0,1,\cdots,n-1\}\subset\mathbf{C}=\mathbf{R}^2$ 即可. 为在不计相似差别的条件下证得唯一性，根据 9.6.2 可假设 $P=\mathscr{E}(a_i)$，$P'=\mathscr{E}(a'_i)$. 具有公共边 $a_1=a'_1$，$a_2=a'_2$，而且 P，P' 是在由 $\langle a_1, a_2\rangle$ 决定的同一个半平面内. 则由角相等和边相等的条件，推出 $a_3=a'_3$. 利用归纳法可得 $P=P'$.

12.4.3 公式. 根据 12.4.2，每一正多边形内接于一个圆：称此圆的圆心为多边形的中心；如果 r 是此圆的半径，l 是各边公共长度，则有

$$\boxed{l=2r\sin\frac{\pi}{n}.}$$

为了把正多边形的概念推广到任意维情形，引入一个多边形的稳定群 $G(P)=\mathrm{Is}_P(X)$（参见 9.8.1），于是有：

12.4.4 命题. 一个多边形 P 是正多边形的充要条件是 $G(P)$ 关于序对 (x, F) 是可迁的，这里 (x, F) 是由 P 的一个顶点 x 和 P 的一条含 x 的棱 F 所组成的.

必要性．只要首先证明 $\{e^{2i k\pi/n}\}$ 多边形容有一个群 $\mathbf{Z}_n$ 关于顶点可迁就够了；然后，我们就可把问题归结为 (x, F)，(x, F') 的情形加以研究．这时或有 $F = F'$，或有 $F \neq F'$．在后一种情况，关于直线 $\langle 0, x\rangle$ 的对称把 F 映到 F' 上，并使 x 保持固定不动．

充分性．因为 $G(P)$ 关于顶点是可迁的，故角度都相等．既然对边也是可迁的，故边也都相等．

12.4.5 根据 12.1.12，当 $x \in F$ 时，序对 (x, F) 共有 $2n$ 个．从而根据 9.6.2，我们有 $\# G(P) = 2n$．该群的结构在 1.8.3.4 中已作过研究，它是半直积 $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_2$ 或者是二面群 $\mathscr{D}_{2n}$，参见 0.2．

12.4.6 几何结构． 当 $n = 6$ 或 $n = 10$ 时，几何结构如图 12.4.6.1 和图 12.4.6.2 所示．当 $n = 3$ 或 $n = 5$ 时，几何结构当然可从 $n = 6$ 和 $n = 10$ 的情形推出．$n = 5$ 的情形是常常遇到的，要画出正五边形，或要用纸制作正十二面体（参见 12.5.5），甚至要制作足球（图 12.1.1.4），都必须充分了解这一情形．

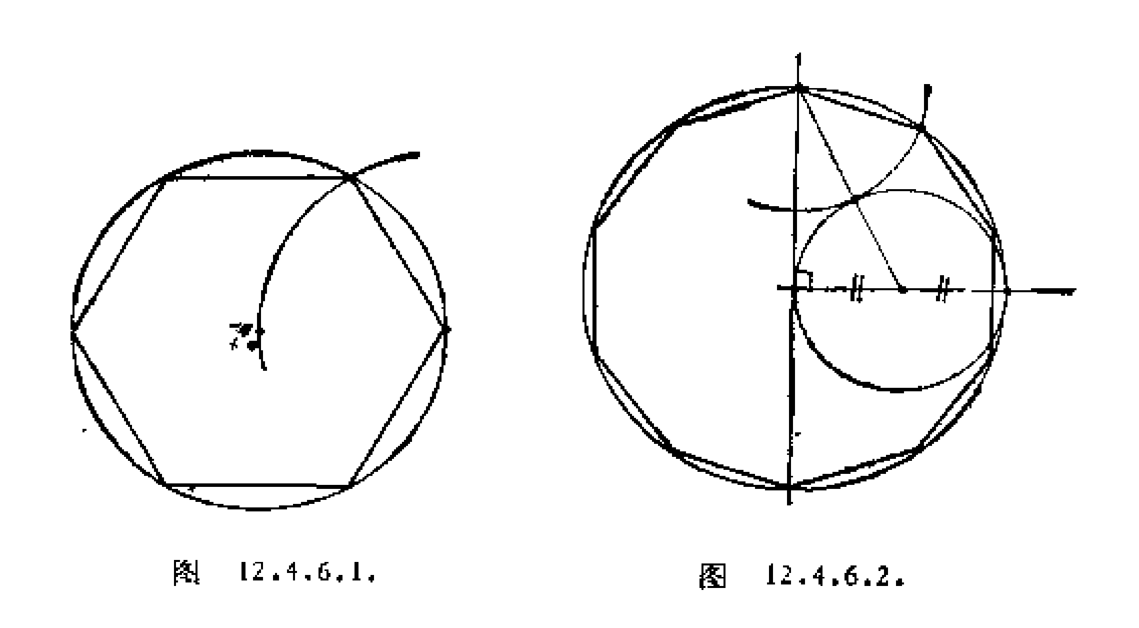


图 12.4.6.1．　　图 12.4.6.2．

如果我们会作一个 n 边正多边形，则我们也能作出一个 $2n$ 边正多边形，因为用直尺和圆规即可作出角的平分线．用直尺和圆规作正 n 边形是一个有趣的代数问题，已被 Gauss 所解决．实际上可以作出的正 n 边形只能是 $n = 2^k n_1 \cdots n_k$ 的情形，这里 n_i 是

互不相同的，形如 $n_i = 2^{2^{\alpha_i}} + 1$ 且是素数。当 α 取什么值时 $F_\alpha = 2^{2^\alpha} + 1$ 是一个素数，这是至今尚未解决的一个数论的问题；我们知道 $F_0 = 3$，$F_1 = 5$，$F_2 = 17$，$F_3 = 257$，$F_4 = 65537$ 都是素数，而这些就是仅知的为素数的 F_α。我们还知道，对众多的 α 值，F_α 不是素数。有一个猜测：作为素数的 F_α 的数目是有限的。关于这些称为"Fermat 数"的 F_α 可看 [HA-WR] 第 14—15 页。

F_1 和 F_2 的情况见图 12.4.6.1 和图 12.4.6.2。关于构作正 17 边形或边数更多的正多边形，关于 Gauss 的结果的证明，可看 [LB 1] 第 110—153 页，或更近代的参考书 [SW] 第 17 章。

12.5 正多胞形：定义、例子

尽管三维情形看起来很简单，但要定义一个正多胞形是并不容易的(有时也称之为正多面体)；必须加上相当强的条件。为了体会这一点，读者可以试试自己来给出定义，或可参看 12.12.7；也请参看古典文献，诸如 [FT 2]，[CR 2]，[HD 2]，读者可对这些文献作评论性的研究。合适的定义是受 12.4.4 的启发而来的。

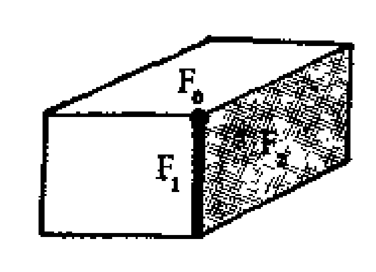


图 12.5.1.

12.5.1 定义. 设给定一个 d 维多胞形 P，d 元组 $(F_0, F_1, \cdots, F_{d-1})$ 由 P 的使 $F_i \subset F_{i+1}$ 的 i 维面 F_i 构成 $\forall i = 0, 1, \cdots, d-2$。则称 $(F_0, F_1, \cdots, F_{d-1})$ 为 P 的旗。如果 P 的稳定群 $G(P) = Is_P(X)$ 对于 P 的所有的旗都是可迁的，则称 P 是正多胞形。

关于更几何化的定义，参看 12.12.7。

12.5.2 推论. 在 12.5.2 中，假设 P 是一个正多胞形。

12.5.2.1 P 的顶点系的重心 O 称为 P 的中心。O 是 $G(P)$ 的不动点，这是因为 $G(P)$ 关于顶点是可迁的，因而所有这些顶点位在以 O 为中心的一个球面上。称此球面为 P 的外接球面。

12.5.2.2 P 的每一个 i 维面 $(i = 2, \cdots, d-1)$ 是一个 i

维的正多胞形。

12.5.2.3 设 F, F' 是 P 的两个相邻的面(参见 12.1.2),并且 H 是由 $F\cap F'$ 和 P 的中心 O 所生成的超平面,即 $H=\langle 0, F\cap F'\rangle$,则对称 σ_H 把 F 映到 F' 上,即 $\sigma_H(F)=F'$。

12.5.2.4 如果在 P 的中心 O 处向量化 X,则对偶多胞形 P^* (参见 12.1.2.7) 也是一个正多胞形. 我们有 $G(F^*)=G(P)$。

事实上,群 $G(P)$ 以 O 为不动点, 故保留极性. 因而从 12.5.1 和 12.1.10 即推出我们的断言。

12.5.2.5 群 $G(P)$ 在 P 的旗上是单可迁的. 事实上, 在一个旗和 P 上都可以利用归纳法唯一地构造一个标准正交标架. 特别, $\# G(P)$ 等于 P 的旗的个数。

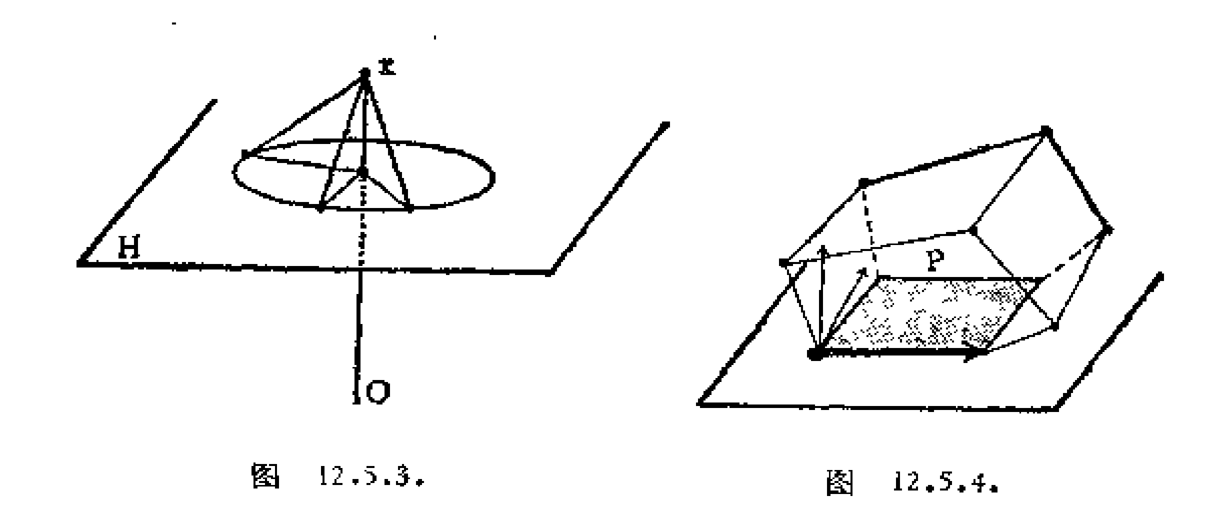


图 12.5.3.　　　　图 12.5.4.

12.5.3 正多胞形的星形集

12.5.3.1 设 P 是一个以 O 为中心的正多胞形, x 是 P 的一个顶点. 如果 A 是 F 中含 x 的一条棱(参见 12.1.8),又设 y 是另一个顶点. 既然 $G(P)$ 关于序对 (x, A), $x\in A$ 是可迁的, 由此推出 P 的所有顶点都和 y 一样属于同一个与 $\overrightarrow{XO}$ 正交的超平面 H. 交集 $P\cap H$ 是一个多胞形,以这些 y 作为顶点, 但其 $(i-1)$ 维面是 P 的含 x 的 i 维面同 H 的交集. 因为 $G(P)$ 在 P 的旗上是可迁的, 故在以点 x 作为出发点的旗上更是可迁的. 上述论证正表明了 $G(P)$ 在 $P\cap H$ 的旗上是可迁的。

12.5.3.2 定义. 如此构作的正多胞形称为P在点x处的星形集，记作$\mathrm{Et}_x P$，或简记为$\mathrm{Et}\,P$(因为所有这些星形集都是等距的)。

12.5.3.3 前述内容和1.5.5表明:

$$\# G(P) = \# G(\mathrm{Et}\,P) \times (P\text{的顶点数}).$$

12.5.4 一些简单的例子

12.5.4.1 正则单形Simp_d的旗的集合同$(e_i)_{i=1,\cdots,d+1}$的d元组$(e_{i_1},\cdots,e_{i_d})$之间有一个双射. 但是，总存在(参见8.2.7)一个元素$f\in O(d+1)$，把$(e_{i_1},\cdots,e_{i_{d+1}})$映到$(e_{j_1},\cdots,e_{j_{d+1}})$上，并且使最后一个元素$e_{i_{d+1}}$映成$e_{j_{d+1}}$. 所以，$f\in G(\mathrm{Simp}_d)$；此外，这表明$G(\mathrm{Simp}_d)=\mathfrak{S}_{d+1}$，其中$\mathfrak{S}_{d+1}$是$\{1,\cdots,d+1\}$的双射对称群。再者，$\mathrm{Et}(\mathrm{Simp}_d)$是一个正则单形；

$$\mathrm{Et}(\mathrm{Simp}_d) = \mathrm{Simp}_{d-1}.$$

12.5.4.2 立方体. 利用关于坐标超平面的对称，我们可以找出在顶点$(\pm 1,\cdots,\pm 1)$上可迁的Cub_d的等距(参见12.1.11.2). 因此，只须再说明$G(\mathrm{Cub}_d)$在包含一个已给顶点的旗上是可迁的. 为此,我们考虑正立方体$C=[0,1]^d\subset\mathbf{R}^d$它与$\mathrm{Cub}_d$是相似的. 设$x=(0,0,\cdots,0)$是$C$的零顶点;含$x$的棱为线段$[0,e_i]$ $(i=1,\cdots,d)$，这里$(e_i)_{i=1,\cdots,d}$是$\mathbf{R}^d$的典范基底. 这样,含有x的旗的集合同Simp_{d-1}的旗的集合之间有一个双射. 并且，由于$G(\mathrm{Simp}_{d-1})\subset G(C)$，我们已证明了$\mathrm{Cub}_d$是正则的. 但这时，$\mathrm{Et}(\mathrm{Cub}_d)=\mathrm{Simp}_{d-1}$也是正则的.

为了决定群$G(\mathrm{Cub}_d)$. 首先，由12.5.3.3和12.5.4.1看出：$\# G(\mathrm{Cub}_d)=2^d\cdot d!$. 但是,我们知道$G(\mathrm{Cub}_d)$中一个有$2^d\cdot d!$个元素的子群，就是由$d!$个坐标置换和$2^d$次坐标变号所构成的子群. 这就是所要找的那个群. 它是一个半直积.

12.5.4.3 余立方体. 利用对偶基，从12.1.2.7, 12.1.10和12.5.2.4推知余立方体Coc_d是一个正多胞形，并且它的群就是Cub_d的群. 可以利用对偶性，也可直接确定$\mathrm{Et}(\mathrm{Coc}_d)$：设$e_1$是$\mathrm{Coc}_d$的顶点，则含$e_1$的棱为线段$[e_1,\pm e_i]$ $(i=2,\cdots,d)$，这

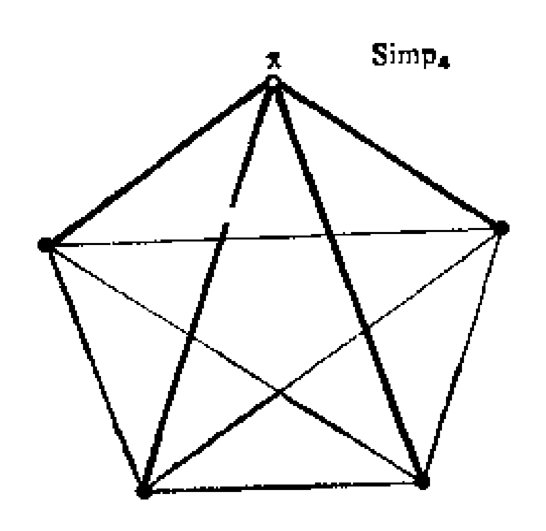


图 12.5.4.1. Et_x 由·构成 $\mathrm{Et}_x = \mathrm{Simp}_3$.

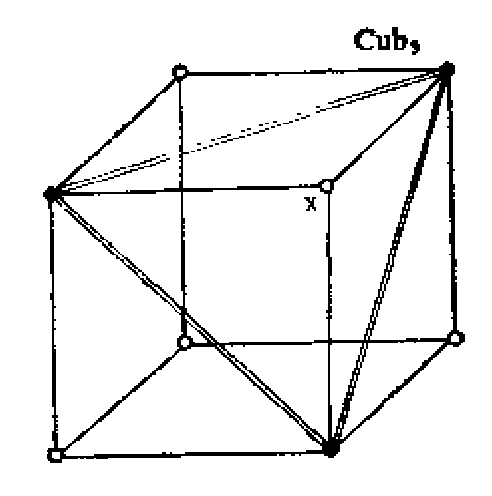


图 12.5.4.2. Et_x 由·构成 $\mathrm{Et}_x = \mathrm{Simp}_2$.

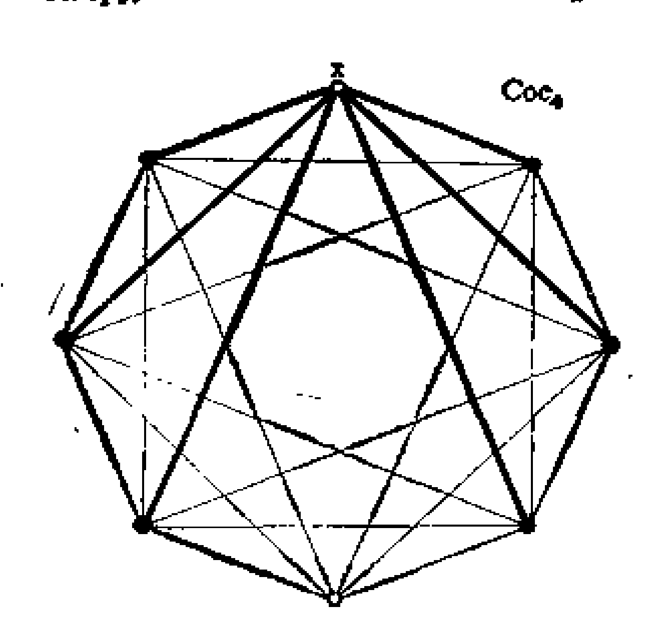


图 12.5.4.3. Et_x 由·构成 $\mathrm{Et}_x = \mathrm{Coc}_3$.

表明 $\mathrm{Et}(\mathrm{Coc}_d) = \mathrm{Coc}_{d-1}$.

12.5.5 三维空间中较难的例子. 在 1.8.3.4 中,我们已经指出,正十二面体和正二十面体的存在性不是很显然的;我们下面给出此存在性的两种证明.我们预先注意到,正十二面体和正二十面体是彼此对偶的,从而,从其中一个的存在可推出另一个的存在.

12.5.5.1 几何方法. 基本想法是注意到,假定正十二面体存在的话,我们可以在它里面内接立方体;我们将反过来证明在一个

立方体上总能装上若干正五边形，使之形成一个正十二面体：图 12.5.5.1。

12.5.5.2. 引理. 设 F, F', F'' 是三个相等的正五边形. 则可在它们的一个公共顶点 x 处，沿它们的公共棱 A, A', A'', 把它们连接起来. 这样形成的图形是刚性的，换言之，在不计等距差别的条件下是唯一的. 图 12.5.5.2 中的直线 $\langle x, y\rangle$, $\langle x, y'\rangle$, $\langle x, y''\rangle$ 是两两正交的.

最简单的办法是利用球面三角. 连结的可能性等价于存在一个球面三角形，使其三条边都等于一个正五边形的角，即 $\frac{3\pi}{5}$（参见 12.4）. 因为 $3\times\frac{3\pi}{5}<2\pi$, 根据 18.6.10, 我们的球面三角形是存在的，从 18.6.13.10 即得不计等距意义下的唯一性.

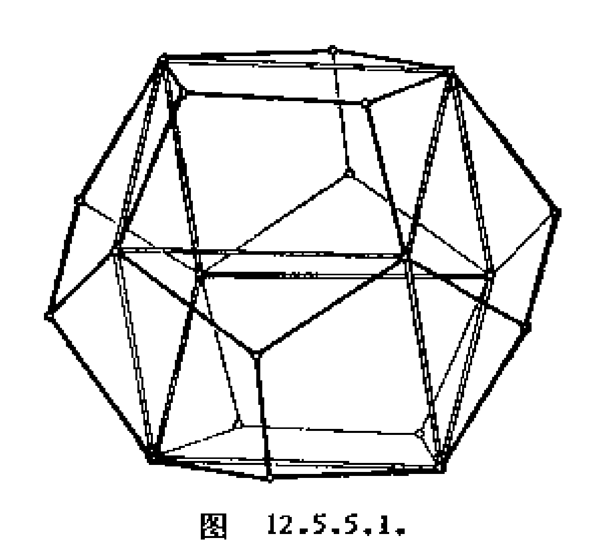
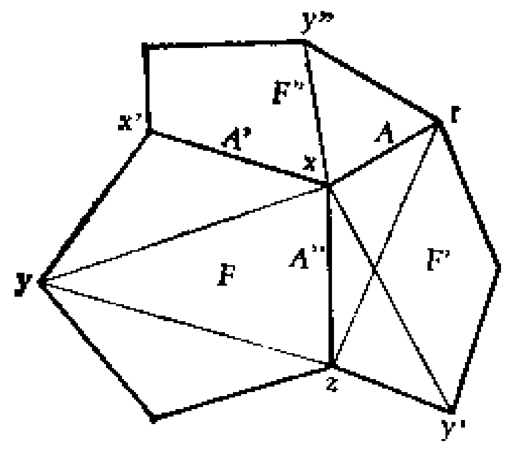
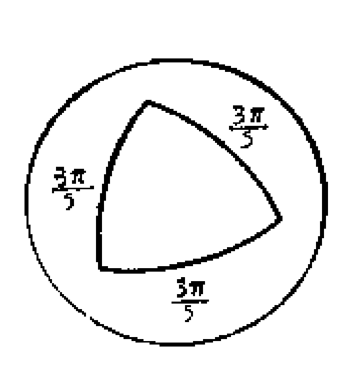


图 12.5.5.1.





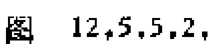


图 12.5.5.2.

为了证明 $\langle x, y\rangle$, $\langle x, y'\rangle$ 的正交性，可推导如下：我们看到，对图形中的三点 y, z, t，因 $\langle y, z\rangle$ 与棱 A' 平行，而 $\langle z, t\rangle$ 与 A 正交（例如，因为 $xz = xt$ 和 $x'z = x't$），故有 $\langle y, z\rangle \perp \langle z, t\rangle$。但是，关于 A'' 垂直平分超平面的对称 σ_H 把三元组 (y, z, t) 变到 (y, x, y')。这就证明了引理。

至此，我们可以注意到，由 12.5.5.2 的开头和 σ_H，已经有了存在性的一个不太完整的解答，这就是把 F, F', F'' 连结起来，然后再把 $F_1 = \sigma_H(F'')$ 跟 F, F' 连结，依此类推；这就是用纸头构造模型的方法；但是，还须证明的是：在连结到最后时，整个图形确实是封闭的，这一点完全不是显然的。

为此，只须注意到：如果从一个顶点为 x 的立方体 C 出发，则根据图 12.5.5.1，可在自 x 引出的 C 的三条棱 A, A', A'' 上装上三个正五边形 F, F', F''，这是因为 12.5.5.2 表明了 $\langle x, y\rangle$, $\langle x, y'\rangle$, $\langle x, y''\rangle$ 是相互正交的，且具有相同的长度。于是，利用立方体 C 关于各面的超平面的对称，就可构作一个正十二面体，它的面分别是十二个正五边形。为了看出这是一个正十二面体，只须应用 12.5.5.2 中的刚性就行了，因为刚性表明只要我们知道了一个面和该面所决定的、该十二面体所在的那个半空间，如此构作的十二面体就是唯一的。

12.5.5.3　代数方法. 我们具体构作一个正二十面体如下；其思想是在一个正八面体（三维空间中余立方体的常用称呼）的棱上找出 12 个顶点，使之构成若干个等边三角形，根据连续性，这显然是可能做到的。遗憾的是，把 20 个全等的等边三角形每五个每五个地连结起来所形成的多胞形必是正多胞形这一点，全然不是显然的；因为，把以 x 为公共顶点的 5 个等边三角形连结起来，并不能如同在 12.5.5.2 中一样，保证在不计等距的意义下的唯一性，我们得到的是一个可以随意弯曲的图形，正如同边长相等的平面 n 边形的情形一样：当 $n > 3$ 时，它是可变形的。在 12.8.6 节，我们还会讨论这些问题。

因此，必须证明我们的二十面体的正则性。据前所述，我们设

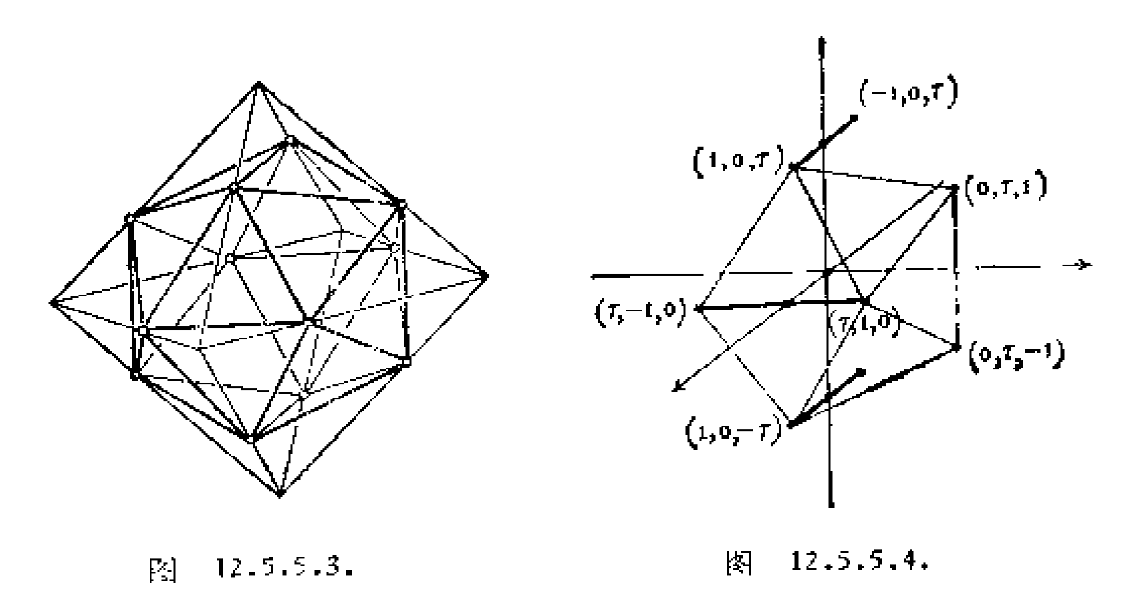


图 12.5.5.3.　　　　图 12.5.5.4.

法找形如$(0, \pm\tau, \pm 1)$，$(\pm 1, 0, \pm\tau)$，$(\pm\tau, \pm 1, 0)$的十二个顶点，这里τ是待定的．从顶点$(\tau, 1, 0)$出发，它到其它五个顶点$(\tau, -1, 0)$，$(0, \tau, \pm 1)$，$(1, 0, \pm\tau)$的距离取2和$\sqrt{2\tau^2-2\tau+2}$这两个值，故可推出τ应取的值为

12.5.5.4　$\boxed{\tau^2=\tau+1,\ \tau>0,\ 即\ \tau=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}.}$

对此τ，点$(\tau, 1, 0)$和上述5个点是等距的．对所有的顶点，也都是如此（这是因为十二个顶点全体的集合容有一个关于顶点可迁的等距群：由轴的循环置换和关于坐标超平面的对称所生成的等距群）．

现在我们注意到，5个点$(\tau, -1, 0)$，$(0, \tau, \pm 1)$，$(1, 0, \pm\tau)$都在平面$\tau x+y-\tau=0$上；而由此可推知这五个等边三角形连结后的刚性（图 12.5.5.4）．因此，其轴过一个顶点的5阶旋转保持我们的二十面体不动．这样的旋转再加上前面的群，就构成了旗上的一个可迁群．

12.5.5.5　依照12.5.5.1在立方体$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$上构作的十二面体的坐标，当τ如12.5.5.4中取定时，分别为$(0, \pm\tau^{-1}, \pm\tau)$，$(\pm\tau, 0, \pm\tau^{-1})$，$(\pm\tau^{-1}, \pm\tau, 0)$．读者容易验证这一事实，利用对偶性或12.5.5.1均可．

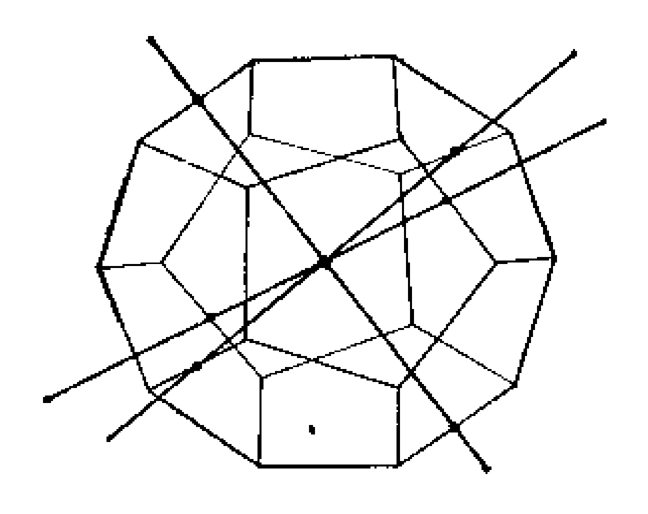


图 12.5.5.6.

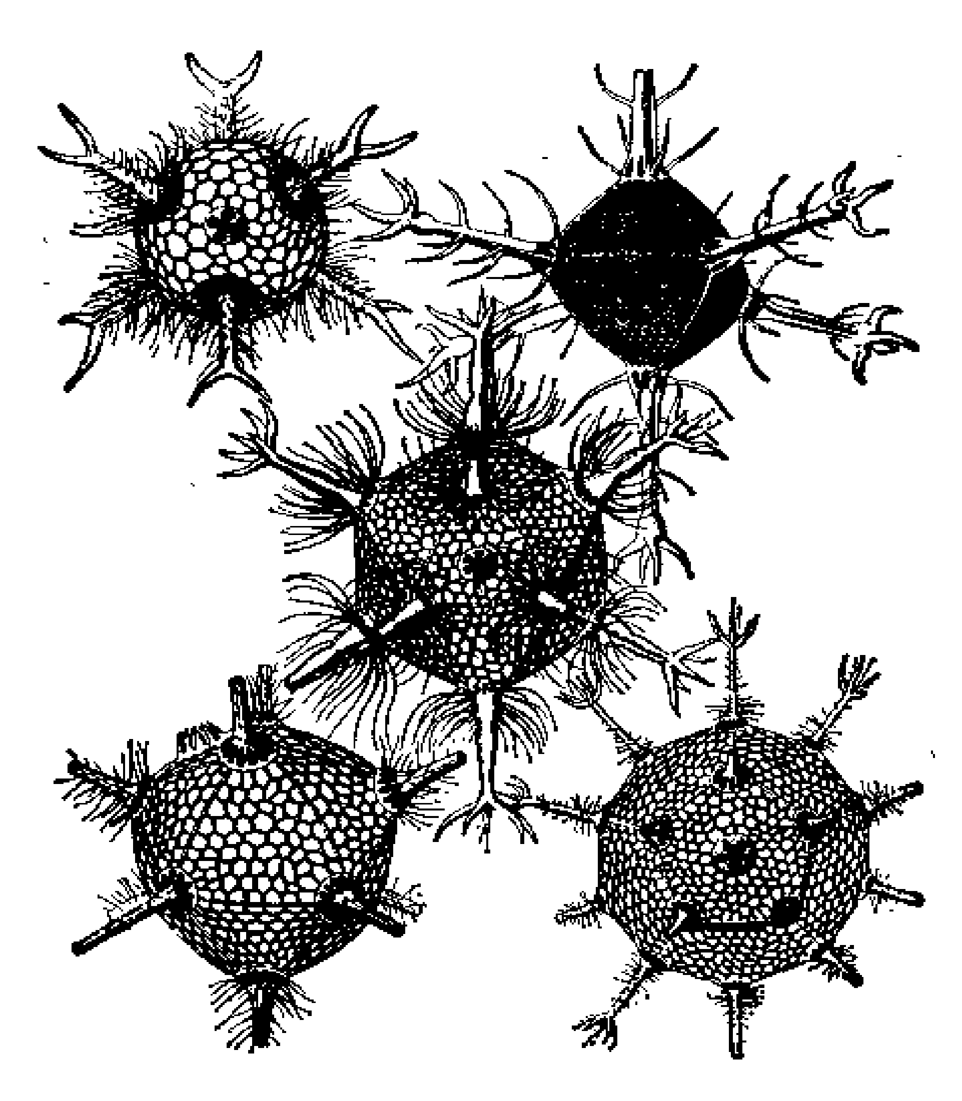
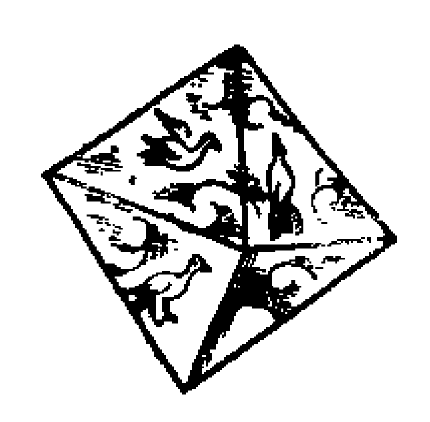


图 12.5.5.7.

H. Weyl，«对称»，普林斯顿大学出版社，

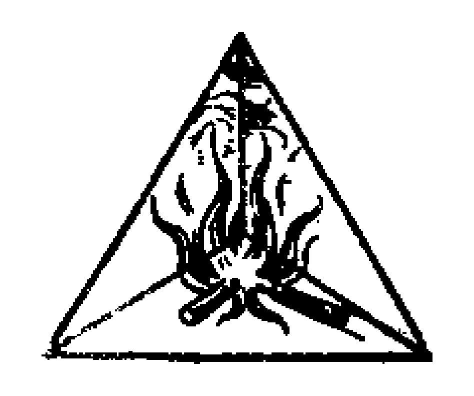
12.5.5.6 二十面体群. 根据 12.5.3.3 和 12.4.5，该群共有 $12 \times 10 = 120$ 个元素. 然而，它并不与对称群 $\mathfrak{S}_5$ 同构. 为了看出这一点，我们看到，正十二面体的三十条棱决定十五条直线，即连结棱的中点与二十面体中心的直线. 依照 12.5.5.1 的作法，它们



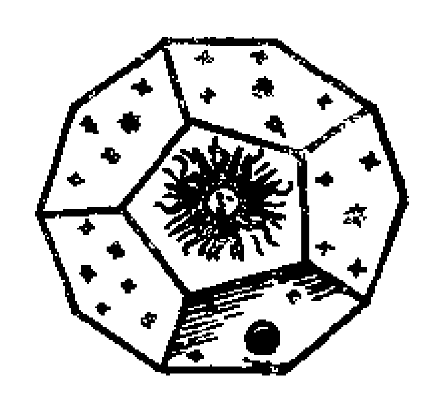
八面体
空气



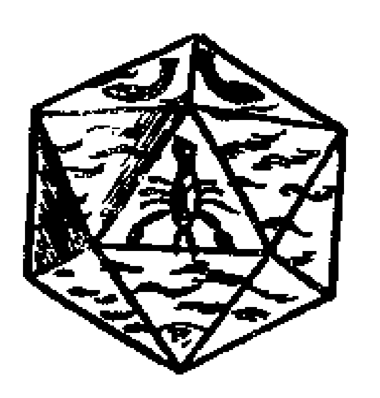
立方体
土



四面体
火



十二面体
宇宙



二十面体
水

图 12.5.5.8.

形成五个两两正交的直线三元组．于是很清楚，十二面体的位移群 G^+ 一意地作用在这五个三元组的集合上．由于它有 60 个元素，因此 $G^+ \cong \mathscr{A}_5$．相反地，由于原点的中心对称，G 并非一意地作用；实际上 $G \cong \mathfrak{S}_5$ 不成立，但是 G 与直积 $\mathscr{A}_5 \times \mathbf{Z}_2$ 同构．

12.5.5.7 附注． 正十二面体或正二十面体，或具有它们的对称群的别的对象，都不是经常碰到的．在自然界，首先要注意到不

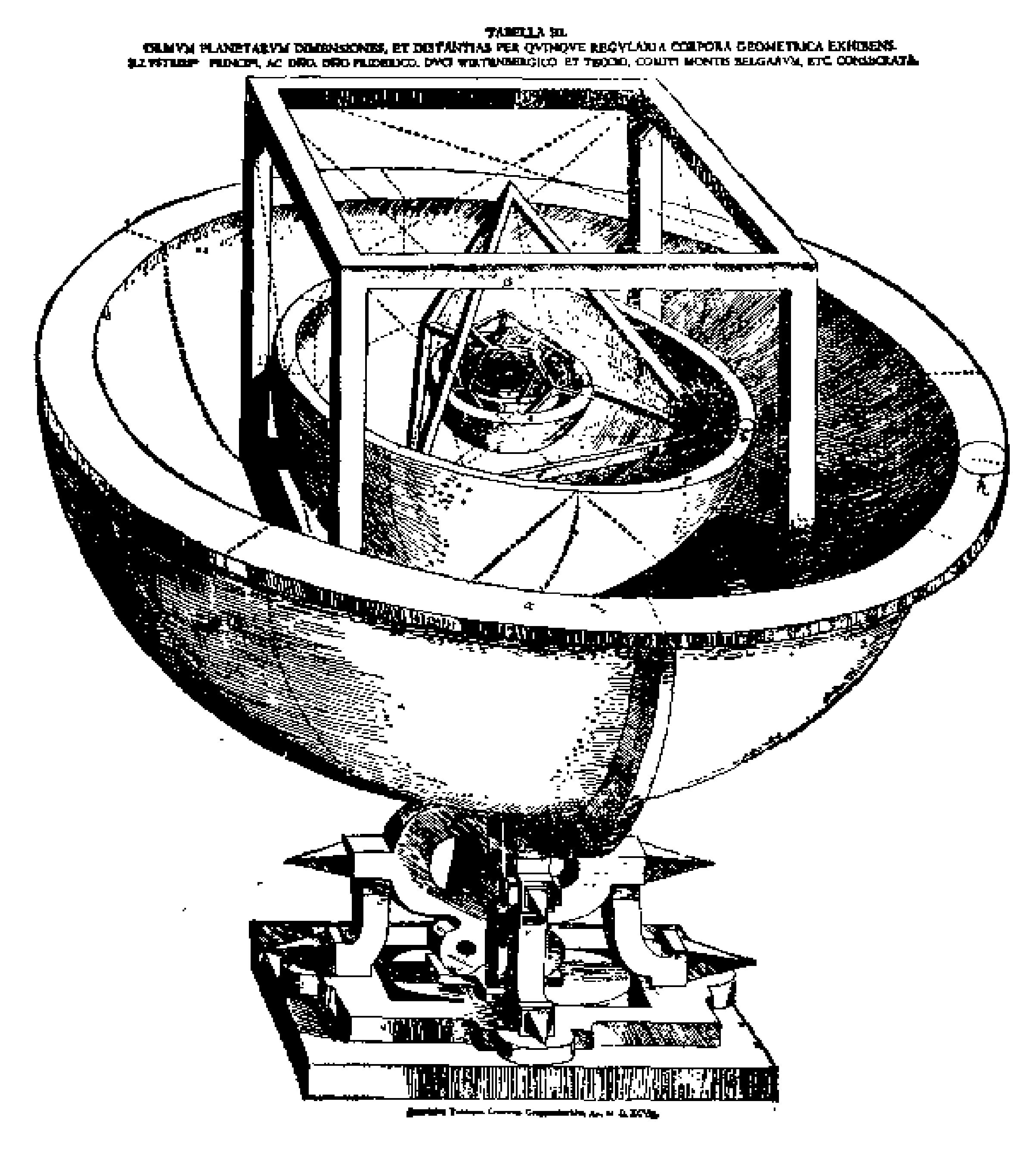


图 12.5.5.9．

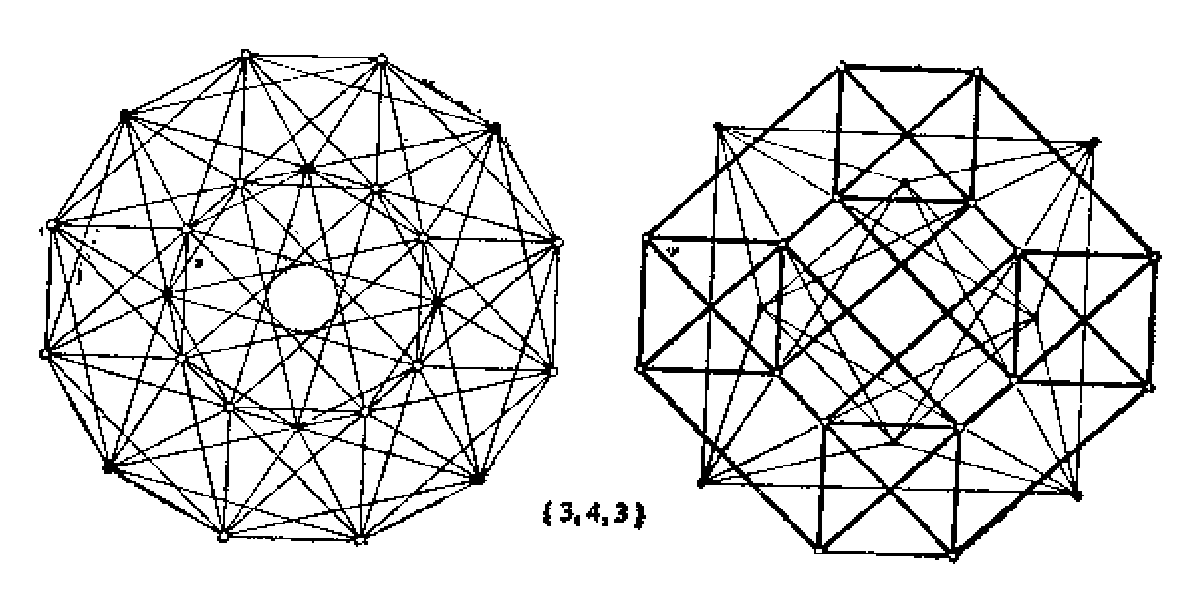
存在容有二十面体群的晶体．相反地，却存在某些容有此群的生物，参见图 12.5.5.7 和 [WL] 第 75 页．

至于人类，我们已经发现了至少在公元前 500 年伊特鲁立亚文明时期的一块用块滑石制造的十二面体．我们也有古埃及托勒密王朝时代的一对二十面体，在伦敦的不列颠博物馆内可见到此物．希腊人关于五种正多面体作过哲理的探讨，除参阅柏拉图的著作《蒂迈欧篇》外，请参见 [CR 2] 第 13 页，[FT 2] 第 120—121 页和图 12.5.5.8．

此外，Képler 相信，在五种正多面体和太阳系行星轨道之间能找到一种联系：图 12.5.5.9．

12.5.6 四维空间中较难的例子． 我们通过对所有可能的正多胞形列表，来导出四维空间中的这些例子：参看 12.6.7.3．在这里，我们是把现成的表格一下子拿出来的，而在历史上，过程是更几何化，而且费了不少心血的，参看 [CR 2] 第 13 页和第 141 页．至于其中的名称，在 12.6.1 中将加以定义．

12.5.6.1 标准 {3, 4, 3}． 这是 $\mathbf{R}^4$ 中由 24 个顶点 $(\pm 2, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 2)$, $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ 定义的多胞形 P．这 24 个顶点也就是 Cub_4 的顶



Coxeter,《正多胞形》, Dover 出版社

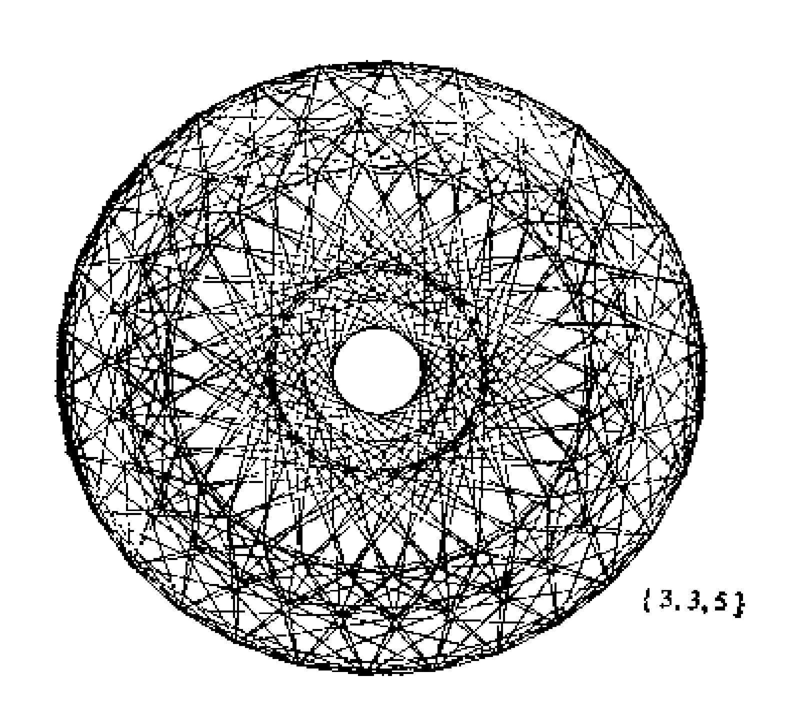
图 12.5.6.1．

点和位似比为 2 的 Coc_4 的顶点的并集。我们来证明它们定义了一个正多胞形。

顶点 $x=(2,0,0,0)$ 和八个顶点 $(1,\pm 1,\pm 1,\pm 1)$ 的距离都为 2。于是，P 的全体含 x 的面的集合与这八个顶点定义的立方体的所有的面之间有一个双射；特别，群 $G(P)$ 在所有含 x 的旗上是可迁的；因此，只要说明群 $G(P)$ 在顶点上是可迁的。因为立方体 Cub_4 的群作用在 Cub_4 的顶点上，也作用在 Coc_4 的顶点上，所以只要说明 P 的一个等距把 $(2,0,0,0)$ 与 $(1,-1,-1,-1)$ 两点互换就够了。一个可供考虑的合适的对象是关于这两点的垂直平分面的对称（参见 9.7.5）。根据 8.2.10，这个对称为：

$$(x,y,z,t)\longmapsto\left(\frac{x-y-z-t}{2},\ \frac{-x+y-z-t}{2},\ \frac{-x-y+z-t}{2},\ \frac{-x-y-z+t}{2}\right),$$

可以看出，这个对称确实保持 P 的 24 个顶点不变。上述论证表明 $\mathrm{Et}\,P=\mathrm{Cub}_3$；因此，根据 12.5.4.2 和 12.5.3.3，群 $G(P)$ 具有基数 $48\times 24=1152$。



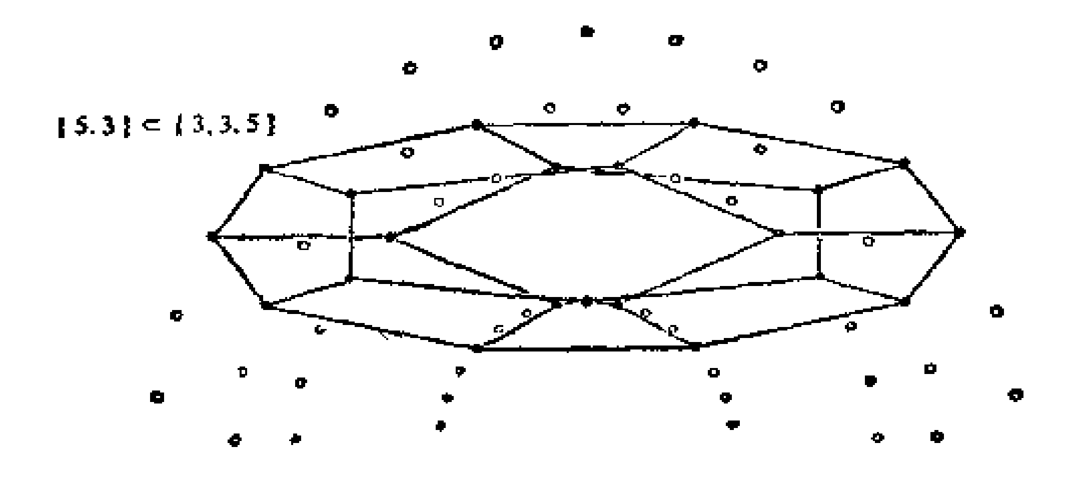
Coxeter, «正多胞形», Dover 出版社

图 12.5.6.2。

12.5.6.2 标准 $\{3, 3, 5\}$. 它和它的对偶 $\{5, 3, 3\}$，是所有的正多胞形中最为复杂的. 对于 12.5.5.4 中的 τ，它的 120 个顶点为:

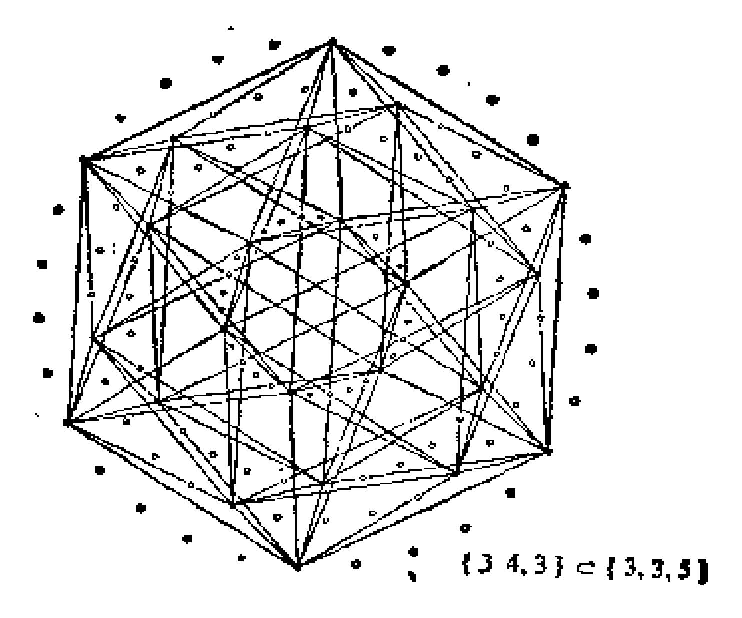
$$\begin{cases} \text{标准 } \{3, 4, 3\} \text{ 的 24 个顶点,以及八个点} \\ (\pm\tau, \pm 1, \pm\tau^{-1}, 0) \text{ 经坐标偶置换得出的所有的点.} \end{cases}$$

用 12.5.6.1 同样的方法，可证这个多胞形 Q 是正多胞形. 过 $x = (2, 0, 0, 0)$ 的棱是以 x 为起点,以 12 个点 $(\tau, \pm 1, \pm\tau^{-1},$



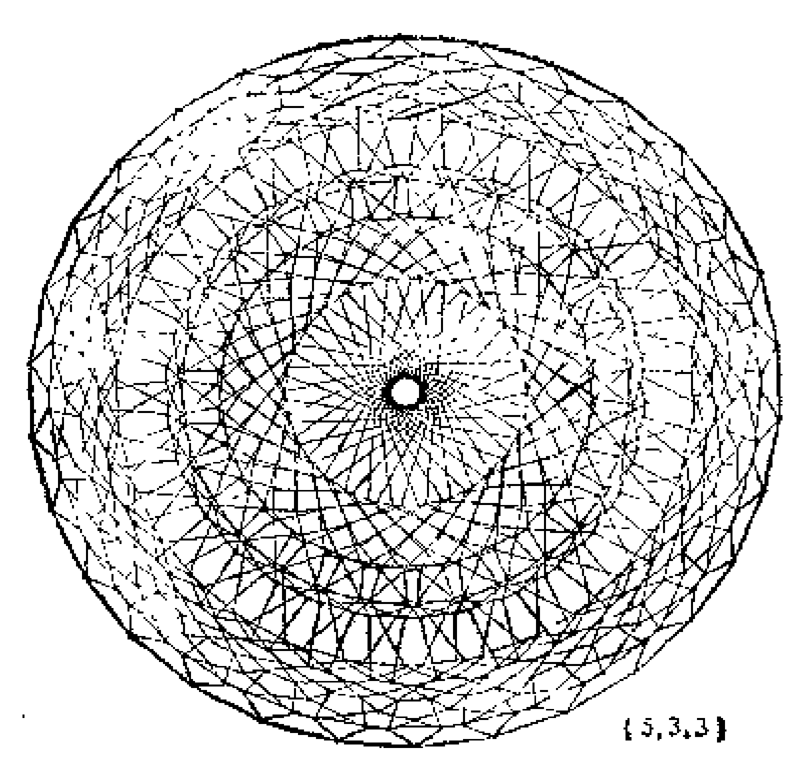
Coxeter, «正多胞形», Dover 出版社

图 12.5.6.3.



Coxeter, «正多胞形», Dover 出版社

图 12.5.6.4.



Dover 出版社

图 12.5.6.5.

0)、$(\tau, 0, \pm 1, \pm \tau^{-1})$, $(\tau, \pm \tau^{-1}, 0, \pm 1)$ 为终点的线段. 这 12 个点构成一个正二十面体，参见 12.5.5.3. 这个二十面体的群可通过恒等变换延拓到轴 (1, 0, 0, 0) 上，此群在 Q 的含 x 的旗上是可迁的；此外，它保持 Q 不变. 应该考察 l 的第一个坐标固定的那些顶点；对 τ 或 $-\tau$ 的情形，这一点已经做过了. 当第一个坐标为 +1 时，我们看到顶点为 $(1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $(1, \pm \tau, 0, \pm\tau^{-1})$, $(1, 0, \pm \tau^{-1}, \pm \tau)$, $(1, \pm \tau^{-1}, \pm \tau, 0)$，因为它们形成一个十二面体，故容有二十面体的等距：参见 12.5.5.5.

最后，当第一个坐标为 0 时，我们看到顶点为 $(0, \pm 2, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 2, 0)$, $(0,0,0, \pm 2)$, $(0, \pm\tau, 1, \pm\tau^{-1})$, $(0, 1, \pm\tau^{-1}, \pm\tau)$, $(0, \pm\tau^{-1}, \pm\tau, 1)$；这些都是二十面体棱的中点，是通过位似比为 $2\tau^{-1}$ 的位似变换从 12.5.5.3 得到的. 于是，这些点的集合关于十二面体——二十面体群是稳定的.

还须说明 $G(Q)$ 在顶点上是可迁的，其做法与 12.5.6 中相同. 根据 12.5.5，群 Q 的阶数是 $120 \times 120 = 14400$.

12.6 正多胞形：分类

我们要证明：除我们已遇到的正多胞形外，没有别的正多胞形了。此结论是1850年左右由 Schläfli 得出的。证明建立在两点想法上：首先是引入正多胞形的符号，其次是得出公式12.6.5，用以进行归纳法分类。

12.6.1 定义. 设 P 是一个 d 维正多胞形。所谓 P 的符号，记作 $\{r_1(P), r_2(P), \cdots, r_{d-1}(P)\}$，是指用归纳法定义如下的 $d-1$ 个整数的序列：$r_1(P)$ 是 P 的二维面的边数（参见12.5.2.2和12.4.2），而 $\{r_2(P), \cdots, r_{d-1}(P)\}$ 是 $\mathrm{Et}(P)$（参见12.5.3.2）的符号。

12.6.2 例子

12.6.2.1 我们注意到，所有的 $r_i \geq 3$。

12.6.2.2 P 的一个面的符号是 $\{r_1(P), \cdots, r_{d-2}(P)\}$，可从12.5.3.1看出这一点。

12.6.2.3 Simp_d 的符号是 $\{3, 3, \cdots, 3\}$。Cub_d 的符号是 $\{4, 3, \cdots, 3\}$。Coc_d 的符号是 $\{3, \cdots, 3, 4\}$。正二十面体的符号是 $\{3, 5\}$。正十二面体的符号是 $\{5, 3\}$。例12.5.6.1和例12.5.6.2的符号分别为 $\{3, 4, 3\}$ 和 $\{3, 3, 5\}$。

为了说明上述结论，只要验证（这是容易的）r_1 是所给出的那些数就行了，因为所有这些多面体的星形集都已在12.5.4.1；12.5.4.2；12.5.4.3；12.5.6.1；12.5.6.2中被确定；利用归纳法，即可得出所有给定的符号。

12.6.2.4 P 的对偶多胞形 P^*（参见12.5.2.4）的符号是 $\{r_{d-1}(P), \cdots, r_1(P)\}$。从符号的定义以及12.1.10和12.6.2.2可得到此结论。例如，标准 $\{3, 3, 5\}$ 的对偶多胞形是符号为 $\{5, 3, 3\}$ 的一个正多胞形。

12.6.3 基本关系式

12.6.4 记号. 对于一个正多胞形 P，其棱的公共长度记作 l，外

接球的半径记作 r (参见 12.5.2.1), 并令 $\rho(P)=\frac{l^2}{4r^2}$. 则当 P 具有符号 $\{r_1, \cdots, r_{d-1}\}$ 时, 在 $\rho(P)$ 和 $\rho(\mathrm{Et}P)$ 之间有关系式:

12.6.5

$$\rho(P)=1-\frac{\cos^2\pi/r_1}{\rho(\mathrm{Et}\,P)}.$$

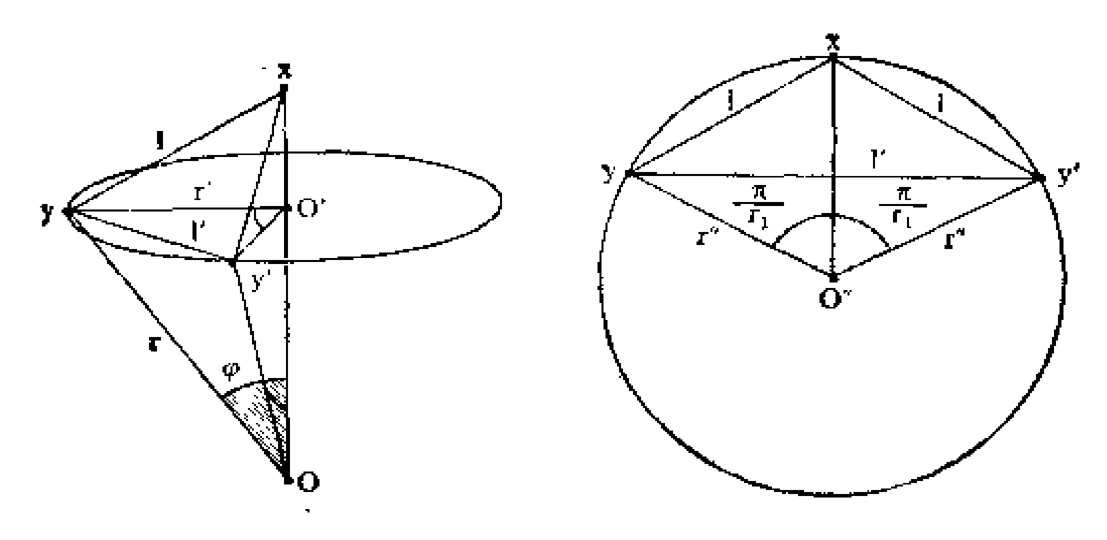


图 12.6.5.

为了证明 12.6.5, 取一个顶点 $x\in P$. 设 O 是 P 的中心, O' 是 $\mathrm{Et}_x P$ 的中心. 设 r 是 P 的外接球的半径, r' 是 $\mathrm{Et}_x P$ 的外接球的半径. 又设 y, y' 是 $\mathrm{Et}\,P$ 的一条棱的端点, 并且 $l'=yy'$ 是 $\mathrm{Et}_x P$ 的棱的公共长度. 则 y, x, y' 是 P 的一个二维面上相邻的三个顶点(根据 12.5.3.1), 而这个二维面是一个有 r_1 条边的正多边形; 根据 12.4.3, 如果 r'' 表示这个二维面上以 O'' 为中心的外接圆的半径, 则有

$$l=yx=xy'=2r''\sin\pi/r_1,\quad l'=2r''\sin 2\pi/r_1.$$

由此得出 $l'=2l\cos\frac{\pi}{r_1}$. 因为

$$\rho(P)=\frac{l^2}{4r^2},\quad \rho(\mathrm{Et}P)=\rho(\mathrm{Et}_x P)=\frac{l'^2}{4r'^2}.$$

而且当 2φ 表示三角形 $\{y, O, x\}$ 在 O 点的角度时, 有

$$r'=l\cos\varphi,\quad l=2r\sin\varphi,$$

所以可推得

$$\rho(P)=\sin^2\varphi,\ \rho(\mathrm{Et}\,P)=\frac{4l^2\cos^2\dfrac{\pi}{r_1}}{4l^2\cos^2\varphi}=\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{r_1}}{\cos^2\varphi},$$

由此即可证得 12.6.5。

12.6.6 推论. 数 $\rho(P)$ 只依赖于 $d-1$ 元组 $\{r_1,\cdots,r_{d-1}\}$；我们把它记作 $\rho(r_1,\cdots,r_{d-1})$，每当一个正多胞形的符号为 $\{r_1,\cdots,r_{d-1}\}$ 时，我们有关系式：

$$\boxed{\rho(r_1,\cdots,r_{d-1})=1-\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{r_1}}{\rho(r_2,\cdots,r_{d-1})}.}$$

事实上，把 12.6.5 的推导相继应用于 Et P，Et (Et P)，……即可得证。

12.6.7 定理 (Schläfli, 1850). 对于一个正多胞形，它所有可能取的符号可用下表给出：

$d=2$：$\{n\}$，n 是 $\geqslant 3$ 的任意整数；

$d=3$：$\{3,3\}$，$\{3,4\}$，$\{4,3\}$，$\{3,5\}$，$\{5,3\}$；

$d=4$：$\{3,3,3\}$，$\{3,3,4\}$，$\{4,3,3\}$，$\{3,4,3\}$，$\{3,3,5\}$，$\{5,3,3\}$；

$d\geqslant 5$：$\{3,\cdots,3\}$，$\{3,\cdots,3,4\}$，$\{4,3,\cdots,3\}$。

对应于此表中每一个符号，存在一个正多胞形，以它作为符号。两个具有相同符号的正多胞形是相似的。

12.6.7.1 从 12.4.2，12.6.2.3 和 12.6.2.4 可得存在性。

12.6.7.2 唯一性（不计相似差别）可用归纳法证明。设 P，P' 是两个具有相同符号的正多胞形；由归纳法假设和 12.6.2.2 可知，P 和 P' 的面是相似的。通过一个适当的相似，我们可假设它们是等距的，从而可使 P 和 P' 的两个面重合，并让 P，P' 位于由此面 F 所决定的同一个半空间内。

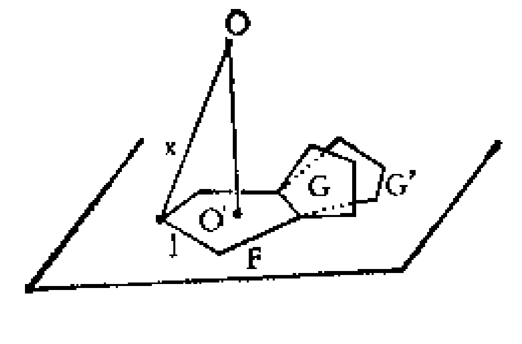


图 12.6.7.1.

而这时，P, P' 具有相同的中心 O；事实上，这个中心必然在过面 F 的中心 O'、垂直于 F 的超平面的垂线上，并且中心 O 与 F 的一个顶点的距离为 r，r 则由下式给出：

$$\rho(P) = \rho(P') = \frac{l^2}{4r^2}$$

（参见 12.6.4 和 12.6.6），这里 l 是 F 的一条棱的长度。设 A 是 F 的一个 $(d-2)$ 维面，G, G' 是 P, P' 沿 A 相邻的两个面（参见 12.1.12）；如果 $H = \langle O, A\rangle$ 是过 O 和 A 的超平面，则从 12.5.2.3 可得 $\sigma_H(F) = G$ 和 $\sigma_H(F) = G'$，故 $G = G'$。用归纳法和 12.1.13 即证得 $P = P'$。

12.6.7.3 用归纳法，再考虑到基本关系式 12.6.6 中一切可能性，即可列出可取符号表.其中关键在于：由于 $r_1 \geqslant 3$（参见 12.6.2.1），所以只要 $\rho(r_2, \cdots, r_{d-1}) \leqslant \frac{1}{4}$，则因 $\cos^2\frac{\pi}{r_1} \leqslant \frac{1}{4}$ 和 $\rho(r_1, \cdots, r_{d-1}) > 0$，就不存在取 $\rho(r_2, \cdots, r_{d-1})$ 的可能性了。从而可知，对于每一步只有有限多个试验可做。

这样就导出了表中一系列数据，唯一还要证明的只是最后一列中的值 $\frac{d+1}{2}$ 和 $\frac{1}{d}$，这可用归纳法证明。

12.6.8 一个有启示意义的概括. 于是我们看到，低维正多胞形比高维的来得多；总的来说，多胞形一般只分三组，但三维与四维的情形，以及二维时有无穷多种正多边形的情形都是例外。这个结论可以作为下面那句富有哲理的格言（Thom 语）的一个方面的例证："丰富的结构大多数是低维的，而贫乏的结构大多数是高维的"。下面是这个原则的另外一些例证，其中有一些也许是读者很熟悉的。

丰富的结构：

——单李群（[SE 3]，集合）。

——可除代数（[KH]，第 249 页）。

——二次型域（[SU]；[B-S] 第 167 页和 342—355 页）。

$d=2$		$d=3$		$d=4$		$d\geqslant 5$	
符号	$\rho(\cdot)$	符号	$\rho(\cdot)$	符号	$\rho(\cdot)$	符号	$\rho(\cdot)$
						$\{3,\cdots,3\}$	$\frac{d+1}{2d}\Longrightarrow\{$
				$\{3,3,3\}$	$\frac{5}{8}\Longrightarrow$		
						$\{4,3,\cdots,3\}$	$\frac{1}{d}<\frac{1}{4}$
		$\{3,3\}$	$\frac{2}{3}\Longrightarrow$	$\{4,3,3\}$	$\frac{1}{4}$		
				$\{5,3,3\}$	$\frac{1}{16}(7-3\sqrt{5})<\frac{1}{4}$		
$\{3\}$	$\frac{3}{4}\Longrightarrow$	$\{4,3\}$	$\frac{1}{3}\Longrightarrow$	$\{3,4,3\}$	$\frac{1}{4}$		
		$\{5,3\}$	$\frac{1}{6}(3-\sqrt{5})<\frac{1}{4}$				
$\{4\}$	$\frac{1}{2}\Longrightarrow$	$\{3,4\}$	$\frac{1}{2}\Longrightarrow$	$\{3,3,4\}$	$\frac{1}{2}\Longrightarrow$	$\{3,\cdots,3,4\}$	$\frac{1}{2}\Longrightarrow$
$\{5\}$	$\frac{1}{8}(5-\sqrt{5})\Longrightarrow$	$\{3,5\}$	$\frac{1}{10}(5-\sqrt{5})\Longrightarrow$	$\{3,3,5\}$	$\frac{1}{8}(3-\sqrt{5})<\frac{1}{4}$		
$\{n\}(n\geqslant 6)$	$\sin^2\frac{\pi}{n}\leqslant\frac{1}{4}$						

表 12.6.7.4.

——正交群的非单性(参见 8.9.10).

——二维负常曲率的紧结构的可变形性([MW 1]和[MW 2]).

——$n\leqslant 4$ 时对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的可分解性([SW] 第 13 章);

贫乏的结构:

——拓扑向量空间(有限维的,它们都是同胚的).

——有限域是可换的并已知道得很清楚([SE 2] 第 1 章).

——可微映射的一般奇性随维数增加而变得复杂([MR]).

12.6.9 一个从文化角度提出的附注. 尽管它们看上去是纯几何的,并且相当专门化,但是,正多胞形就它们的等距群而言,是属于重要的数学结构之列的;它们的群是"经反射生成的",这里,用的是超平面对称.而这种类型的有限群也是能完全进行分类的.它们在李群(Weyl 群)和代数群的研究中起着重要的作用.关于这方面的一般理论,参看 [BI 4].也可看 [CR 2] 第 11 章.由此一般理论可得到正多胞形的一种分类,也可参看 1.8.7.

12.6.10 附注

12.6.10.1 在 [CR 2] 中,我们可找到关于正多胞形最多的内容,其中有很完整的历史的讨论.

12.6.10.2 为了研究 $\{3,4,3\}$ 和 $\{3,3,5\}$ 以及它们的群,都得借助于四元数(在三维和四维的情形,这是不足为怪的,参见 8.9).一本很好的参考书是 [VL].

12.6.10.3 由于二十面体群是与 $\mathscr{A}_5$ 同构的(参见 12.5.5.6),根据 Galois 理论,这就表明了在二十面体和一般五次方程之间是有联系的.有关这方面内容,[KN I] 是一本历史上的名著.近代的文献可看 [SW] 第 148—149 页.

12.6.10.4 有了公式 12.6.6,我们也就有可能利用正多胞形对欧几里得空间的正则铺嵌进行分类了.我们知道,二维的铺嵌用的是等边三角形、正方形和正六边形.对于三维(或任意 d 维),可利用立方体.但还有没有其它的可能呢?答案是:符号为 $\{r_1,\cdots,r_{d-1}\}$ 的正多胞形能铺嵌一个 d 维空间当且仅当存在一

个符号为 $\{r_2, \cdots, r_d\}$ 的正多胞形，使得 $\rho(r_1, r_2, \cdots, r_{d-1}, r_d)=0$；这个符号为 $\{r_2, \cdots, r_d\}$ 的多胞形对应于正则铺嵌的“星形集”. 容易看出，根据表 12.6.7.3，除去已经遇到的对应于符号为

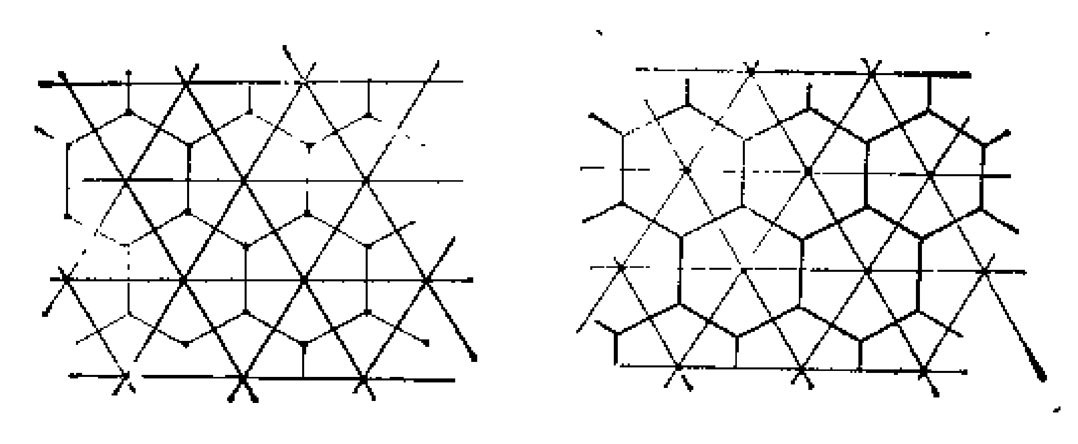
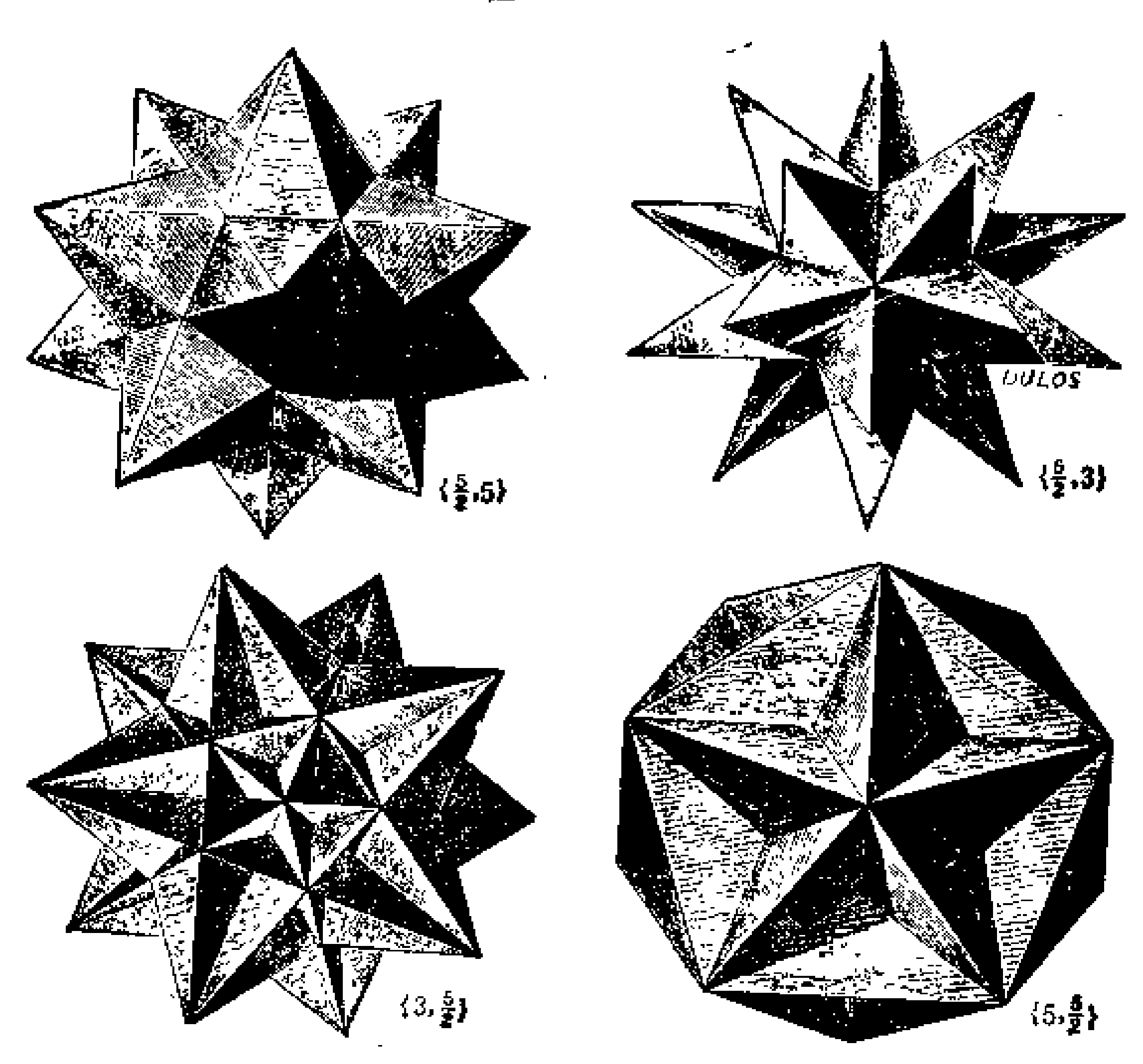


图 12.6.10.



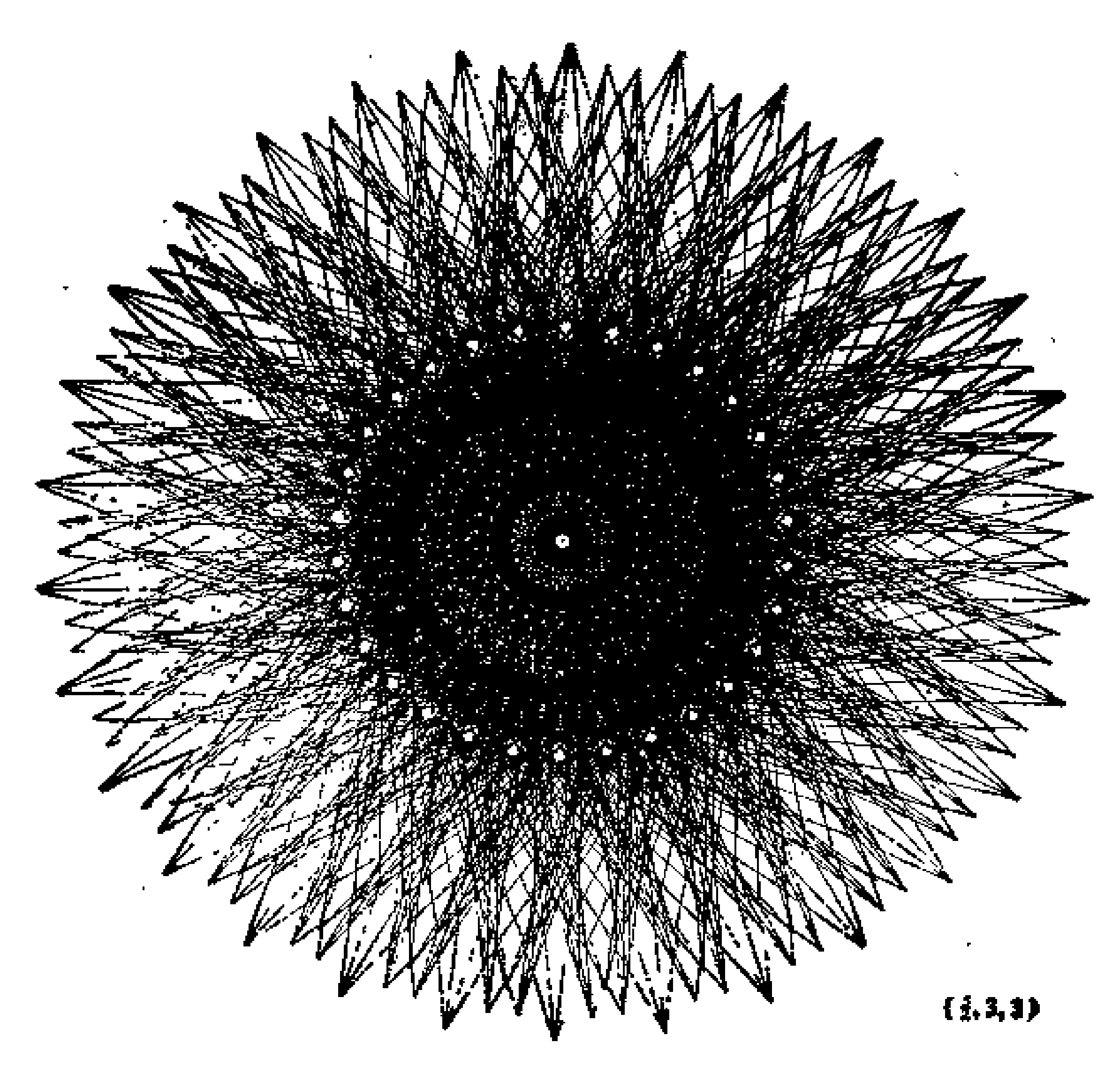
Rouché 和 de Comberousse,《几何论著》Gauthier-Villars 出版社.

图 12.6.10.5.

{3, 6}, {4, 4}, {6, 3}, …, {4, 3, …, 3, 4} 的情形外，只存在两个符号分别为 {3, 4, 3, 3}, {3, 3, 4, 3} 的正则铺嵌；它们一个用 Coc_4，另一个用 {3, 4, 3} 铺嵌四维空间（它们是互为对偶的，正象 {3, 6} 和 {6, 3} 一样，对偶性在于取的是铺嵌中心）.

12.6.10.5 存在非凸的正多面体，称为星形多面体；它们是我们所熟知的（看 [CR 2]，第 14 章）. 图 12.6.10.5 是在三维空间中的四个星形多面体.

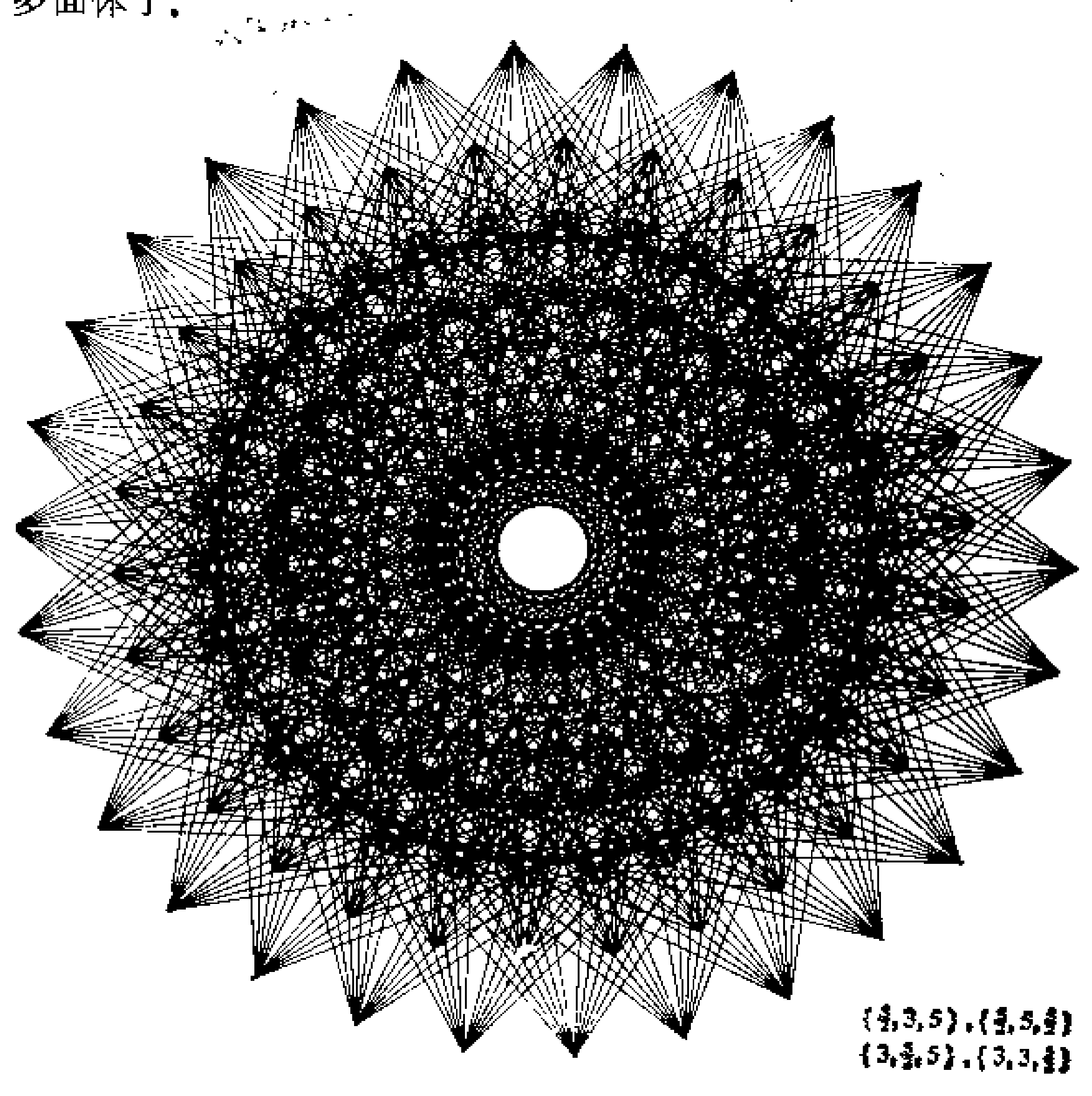
这四个多面体都容有一个与十二面体相同的等距群. 在四维空间中，存在十个星形正多面体，图 12.6.10.6 和图 12.6.10.7 是其



Coxeter，《正则复多胞形》，剑桥大学出版社.

图 12.6.10.6.

中的两个．这十个星形正多面体都容有一个与正多胞形{3,3,5}的含 14400 个元素的群相同的等距群．在图 12.6.10.5，12.6.10.6，12.6.10.7 中，我们在一个星形正多面体旁边标出了 Schläfli 符号；它们是有理数，而未必是整数了．至于 n 个顶点的星形正多边形的情形，留给读者去加以分类，最后，从五维开始，就不再有星形正多面体了．



Coxeter，《正则复多胞形》，剑桥大学出版社．

图 12.6.10.7.

12.7 Euler 公式

在本节中，X 是一个三维仿射空间(除本节的最后部分外)．仅

在 12.7.3.1 和 12.7.3.2 的证明中，须赋予 X 一个欧几里得结构。

12.7.1 记号. 对于一个多胞形，引入下述记号：

$\Xi = P$ 的棱所成的集合，$\alpha = \#\Xi$，

$\Sigma_i = P$ 中属于 i 个面的顶点所成的集合，$\sigma_i = \#\Sigma_i$，

$\Sigma = P$ 的全体顶点所成的集合，$\sigma = \#\Sigma$，

$\Phi_i = P$ 中有 i 条边的面所成的集合，$\varphi_i = \#\Phi_i$，

$\Phi = P$ 的全体面所成的集合，$\varphi = \#\Phi$.

根据 12.1.12，我们所考虑的 $i \geqslant 3$，且有

12.7.2 $$\boxed{\sigma = \sum_i \sigma_i,\ \varphi = \sum_i \varphi_i,\ 2\alpha = \sum_i i\sigma_i = \sum_i i\varphi_i.}$$

假如读者对图形 1.8.4.2 到 1.8.4.6 和对图形 12.1.1.4, 12.1.1.5 计算 σ, α, φ，则每次均可发现 $\sigma - \alpha + \varphi = 2$。实际上，我们有：

12.7.3 定理（Euler 公式）. 对三维仿射空间的任一多胞形，恒有 $\sigma - \alpha + \varphi = 2$。

我们给出这个公式的两种证明. 第一种证法"干净利落"而且有趣，但它要用到球面三角形面积的 Girard 公式，这一点不太方便。第二种证法模仿第一种，但只用到一个三角形角度等于 π 这一事实. 也可参看 12.7.5.3。

12.7.3.1 第一种证法. 任取一点 $O \in \mathring{P}$，并设 $S = S(0, 1)$ 是 X 的单位球面. 从 O 出发把 P 的边界投影到 S 上，亦即考虑映射 p: $\operatorname{Fr} P \ni x \longmapsto \dfrac{x}{\|x\|} \in S$. P 的顶点成为 S 的点，P 的棱成为 S 的大圆弧，而 P 的面成为 S 的球面多边形(关于球面的概念，看 18 章). 因为 P 是凸的，并且 $O \in \mathring{P}$，故可推出：多边形实际上把 P 分割成两部分(参见 12.1.5)；因而得出：所得出的球面多边形是凸的，并且有 i 条边的球面三角形的个数为 φ_i；每一条棱是两个不同面的公共棱，并且棱数为 α；属于 i 个面的顶点数为 σ_i，并且每一条棱含两个顶点(参见 12.1.12)。

证明思路是，对如此获得的凸多边形的所有角求和，首先，对同一个顶点的角度求和一次，再对同一个面上的角度求和一次。

因为 $p(\mathrm{Fr}\,P)=S$，且凸多边形不会出现重叠部分，故在一个顶点处的所有角度之和必等于 2π，因此：

$$\text{各角之和} = \sum_{s\in\Sigma} 2\pi = 2\pi\sigma.$$

应用 18.3.8.5，可得：

各角之和 $= \sum_{F\in\Phi}$ (F 的角度之和) $= \sum_i \sum_{F\in\Phi_i}$ [F 的面积 $+(i-2)\pi$] $= \sum_{F\in\Phi}$ F 的面积 $+ \sum_i (i-2)\pi\varphi_i = 4\pi+\pi\left(\sum_i i\varphi_i\right) - 2\pi\sum_i \varphi_i = 4\pi + 2\alpha\pi - 2\pi\varphi$. 因为 $p(\mathrm{Fr}\,P)=S$，故利用 12.7.2 可由这两个求和等式推得 $\sigma-\alpha+\varphi=2$。

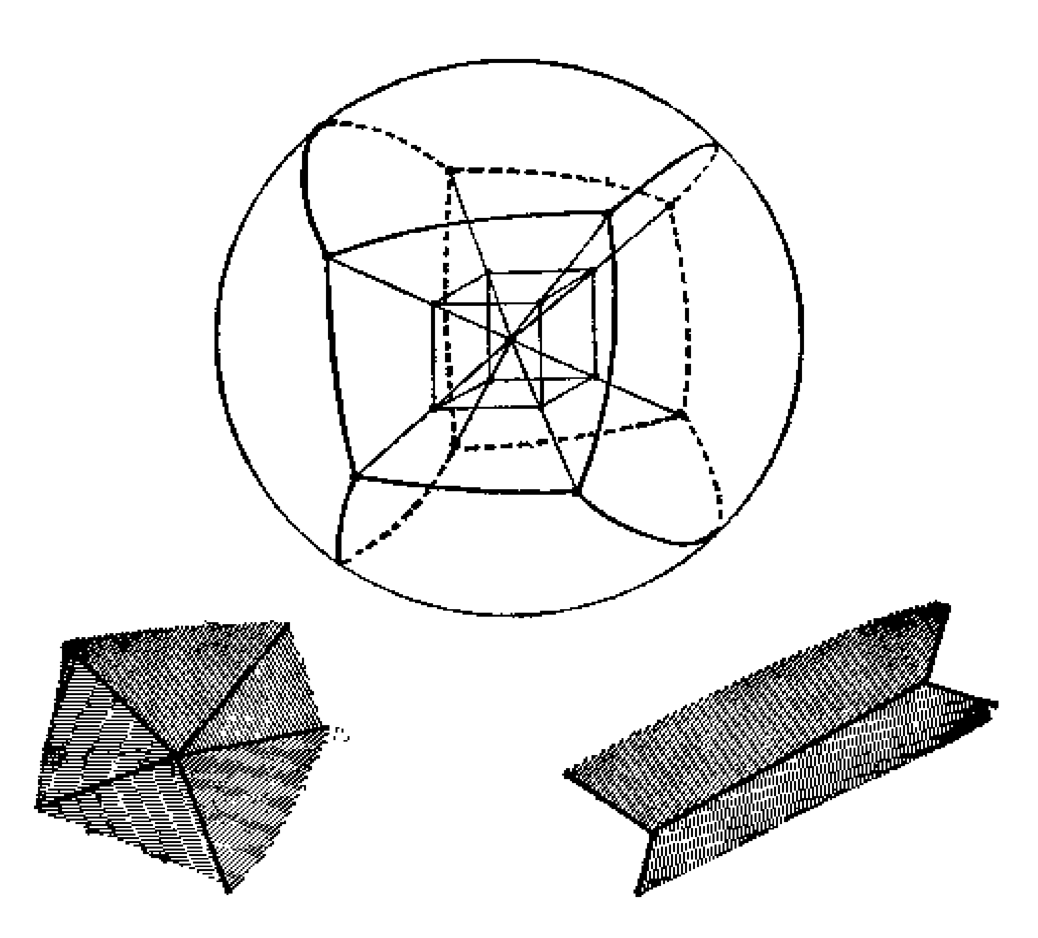


图 12.7.3.1.

12.7.3.2 第二种证法. 我们想在一个平面上进行讨论；证明的思路是在 P 上挖去一个面，从挖的面附近的一点作球极投影；然

后，在平面上如前一样作类似的计算，只要区分内部的顶点和边界上的顶点就行了。

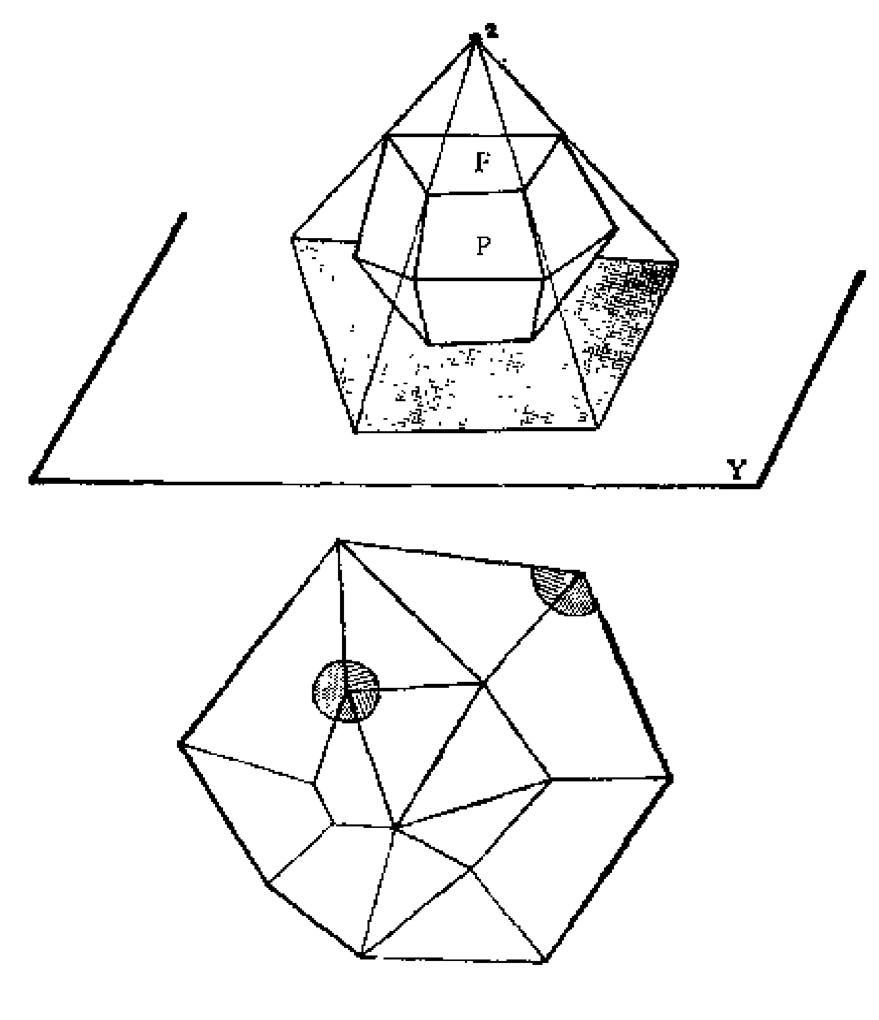


图 12.7.3.2.

设 $P=\bigcap\limits_{i=1}^{*} R_i$（参见 12.1.6），$F=F_1$，$a\in\bigcap\limits_{i\geqslant 2}\mathring{R}_i\backslash P$，$Y$ 是与 F 平行的一个平面，且使 Y 和点 a 位于由 F 决定的两个不同的半空间内。则如下定义的以 a 为中心、到 Y 上的投影：

$$p:\ x\longmapsto\langle a,x\rangle\cap Y.$$

在 P 的所有顶点、棱和除 F 外的面与 Y 上的点、线段和凸多边形的集合之间定义了一个双射，其中的凸多边形具有下述性质：它们是由一个大的凸多边形（即 $p(F_1)$）分解而得的，并且仅在顶点处或沿着边两两相交。称 σ' 为顶点个数。有内顶点和外顶点，总数

等于 $p(F_1)$ 的边数。于是，根据 10.5.2，所考虑的多边形的各角之和为

各角之和 $= 2\pi(\sigma' - k) + (k-2)\pi = \pi(2\sigma' - k - 2)$，这是因为，在一个内顶点处的各角之和为 2π，在外顶点则等于 $p(F_1)$ 在此点的角度。

将所考虑的具有 i 条边的多边形的个数，记为 φ_i'，它们的总数记为 φ'；仍根据 10.5.2，有

$$\text{各角之和} = \sum_i (i-2)\pi\varphi_i' = \pi[i\varphi_i' - 2\varphi'].$$

这里，由于边界的缘故，$\sum_i i\varphi_i$ 不等于边数 α'，而仅等于 $2\alpha' - k$。

由此得出 $2\sigma' - k - 2 = 2\alpha' - k - 2\varphi'$，即 $\sigma' - \alpha' - \varphi' = 1$。而 $\sigma = \sigma'$，$\alpha = \alpha'$，$\varphi = \varphi' + 1$。

12.7.4 一个应用. 由欧拉公式可推得 12.8.6 中的 Cauchy 定理；但下面我们看到，欧拉公式还提供了另一个方法，把三维空间中所有可能的正多胞形列成表格。

12.7.4.1 命题. 在一个三维仿射空间中，设 P 是一个多胞形，使得每一个顶点属于 r 个面，每一个面具有 s 个顶点，其中 r，s 为常数，则序对 $\{r, s\}$ 只能取五个值 $\{3, 3\}$，$\{3, 4\}$，$\{3, 5\}$，$\{4, 3\}$，$\{5, 3\}$。

事实上，从 12.7.2 推出 $2\alpha = \gamma\varphi = s\sigma$，因此，从 12.7.3 有

$$\boxed{\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}.}$$

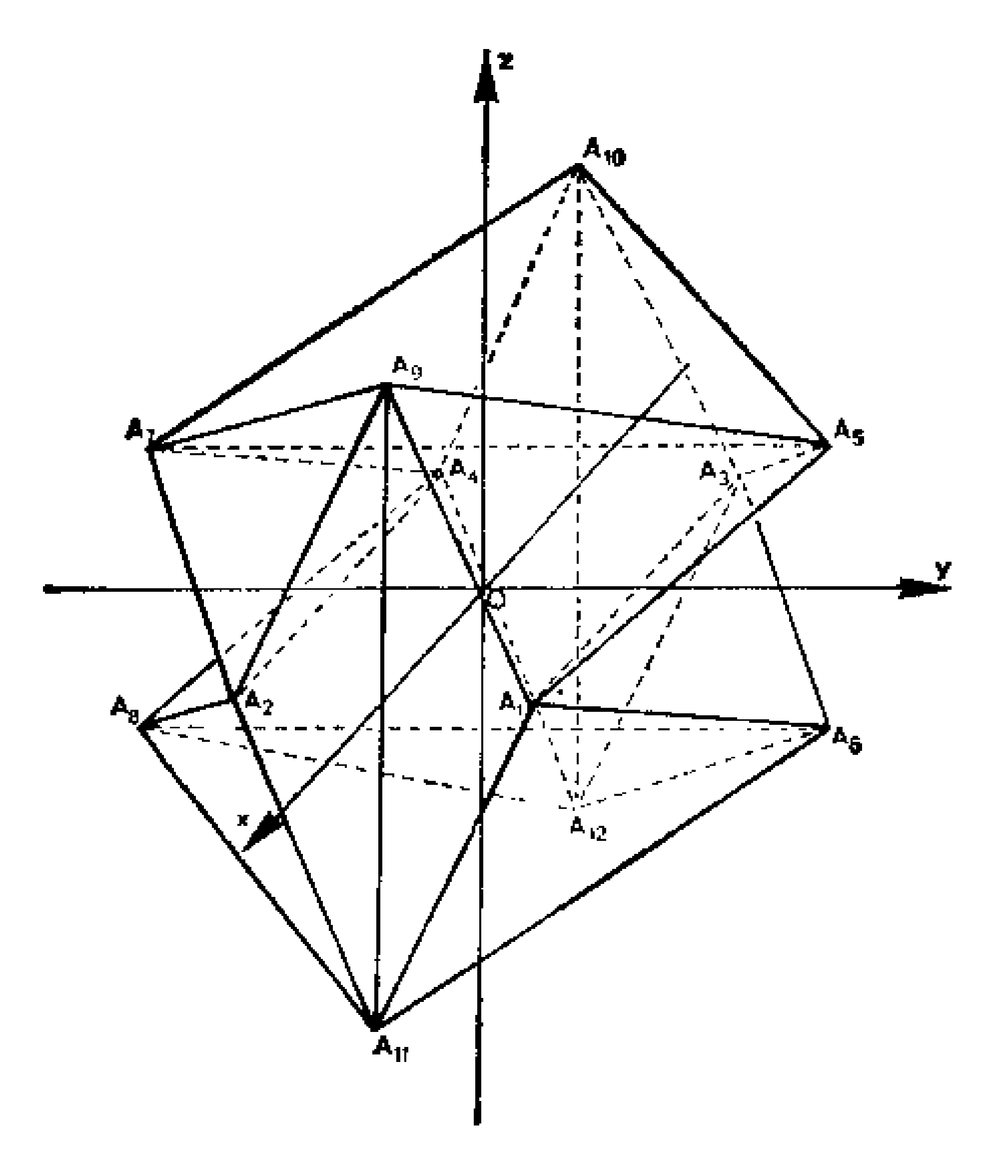
整数 $r, s \geq 3$. 由于 $\alpha > 0$，故 $r \geq 4$ 且 $s \geq 4$ 已不可能。于是，我们可得到下面列出的表格。

12.7.4.2 附注. 上式还对每一种情形给定了 σ, α, φ 的数目. 值得注意的是，这些多面体的存在性是平凡的，作出图形即可证明，根本不需要用到 12.5.5. 因此，综上所述，对于五种情形中的每一种，存在唯一的一个多胞形；

$\{r, s\}$	$\{3, 3\}$	$\{3, 4\}$	$\{4, 3\}$	$\{3, 5\}$	$\{5, 3\}$
σ	4	8	6	20	12
α	6	12	12	30	30
φ	4	6	8	12	20

12.7.5 附注

12.7.5.1 六嘴 Shaddock. 12.7.3.1 的证明方法表明，对于不一定是凸的，但是 11.1.2.4 意义下的星形多面体的紧多面体，Euler 公式也是成立的。我们利用这一事实，向读者指出一种危



Adrien Douady、APMEP 通报，第 281 期。

图 12.7.5.1.

险：不要以为这样一个非凸的，但在点 $O\in\mathring{P}$ 处为星形的多面体 P 在把每一个顶点沿连接它和 O 点的半直线上作适当的移动之后，就能变成一个凸多面体。一般来说这是不可能的；在［DY］中说明了这一点。同时，读者还能在该书中找到一个反例和它在代数几何中的一个应用。这个反例就是图 12.7.5.1 中的"六嘴 Shaddock"。也可看［LP］第 35 页。

12.7.5.2 12.7.3.1 的，甚至 12.7.3.2 的证明，都仅是关于二维紧黎曼流形的 Gauss-Bonnet 公式证明的一种特殊情形。在 12.7.3.1 中，流形是具有常曲率 1 的球面，在 12.7.3.2 中，它是带有边界的一个平面，其曲率为 0。有关这一推广，例如可看［KG 1］第 112 页或［SB］第 290 页，也可看 18.3.8.6 和 19.5.4。

12.7.5.3 12.7.3.1 和 12.7.3.2 的证明想必不会使读者完全感到满意。事实上，这结果是仿射的，并且引入的欧几里得结构不是对象所固有的。实际上，该结果在比仿射更一般的情况也对，它是"单形的"，只涉及顶点、棱、面以及它们的附属关系。

事实上，确有一个这样的结果，但凸性被所谓"单连通"的条件代替，否则，结论一般不成立，请看下文。目前，单连通最常用的定义是基本群为零，即任意一条闭道路可收缩成一点；从前，在二维多面体的情形下，单连通则是指一条简单闭道路把多面体分割成为两个不同的连通分支。读者在［VN］第 19—27 页上可找到借助于单连通这个定义对 $\sigma-\alpha+\varphi=2$ 的证明。读者也应看到，单连通的这两种定义是等价的。上面提到的这些事实的证明属代数拓扑内容，已超出本书的范围。

12.7.5.4 对于任意一个多面体，在 12.1.3 的意义下，一般说公式是不成立的。我们把 γ 个多面体如图 12.1.3.1 那样连结起来，得到有如 12.7.5.4 的图形和下述表格，表中给出了 σ，α，φ 和 $\sigma-\alpha+\varphi$。

因此，添上凸集这个条件后，我们就得到了值 $2(1-\gamma)$，这里 $\gamma=0,1,2,\cdots$。我们确实能够证明，对于任意一个上述意义下的多面体 P，或者换句话说，对任意一个嵌入在 $\mathbf{R}^3$ 内的曲面，

γ	σ	α	φ	$\sigma-\alpha+\varphi$
1	12	24	12	0
2	20	44	22	-2
γ	$12\gamma-4(\gamma-1)$	$24\gamma-4(\gamma-1)$	$12\gamma-2(\gamma-1)$	$2(1-\gamma)$

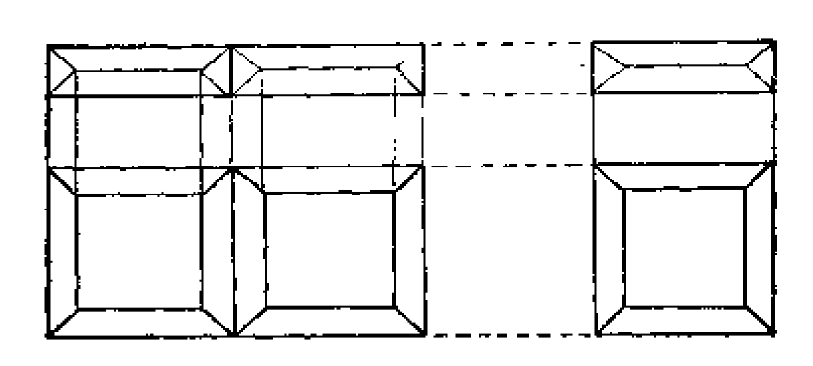


图 12.7.5.4.

$\sigma-\alpha+\varphi$ 的值总等于 $2(1-\gamma)$. 数 γ 是 P 关于形变的不变量；我们可以证明，对应于这个数 γ，任意一个多面体都同胚于图 12.7.5.4 中的多面体，于是，我们可以把 γ 称为 P 的洞数，并称 $\sigma-\alpha+\varphi$ 为 P 的 Euler-Poincaré 示性数. 对于这些问题的介绍，可选看 [GM] 第 5 章，或者 [SE-TH] 第 6 章.

12.7.5.5 读者可能要问：对于任意一个 d 维凸多面体，情况又是怎样呢？答案是：如果 φ_i 在这里表示 P 的 i 维面的个数 $(i=0,1,\cdots,d-1)$，则恒有 $\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i\varphi_i=1+(-1)^{d-1}$.

读者可对 $d=2$ 和 $d=4$ 时的正多胞形加以验证. 关于其证明，参看 [GG] 第 102—103 页. 也可参看 [CR 2] 第 IX 章.

下面，X 是三维欧几里得仿射空间.

12.8 Cauchy 定理

有些定理叙述很简单，证明却很困难. 本定理就是这样的一个极好的例子. 读者若用纸头制作一个凸多面体，就会看出这一

点：刚开始构作时，如果顶点的汇集处多于三个面，则多面体是能够弯曲的(绕着棱)。但当它做好后，就不能再弯曲了。要是按的力量太大，则或者是面发生形变，或者是多胞形裂开。事实上，我们有下面更强的结果。

12.8.1 定理 (Cauchy). 设 P, P' 是 X 的两个凸多面体。f: $\mathrm{Fr}\, P \to \mathrm{Fr}\, P'$ 是保持顶点、棱和面的一个双射。假设对于 P 的任意一个面 F，限制 $f|_F$: $F \to f(F)$ 是一个等距，则存在 X 的一个等距 $\bar{f}$，使得 $\bar{f}(P) = P'$，$\bar{f}|_{\mathrm{Fr}P} = f$。特别，$P$ 和 P' 是等距的。

12.8.2 推论. 一个凸多面体 P 是不可弯曲的。换言之，设 $P(t)$ 是多面体(不一定是凸的)的集合，$t \in [0, 1]$ 和 $P(0) = P$，而且 f_t: $\mathrm{Fr}\,(P(0)) \to \mathrm{Fr}\,(P(t))$，$t \in [0, 1]$ 是一族双射，使得对于 $P(0)$ 的任意一个面 F，$f_t|_F$ 是 F 和 $f_t(F)$ 之间的一个等距。此外，若再假定 $f_0 = \mathrm{Id}_P$，而 f: $\mathrm{Fr}P \times [0, 1] \ni (x, t) \longmapsto f_t(x) \in X$ 是连续的，则存在一族等距 $\bar{f}_t \in \mathrm{Isom}\,(X)$，$t \in [0, 1]$，使得对任意的 $t \in [0, 1]$ 有 $\bar{f}_t|_{\mathrm{Fr}\,P(0))} = f_t$，而且 $\bar{f}_t(P(0)) = P(t)$。

考虑这样的点 $t \in [0, 1]$，它使得存在一个等距 $\bar{f}_t$，它是 f_t 的延拓并且 $\bar{f}_t(P(0)) = P(t)$。这样的 t 所构成的集合在 $[0, 1]$ 中既是开集，又是闭集：利用连续性的假定，可知它是闭的；它是开集的原因是，如果 $P(t)$ 是一个多胞形，则对于邻近 t 的值 t'，$P(t')$ 仍是一个多胞形，从而可用 12.8.1。

12.8.3 推论. 设 P 是一个多胞形，满足

(i) 所有的面均为边数相同的正多边形。

(ii) 每一个顶点属于相同个数的面；则 P 是正多胞形。

根据 12.7.4 和 12.6.7，确实存在一个正多胞形 P'，满足上述的 P 的条件，因此可构造一个双射 f: $\mathrm{Fr}\, P \to \mathrm{Fr}\, P'$，它满足 12.8.1 的假设条件。因此，$P$ 与一个正多胞形等距，故它本身是正多胞形。

12.8.4 附注

12.8.4.1 如果 P 是一个多胞形，但 P' 是一个不一定凸的多面体，则定理 12.8.1 可能是不成立的。图 12.8.4 就说明了这一点，

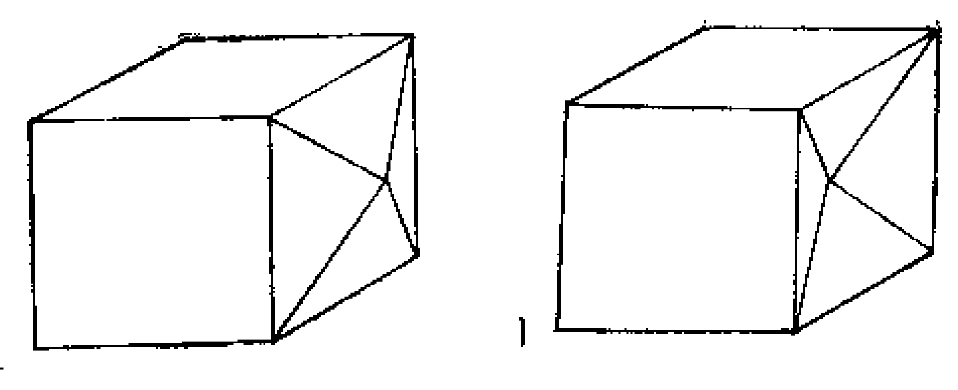


图 12.8.4.

其中 P' 是从 P 用关于一个平面的对称改动右面四个面得出的.

但我们将会看到,尽管如此,P 还是不可弯曲的. 不能用连续的等距把 P 变到 P'.

12.8.4.2 自从 Cauchy 的最初的论文在 1813 年发表以后,这始终是一个悬而未决的问题: 是不是存在可弯曲的(因而必然是非凸的)多面体? 这个问题 164 年以来,没有一个明确的回答,直到最近才由 Robert Connelly 一举解决了,他构作了一个可弯曲的多面体(且还是单连通的). 参阅: R. Connelly, A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra, Publications Mathématiques de l' IHES. n^0 **67**, Presses Universitaires de France. 两本古典的著作是 [GL] 和 [CO]. 关于这样一个多面体的实际作法参看 R. Connelly 的预印本: How to Builda Flexible Polyhedral Surface (Cornell University). 也可参看本书第 170—171 页.

12.8.4.3 在二维时定理 12.8.1 是不成立的: 只要一个多边形的边数大于 3, 就很容易变形成边长相等的一个多边形(看 10.8.3!). 相反,从 12.8.1 可推出,对任意 ≥ 3 的维数,定理是成立的: 证明可用归纳法,主要思想如下.

如果用三维球面 S^3 内的凸球面多面体代替三维欧几里得仿射空间中的多胞形,定理依然是成立的(下面的证明可不作更改地照用).现设 P, P' 如 12.8.1 所述,维数 $d=4$; 对于任意的 $x\in P$, 构

作其星形集 $\mathrm{Et}_x P$，它是 P 与以 x 为中心、半径相当小的一个球面的交集．则 12.8.1 的假设条件说明 $\mathrm{Et}_x P$，$\mathrm{Et}_{f(x)} P'$ 是 S^3 的球面多面体(正交化之后)，它们满足上面所述的条件，因而是等距的．如果我们回到 P，P'，这就是说 f 保留 P 和 P' 的二面角，由此，再根据下面的引理就得出 P，P' 是等距的．当然，当 $d=3$ 时，这个方法行不通，这正是整个证明的困难所在，原因则是 S^2 的多边形，只要其边数大于 3，就必定是可变形的了．

12.8.5　基本引理． 利用 12.1.12 中引入的一个多胞形的二面角的概念，记 $\delta_A(P)$ 为多胞形 P 在棱 A 处的二面角．

12.8.5.1　引理． 如果 12.8.1 中的双射 f 保持二面角不变，即若对 P 的任意一条棱 A 有 $\delta_{f(A)}(P')=\delta_A(P)$，则 f 可延拓成为空间中的一个等距 $\bar{f}$，使得 $\bar{f}(P)=P'$．

模仿 12.4.2 中的证明．选取 P 的一个面 F，依假设条件，可假定 $f(F)=F$，且 P 和 P' 位在由 F 决定的同一个半空间内．设 A 是 P 的一条棱，并且 G，G' 是沿 A 与 F 相邻的两个面．因为 $\delta_A(P)=\delta_A(P')$，所以 G，G' 是等距的，且在 F 的同一边，故 $G=G'$．于是，依靠 12.1.13，逐步逐步可证明本引理．

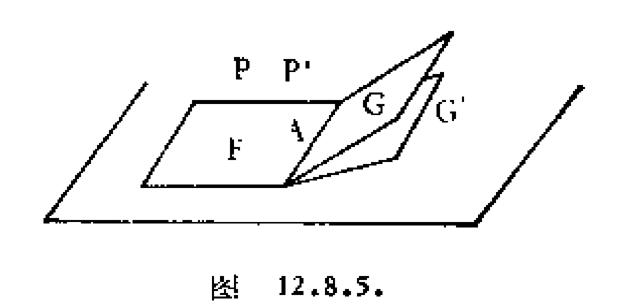


图　12.8.5.

12.8.6　Cauchy 定理的证明

12.8.6.1　根据 12.8.5.1，整个问题归结为证明 f 保持二面角不变．我们注意到根据球面三角形相等的情形(参见 18.6.13.10)，如果 P 的任一顶点都属于三个面，上述结论容易得证．然而，一旦此数变成 4 时，我们遇到的那些边数为常数的球面多边形，都是容易发生形变的．

证明的思想是以 Cauchy 为这个定理而炮制的一个关键性的

引理作为基础的.该引理指出，当一个球面多边形变形为常数边长时，角度的增加和角度的减少必然是充分交错的：参见 18.7.16.证明的思想是计算这些交错数，第一次先按面数，然后，先按顶点数，比较这两个和数，它们应该是相等的，这样就与 Euler 公式发生矛盾. 若对 P 的任意的棱 A，有 $\delta_{f(A)}(P') \neq \delta_A(P)$，则证明要容易得多.

12.8.6.2 对于满足定理 12.8.1 假设条件的 P, P', f，我们引入：

Ξ：表示 P 的棱的集合. 函数 ε：$\Xi \to \{-1, 0, 1\}$定义为：

当 $\delta_A(P) < \delta_{f(A)}(P')$，$\delta_A(P) = \delta_{f(A)}(P')$，$\delta_A(P) > \delta_{f(A)}(P')$ 时，Ξ分别取值-1，0，1.

我们称 P 的两条棱 $\{A, B\}$ 是相邻的，是指 $A\cap B$ 为 P 的一个顶点，且 A，B 属于同一个面.

12.8.6.3 第一种情形： $\forall A \in \Xi$，$\varepsilon(A) \neq 0$. 所谓两条相邻棱的序对 $\{A, B\}$ 表示一个变号，意即 $\varepsilon(A)\cdot\varepsilon(B) = -1$. 假设 ν 是表示一个变号的序对总数.

设 x 是 S 的一个顶点，π 是以 x 为中心、半径足够小的一个球面同 P 相交而成的凸的球面多边形. 对于 $x' = f(x)$，π' 有同样

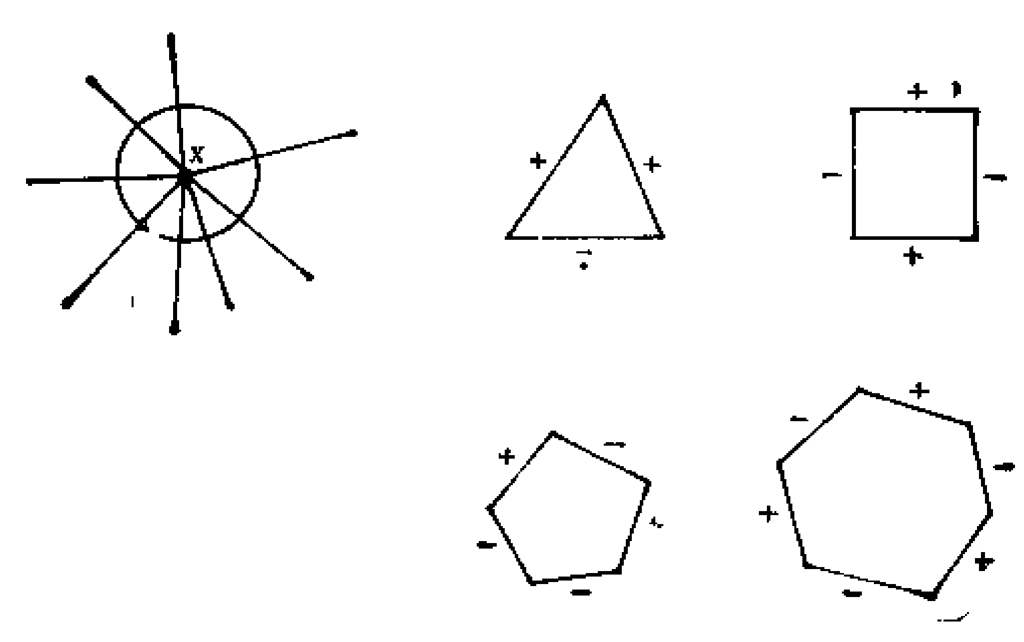


图 12.8.6.3.

的含义。依假设条件，只要这两个多边形都在单位球面 S^2 上，就存在一个双射 $\pi\to\pi'$，它保持边的长度。

Cauchy 引理(参见 18.7.16)恰好说明，我们对于和 x 相交的相邻棱序对可算得变号数 $\geqslant 4$；因此，由于有 σ 个顶点(12.7 的记号)，则有 $\nu\geqslant 4\sigma$.

现在计算有 i 个顶点的一个面上相邻棱序对的变号数：对于 $i=3$，至多 2 个；对于 $i=4$ 或 5，至多 4 个；对于 $i=6$ 或 7，至多 4 个，…等等，于是，

$$\nu\leqslant 2\varphi_3+4\varphi_4+4\varphi_5+6\varphi_6+6\varphi_7+\cdots.$$

应用 12.7.2，我们得到：

$$\begin{aligned}4\alpha-4\varphi &= 6\varphi_3+8\varphi_4+10\varphi_5+12\varphi_6+14\varphi_7+\cdots\\ &\quad -(4\varphi_3+4\varphi_4+4\varphi_5+4\varphi_6+4\varphi_7+\cdots)\\ &= 2\varphi_3+4\varphi_4+6\varphi_5+8\varphi_6+10\varphi_7+\cdots\\ &\geqslant \nu\geqslant 4\sigma.\end{aligned}$$

由此推出：$\sigma-\alpha+\varphi\leqslant 0$，与 12.7.3 矛盾.

12.8.6.4 第二种情形： $\mathscr{E}(A)$ 都是任意的。 如果 $A\in\Xi$，使得 $\mathscr{E}(A)=0$，则称 A 是 P 的故棱。又如果 $A\in\Xi$，使得 $\mathscr{E}(A)\neq 0$，则称 A 是 P 的新棱。新棱所成的集合记作 Ξ'，$\alpha'=\#\Xi'$。从 $\operatorname{Fr}P$ 中去掉 Ξ' 的棱，则得到拓扑空间 $U=\operatorname{Fr}P\setminus\bigcup_{A\in\Xi'}A$；$U$ 的连通分支的闭包称为 P 的新面。以 Φ' 表示新面的集合，$\varphi'=\#\Phi'$. 最后，新顶点乃是 P 的至少属于一条新棱的顶点。设 Σ' 是新顶点的集合，记 $\sigma'=\#\Sigma'$。请注意由 Cauchy 引理可知：任意一个新顶点至少属于两条棱，即没有一条新棱是具有自由端点的。

12.8.6.5 恒有 $\sigma'-\alpha'+\varphi'\geqslant 2$. 事实上，我们可以逐个地安置假棱，这样就对 $i=1,\cdots,(\alpha-\alpha')$，给出了介于 σ,α,φ 和 σ',α',φ' 之间的基数 $\sigma_i,\alpha_i,\varphi_i$；要注意到每一步都须把一条新的故棱附着于一个新顶点或一个已有的顶点(注意，在这样的重新安排中，可能出现暂时有自由端点的棱)。对于每一步 i，我们总有 $\alpha_{i+1}=\alpha_i+1$，并若 $\sigma_{i+1}=\sigma_i$，则 $\varphi_{i+1}=\varphi_i$ 或 $\varphi_{i+1}=\varphi_i+1$. 又

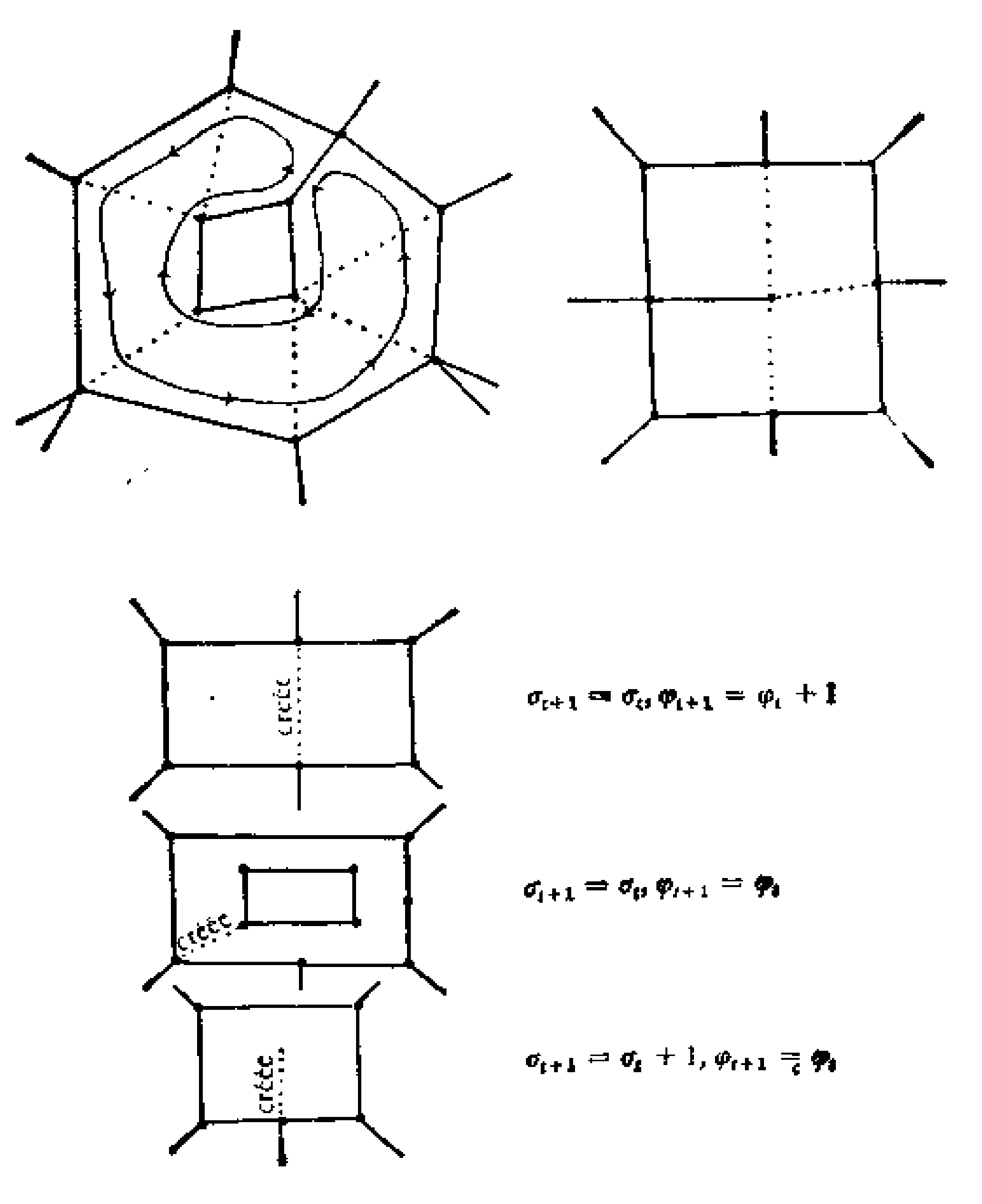


图 12.8.6.4.

若 $\sigma_{t+1} = \sigma_t + 1$，则 $\varphi_{t+1} = \varphi_t$. 因此函数 $\sigma_t - \alpha_t + \varphi_t$ 在任何情况下都是不增的. 依照 12.7.3，它取值为 2. 当 $t = \alpha - \alpha'$ 时，12.8.6.5 已得证. 对这样一个公式，可参考 [LU] 第 13 章，[STRA] 第 33 节，或 [AV] 第 78 页公式 (3).

12.8.6.6 现在，我们可如同第一种情形一样进行讨论，沿用相邻新棱、变号等概念，变号总数总记为 ν. 只须注意，一条新棱不一定属于两个新面，但只可能属于 1 个或 2 个；作为补救的办法，我们把一个新面的边数算作新边数，这样的确增大了两次作为该

面的边的那些新棱的基数(参见图 12.8.6.4)。用此约定，设 Φ'_i 是具有 i 条边的新面的集合，$\varphi'_i = \#\Phi'_i$。则把 Cauchy 引理引用于 σ 个新顶点即得:

$$2\alpha' = \sum_i i\varphi'_i,\quad \varphi' = \sum_i \varphi'_i,\quad \nu \geqslant 4\sigma';$$

对于每一个新面计算变号数:

$$\nu \leqslant 2\varphi'_3 + 4\varphi'_4 + 4\varphi'_5 + 6\varphi'_6 + 6\varphi'_7 + \cdots.$$

由此，与 12.8.6.3 相仿地得出：$4\alpha' - 4\varphi' \geqslant \nu \geqslant 4\sigma'$，与 12.8.5 矛盾。于是，我们这样构造新棱、新面等的做法是不可能的，亦即所有的棱都是故棱，$\mathscr{E}(A) = 0$，$\delta_A(P) = \delta_{f(A)}(P')$，$\forall A \in \Xi$。由 12.8.5.1 即可得证。

在本章其余部分，X 是欧几里得仿射空间。

12.9 用多胞形逼近紧凸集

在 Hausdorff 距离的意义下(参见 9.11)，我们要利用多胞形来逼近紧致凸集；这样做有好几方面的重要意义：用初等方法定义凸集的体积 (12.9.3.2)，证明体积是凸集上的连续函数且凸集的边界是零测度的(12.9.2.4 和 12.9.3.4)，定义凸集的面积(12.10.2)。

12.9.1 凸集和 Hausdorff 距离. 沿用 9.11 中的记号;因而，凸包络 $\mathscr{E}$ 决定了一个映射 $\mathscr{E}: \mathscr{K} \to \mathscr{K}$，参阅 11.1.8.7。

12.9.1.1 命题. 映射 $\mathscr{E}: \mathscr{K} \to \mathscr{K}$ 是比值为 1 的 Lipschitz 映射。

参阅定义 9.11.1 只要证明当 $F, G \in \mathscr{K}$，满足 $F \subset B(G, \rho)$ $(\rho \geqslant 0)$ 时，有 $\mathscr{E}(F) \subset B(\mathscr{E}(G), \rho))$ 就够了；而这从 11.8.7.6 即可证得。

12.9.1.2 推论. 记 $\mathscr{C} = \{F \in \mathscr{K} : F \text{ 是凸集}\}$，则 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{K}$ 的一个闭集。特别，$\mathscr{C}$ 是完全集，且 $a \in X$ 和 $r \geqslant 0$ 时，$\mathscr{C}_{ar} =$

$\mathscr{K}_{a,r}\cap\mathscr{C}$ 是紧集。

下述引理在几何学上很直观地说明了关于凸集的"趋向"的概念。

12.9.1.3 引理. 设 A, C, D 是三个紧凸集，使得 $\mathring{C}\neq\emptyset$，$D\subset C\subset A$，并且 $\operatorname{Fr}A\cap C=\emptyset$，$\operatorname{Fr}C\cap D=\emptyset$，则存在 $\eta>0$，使得对任意一个凸集 S，只要 $\delta(C, S)\leqslant\eta$，则有 $D\subset S\subset A$。

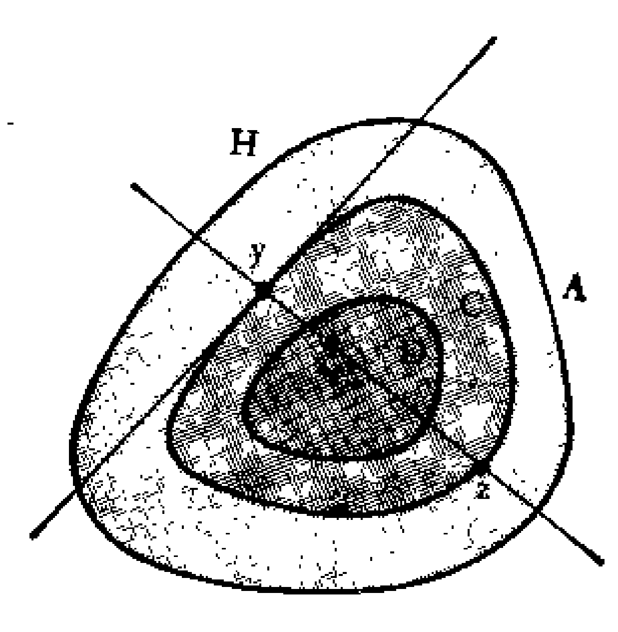


图 12.9.1.

当 $S\subset A$ 时，很容易证明. 只要取 $\eta=d(\operatorname{Fr}A, C)$ 即可。

当 $S\supset D$ 时，也取 $\eta=d(\operatorname{Fr}C, D)$，并设 S 满足 $\delta(C, S)\leqslant\eta$. 采用反证法. 假设 $x\in D\backslash S$. 取 y 使得 $d(x, y)=d(x, S)$，我们知道(参见 11.1.7.2)，$S\subset H$，这里 H 是在 y 点与 $\langle x, y\rangle$ 正交的超平面所决定的一个半空间. 由于 $x\in\mathring{C}$，若设 $z\in\langle x, y\rangle\cap\operatorname{Fr}C$ 是不在 H 上的点，则由 η 的定义，有

$$d(z, S)=d(z, y)>d(z, x)\geqslant\eta;$$

但因 $z\in C$，与 $C\subset B(S, \eta)$ 矛盾。

12.9.2 逼近引理. 记 $\mathscr{P}$ 为所有紧凸多面体的集合，$\mathscr{P}^{\bullet}$ 是所有多胞形的集合，并且 $\mathscr{C}^{\bullet}=\{C\in\mathscr{C}:\ \dim C=\dim X\}$(或还有 $\mathring{C}\neq\emptyset$，参见 11.2.7). 在这些写法里，$X$ 都被省略了. 如有需要，可写作 $\mathscr{P}(X)$，$\mathscr{P}^{\bullet}(X)$，$\mathscr{C}(X)$，$\mathscr{C}^{\bullet}(X)$。

12.9.2.1 引理．对任意的 $\varepsilon>0$ 和 $C\in\mathscr{C}^{\bullet}$，存在 $P\in\mathscr{P}^{\bullet}$ 使得 $P\subset C\subset B(P,\varepsilon)$（特别有 $\delta(P,C)\leqslant\varepsilon$）．

因为C是紧的，故能用n个球 $B(a_i,\varepsilon)$，$a_i\in C$ 覆盖它，即 $C\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(a_i,\varepsilon)$．则凸包络 $P=\mathscr{E}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 即为所求，参见 12.1.15．

12.9.2.2 **推论．** $\mathscr{P}$ 在 $\mathscr{C}$ 内是稠密的．

我们刚才看到 $\mathscr{P}^{\bullet}$ 在 $\mathscr{C}^{\bullet}$ 内是稠密的．现在，如果 $C\in\mathscr{C}\setminus\mathscr{C}^{\bullet}$，并设 $Y=\langle C\rangle$ 是由它生成的子空间．在Y内，凸集C是内部非空的（参见 11.2.7），我们可用 $P\in\mathscr{P}(Y)$ 来逼近它．如果 I_ε 表示在与Y正交的子空间 $Y^{\perp}$ 内以 ε 为半径的球，则 $P\times I_\varepsilon$ 逼近 C．

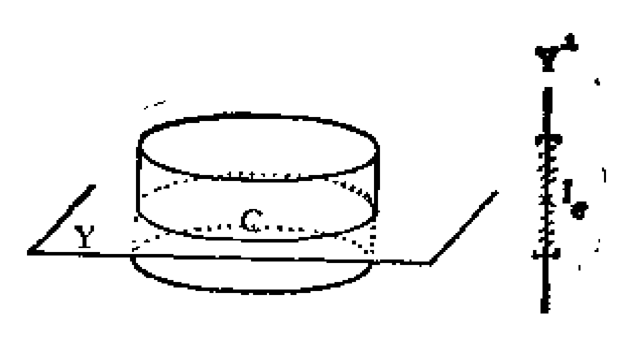


图 12.9.2.2.

在下文中，把一个 $C\in\mathscr{C}$ 从两侧，而不仅仅是如上述引理中那样把内部用多胞形包起来是有益的，而且引理中的 $B(P,\varepsilon)$ 因其不是多胞形而颇不方便．

12.9.2.3 引理．对于任意的 $C\in\mathscr{C}^{\bullet}$，$a\in\mathring{C}$ 和 $\eta>1$，总存在 $P\in\mathscr{P}^{\bullet}$，使得 $P\subset C\subset H_{a,\eta}(P)$，$\mathrm{Fr}(C)\cap P=\emptyset$，$C\cap\mathrm{Fr}(H_{a,\eta}P)=\emptyset$．

首先，固定 $r>0$，使得 $B(a,r)\subset\mathring{C}$．然后，取 ε，使得 $0<\varepsilon<r(\eta-1)$．根据 12.9.2.1，设有一个 $P\in\mathscr{P}^{\bullet}$，使得 $P\subset C\subset B(P,\varepsilon)$．根据 12.9.1.3，只要 ε 足够小，就有 $P\supset B(a,r)$．由作法可知，P 的一个面 F 和 $H_{a,\eta}(F)$ 之间的距离 $\geqslant(\eta-1)r>\varepsilon$；由此推出：

$$\mathring{H}_{a,\eta}(P) \supset \mathring{B}(P, \varepsilon) \supset C.$$

至于边界的不相交条件，把 P 修改为一个比值 <1 而足够接近 1 的位似即可。

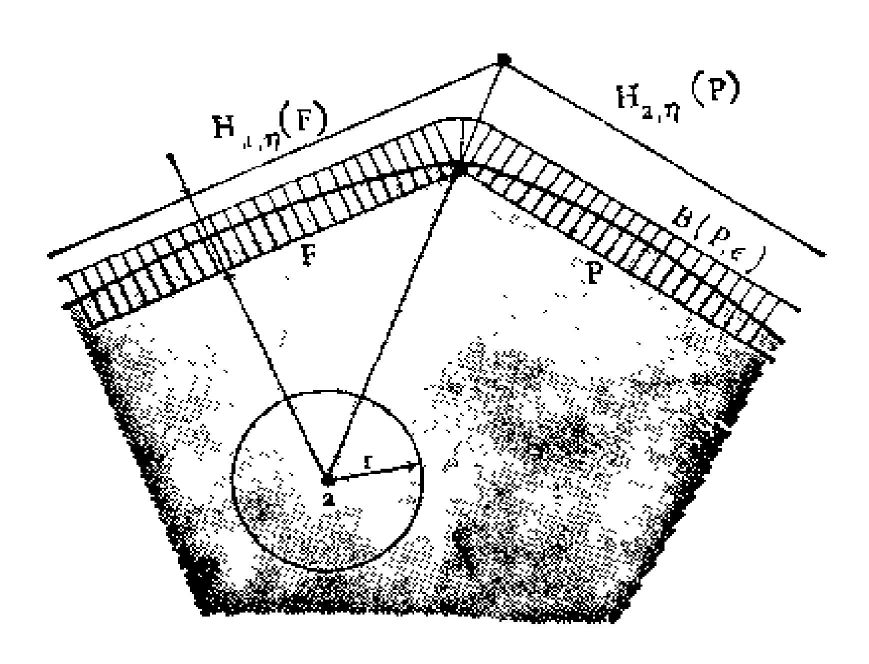


图 12.9.2.3.

12.9.2.4 推论. 任一凸集 C 具有零测度的边界(参见 9.12.5).

如果 $\mathring{C}=\varnothing$，$C\subset Y$ 是一个真子空间，于是 C 本身的测度为 0。

如果 $\mathring{C}\neq\varnothing$，应用 12.9.2.3；$C$ 的边界包含在 $P'\backslash P$ 内，这里 $P'=H_{a,\eta}P$。因为 $\mathfrak{L}(P'\backslash P)=\mathfrak{L}(P)(\eta^d-1)\leqslant\mathfrak{L}(C)(\eta^d-1)$（参见 9.12.3），当 $\eta\to 1$ 时，就有 $\mathfrak{L}(P'\backslash P)\to 0$。

12.9.3 紧凸集的体积. 沿用 9.12 中的记号。

12.9.3.1 命题. 对 $C\in\mathscr{C}$，我们有：

$$\mathfrak{L}(C)=\sup\{\mathfrak{L}(P):P\in\mathscr{P}\text{ 和 }P\subset C\}$$
$$=\inf\{\mathfrak{L}(P):P\in\mathscr{P}\text{ 和 }P\supset C\}.$$

如果 $\mathring{C}=\varnothing$，如同 12.9.2.2 中的证明一样，我们可以归结为 $\mathring{C}\neq\varnothing$ 的情况. 对后者，可应用 12.9.2.3.

12.9.3.2 鉴于引理 12.9.2.3，我们就可以从 12.2.5 初等体积出发，把 12.9.3.1 作为 $\mathfrak{L}(.)$ 在全体凸集上的定义。这样，我们就

有可能避免求助于积分理论。

12.9.3.3 命题. 体积 $\mathfrak{L}: \mathscr{C}^{*} \to \mathbf{R}$ 是严格递增的。即若 D, $C \in \mathscr{C}$ 以及 $D \subset C$, $D \neq C$, 则 $\mathfrak{L}(D) < \mathfrak{L}(C)$。

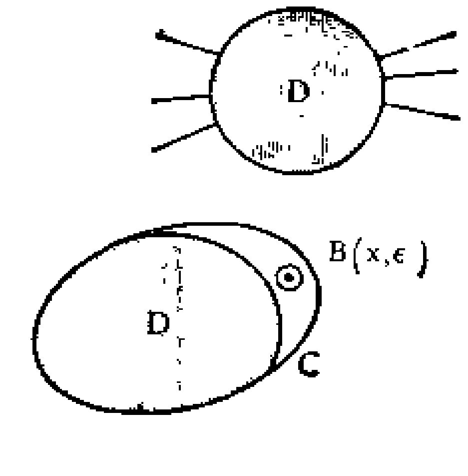


图 12.9.3.

事实上，如果 $C \supset D$, $C \neq D$, 引理 11.2.4 表明 $\mathring{C} \setminus D \neq \varnothing$. 设 $\varepsilon > 0$ 和 $x \in \mathring{C} \setminus D$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subset C \setminus D$, 则有

$$\mathfrak{L}(C) \geqslant \mathfrak{L}(D) + \mathfrak{L}(B(x, \varepsilon)) > \mathfrak{L}(D).$$

在 $\mathscr{K}$ 内，此结论显然是不对的。我们记得 (参见 9.12.5)：体积在 $\mathscr{K}$ 上不是连续的；但在C 上有：

12.9.3.4 命题. 体积 $\mathfrak{L}: \mathscr{C} \to \mathbf{R}$ 是一个连续函数。

我们的做法同 9.12.6 中一样。我们知道，如果在 $X \setminus \operatorname{Fr} C$ 上，$\lim_{n \to \infty} C_n = C$，则 $\lim_{n \to \infty} \chi_{C_n} = \chi_C$。但在这里，Fr C 是零测度的，于是，$\lim_{n \to \infty} \int_X \chi_{C_n} \mu = \int_X \chi_C \mu$，在任何一个 X 上成立。

我们可以给出命题的一个初等的证明。如果 $C = \lim_{n \to \infty} C_n$ 内部是空的，则如同在 12.9.2.2 中的证明一样，把它装在一个匣内。如果 $\mathring{C} \neq \varnothing$，利用 12.9.2.3 构作两个多胞形 P, P'，使得 $P \subset C \subset P'$，$\mathfrak{L}(P') - \mathfrak{L}(P) \leqslant \varepsilon$ 以及 $\operatorname{Fr} C \cap P = \varnothing$，$\operatorname{Fr} P' \cap C = \varnothing$；应用 12.9.1.3 可知，由于当 η 足够小时，$\delta(C, D) \leqslant \eta$，故而 $P \subset D \subset P'$，因此 $|\mathfrak{L}(D) - \mathfrak{L}(C)| \leqslant \mathfrak{L}(P') - \mathfrak{L}(P) \leqslant \varepsilon$。

12.10 紧凸集的面积

我们在 9.12.7 中已经看到，k 维体积的概念是很复杂的。对于凸集，很自然地会希望通过用多胞形逼近，再取逼近多胞形的面积的极限的做法，来找到它们边界的 $(d-1)$ 维体积(在这里应称为面积了)；这是因为对于多胞形我们已经有一个令人满意的面积

定义，参见 12.3. 这条路是行得通的，但是，我们下面宁愿采取 Cauchy 公式 12.3.3 作为面积的定义。首先，应该验证：

12.10.1 引理. 沿用 12.3 中的记号，函数

$$\mathfrak{L}(p_{\cdot}(\cdot)):S\times\mathscr{C}^{\bullet}\ni(\xi,C)\longmapsto\mathfrak{L}(p_{\xi}(C))\in\mathbf{R}$$

是连续的。

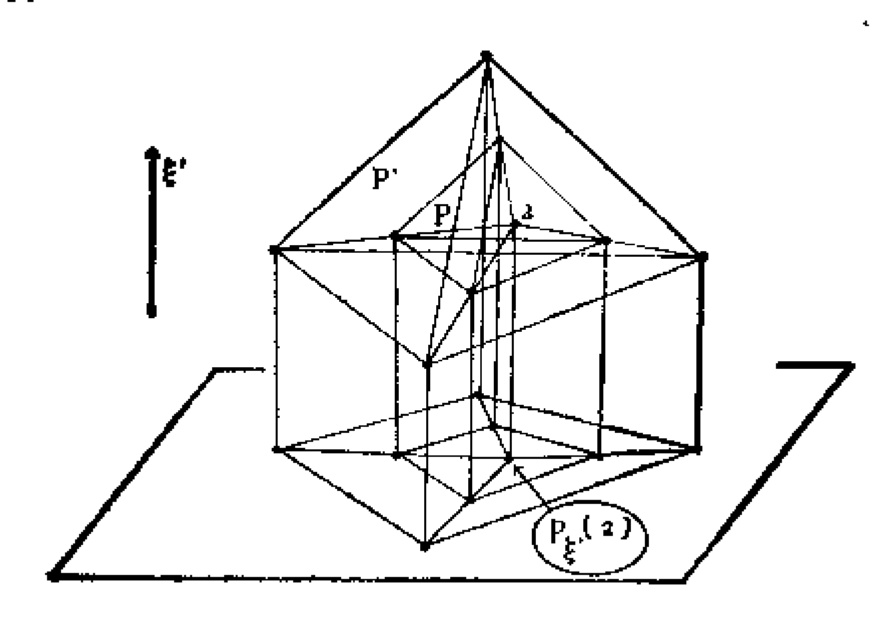


图 12.10.1.

固定 $\xi\in S$, $C\in\mathscr{C}^{\bullet}$, $a\in\mathring{C}$, $\varepsilon>0$；对于任意的 $\eta>1$，存在一个 $P\in\mathscr{P}^{\bullet}$（参见 12.9.2.7），使得 $P\subset C\subset P'=H_{a,\eta}P$, $\mathfrak{L}(P')-\mathfrak{L}(P)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$, $\operatorname{Fr}C\cap P=\varnothing$, $\operatorname{Fr}P'\cap C=\varnothing$. 因为对于任意的 $\xi'\in S$, $H_{p_{\xi'}(a),\eta}\circ p_{\xi'}=p_{\xi'}\circ H_{a,\eta}$，故有

$$\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P'))=\eta^{d-1}\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P)).$$

因为存在 r，使得 $B(a,r)\supset C$，所以，对任意的 $\xi'\in S$ 有（参见 9.12.4.5）：

$$|\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P'))-\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P))|\leqslant(\eta^{d-1}-1)r^{d-1}\beta(d-1).$$

从而，可以固定 η 和 P，使得

$$|\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P')-\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P))|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\quad\forall\xi'\in S.$$

但是，12.3.3.2 的公式表明，$S\ni\xi'\longmapsto\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P))\in\mathbf{R}$ 在 ξ' 处是连续的，于是存在 ζ，使得 $\|\xi'-\xi\|\leqslant\zeta$ 蕴涵

$$|\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P))-\mathfrak{L}(p_\xi(P))|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

根据 12.9.1.3，可选取 θ 足够地小，使得 $\delta(D, C)\leqslant\theta$ 蕴涵 $P\subset D\subset P'$，从而有

$$\begin{aligned}|\mathfrak{L}(p_{\xi'}(D))-\mathfrak{L}(p_\xi(C))|&\leqslant|\mathfrak{L}(p_{\xi'}(D))-\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P))|\\&\quad+|\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P))-\mathfrak{L}(p_\xi(P))|+|\mathfrak{L}(p_\xi(P))-\mathfrak{L}(p_\xi(C))|\\&\leqslant|\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P'))-\mathfrak{L}(p_{\xi'}(P))|+\frac{\varepsilon}{3}\\&\quad+|\mathfrak{L}(p_\xi(P'))-\mathfrak{L}(p_\xi(P))|\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

12.10.2 命题.定义. 对于任意 $C\in\mathscr{C}^\bullet$，积分

$$\mathfrak{A}(C)=(\beta(d-1))^{-1}\int_{\xi\in S}\mathfrak{L}(p_\xi(C))\sigma$$

存在，称它为 C 的面积(当 $d=2$ 时，称为长度)。这样定义的面积同多胞形的面积是一致的.面积 $\mathfrak{A}:\ \mathscr{C}^\bullet\to\mathbf{R}$ 是连续的，且是严格递增的。它在 $\mathrm{Is}(X)$ 下是不变量.

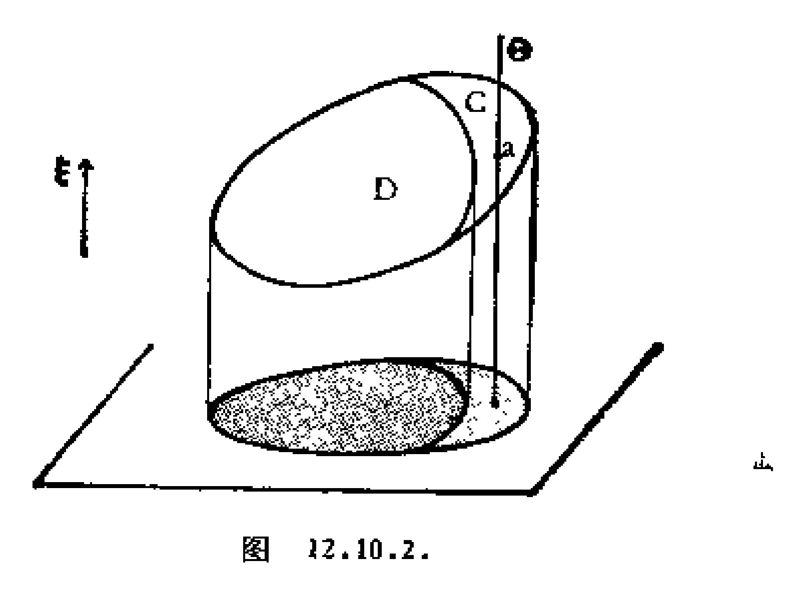


图 12.10.2.

由 12.10 和积分理论，即得存在性和连续性. 根据 12.3.3，$\mathfrak{A}(C)$ 和多胞形的面积是一致的。

现设 $D\subset C$，$D\neq C$，并如在 12.9.3.3 中一样，设球 $B(a,\varepsilon)\subset C\backslash D$，$\varepsilon>0$.根据 11.4.1，存在一条含 a 且与 D 不相交的直线 Θ；设 $\xi\in\vec{\Theta}\cap S$，根据连续性，过 a 且与足够邻近 ξ 的 η 平行的直

线决不和D相交。因此，12.9.3.3 表明，对于这些η，$\mathfrak{L}(p_\eta(D)) < \mathfrak{L}(p_\eta(C))$，故有$\mathfrak{A}(D) < \mathfrak{A}(C)$。

12.10.3 推论. 对任意的$C \in \mathscr{C}^\bullet$，

$$\mathfrak{A}(C) = \sup\{\mathfrak{A}(P):\ P \in \mathscr{P}^\bullet \text{ 和 } P \subset C\} = \inf\{\mathfrak{A}(P):\ P \in \mathscr{P}^\bullet \text{ 和 } P \supset C\}.$$

12.10.4 附注

12.10.4.1 我们来验证，当$C = S(a, r)$时，可得$\mathfrak{A}(C) = r^{d-1}\alpha(d)$。

事实上，对于任意的ξ，$p_\xi(S(a, r))$是以r为半径的一个球。从而：

$$\mathfrak{L}(p_\xi(S(a, r))) = r^{d-1}\beta(d-1).$$

由此得出

$$\mathfrak{A}(S(a, r)) = r^{d-1}\int_S \sigma = r^{d-1}\cdot\alpha(d).$$

12.10.4.2 一个很自然的想法是把关于平面上一个凸集C的长度同曲线 Fr C 的长度进行比较.说实在的,并不能直接把 Fr C 看作一条曲线。然而，11.3.4 给出了 Fr C 的一个连续的参数表示;因此,内接于 Fr C 的一个多边形的周长恰是定义 9.9.1 中的一个和式。这就证明了两个长度概念是一致的：参见 12.11.5。

12.10.5 应用：等宽曲线. 我们称一条曲线或一个凸集是等宽的,意指欧几里得平面的一个凸集C，它使$\forall \xi \in S$，线段$p_\xi(C)$有定长。这等价于沿ξ方向的C的两条支撑直线(参见 11.5.6)保持定距离。在这种情形下,不单有圆盘，例如，还有 Reuleaux 三角形(图 12.10.5.1)：更一般为：具有奇数个尖点的适当曲线的切线的适当的正交轨线都是等宽曲线(有许多这样的曲线)。

12.10.2 和 12.10.4 证明了这一点。因为，如果l表示这个常数宽度,则凸集具有长度πl。等宽"体"早已是许多研究工作的对象,但在这一范畴内，仍有许多尚未解决的问题。例如，Blaschke-Lebesque 的结论是：在等宽的平面凸集中间,唯一的具有最小面积的是 Reuleaux 三角形;但是,目前我们还不知道维数$\geqslant 3$时的类似结果。对于等宽体，参考文献是 [EN] 第 7 章，[VE] 第 156

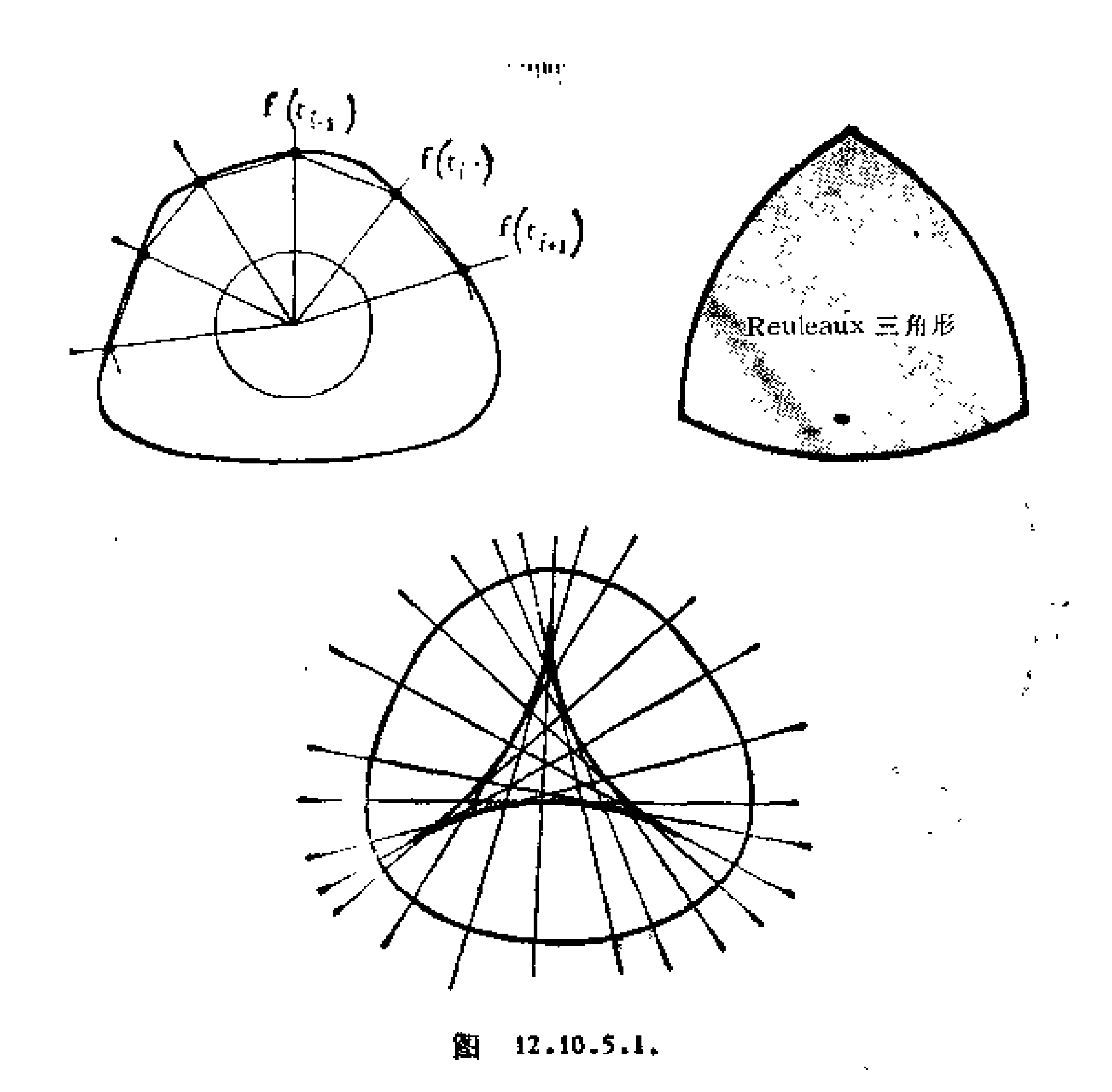


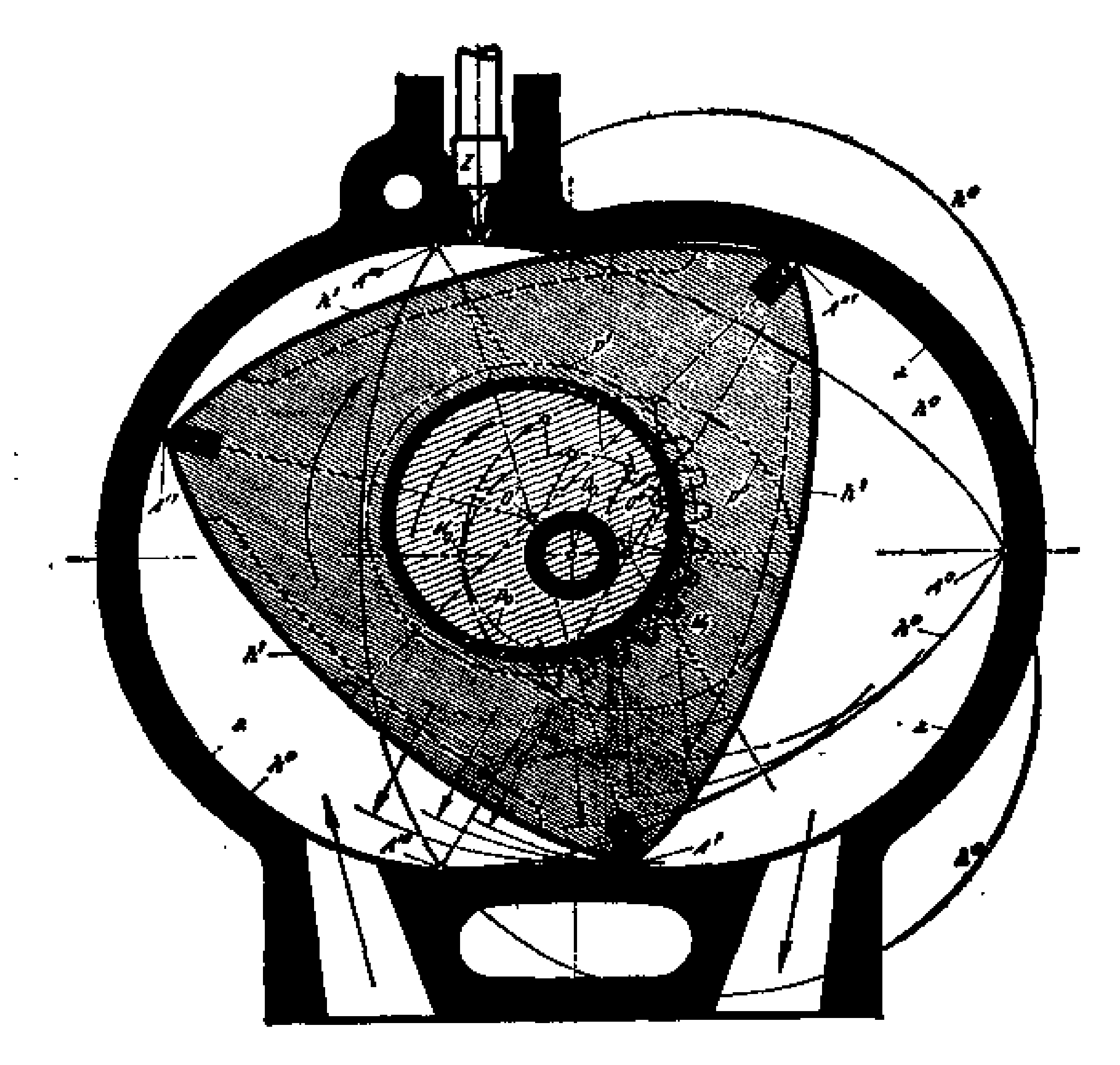
图 12.10.5.1.

页，[BLA 1] 第 150 页，[B-F] 第 15 节，以及非常精采的 [Y-B]，第 7 章.

在不少机械运动的装置上会碰到 Reuleaux 三角形；在电影放映机和投影仪中也会碰到，参看 [Y-B] 第 72 页；在 Wankel 的近代旋转发动机中也会碰到. 有关这方面内容，参看 9.14.34.6 和 [LF-AR] 第 433 页—435 页；也参看 [FA]，[FI]，[SL 1]，[SL2]. 也可参见本书第 172 页.

我们现在通过多胞形的逼近，来把公式 12.3.6 推广到任意凸集上去.

12.10.6 定理 (Steiner, Minkowski). 对于任意一个 d 维凸集 $C \in \mathscr{C}^d$，附有一个数量 $\mathfrak{L}_i(C)$ $(i = 0, 1, \cdots, d)$，使得 $\forall \lambda \in \mathbf{R}_+^*$，



Vandenhoeck 和 Ruprecht, «数学基本原理».

图 12.10.5.2.

$\mathfrak{L}(B(C,\lambda))=\sum_{i=0}^{d}\mathfrak{L}_i(C)\lambda^i$. 函数 $\mathfrak{L}_i$: $\mathscr{C}^\bullet\to\mathbf{R}$ 是连续的；对于任意的 C，$\mathfrak{L}_0(C)=\mathfrak{L}(C)$，$\mathfrak{L}_1(C)=\mathfrak{A}(C)$，$\mathfrak{L}_d(C)=\beta(d)$.

设 $C=\lim_{n\to\infty}P_n$，$P_n\in\mathscr{P}^\bullet\ \forall n$；由于 P_n 都是有界的，12.3.7 表明，$\mathfrak{L}_i(P_n)$ 都是有界的. 抽取 (P_n) 的一个子序列，可假定：存在 k_i $(i=0,1,\cdots,d)$，使得 $k_i=\lim_{n\to\infty}\mathfrak{L}_i(P_n)$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{L}(B(P_n,\lambda))=\sum_{i=0}^{d}k_i\lambda^i.$$

但是，根据 12.9.3.4，$\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{L}(B(P_n,\lambda))=\mathfrak{L}(\lim\limits_{n\to\infty}B(P_n,\lambda))$。可是（参见 9.11.7），

$$\lim_{n\to\infty}B(P_n,\lambda)=B(\lim_{n\to\infty}P_n,\lambda)=B(C,\lambda)$$

由此推出：

$$\mathfrak{L}(B(C,\lambda))=\sum_{i=0}^{d}k_i\lambda^i.$$

但我们知道 $\mathfrak{L}(B(C,\lambda))$ 是一个 λ 的多项式，因为函数 $\mathfrak{L}(B(C,\lambda))$ 只依赖于 C 和 λ（与 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=C$ 中的 P_n 无关！），可见 k_i 只与 C 有关，这是因为我们知道，一个函数多项式决定了多项式。此外，这种决定是连续的（例如可看 [CH 1] 6.3.6 的所谓"逐次差分"公式），且因为 $\mathscr{C}^{\bullet}\times\mathbf{R}_+\ni(C,\lambda)\longmapsto\mathfrak{L}(B(C,\lambda))\in\mathbf{R}$ 是连续的，故知 $\mathfrak{L}_i$ 是连续的（参见 11.1.3.3 和 12.9.3.4）。

最后，$\mathfrak{L}_0$，$\mathfrak{L}_1$ 和 $\mathfrak{L}_d$ 之值可由 12.3.6 和这些函数的连续性得出。

现在，我们可以看出（参见 12.3.8），画一个凸集是度量其面积的一种方法。

12.10.7 推论. 对于任意的凸集 $C\in\mathscr{B}^{\bullet}$，

$$\mathfrak{A}(C)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\mathfrak{L}(B(C,\lambda))-\mathfrak{L}(C)}{\lambda}.$$

12.10.8 例子. 取 $C=B(0,1)\subset\mathbf{R}^d$；

$$B(C,\lambda)=B(0,\lambda+1),\ \mathfrak{L}(B(C,\lambda))=(\lambda+1)^d\beta(d),$$

$$\mathfrak{A}(C)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\beta(d)(\lambda+1)^d-\beta(d)}{\lambda}=d\beta(d).$$

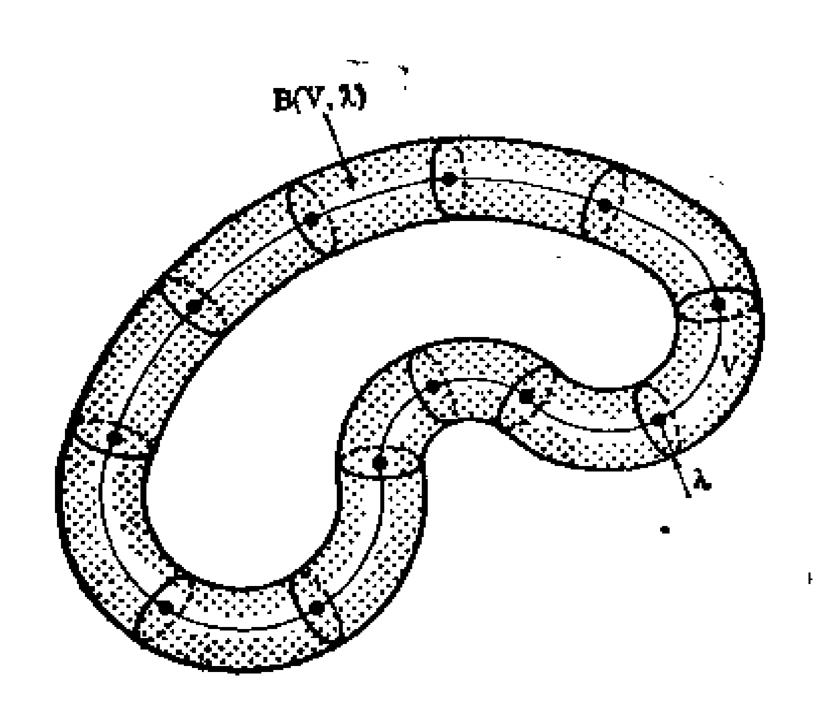
因为 $\mathfrak{A}(C)=\alpha(d)$（参见 12.10.4），这样就得到了关系式 $\alpha(d)=d\beta(d)$。

12.10.9 附注

12.10.9.1 $\mathfrak{L}_i(\cdot)$ 都是附着于紧凸集的有趣的等距不变量。当 $d=3$ 时，只有 $\mathfrak{L}_2(C)$ 对我们是陌生的，可以把它称为 C 的全平均曲率，因为我们可以证明，当 $\operatorname{Fr}C$ 是 X 的一个 C^2 类子流形时，$\mathfrak{L}_2(C)=\int_{\operatorname{Fr}C}\mu\sigma$，这里 σ 是 $\operatorname{Fr}C$ 的典范测度，而 μ：$\operatorname{Fr}C\to\mathbf{R}$

是它的平均曲率。对此，例如可看［B-F］第63页，公式(12)。

12.10.9.2 此外，如果 $V\subset X$ 是一个 C^2 类的子流形，我们总可定义 $B(V,\lambda)$。 在［B-G］第253页可看到，$\mathfrak{L}(B(V,\lambda))$



Berger 和 Gostiaux 合著《微分几何》。

图 12.10.9.1.

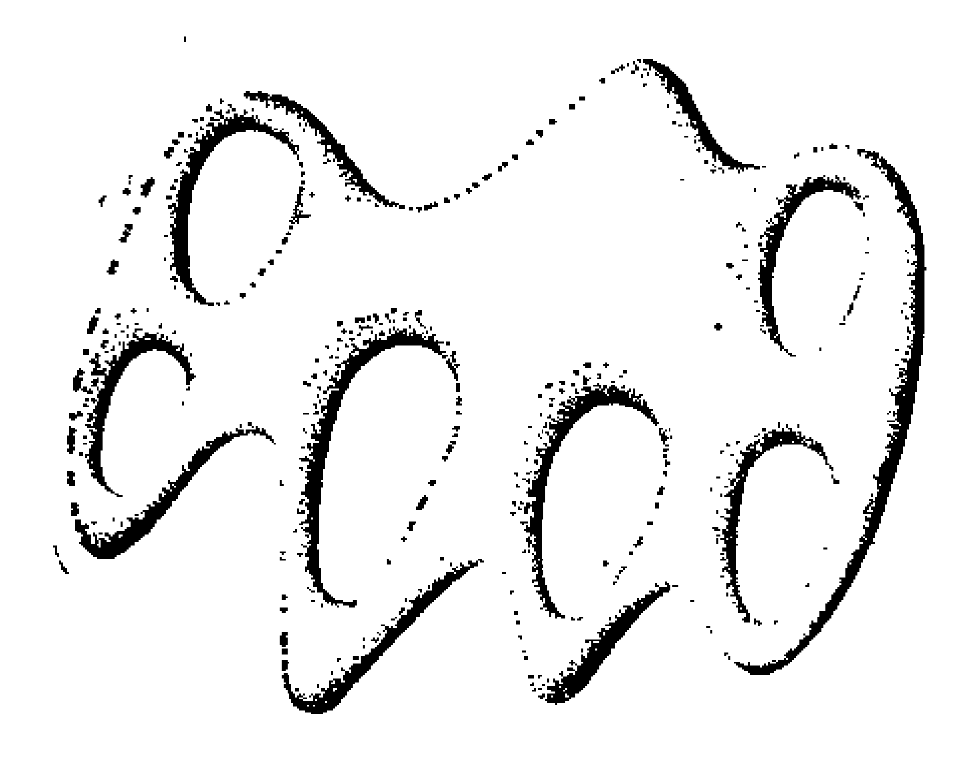


图 12.10.9.2.

是一个 λ 的多项式，但仅当 λ 足够小时是如此。事实上，对于圆 $S=S(0,1)\subset\mathbf{R}^2$，当 $\lambda\in[0,1]$ 时，有 $\mathfrak{L}(B(S,\lambda))=4\pi\lambda$；当 $\lambda\geqslant 1$ 时，$\mathfrak{L}(B(S,\lambda))=\pi(\lambda+1)^2$。此外，在 $\mathfrak{L}(B(V,\lambda))$ 内，当 λ 相当小时，λ 的幂次是 2 次一跳的，这是因为有些项抵消了。当 λ 相当小时，一个有效差就是 $\mathfrak{L}(B(V,\lambda))$ 中含 λ^d 的那些项的差；对于一个凸集，其有效差为 $\beta(d)\lambda^d$；对于一个偶数维的子流形，其有效差为 $\chi(V)\beta(d)\lambda^d$，这里 $\chi(V)$ 是 V 的 Euler-Poincaré 示性数。对于 γ 个洞的环面（图 12.10.9.2），事实上，可求得 $\mathfrak{L}(B(V,\lambda))=2(V\text{ 的面积})\lambda+\frac{8\pi(1+\gamma)}{3}\lambda^3$（参看 [B-G] 第 288 页，并与 12.7.5.4 加以比较）。

12.10.9.3 相反地，如果 K 是无任何正则性的一个紧集，$\mathfrak{L}(B(K,\lambda))$ 将是一个性态很差的函数，即使对于很小的 λ 值也是如此，尤其是：$\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{\mathfrak{L}(B(K,\lambda))-\mathfrak{L}(K)}{\lambda}$ 一般是不存在的（参看 12.12.9）。然而，对于任意一个紧集 K，总可令：

$$\mathfrak{M}^+(K)=\limsup_{\lambda=0}\frac{\mathfrak{L}(B(K,\lambda))-\mathfrak{L}(K)}{\lambda},$$

$$\mathfrak{M}^-(K)=\liminf_{\lambda\to 0}\frac{\mathfrak{L}(B(K,\lambda))-\mathfrak{L}(K)}{\lambda},$$

分别称它们为 K 的 Minkowski 上面积和 Minkowski 下面积；有关这两种面积的性质，参看 12.11.4.2，[FR] 第 273 页，[HR] 第 185 页。

12.10.10 面积和 Steiner 对称. 沿用 9.13 和 11.1.3 中的记号。我们的目的是证明 Steiner 对称不会使凸集的面积（参阅 11.1.4）增大。

12.10.10.1 引理. 设 $A,B\in\mathscr{C}$，H 是一个超平面；则对任意的 $\lambda\in[0,1]$，

$$\mathrm{st}_H(\lambda A+(1-\lambda)B)\supset\lambda\mathrm{st}_H(A)+(1-\lambda)\mathrm{st}_H(B).$$

如果 X 还是一个间距空间，则对任意的 λ，$\mu\geqslant 0$，我们有

$$\mathrm{st}_H(\lambda A+\mu B)\supset\lambda\mathrm{st}_H(A)+\mu\mathrm{st}_H(B).$$

图 12.10.10.1 表明，等号一般不成立．设 $x=\lambda y+(1-\lambda)z$，$y\in\mathrm{st}_H(A)$，$z\in\mathrm{st}_H(B)$，并且 D_x，D_y，D_z 分别是经过 x，y，z 的与 H 垂直的直线，以及 $T_y=\mathrm{st}_H(A)\cap D_y$，$T_z=\mathrm{st}_H(B)\cap D_z$．设 T_y'，T_z' 分别是生成 $D_y\cap A$ 和 $D_z\cap B$ 的线段；因而 $\lambda A+(1-\lambda)B\supset\lambda T_y'+(1-\lambda)T_z'$，且根据 9.13，我们有：$\mathrm{st}_H(\lambda A+(1-\lambda)B)\supset\lambda T_y+(1-\lambda)T_z\ni x$.

对于向量的情形，可利用比值为 $(\lambda+\mu)^{-1}$ 的位似可归结为上述的情形．

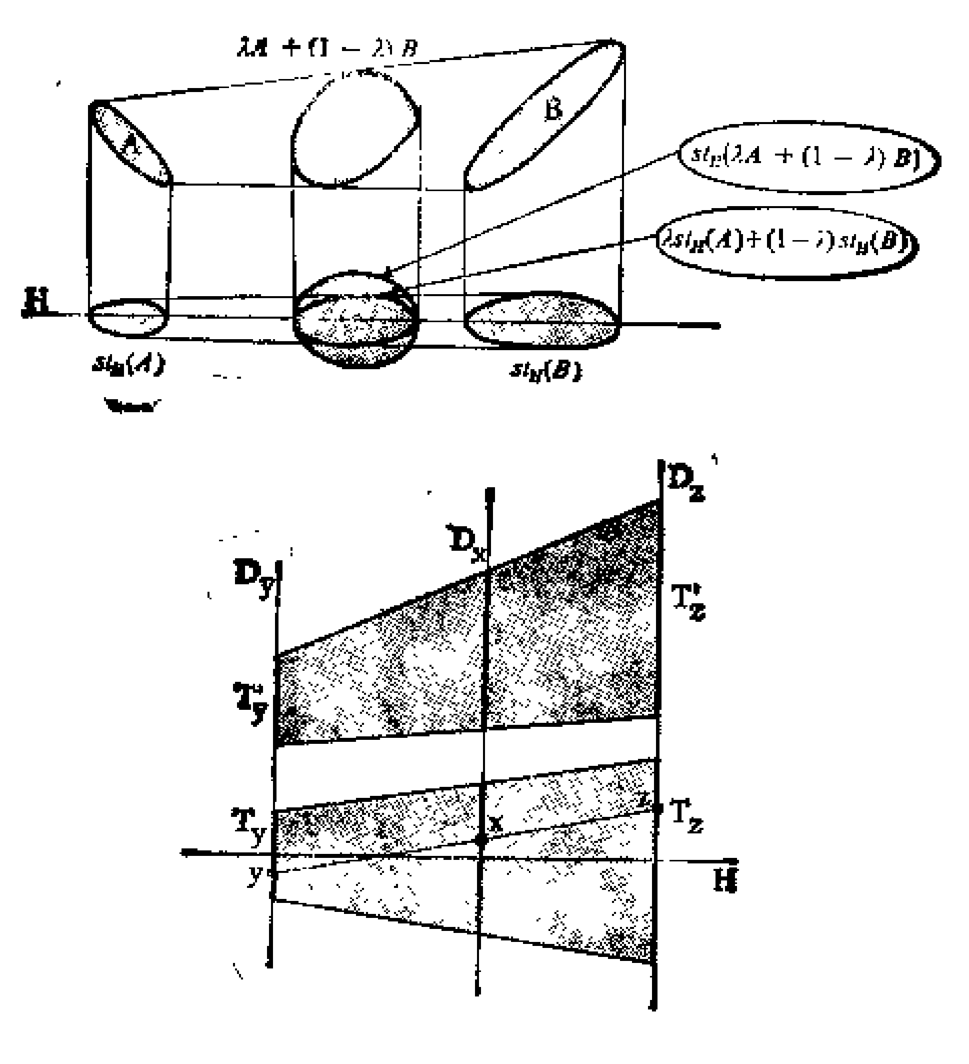


图 12.10.10.1.

12.10.10.2 命题． 对于任意的 $C\in\mathscr{C}^\bullet$ 和超平面 H，

$$\mathfrak{A}(\mathrm{st}_H(C))\leqslant\mathfrak{A}(C).$$

在 $0\in H$ 处向量化 X，并设 $S=B(0,1)$ 是其中的单位球。根据 11.1.3.2，12.10.7，12.10.10.1 和 9.13.4，

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(B(C,\lambda))&=\mathfrak{L}(C)+\mathfrak{A}(C)\lambda+o(\lambda)\\&=\mathfrak{L}(\mathrm{st}_H(B(C,\lambda)))=\mathfrak{L}(\mathrm{st}_H(C+\lambda S))\\&\geqslant\mathfrak{L}(\mathrm{st}_H(C)+\lambda\,\mathrm{st}_H(S))\\&=\mathfrak{L}(\mathrm{st}_H(S)+\lambda S)=\mathfrak{L}(B(\mathrm{st}_H(C),\lambda))\\&=\mathfrak{L}(\mathrm{st}_H(C))+\mathfrak{A}(\mathrm{st}_H(C))\lambda+o(\lambda)\\&=\mathfrak{L}(C)+\mathfrak{A}(\mathrm{st}_H(C))\lambda+o(\lambda).\end{aligned}$$

由于 $\frac{o(\lambda)}{\lambda}\xrightarrow[\lambda\to0]{}0$，故有 $\mathfrak{A}(C)\geqslant\mathfrak{A}(\mathrm{st}_H(C))$。

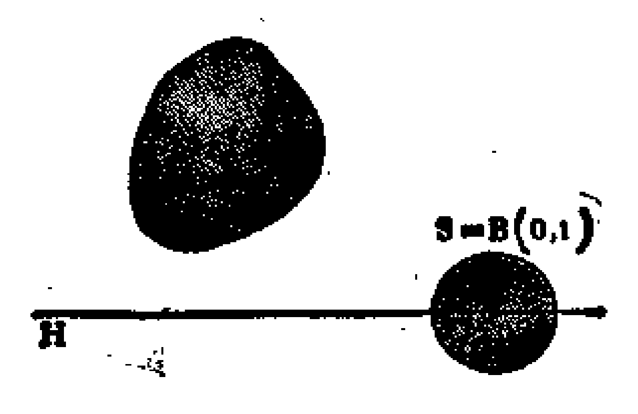


图 12.10.10.2.

读者也许要问，什么时候 12.10.10.2 中的等式成立？对于任何使 $\mathrm{st}_H(C)=C$ 的 C，或者对于这样一个 C 的任意一个平移等号必定成立。反之亦然。

12.10.10.3 定理. 如果 $C\in\mathscr{C}^\bullet$，且超平面 H 满足 $\mathfrak{A}(\mathrm{st}_H(C))=C$，则存在一个与 H 平行的超平面 H'，使得 $\mathrm{st}_{H'}(C)=C$。

不能采用 12.10.10.2 的证明，因为它含有取极限过程。对于 $\mathfrak{A}(C)$ 我们要利用具体表示式 12.10.11.1；对于已给的 H 和 C，采用 12.10.11.1 中的记号。依 $\mathrm{st}_H(.)$ 的定义，如果 C 是由序对 $\{f,g\}$ 定义的，则 $\mathrm{st}_H(C)$ 由序对 $\left\{\frac{f-g}{2},\frac{g-f}{2}\right\}$ 定义，且有

$$\mathfrak{A}(C)=\int_{\mathrm{Fr}D}(f-g)\sigma+\int_D\left(\sqrt{1+\|f'\|^2}+\sqrt{1+\|g'\|^2}\right)\mu,$$

$$\mathfrak{A}(st_H(C)) = \int_{\mathrm{Fr}D} (f-g)\sigma + \int_D 2\sqrt{1+\frac{\|f'-g'\|^2}{4}}\,\mu.$$

然而，对于欧几里得空间的任意一个向量序对 $\{\xi, \eta\}$ 从 8.1.2.4 和 8.1.3 可推出：

$$\sqrt{1+\|\xi\|^2} + \sqrt{1+\|\eta\|^2} \geqslant \sqrt{4+\|\xi-\eta\|^2},$$

等号仅当 $\eta = -\xi$ 时才成立。

于是，几乎处处有 $f' = -g'$. 因为 $f+g$ 是连续的，故有 $f+g=$ 常数；定理得证。

12.10.11 面积的具体计算. 设 $C \in \mathscr{C}^\bullet$，且 H 是 X 的一个超平面。分解 X 为一个乘积：$X = H \times \mathbf{R}$（其实是一个同构）。我们称 $p: X \to H$ 是到 H 上的投影。令 $D = p(C)$. 记 μ 为 H 上的 Lebesgue 测度，则有：

12.10.11.1 定理. 存在一个 $\mathrm{Fr}\,D$ 上的测度 σ，和两个函数 $f, g: D \to \mathbf{R}$，使得

(i) f, g 在 D 上是几乎处处可微的。并且 $\sqrt{1+\|f'\|^2}$，$\sqrt{1+\|g'\|^2}$ 对 μ 是可积的（这里的范数是 8.1.8.2 中定义的 $(\vec{H})^*$ 上的范数）。

(ii) 有 $C = \{(x, t) \in H \times \mathbf{R}: x \in D, f(x) \geqslant t \geqslant g(x)\}$.

(iii) 有

$$\mathfrak{A}(C) = \int_{\mathrm{Fr}D} (f-g)\sigma + \int_D \left(\sqrt{1+\|f'\|^2} + \sqrt{1+\|g'\|^2}\right)\mu.$$

证明是技巧性很强的，我们只给出证明的关键之处。函数 f，g 可通过图 12.3.3，图 12.10.11 和 12.3.3.1 的证明而明确地在 $\mathring{D}$ 上定义。由于 C 的凸性和紧性，可以把 f, g 唯一地延拓到整个 D 上，从 11.8.10.5 和 11.8.3 则可推出它们是几乎处处可微的。

现在可注意到，从 9.12.4.9 可知，如果我们再取 D 的各个面上的诱导 Lebesgue 测度的并作为 $\mathrm{Fr}\,D$ 上的测度 σ，则定理对多胞形也成立。于是，我们可应用 12.9.23 和积分理论中的收敛定理。

12.10.11.2 推论. 设 $C \in \mathscr{C}^\bullet(X)$，并假定 $\mathrm{Fr}\,C$ 容有一个有限剖分，剖分为维数为 $0, 1, \cdots, d-1$（这里 d 是 X 的维数）的 X

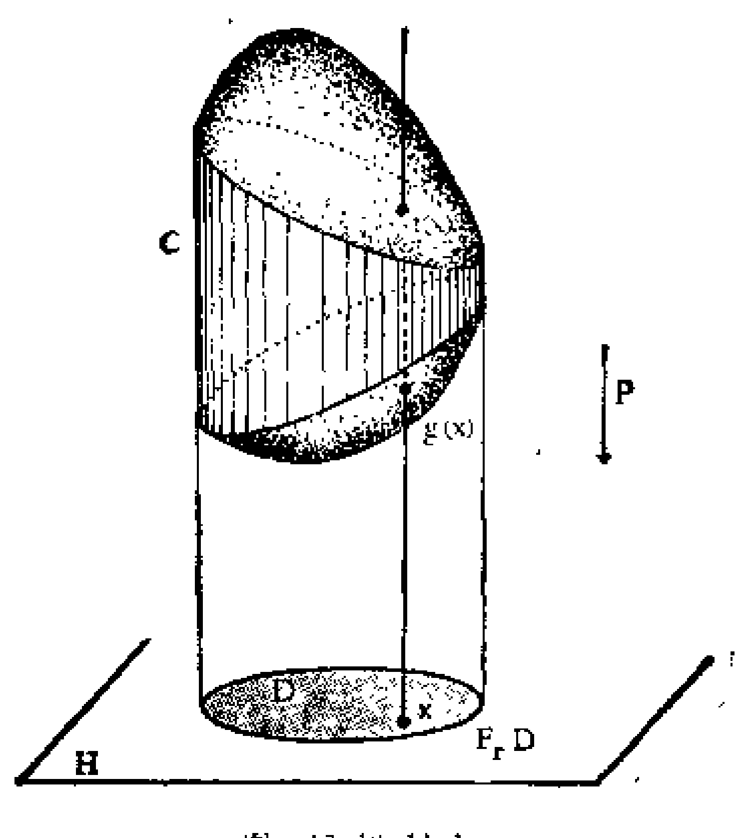


图 12.10.11.1.

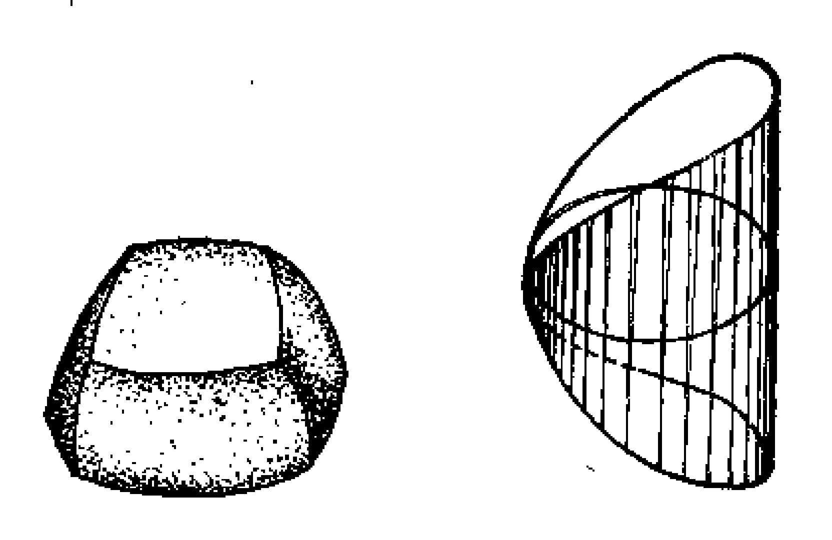


图 12.10.11.2.

的可微子流形. 则此剖分的每一个 $d-1$ 维子流形的体积是有限的(在 [B-G] 第 225 页的意义下),并且 $\mathfrak{A}(C)$ 是全体 $d-1$ 维子流形体积之和.

这是 12.10.1.1 以及 [B-G] 中公式 6.4.2.3 在任意维情形下的推广公式的一个直接推论.事实上,如果图是 $g:(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto$

$(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n))$，则有 $|g^*\omega| = \left\|\frac{\partial g}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial g}{\partial x_n}\right\| \cdot$ $\|dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\|$. 但 8.11.11 表明 $\frac{\partial g}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial g}{\partial x_n}$ 的坐标是

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1\right).$$

上面的推论使我们有可能去计算在物理世界中所遇到的一些凸的紧集的面积，例如可用 [B-G] 中的 6.6.2，可参看 12.12.20 中的一个公式。

12.11 等周不等式

下述定理是简单而基本的；它称为等周不等式，有一段悠久而有趣的历史，对此我们介绍读者参看一本阐述完整的文献 [PR] 也可参阅 [BLA 1] 第 79—82 页．最重要的一点是，从 Steiner 基本思想出发，在历史上是经过相继多次试验，才最后得到一个严格的完全的证明的．

12.11.1 定理． 对于 X 的内部非空的任意一个 d 维凸集，我们有

$$\mathfrak{A}(C) \geqslant d(\beta(d))^{1/d} \cdot \mathfrak{L}(C)^{(d-1)/d}, \text{ 或 } \frac{\mathfrak{A}(C)}{\alpha(d)} \geqslant \left(\frac{\mathfrak{L}(C)}{\beta(d)}\right)^{(d-1)/d}.$$

如果 C 是一个球，则等号成立．反之，如果等号成立，则 C 必是一个球．

换言之，"在体积给定的所有内部非空的紧凸集中，以球的面积最小"；或者说，"在面积给定的这种凸集中，以球的体积最大"．并且，这是唯一的．两个不等式的等价性可从 9.12.4.8 或 12.10.8 推出．我们将给出等周不等式的两种证明；第一种证法还证明了只有对球面等号才能成立．

12.11.2 第一种证明． 本证明是以 Steiner 和 Kugelungsatz 的对称作为基础的．设给定凸紧集 $C \in \mathscr{C}^\bullet$，引入

$$\mathscr{F} = \{F \in \mathscr{C}^\bullet : \mathfrak{L}(F) = \mathfrak{L}(C) \text{ 且 } \mathfrak{A}(F) \leqslant \mathfrak{A}(C)\}.$$

$\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{C}$ 的闭集；这是因为，如果 $A = \lim_{n\to\infty} A_n$，其中 $A \in \mathscr{C}$ 且 $A_n \in \mathscr{F}\ \forall n$，则有 $\mathfrak{L}(A_n) = \mathfrak{L}(C) \neq 0$，因而 $A_n \in \mathscr{C}^{\bullet}$，又根据 12.9.3.4 有 $\mathfrak{L}(A) = \mathfrak{L}(C) \neq 0$. 因而 $A \in \mathscr{C}^{\bullet}$. 但这时，根据 12.10.2 有 $\mathfrak{A}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}(A_n) \leqslant \mathfrak{A}(C)$，从而 $A \in \mathscr{F}$. 此外，根据 9.13.4 和 12.10.10.2 可知，$\mathscr{F}$ 对于 Steiner 对称是稳定的. 于是，我们可以应用 9.13.6：存在一个球 $B(a, r) \in \mathscr{F}$，$a \in X$ 和 $r > 0$；因而

$$\mathfrak{A}(C) \geqslant \mathfrak{A}(B(a, r)) = \alpha(d) r^{d-1},$$
$$\mathfrak{L}(C) = \mathfrak{L}(B(a, r)) = \beta(d) r^{d}.$$

如果等号成立，根据 12.10.10.3，对于任一超平面方向 ξ，存在一个超平面 H，使得 $\mathrm{st}_H(C) = C$. 根据 st_H 的定义，这意味着 $\sigma_H(C) = C$，这时它就必得经过 X 的一个固定点 a（参见 9.8.6）. 最后，C 在正交群 $O(X_a)$ 下应该是不变的，故它是一个球.

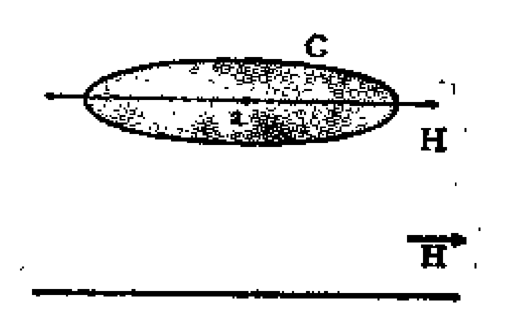


图 12.11.2.

12.11.3 第二种证明. 本证明是以 Brunn-Minkowski 定理以及面积是一个（Steiner-Minkowski）导数这一事实作为基础的. 设 $C \in \mathscr{C}^{\bullet}$：在任意一点 0 处向量化 X，并令 $S = B(0, 1)$. 于是，$B(C, \lambda) = C + \lambda S$（参见 11.1.3.2）.

根据 11.8.8.5 和二项式公式：

$$\mathfrak{L}(B(C, \lambda)) = \mathfrak{L}(C + \lambda S) \geqslant [(\mathfrak{L}(C))^{1/d} + \lambda(\beta(d))^{1/d}]^d$$
$$\geqslant \mathfrak{L}(C) + d\mathfrak{L}(C)^{(d-1)/d}(\beta(d))^{1/d}\lambda.$$

由此，根据 12.10.7 即可推出 12.11.1.

12.11.4 附注

12.11.4.1 尽管在 11.8.8.6 中已经不加证明地下了断言，但我们利用 12.11.3 的技巧仍是不能证明等号只对球成立的；因为事实上，我们的证明中有求极限的过程。

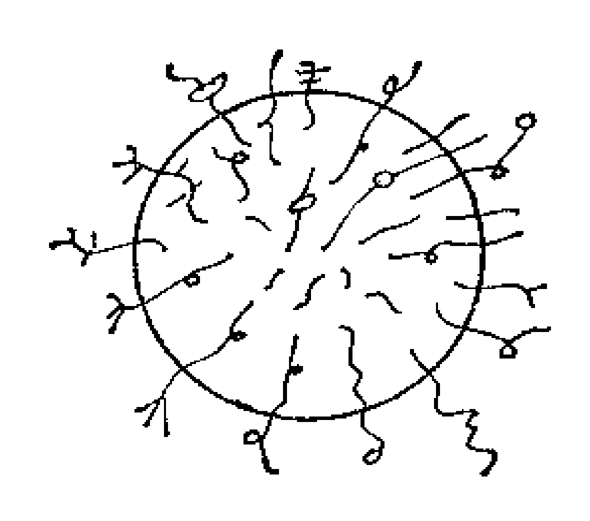


图 12.11.4.

12.11.4.2 对于比凸集更为一般的紧集，等周不等式是不是仍能成立呢？第二种证明表明：对于任意一个紧集，如果我们取 12.10.9.3 中的 $\mathfrak{M}^-(.)$ 作为面积，则答案是肯定的；对任意一个紧集 K，恒有

$$\mathfrak{M}^-(K) \geqslant d(\beta(d))^{1/d}\mathfrak{L}(K)^{(d-1)/d}.$$

但若除去凸性或边界正则性的条件，则对不是球的其它紧集，等号也能成立：只要取 $d \geqslant 3$ 维时的一个球，在上面添上一些头发或草，也就是说添上一些曲线就可以了；这时我们容易验证：体积、面积是不会改变的。当 $d = 2$ 时，情况就不一样了：细发和草是有长度的！参看图 11.6。

12.11.4.3 在不是欧几里得仿射空间的其它空间，确切地说，在 18 章和 19 章将要讨论的球面或双曲空间中，存在一个推广 12.11.1 的不等式。12.11.1 之所以在这些空间中仍然成立，是因为它们容有跟欧几里得空间同样多的超平面和关于这些超平面的对称，因此 Kugelungsatz 定理仍然成立。关于这些推广的证明，参看 [HR] 第 304 页中关于 E. Schmidt 和 A. D. Alexandrov 的评价。

12.11.4.4 在 $d = 2$ 的情形，对于边界为可微曲线的凸集，12.11.1 的证明可用很初等的方法作出，例如可参看 [B-G] 第 345 页。对于二维的任意凸集，可参看下文。当 $d \geqslant 3$ 时，情况更困难，原因有好几个：首先，面积的概念比曲线长度的概念更复杂（参见 9.12.7）。其次，不等式本身不再象 $d = 2$ 时那样是二次型。而我们知道，这样的不等式总是在二次型的情形比较容易证明的，

例如，比较 Cauchy-Schwartz 不等式和 Hölder 不等式，也可参看例如 11.8.11.9。

12.11.5　二维的情形．对于二维情形，不必一定要求有凸性，参见 12.11.4.2。我们将得到一个更一般的定理。

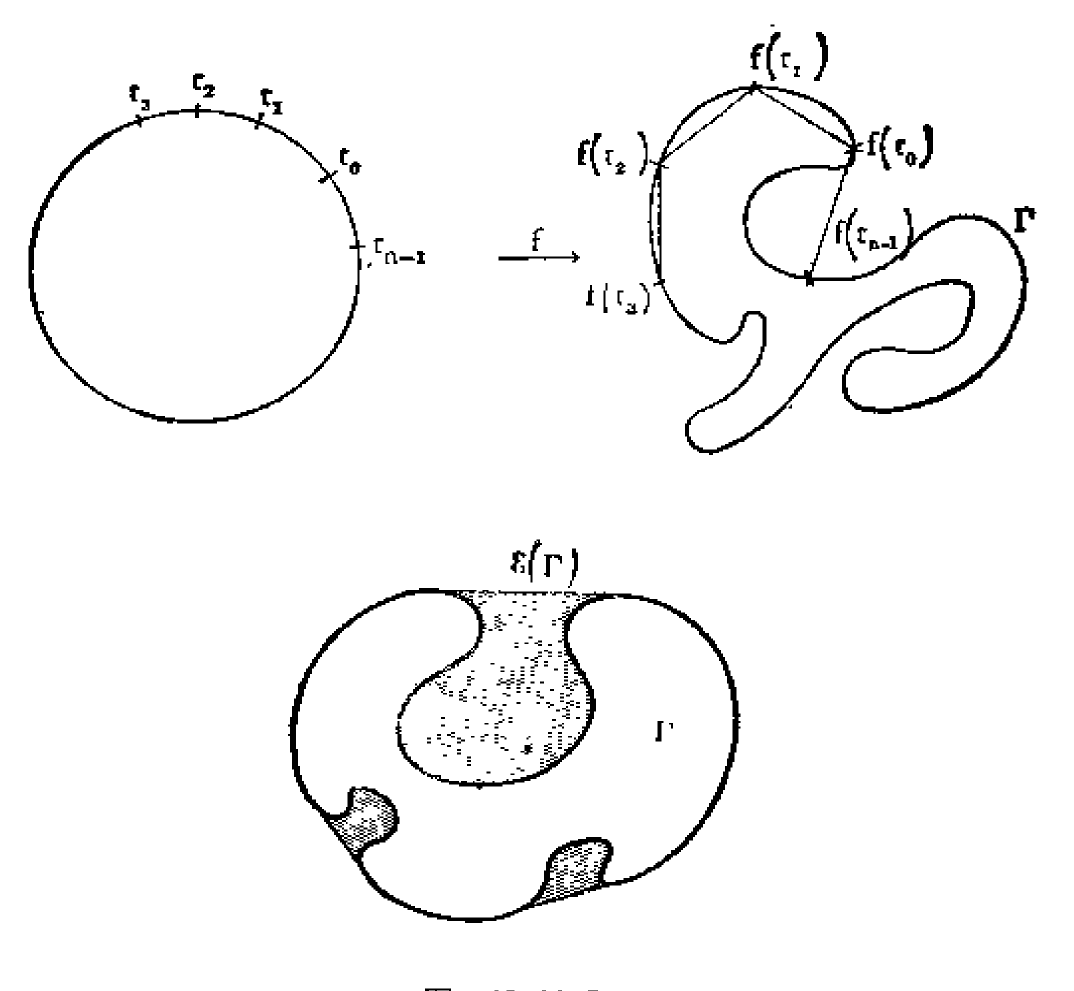


图　12.11.5.

12.11.5.1　定义．在一个拓扑空间 X 中，若对任一子集 $\Gamma\subset X$，存在 $f: S^1\to X$ 使得 f 是圆 S^1 到象集 $f(S^1)=\Gamma$ 上的一个同胚，则称 Γ 是简单闭曲线．若再设 X 是一个度量空间，并在 S^1 上取点列 $(t_i)_{i=0,1,\cdots,n}$，使 $t_0=t_n$ 且 $\forall i$，t_i 在 t_{i-1} 和 t_{i+1} 之间(参见 9.9.8)．则对 $f: S^1\to X$ 可有和式 $\sum_{i=0}^{n-1} d(f(t_i), f(t_{i+1}))$ 与之相应．只要知道圆 S^1 上的同胚保持“在…之间”的关系式，那么如 9.9.2 中那样，这些和的上确界只依赖于该简单闭曲线 Γ，这一结论从作为连续

双射的数值函数是严格单调的这一事实即可推出。

如果此和的上确界是有限数，则称 Γ 是可求长的，并称此数为 Γ 的长度，记作 $\operatorname{long}(\Gamma)$.

12.11.5.2 现在假定 X 是一个欧几里得平面；则当 $C\in\mathscr{C}^{\bullet}$ 时，它的边界 $\Gamma=\operatorname{Fr} C$ 是一条简单闭曲线，并且 $\operatorname{long}(\Gamma)=\mathfrak{A}(C)$，参看 12.10.4.2。如果 Γ 是一条简单闭曲线，则它的凸包络 $\mathscr{E}(C)\in\mathscr{C}^{\bullet}$，并且由图形可以看出 $\operatorname{long}(\Gamma)\geqslant\mathfrak{A}(\mathscr{E}(\Gamma))$.

12.11.6 定理. 对于欧几里得平面中任意一条简单闭曲线，我们有 $\operatorname{long}(\Gamma)\geqslant 2\sqrt{\pi}\,(\mathfrak{L}(\mathscr{E}(\Gamma)))^{1/2}$；等号当且仅当 Γ 是一个圆时成立。

根据 12.11.1 和 12.11.5.2，$\operatorname{long}(\Gamma)\geqslant\mathfrak{A}(\mathscr{E}(\Gamma))\geqslant 2\sqrt{\pi}\cdot(\mathfrak{L}(\mathscr{E}(\Gamma)))^{1/2}$。还须证明的是，如果等号成立，则 Γ 是一个圆。设 $C=\mathscr{E}(\Gamma)$ 使等号成立，则根据 12.11.5.2，$\Gamma=\operatorname{Fr} C$。固定 $x\in\Gamma$；由连续性可见，存在 $y\in\Gamma$，使得两条曲线 $\Gamma_1=\operatorname{Fr} C_1$，$\Gamma_2=\operatorname{Fr} C_2$

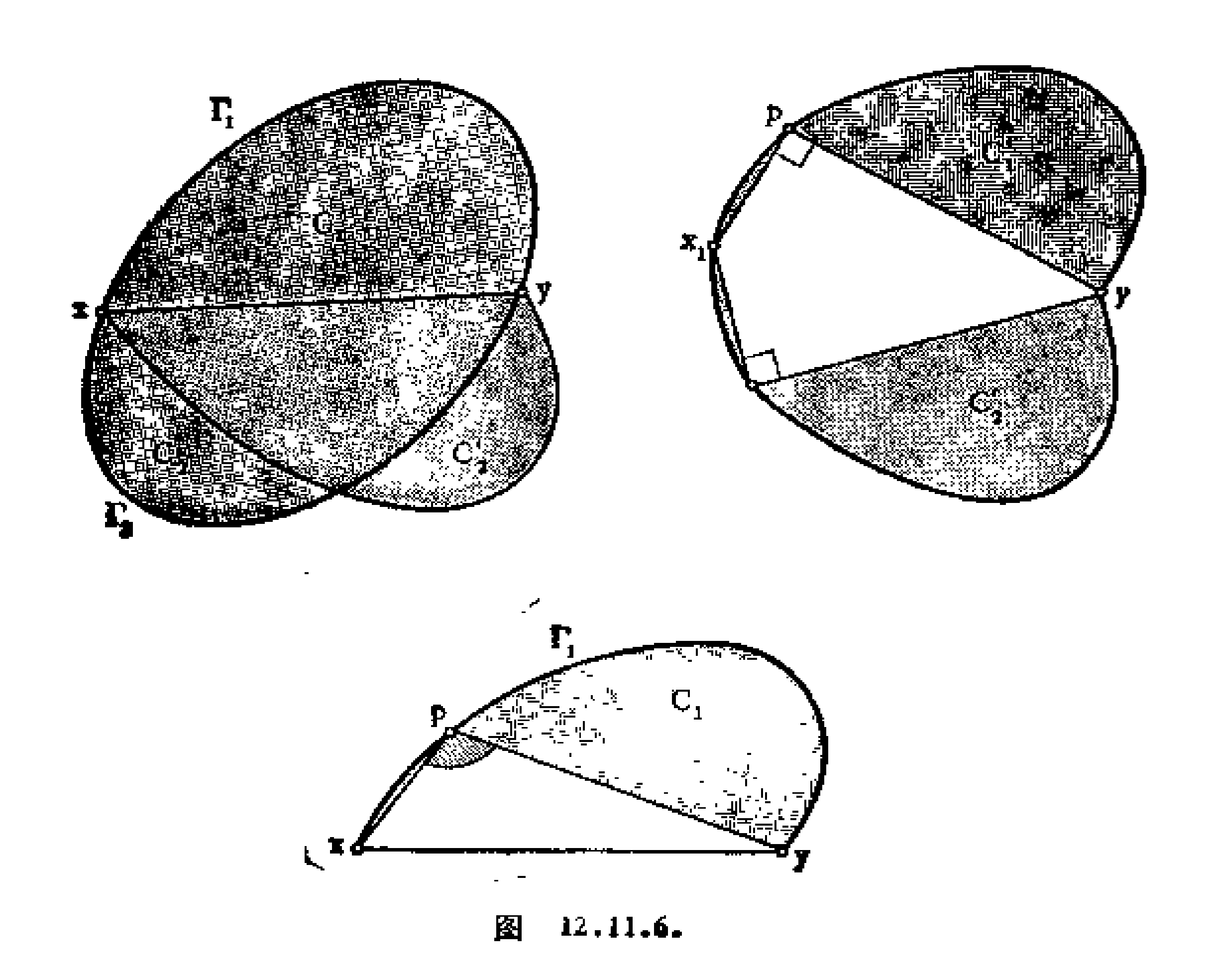


图 12.11.6.

满足 $\text{long}(\Gamma_1)=\text{long}(\Gamma_2)$，这里 C_1, C_2 分别是 C 与 $\langle x, y\rangle$ 所决定的两个半平面的交集。

首先证明 $\mathfrak{L}(C_1)=\mathfrak{L}(C_2)$；如若不然，若 $\mathfrak{L}(C_1)<\mathfrak{L}(C_2)$，则利用关于 $\langle x, y\rangle$ 的对称，可构作 C_2' 使得：

$$\mathfrak{L}(\mathscr{E}(C_1\cup C_2'))\geqslant \mathfrak{L}(C_1\cup C_2')=\mathfrak{L}(C_1)+\mathfrak{L}(C_2')>\mathfrak{L}(C),$$

$$\mathfrak{A}(\mathscr{E}(C_1\cup C_2'))\leqslant \mathfrak{A}(C_1)+\mathfrak{A}(C_2)=\mathfrak{A}(C).$$

与定理的已证部分矛盾。

最后，证明 C_1（C_2 也一样）是直径为 $\{x, y\}$ 的一个半圆。换言之，$\forall p\in\Gamma_1$，$\langle p, x\rangle\perp\langle p, y\rangle$。用反证法。假设有 $p\in\Gamma_1$，使得 $\langle p, x\rangle$ 不与 $\langle p, y\rangle$ 垂直。把图 12.11.6 中有阴影的扇形绕 p 作旋转，直至 $\langle p, x_1\rangle$ 与 $\langle p, y\rangle$ 正交为止。根据公式 10.3.3，三角形 $\{p, x_1, y\}$ 的面积严格地大于三角形 $\{p, x, y\}$ 的面积，因而可以通过关于 $\langle x, y\rangle$ 的对称构作一个紧集 $C_1'\cup C_2'$，使得 $\mathfrak{L}(C_1'\cup C_2')>\mathfrak{L}(C)$ 以及 $\text{long}(\mathscr{E}(C_1'\cup C_2'))=\text{long}(\text{Fr}\, C)$。这样就得出矛盾。

上面的证法还证明了下述的推论，这个推论是属于 Didon 的。Didon 是 Tyr 的国王的女儿，她同其姑父 Acerbas 结婚。Acerbas 因财宝而惨遭杀害，Didon 带着 Acerbas 的财宝逃到塞浦路斯，再从那里到非洲，地点靠近西西里岛。她向当地长官表明：她想买下海边的一块地皮，大小是一块牛皮所能围成的那块地。那位长官同意了她的要求，并给了她一张很大的牛皮。Didon 把牛皮割成很细的狭长带子，然后把它们接成一个长绳子；这时，她要解决的就是下述问题：

12.11.7 推论。设 R 是欧几里得平面中的一个半平面。Φ 是一条长度已知的线；若把此线放在 R 上，使得线的两端 $x, y\in\text{Fr}\, R$，则当 Φ 是以 $\{x, y\}$ 为直径的一个半圆时，Φ 所围成的面积为最大。



图 12.11.7.

这下，迦太基人可有根据了！

12.11.8 其它不等式

12.11.8.1 在 9.13.8 中我们已经遇到过一个与 12.11.1 不同的不等式，读者会料想得到，数学家由于经常受到物理学家的猜想的推动，所以当然已经证明了许多这种类型的不等式。一本很出色的参考书是 [P-S]。其它还有 [PN]，[HR]，[BLA1]，[B-F]，[HS]，[GS]。最后可看 Kohler-Jobin, Comptes Rendus Aca. Sci, Paris, 281 (1976), 119 和 284 (1977), 917。

下面给出这方面的一些例子：

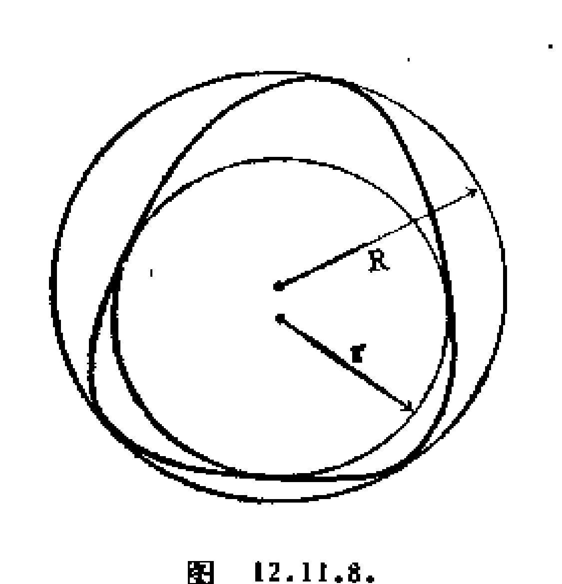


图 12.11.8.

12.11.8.2 如同在 12.10.5 一样，我们可以先对一类特殊的凸集研究等周问题。第一种情形是 n 边多边形，n 为固定常数。这时：在周长给定的 n 边多边形中，正多边形具有最大的面积，且它是唯一的，参阅 12.12.16，或 [GR] 第 191 页或 [FT 1] 第 9 页。

对于多胞形，问题可不是那么简单了；Lindelöf 定理指出：在体积给定、其各面方向也给定的三维多胞形中，以内接于一个球面的多胞形面积最小。参看 [AV] 第 317 页或 [HR] 第 276 页。

12.11.8.3 另一个方向是研究亏差

$$\mathfrak{A}(C) - d(\beta(d))^{1/d}\mathfrak{L}(C)^{(d-1)/d}.$$

当两个量不相等时，作为数学家有一个原则，那就是研究它们的差是好还是坏。在一般情况下，我们的结果很少。若记 $r(C)$ 为内切于 C 的球面的最大半径（参见 11.9.12），即 C 的内半径，则恒有 (Dinghas-Hadwiger-Bonnesen 定理)：

$$(\mathfrak{A}(C))^d - d^d\beta(d)\mathfrak{L}(C)^{d-1} \geqslant [(\mathfrak{A}(C))^{1/(d-1)} - (d\beta(d))^{1/(d-1)}r(C)]^{d(d-1)}.$$

参看[HR]第269页. 证明的技巧是很有趣的：其中引入了内凸集 $C(t)$ 和与 C 的距离为 t 的所谓"C 的平行集". 12.10.7表明 $\mathfrak{L}(C(t))$ 是可导的，以及 $\frac{d(\mathfrak{L}(C(t)))}{dt}=-\mathfrak{A}(C(t))$. 在12.12.16里我们将找到一个特殊的情形. 平行内凸集的概念最近在[C-G]中已被作为重要的手段而应用.

12.11.8.4 相反地，对平面的情形，关于亏差有许多解释. 最有趣的是 Bonnesen 定理：如果 $R(C)$ 是 C 的外半径(即含 C 的球半径的下确界，参见11.5.8)，则恒有：

$$(\mathfrak{A}(C))^2-4\pi\mathfrak{L}(C)\geqslant\pi^2(R(C)-r(C))^2$$

(这里 $r(C)$ 依然是 C 的内半径). 对此，可看12.12.15，或者[EN]第108页，或[DE 6]第327—328页. 我们注意到这个不等式蕴涵12.11.8.3中的不等式. 也可看：Robert Osserman, Bonnesen-style Isoperimetric Inequalities (预印本，Warwich University, Coventry).

在[DE 6]第327页练习6中，将亏差作为一个序列进行了具体的计算，该序列的每一项都有其几何解释；而 Bonnesen 不等式正是忽略不计高阶项而得的. 亏差的另一种计算是以 Fourier 级数作为基础的，它自然要涉及到坐标是两个周期函数的平面简单闭曲线的研究；参看12.12.12，或[HZ].

看来，目前还不能对维数 $d\geqslant 3$ 时的等周不等式给出一个基于球面调和函数的简单证明，用以代替 $d=2$ 的平面情形的 Fourier 级数.

12.11.8.5 [DE 6]第327—328页中的证明是建立在"积分几何"的基础上的. 对于这一有趣的分支，除参阅[DE 6]第327—328页外，还可看[HR]第6章，[SO]，[FR]第173页. 也可看重要文献[G-V-G]和一本最新的文献[RO].

12.11.8.6 关于紧凸集上的推广 Cauchy 公式和 Steiner-Minkowski 公式，可研究[DE 5]第175—176页，或者[HR]，[B-F]，[BLA 1].

12.12 练　　习

12.12.1 证明一个多胞形的 Steiner 对称仍是一个多胞形。

12.12.2 证明如果 E 是一个椭球体，且 $O\in \mathring{E}$ 在欧几里得向量空间 X 内，则 E 的配极 E^* 是一个椭球体，且有 $O\in \mathring{\widehat{E^*}}$，并且，它们的体积满足：$\mathfrak{L}(E)\mathfrak{L}(E^*)\geqslant(\beta(d))^2$，等号当且仅当 O 是 E 的中心时成立。

12.12.3 证明 12.2.4。

12.12.4 验证 12.4.6 中五边形的做法的正确性。

12.12.5 **Dowker 定理.** 已给平面上一个内部非空的紧凸集，对任一整数 $n\geqslant 3$，记 T_n 为内接于 C 的 n 边形的面积的最大值，U_n 为外切于 C 的 n 边形的面积的最小值. 证明序列 T_n 是凹的，而序列 U_n 是凸的，即 $\forall n$ 有 $T_n+T_{n+2}\leqslant 2T_{n+1}$ 和 $U_n+U_{n+2}\geqslant 2U_{n+1}$.

12.12.6 对于每一个正多胞形，计算(可能是作为外切球半径 R 的函数)：

——k 维面个数 $(k=0,1,\cdots,d-1)$；

——一个 k 维面的体积；

——两个相邻面的二面角.

12.12.7 **正多胞形的其它定义.** 证明下面两种用归纳法所作的定义都是跟正多胞形的定义等价的：

(i) d 维多胞形 P 称为正多胞形，是指它的所有的面都是彼此等距的 $d-1$ 维正多胞形，并且所有的二面角相等.

(ii) d 维多胞形 P 称为正多胞形，是指它的所有的面是 $d-1$ 维正多胞形，并且，对 P 的任意一个顶点 x，P 的含 x 的棱的另一端点都属于同一个超平面，并在此超平面内构成一个 $d-1$ 维正多胞形.

12.12.8 定义星形正多胞形，并予以分类，参见 12.6.10.5.

12.12.9 给出满足下列条件的紧集 K 的例子：当 $\lambda\to 0$ 时，

$\frac{\mathfrak{L}(B(K,\lambda))-\mathfrak{L}(K)}{\lambda}$ 的极限不存在。 当K是 9.9.3.3 中的不可求长的曲线时，此式又会怎样？

12.12.10 对于三维空间中一个正多胞形，证明它的群的基数等于其棱数的 4 倍。

12.12.11 设已给整数 $n\geqslant 3$，而且 P 是一个凸n 边形。 $r(p)$ 和 $R(P)$ 分别是它的内半径和外半径(参见 12.11.8)，证明：

$$n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}(r(P))^2\leqslant \mathfrak{L}(P)\leqslant\frac{1}{2}n\sin\frac{\pi}{n}(R(P))^2,$$

$$2n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\,r(P)\leqslant \mathfrak{A}(P)\leqslant 2n\sin\frac{\pi}{n}\,R(P).$$

等号当且仅当 P 是正n 边形时成立(参见 [FT 1] 第 6 页)。

12.12.12 设C 是平面上一个紧凸集。如果一个凸n 边形P内接于C 且面积取最大值，则有：

$$\mathfrak{L}(P)\geqslant\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n}\mathfrak{L}(C).$$

等号当且仅当 Fr C 是一个椭圆时成立（将边界写成 $t\longmapsto(\cos t, c(t)\sin t)$ 的形式，这里 c 是一个以 2π 为周期的函数。对于等式，要用到 Fourier 级数)(参见 [FT 1] 第 36 页)。

12.12.13 在已知圆上有 n 个点 $(a_i)_{i=1,\cdots,n}$，n 是给定的。证明函数 $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{a_ia_j}$ 当且仅当这些点形成一个正多边形时取最大值。

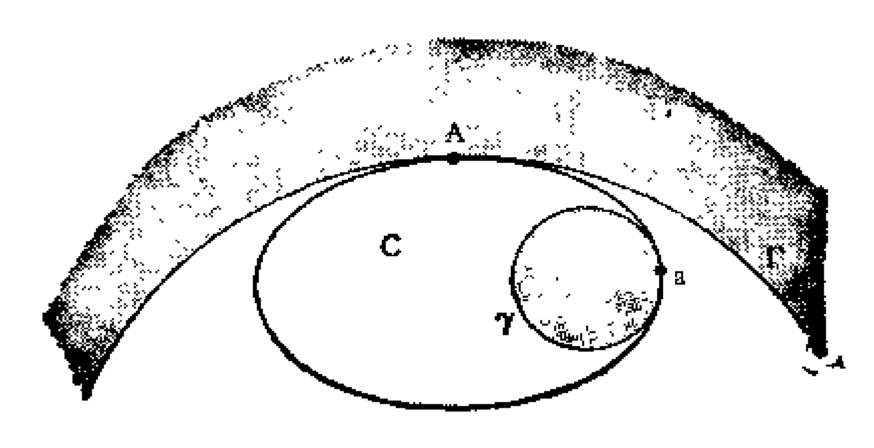


图 12.12.13.

12.12.14 Blaschke 滚动定理. 设C是平面上一个凸的紧集，它的边界是一条C^2类曲线，并且是双正则的（参见[B-G]第309页）。设点A和a都属于$\mathrm{Fr}\,C$，并且在A和a点处曲率分别取最小值和最大值。证明$\mathrm{Fr}\,C$在a点的密切圆γ可在整个$\mathrm{Fr}\,C$的内部滚动。并且，$\mathrm{Fr}\,C$可在整个Γ的内部滚动，这里Γ是$\mathrm{Fr}\,C$在A点的密切圆。如果用含在C内的半径为最大的圆代替γ或用包含C的半径为最小的圆代替Γ，上述结论是否仍然成立？（需要时可参见[BLA 1]第116页）。

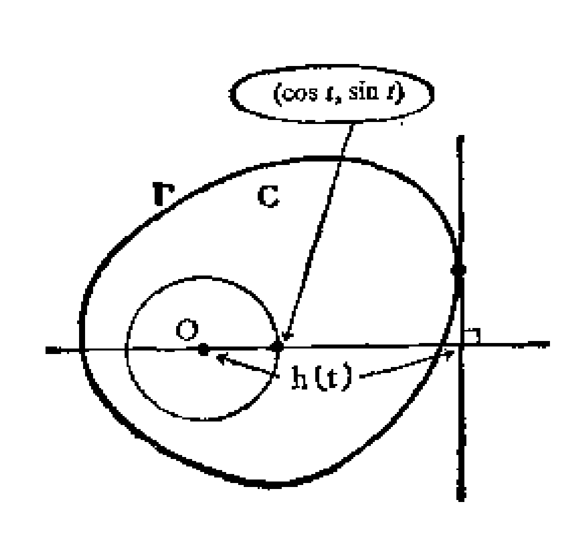


图 12.12.14.

12.12.15 Euler 方程的应用. Bonnesen 定理. 设C是平面上一个凸的紧集，其边界Γ是C^2类的。在C内取定一个以O为原点的正交标架，设$h(t)$是从O到Γ的这样一条切线的距离：这条切线与向量$(\cos t, \sin t)$ $(t\in\mathbf{R})$正交，并使得$(\cos t, \sin t)$和C在此切线所决定的同一个半平面内（参见支撑函数，11.8.12.3）。证明h是C^2类的。借助于2π为周期的函数h: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，计算Γ的长度、曲率和C的面积。

设C'是与C相同类型的另一个凸集。假定$\forall m\in\Gamma$和$m'\in\Gamma'$，存在一个平移f，使得$f(m)=m'$，$f(\Gamma$在m点的切线$)=\Gamma'$在m'点的切线，$f(C)\subset C'$。证明

$$\mathfrak{A}(C)\mathfrak{A}(C')\leqslant 2\pi(\mathfrak{L}(C)+\mathfrak{L}(C')).$$

并从而推出 Bonnesen 不等式：如果$r(C)$，$R(C)$是C的内半径和外半径(参见12.11.8.4)，则

$$(\mathfrak{A}(C))^2-4\pi\mathfrak{L}(C)\geqslant\pi^2(R(C)-r(C))^2.$$

12.12.16 关于多边形的等周不等式. 设P是一个凸多边形；P'是一个外切于单位圆的凸多边形，并且P'的边和P的边是平行的。证明 Lhuillier 不等式：

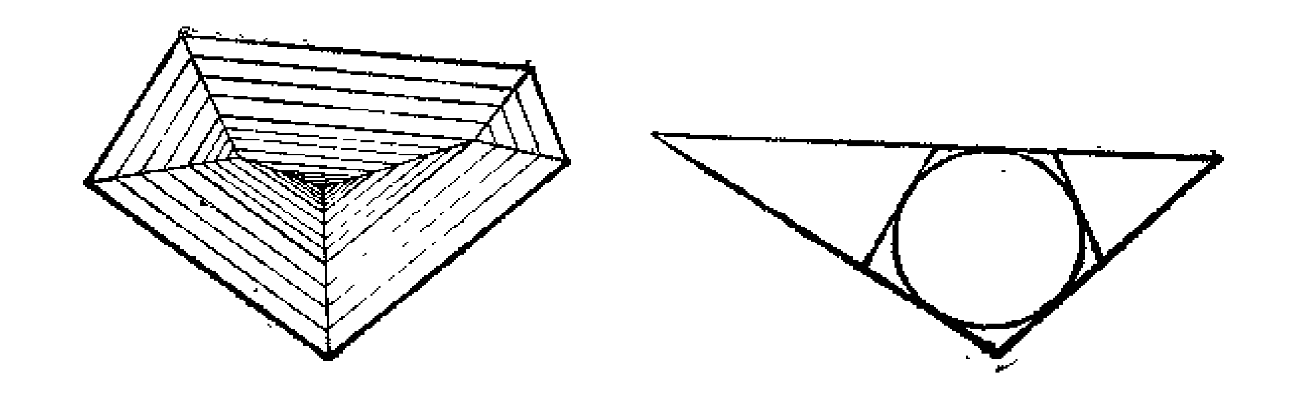


图 12.12.16.

$$(\mathfrak{A}(P))^2 \geqslant 4\mathfrak{L}(P)\mathfrak{L}(P^*).$$

为证明这一结论，根据图 12.12.16，我们考虑一族位于 P 内部的多边形 $P(t)$，它们的边都与 P 平行，且与 P 相距 t. 我们要证明，对于任意一个适当的 t，$\mathfrak{L}(P)=\mathfrak{L}(P(t))+t\mathfrak{A}(P(t))+t^2\mathfrak{L}(P^*)$. $\mathfrak{A}(P)=\mathfrak{A}(P(t))+2t\mathfrak{L}(P^*)$. 由此可推出：

$$\mathfrak{L}(P(t))=t^2\mathfrak{L}(P^*)-t\mathfrak{A}(P)+\mathfrak{L}(P).$$

证明：$(\mathfrak{A}(P))^2-4\mathfrak{L}(P)\mathfrak{L}(P^*)\geqslant(\mathfrak{A}(P)-2\mathfrak{L}(P^*)r(P))^2$，这里 $r(P)$ 表示 P 的内半径. 试与 12.11.8.4 比较.

证明：周长给定的 n 边形中，仅有正多边形取到最大面积(先归结为一个圆的内接多边形的情形).

12.12.17 对 [R-C2] 中第 234—236 页作评论性的研究.

12.12.18 设 $C\in\mathscr{C}'$，对于其内、外半径 $r(C)$ 和 $R(C)$，证明：

$$d\,\frac{\mathfrak{L}(C)}{R(C)}\leqslant\mathfrak{A}(C)\leqslant d\,\frac{\mathfrak{L}(C)}{r(C)}.$$

讨论取等号的情形.

12.12.19 证明：$\int_{\xi\in S}|(\xi|u)|\sigma=2\beta(d-1)$ (参见 12.3.3.2)

12.12.20 面积和体积公式

12.12.20.1 计算内摆线和外摆线 9.14.34 的长度和面积.

12.12.20.2 计算球带，即 $\mathbf{R}^3$ 中一个球面夹在两个平行平面之间的部分的体积和面积. 特别，球带的侧面积只依赖于这两个平行平面间的距离.

12.12.20.3 计算两个有相同半径 r 的且轴相交成 α 角的圆柱面所夹部分的体积.

12.12.20.4 计算一个旋转抛物面与一个不与其旋转轴平行的平面所围成的紧集的体积.

12.12.20.5 计算一个圆柱劈锥的体积和侧面积，见图 12.12.20.5.

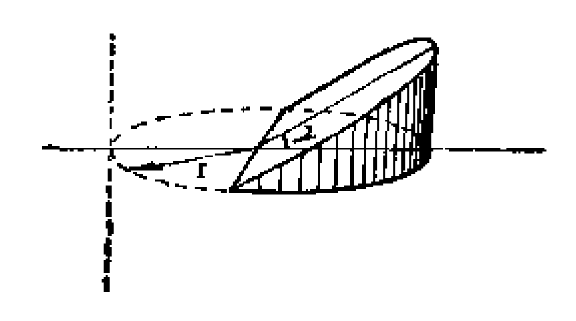


图 12.12.20.5.

12.12.20.6 计算 Viviani 窗，即 $\mathbf{R}^3$ 中如下定义的点集：$\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ 和 $x^2+y^2 \leqslant x\}$ 的体积.

12.12.20.7 **三平面公式.** 在三维欧几里得空间中，考虑一个紧集 K，它是由一个曲面和在适当选取的 z 轴上高度为 a，b 的两个平行平面 $H(a)$ 和 $H(b)$ 所围成的部分. 记 $S(z)$ 是高度为 z 的

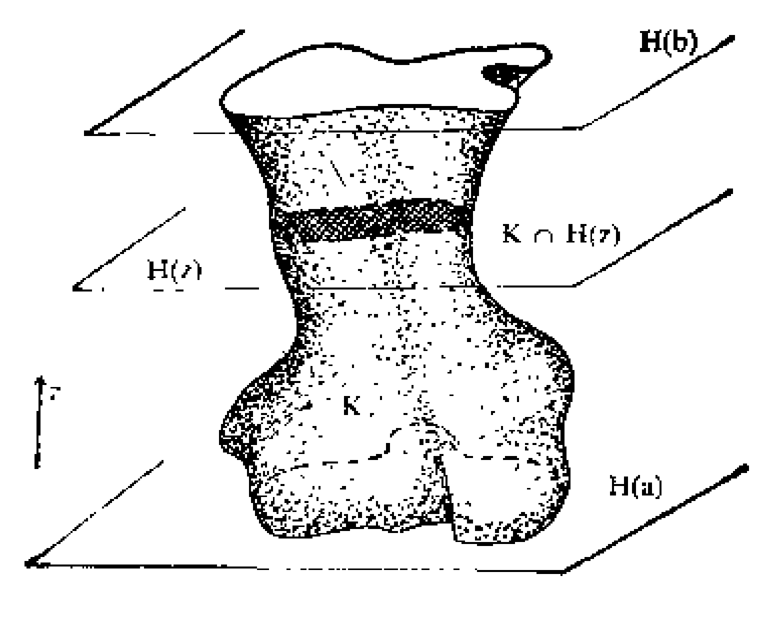


图 12.12.20.7.

平面所得截面 $K\cap S(z)$ 的面积，并假设 $S(z)$ 至多是一个 z 的三次多项式。证明K的体积由下式给出：

$$\frac{b-a}{6}\left[S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right],$$

（称为三平面公式）

用此法再次求 12.12.20.2 中球带的体积。并应用于圆台。证明当K的侧面是一个直纹面时，公式是可行的。

12.12.20.8 计算方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的旋转椭球体的体积。

12.12.20.9 Guldin 定理. 凡在所出现的C不是凸集的情形，对面积可按可微子流形的意义理解。考虑三维欧几里得空间E中一个平面P内的紧集K。证明：K围绕P中不与它相交的直线D作完全旋转所生成的E中的紧集C的体积由下式给出：

$$\mathfrak{L}_E(C)=2\pi\cdot d(g,D)\mathfrak{L}_P(K),$$

这里 $g=\operatorname{cent}(K)$ 表示K的中心，参见 2.7.5.2。

如果把K的边界视作均匀细线，记 h 为通常意义下此线的重

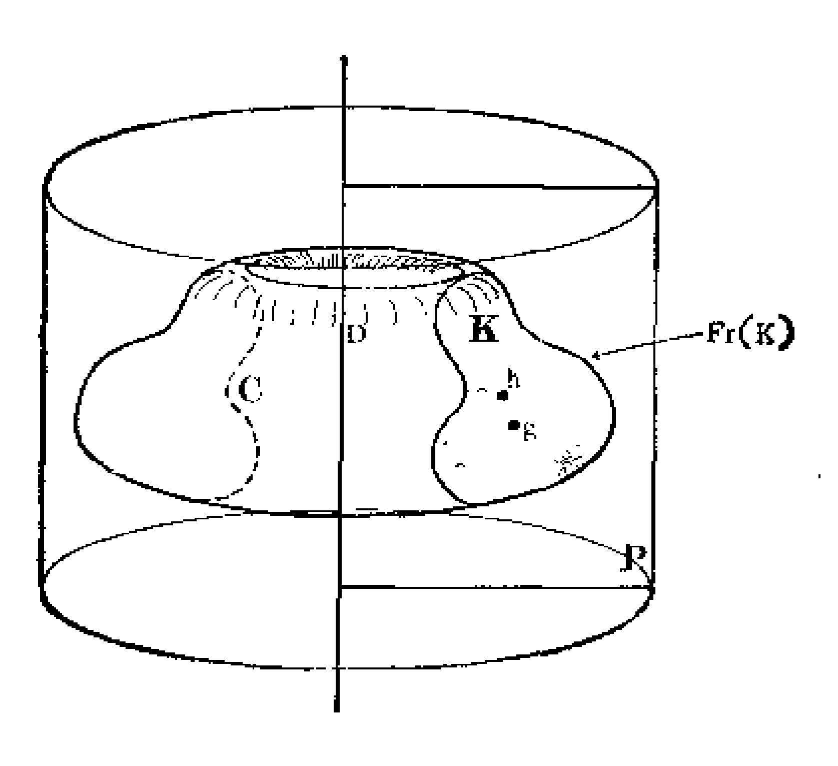


图 12.12.20.9.

心，证明C的面积为

$$\mathfrak{A}_E(C)=2\pi d(h,D)\cdot\mathfrak{A}_P(K).$$

试给出此公式的应用，并就已知的体积或面积公式进行验证

12.12.21 设A是n维欧几里得空间E中的一个内部非空的紧凸集，x是它的中心(参见2.7.5.5)。对于$\vec{E}$的任意一个单位向量ξ，用$\delta(\xi)$表示x到A的下述支撑超平面的距离：此支撑超平面与ξ垂直，且对此超平面中所有的y有$(\overrightarrow{xy}|\xi)>0$(参见11.8.12.3)，用$B(\xi)$表示沿$\xi$方向的宽度$\operatorname{larg}_\xi A$(参见11.5.6.3)。证明：对任意的$\xi$，

$$\frac{B(\xi)}{n+1}\leqslant\delta(\xi)\leqslant\frac{nB(\xi)}{n+1}$$

(参见[VE]第190页命题12.5)。

参 考 书 目

[A-A] ARNOLD (V. I.) et AVEZ (A.). *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars.

[A-B] ANNEQUIN et BOUTIGNY. *Cours de Physique, Optique*, Vuibert.

[A-B-S] ATIYAH (M. F.), BOTT (R.) et SHAPIRO (A.). *Clifford Modules*, Topology, 3, 1964-1965, supplément, p. 3-38.

[AE] *Astronomie*, Encyclopédie de la Pléiade, Gallimard

[AN] ARTIN (Emil). *Geometric Algebra*, Interscience.

[AR] ARNOLD (V.). *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou.

[AS] ARNAUDIÈS (J.-M.), *Les cinq polyèdres de $\mathbf{R}^3$ et leurs groupes*, C.D.U.-S.E.D.E.S., Paris.

[AV] ALEXANDROW (A. D.). *Konvexe Polyeder*, Akademie Verlag, Berlin.

[AW] ALEXANDROW (A.D.). *Die innere Geometrie der konvexe Fläche*, Akademie Verlag, Berlin.

[BA] BIANCHI (L.). *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle transformazioni asintotiche delle curve el delle superficie*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 25, 1908, p. 291-325.

[BAN] BANCHOFF (Thomas). *Non-rigidity Theorems for Tight Polyhedra*, Archiv der Mathematik, 21, 1970, p. 416-423.

[BA-WH] BANCHOFF (Thomas) et WHITE (James). *The behavior of the total twist and self-linking number of a closed space curve under inversions*, Mathematica Scandinavica 36, 1975, p. 254-262.

[B-B] BECKENBACH (Edwin F.) et BELLMAN (Richard). *Inequalities*, Springer.

[BE] BROUSSE (Pierre). *Mécanique*, Armand Colin.

[BER] BERGER (M.). *Lectures Notes on Geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute, Bombay.

[BES] BESSE (Arthur). *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik, Band 93, Springer.

[B-F] BONNESEN (O.) et FENCHEL (W.). *Theorie der konvexe Körper*, Chelsea.

[B-G] BERGER (Marcel) et GOSTIAUX (Bernard). *Géométrie différentielle*, Armand Colin.

[B-H] BOREL (A.) et HIRZEBRUCH (F.). *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces*, American Journal of Math., 80, 1958, p. 458-538.

[B-H-H] BLACK (W. L.), HOWLAND (H. C.) et HOWLAND (B.). *A Theorem about Zigzags between two Circles*, American Math. Monthly, 81, 1974, p. 754-757.

[BI 0] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Théorie des Ensembles, Hermann, 1970.

[BI 1] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Topologie Générale, chapitres 5 à 10, Hermann, 1974.

[BI 2] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre II, chapitre 9, Hermann.

[BI 3] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre V, chapitres 1, 2, 2e édition. Hermann.

[BI 4] BOURBAKI (Nicolas). *Groupes et algèbre de Lie*, chapitre 4, 5, 6, Hermann.

[BI 5] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Algèbre, chapitres 1 á 3, Hermann, 1970.

[B-K] BUSEMANN (Herbert) et KELLY (Paul J.). *Projective Geometry and Projective Metrics*, Academic Press.

[BL] BLUMENTHAL (Leonard M.). *Theory and Applications of Distance Geometry*, Chelsea.

[BLA 1] BLASCHKE (Wilhelm). *Kreis und Kugel*, Chelsea.

[BLA 2] BLASCHKE (Wilhem). *Vorlesungen über Differential Geometrie, II : Affine Differential Geometry*, Springer.

[BLA 3] BLASCHKE (Wilhelm). *Vorlesungen über Differential Geometrie, III : Differential Geometrie der Kreise und Kugel*, Springer.

[BL-BO] BLASCHKE (W.) et BOL (G.). *Geometrie der Gewebe*, Springer, 1938.

[B-M] BLUMENTHAL (Leonard M.) et MENGER (Karl). *Studies in Geometry*, W. H. Freeman.

[BN] BOURGIN (D. G.). *Modern Algebraic Topology*, Mac Millan.

[BO 1] BOREL (Armand). *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes*, American Journal of Math., 76, 1954, p. 273-342.

[BO 2] BOREL (Armand). *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Annals of Math., 57, 1953, p. 115-207.

[BP] BAUDOIN (Paul). *Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal*, Vuibert.

[BR] BAER (R.). *Linear Algebra and Projective Geometry*, Academic Press.

[B-S] BOREVICH (Z. I.) et SHAFAREVICH (I. R.). *Number Theory*, Academic Press.

[B-T] BRUHAT (F.) et TITS (J.). *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées*, Public. Math. I.H.E.S., no 41,

[BU 1] BUSEMANN (Herbert). *Convex Surfaces*, Interscience.

[BU 2] BUSEMANN (Herbert). *Recent Synthetic Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik, n° 54, Springer.

[BUR] BURCKHARDT (J. J.). *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*, Birkhaüser.

[BV] BONNEVAL (H.). *Photogrammétrie générale* (4 *volumes*), Eyrolles.

[BZ] BENZ (Walter). *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer.

[CA] CAIRNS (Stewart Scott). *Introductory Topology*, Ronald Press.

[CAL] CALLAHAN (Francis P.). *Morley polygons*, American Math. Monthly 84, 1977, p. 325-337.

[C-B] COUDERC (P.) et BALLICIONI (A.). *Premier livre du tétraèdre*, Gauthier-Villars.

[CD] CARATHEODORY (C.). *The most general transformation which transform circles into circles*, Bull. Amer. Math. Soc., 43, 1937, p. 573-579.

[C-D-L] COHEN-TANNOUDJI (C.), DIU (B.) et LALOE (F.). *Mécanique quantique*, *vol.* 1, Hermann.

[CE 1] CARTAN (Elie). *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes*, Oeuvres complètes, tome I, volume 2, p. 1227-1246.

[CE 2] CARTAN (Elie). *The Theory of Spinors*, Hermann ou The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

[C-G] CHEEGER (Jeff) et GROMOLL (Detlef). *On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature*, Ann. of Math., 96, 1972, p. 413-443.

[CH 1] CARTAN (Henri). *Calcul différentiel*, Hermann.

[CH 2] CARTAN (Henri). *Théorie élémentaire des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

[CH-GR] CHERN (S. S.) et GRIFFITHS (P.). *Abel's theorem and webs*, Jahrbericht d. Deutsche Math.-Verein., 80, 1978, p. 13-110.

[CL 1] CONNELLY (Robert). *A counter example to the rigidity conjecture for polyhedra*, Public. Math. I.H.E.S., 47, 1978, p. 333-338.

[CL 2] CONNELLY (Robert). *A flexible sphere*, Math. Intelligencer, 1, 1978, p. 130-131.

[C-M] COXETER (H. S. M.) et MOSER (W. O. J.). *Generators and Relations for Discrete Groups*, 2e édition, Springer.

[CN] CUENIN (R.). *Cartographie générale* (2 *volumes*), Eyrolles.

[CO] CONNELLY (Robert). *An attack on rigidity I, II*. Preprints, Cornell University.

[CR 1] COXETER (H. S. M.). *Introduction to Geometry*, John Wiley.

[CR 2] COXETER (H. S. M.). *Regular Polytopes*, Methuen.

[CR 3] COXETER (H. S. M.). *Non-euclidean Geometry*, The University of Toronto Press.

[CR 4] COXETER (H. S. M.). *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press.

[CR 5] COXETER (H. S. M.). *The Problem of Apollonius*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 5-15.

[CS] CASSELS (J. W. S.). *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer.

[CT] CHOQUET (Gustave). *Cours d'Analyse, tome II : Topologie*, Masson

[CY] CHEVALLEY (Claude) *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press.

[CZ] CONZE (Jean-Pierre). *Le théorème d'isomorphisme d'Ornstein et la classification des systèmes dynamiques en théorie ergodique*, Séminaire Bourbaki, novembre 1972.

[D-C 1] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Géométrie*, J. B. Baillière.

[D-C 2] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Compléments de géométrie*, J. B. Baillière.

[DE 1] DIEUDONNÉ (Jean). *La géométrie des groupes classiques*, 2e *édition*, Springer.

[DE 2] DIEUDONNÉ (Jean). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, 3e *édition*, Hermann.

[DE 3] DIEUDONNÉ (Jean). *Calcul infinitésimal*, Hermann.

[DE 4] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome II*, Gauthier-Villars.

[DE 5] DIEUDONNÉ (Jean), *Eléments d'Analyse, tome III*, Gauthier-Villars.

[DE 6] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome IV*, Gauthier-Villars.

[DE 7] DIEUDONNÉ (Jean). *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press.

[DE 8] DIEUDONNÉ (Jean). *Cours de Géométrie Algébrique* (*tomes* 1 *et* 2), Presses Universitaires de France.

[D-G-K] DANZER (L.), GRÜNBAUM (B.) et KLEE (V.). *Helly's Theorem and its Relatives*, A.M.S. Symposium on Convexity, Proc. Symp. Pure Math., volume 7, 1963.

[DI] DEMBOWSKI (P.). *Finite Geometries*, Ergebnisse der Mathematik, nº 44, Springer.

[DI-CA] DIEUDONNÉ (Jean) et CARRELL (James B.) *Invariant Theory, Old and New*, Academic Press

[DN] DANJON (André). *Astronomie générale*, J. et R. Sennac.

[DO] DORRIE (Heinrich). 100 *Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover.

[DQ] DUPORCQ (Ernest). *Premiers principes de géométrie moderne*, 3e *édition*, Gauthier-Villars.

[DR] DIXMIER (Jacques). *Cours de mathematiques du premier cycle, deuxième année*, Gauthier-Villars.

[DV] DVORETSKY (Aryeh). *Some results on convex bodies and Banach spaces*, p. 123-160 dans Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1961.

[DX] DARBOUX (Gaston). *Principes de Géométrie Analytique*, Gauthier-Villars.

[DY] DOUADY (Adrien). *Le shaddock à six becs*, Bulletin A.P.M.E.P., 281, 1971, p. 699.

[EE] *Encyklopädie der Mathematischen Wissenchaften, Geometrie*, III.2.1, Teubner.

[E-K] EELLS (James) et KUIPER (Nicolas O.). *Manifolds which are like Projective Planes*, Public. Math. I.H.E.S., n° 14, p. 5-46.

[EL] ELLISON (W. J.). *Waring's problem*, American Math. Monthly, 78, 1971.

[EN] EGGLESTON (H. G.). *Convexity*, Cambridge University Press.

[ER] ESCHER (M. C.). *L'œuvre graphique*, Solin, Paris.

[E-S] EELLS (J.) et SAMPSON (J. H.). *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, American Journal of Math., 86, 1964, p. 109-160.

[FA] FALCONER (K. J.). *A characterisation of plane curves of constant width*, J. London Math. Soc., 16, 1977, p. 536-538.

[FI] FILLMORE (Jay P.). *Symmetries of surfaces of constant width*, J. of Diff. Geometry, 3. 1969, p. 103-110.

[FL] FRENKEL (Jean). *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann.

[FN] FULTON (William). *Algebraic Curves*, Benjamin.

[FR] FEDERER (Herbert). *Geometric Measure Theory*, Springer.

[FT 1] FEJES-TOTH (L.). *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer.

[FT 2] FEJES-TOTH (L.). *Regular Figures*, Pergamon.

[GA] GARDNER (Martin). *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, Scientific American, January 1977.

[GE] GONSETH (F.). *Un théorème relatif à deux ellipsoides confocaux*, Bulletin des Sciences Math., 42, 1918, p. 177-180 et 193-194.

[GG] GREENBERG (Marvin J.). *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin.

[G-G-V] GELFAND (I. M.), GRAEV (M. I.) et VILENKIN (N. Ya). *Generalized Functions, volume 5, Integral Geometry and Representation Theory*, Academic Press.

[GIS] GRIFFITHS (Phillip A.). *Variations on a Theorem of Abel*, Inventiones Math., 35, 1976, p. 321-390.

[GI-WE] GIBBONS (J. C.) et WEBB (C.). *Circle preserving maps of spheres*, preprint, Illinois Institute of Technology, Chicago.

[GK] *Grundzüge der Mathematik, Band IV : Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik*, Vandenhoeck and Ruprecht.

[G-K-M] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.) et MEYER (W.). *Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Mathematics*, n° 55, Springer.

[GL] GLUCK (Herman). *Almost All Simply Connected Closed Surfaces are Rigid*, preprint, University of Pennsylvania.

[GM] GRAMAIN (André). *Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France.

[GN] GÉRARDIN (Paul). *Mathématiques Elémentaires Approfondies*, cours polycopié, Université Paris VII, U.E.R. de Mathématiques.

[G-O] GELBAUM (Bernard D.) et OLMSTED (John M. H.). *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day.

[GR] GUGGENHEIMER (Heinrich W.). *Plane Geometry and its Groups*, Holden-Day.

[GR-HA] GRIFFITHS (P.) et HARRIS (S.). *On Cayley's Explicit Solution to Poncelet's Porism*, L'Enseignement Mathématique, 24, 1978, p. 31-40.

[GR-SH1] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The eighty-one types of isohedral tilings in the plane*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 82, 1977, p. 177-196.

[GR-SH2] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The 91 types of isogonal tiling in the plane*, Trans. A.M.S., 242, 1978, p. 335-354.

[GS] *Geometric Inequalities* (BOTTEMA *et alia*), Wolters-Noordhoof.

[GT] GUICHARDET (A.). *Calcul intégral*, Armand Colin.

[GX] GODEAUX (Lucien). *Les géométries*, Armand Colin.

[HA] HALL (M.). *The Theory of Groups*, Mac Millan.

[HA-WR] HARDY (G. H.) et WRIGHT (E. M.). *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press.

[H-C] HILBERT (D.) et COHN-VOSSEN (S.). *Geometry and the Imagination*, Chelsea.

[HD 1] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome I, 10e édition*, Armand Colin.

[HD 2] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome II, 7e édition*, Armand Colin.

[H-K] HAUPT (O.) et KUNNETH (H.). *Geometrische Ordnungen*, Springer.

[H-L-P] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) et POLYA (G.). *Inequalities*, Cambridge University Press.

[HM] HARTMAN (P.). *On Isometries and a Theorem of Liouville*, Mathematische Zeitschrift, 69, 1958, p. 202-210.

[HN] HELGASON (Sigurdur). *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press.

[HOL] d'HOLLANDER (Raymond). *Topologie Générale, tome I : Généralités, Mesure des angles et des distances*, Eyrolles.

[HO-PE] HODGE (W. V. D.) et PEDOE (D.). *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge University Press.

[H-P] HUGHES (Daniel R.) et PIPER (Fred C.). *Projective Planes*, Springer.

[HR] HADWIGER (H.). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer.

[HS] HERSCH (Joseph). *Quatre propriétés des membranes sphériques homogènes*, C.R.A.S., 270, 1970, p. 1714-1716.

[HU] HUSEMOLLER (Dale). *Fibre Bundles*, McGraw Hill.

[H-W] HILTON (P. J.) et WYLIE (S.). *Homology Theory*, Cambridge University Press.

[H-Y] HOCKING (John G.) et YOUNG (Gail S.). *Topology*, Addison-Wesley.

[HZ] HURWITZ (M. A.). *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales Ecole Norm., 19, 1902, p. 357-408.

[I-R] ILLIOVICI (G.) et ROBERT (P.). *Géométrie*, Eyrolles.

[JE] JOEDICKE (Jürgen). *Les structures en voiles et coques*, Vincent, Fréal et Cie.

[KE] KRÉE (P.). *Introduction aux mathématiques et à leurs applications fondamentales, M.P. 2*, Dunod.

[KF] KAZARINOFF (Nicholas D.). *Geometric Inequalities*, Random House.

[KG 1] KLINGENBERG (Wilhelm). *Eine Vorlesung über Differential Geometrie*, Springer.

[KG 2] KLINGENBERG (Wilhelm). *Paare symmetrischen und alternierenden Formen zweiten Grades*, Abhandl. Math. Sem. Hamburg, 19, 1955, p. 78-93.

[KH] KUROSH (A. G.). *Lectures in General Algebra*, Pergamon.

[KM] KLOTZ-MILNOR (Tilla). *Efimov's Theorem about Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature*, Advances in Math., 8, 1972, p. 474-543.

[KN 1] KLEIN (Félix). *Lectures on the Icosahedron*, Dover.

[KN 2] KLEIN (Félix). *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer.

[KO-NO 1] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume I*, Interscience.

[KO-NO 2] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume II*, Interscience.

[LB 1] LEBESGUE (Henri). *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars.

[LB 2] LEBESGUE (Henri). *Les coniques*, Gauthier-Villars.

[LB 3] LEBESGUE (Henri). *Octaèdres articulés de Bricard*, l'Enseignement mathématique, 13, 1967, p. 175-185.

[LE] LEKERKERKER (C. G.). *Geometry of numbers*. Walters-Noordhoff.

[LF 1] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Géométrie différentielle*, Masson.

[LF 2] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes*, Mémoires Acad. Royale Belg., Cl. Sci. Mém. Coll. in-8°, 1971, fascicule 5.

[LF 3] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes*, J. of Diff. Geometry, 8, 1973, p. 487-510.

[LF-AR] LELONG-FERRAND (J.) et ARNAUDIES (J.-M.). *Cours de mathématiques, tome* 3, Dunod.

[LG 1] LANG (Serge). *Elliptic Functions*, Addison-Wesley.

[LG 2] LANG (Serge). *Analysis II*, Addison-Wesley.

[LM 1] LEMAIRE (J.). *Hypocycloïdes et Epicycloïdes*, Vuibert.

[LM 2] LEMAIRE (J.). *L'hyperbole équilatère*, Vuibert.

[LP] *Le libre du problème, volume* 4 : *la convexité*, CEDIC.

[LR 1] LEHNER (Joseph). *A Short Course in Automorphic Functions*. Holt, Rinehart and Winston.

[LR 2] LEHNER (Joseph). *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, Math. Surveys, number VIII, American Math. Society.

[LS] LEVALLOIS (Jean-Jacques). *Géodésie Générale, tome II : Géodésie classique bidimensionnelle*, Eyrolles.

[LU] LUSTERNIK (Lazar A.). *Convex Figures and Polyhedra*, Heath.

[LY] LEVY (Harry). *Projective and Related Geometry*, Mac Millan.

[LZ] LAZUTKIN (V. F.). *The Existence of Caustics for a Billiard Problem in a Convex Domain*, Math. USSR Izvestia, 7, 1973, p. 185-214.

[MA] MALLIAVIN (Paul). *Géométrie différentielle intrinsèque*, Hermann.

[MD] MARCHAUD (A.). *Les surfaces du second ordre en géométrie finie*, J. Math. pures et appl., 9-15, 1936, p. 293-300.

[MI] MILNOR (John). *A problem in cartography*, American Math. Monthly, 76, 1969, p. 1101-1102.

[MJ] MANDELBROJT (Benoît). *Les Objets fractals*, Flammarion.

[ML] MICHEL (Charles). *Compléments de géométrie moderne*, Vuibert.

[M-P] MODENOV (P. S.) et PARKHOMENKO (A. S.). *Geometric Transformations, volume I*, Academic Press.

[MR] MATHER (J.). *The nice dimensions, Proceedings of Liverpool Singularities, Symposium I*, Lecture Notes in Mathematics n° 192, Springer.

[M-T] MARTINEAU (André) et TREVES (François). *Eléments de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions, fascicule I*, C.D.U.

[MW 1] MOSTOW (G. D.). *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces*, Annals of Mathematical Studies, nº 78, Princeton University Press.

[MW 2] MOSTOW (G. D.). *Discrete Subgroups of Lie Groups*, Advances in Mathematics, 15, 1975, p. 112-123.

[NA] NEVANLINNA (Rolf). *On Differentiable Mappings, Analytic Functions*, p. 3-9, Princeton University Press.

[OA] OBATA (M.). *The Conjecture on Conformal Transformations of Riemannian Manifolds*, J. of Differential Geometry, 6, 1972, p. 247-258.

[OM] O'MEARA (O. T.). *Introduction to Quadratic Forms*, Springer.

[OS 1] OSSERMAN (Robert). *Bonnesen-style Isoperimetric Inequalities*, American Math. Monthly, 86, 1979, p. 1-29.

[OS 2] OSSERMAN (Robert). *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., 84, 1978, p. 1182-1238.

[PA] PALAIS (Richard). *The Classification of G-Spaces*, Memoirs of the A.M.S., nº 36.

[PC] PASCAL (Blaise). *Pensées*, édition Brunschwig.

[PE] PEDOE (D.). *A Course of Geometry*, Cambridge University Press.

[PL] POHL (William F.). *A Theorem of Géométrie finie*, Journal of Differential Geometry, 10, 1975, p. 435-466.

[PN] PAYNE (L. E.). *Isomerimetric Inequalities and their Applications*, SIAM Review, 9, 1967, p. 453-488.

[PO] PORTEOUS (I. R.). *Topological Geometry*, Van Nostrand-Reinhold.

[PR] PORTER (T. I.). *A History of the Classical Isoperimetric Problem, Contributions to the Calculus of Variations*, University of Chicago Press, 1933.

[P-S] POLYA (G.) et SZEGÖ (G.). *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton University Press ou Kraus Reprint Corporation.

[PT] PICKERT (G.). *Projektive Ebenen*, Springer.

[PV 1] POGORELOV (A. V.). *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, Israël Programm for Scientific Translation, Jerusalem.

[PV 2] POGORELOV (A. D.). *Complete Solution of Hilbert's Fourth Problem*, Soviet Math. Doklady, 14, 1973, p. 46-49.

[RA] RADEMACHER (Hans). *Topics in Analytic Number Theory*, Grundlehren nº 169, Springer.

[R-C 1] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie, 1re partie,* Gauthier-Villars.

[R-C 2] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie, 2e partie,* Gauthier-Villars.

[RE] ROUSSARIE (Robert). *Sur les feuilletages de variétés de dimension 3,* Annales de l'Institut Fourier, 21(3), 1971, p. 13-81.

[RM] DE RHAM (Georges). *Sur les polygones générateurs des groupes fuchsiens,* l'Enseignement mathématique, 17, 1971, p. 49-61.

[RN 1] ROBINSON (Raphael M.). *Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane,* Inventiones Math., 12, 1971, p. 177-209.

[RN 2] ROBINSON (Raphael M.). *Undecidable Tiling Problems in the Hyperbolic Plane,* Inventiones Math., 44, 1978, p. 259-264.

[RN 3] ROBINSON (Raphael M.). *Comments on the Penrose Tiles,* preprint, University of California, Berkeley.

[RO] ROMANOV (V. G.). *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations,* Springer.

[RS] ROGERS (C. A.). *Packing and Covering,* Cambridge University Press.

[R-V] ROBERTS (A. Wayne) et VARBERG (Dale E.). *Convex Functions,* Academic Press.

[SA] SHIMURA (G.). *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions,* Iwanami Shoten et Princeton University Press.

[SB] STERNBERG (Shlomo). *Lectures on Differential Geometry,* Prentice-Hall.

[SC 1] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *The plane symmetry groups : their recognition and notation,* American Math. Monthly, 85, 1978, p. 439-450.

[SC 2] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *Tiling the plane with congruent pentagons,* Mathematics Magazine, 51 (1978), p. 29-44.

[SD 1] STAUDE (Otto). *Fadenconstructionen des Ellipsoides,* Math. Annalen, 20, 1882, p. 147-184.

[SD 2] STAUDE (Otto). *Die Fokaleigenschaften der Flachen Zweiter Ordnung,* Leipzig, 1896.

[SE 1] SERRE (Jean-Pierre). *Corps locaux,* Hermann.

[SE 2] SERRE (Jean-Pierre). *Cours d'arithmétique,* Presses Universitaires de France.

[SE 3] SERRE (Jean-Pierre). *Algèbres de Lie semi-simples complexes,* W. A. Benjamin.

[SE-TH] SEIFERT (H.) et THRELFALL (W.). *Lehrbuch der Topologie,* Chelsea.

[SF 1] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants of a class of transformation groups,* Aequationes Math., 14, 1976, p. 105-110.

[SF 2] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants à cinq points dans le plan projectif,* C.R.A.S., 285, 1977, p. 127-128.

[SG] SEIDENBERG (A.). *Lectures in Projective Geometry*, Van Nostrand.

[SGR] *Séminaire de Géométrie Riemannienne de l'Université Paris VII*, 1970-1971.

[SK] SPIVAK (Michael). *Differential Geometry, volume II*, Michael Spivak.

[SL 1] SALLEE (G. T.). *Maximal areas of Reuleaux polygons*, Canadian Math. Bull., 13, 1970, p. 175-179.

[SL 2] SALLEE (G. T.). *Reuleaux polytopes*, Mathematika, 17, 1970, p. 315-323.

[SN] STEIN (S. K.). *Tiling Space by Congruent Polyhedra*, Bulletin of the A.M.S., 80, 1974, p. 819-820.

[SO] SANTALO (L. A.). *Introduction to Integral Geometry*, Hermann.

[SR] SPANIER (E.). *Algebraic Topology*, McGraw Hill.

[S-T] SNAPPER (Ernst) et TROYER (Robert J.). *Metric Affine Geometry*, Academic Press.

[STE] STEFFEN (Klaus). *A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices*, preprint, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette.

[ST-RA] STEINITZ (E.) et RADEMACHER (H.). *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Springer.

[SU] SAMUEL (Pierre). *Unique Factorization*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 945-952.

[SW] STEWART (Ian). *Galois Theory*, Chapman and Hall.

[TG] *Seminar on Transformation Groups*, by Armand BOREL, Annals of Mathematical Studies, n° 46, Princeton.

[TM] THOM (René). *Sur la théorie des enveloppes*, J. de Math. pures et appl., 16, 1962, p. 177-192.

[TS] TITS (Jacques). *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer Lecture Notes in Mathematics, n° 386.

[VE] VALENTINE (Frederik A.). *Convex Sets*, McGraw Hill.

[VG 1] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1936, p. 229-231.

[VG 2] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1937, p. 159-160.

[VL] DU VAL (Patrick). *Homographies, Quaternions and Rotations*, Oxford University Press.

[VN] VALIRON (Georges). *Equations fonctionnelles. Applications*, Masson

[V-Y] VEBLEN (O.) et YOUNG (J. W.). *Projective Geometry*, deux volumes, Ginn and Co.

[WF] WOLF (Joseph A.). *Spaces of Constant Curvature*, J. A. Wolf.

[WK] WALKER (R. J.). *Algebraic Curves*, Dover.

[WL] WEYL (Hermann). *Symmetry*, Princeton University Press.

[WN] WENNINGER (Magnus J.). *Polyhedron Models*, Cambridge University Press.

[WO] WONG (Yung-Chow). *Isoclinic n-Planes in Euclidean 2n-Space, Clifford Parallels in Elliptic (2n — 1)-Space and the Hurwitz Matrix Equations*, Memoirs of the A.M.S., n° 41.

[WR] WARNER (Frank). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott-Foresman.

[Y-B] YAGLOM (I. M.) et BOLTYANSKII (V. G.). *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston.

[ZN] ZISMAN (Michel). *Topologie algébrique élémentaire*, Armand Colin.

[ZR] ZWIKKER (C.). *The advanced Geometry of Plane Curves and their Applications*, Dover.

[WF] WOLF (Joseph A.). *Spaces of Constant Curvature*, J. A. Wolf.

[WK] WALKER (R. J.). *Algebraic Curves*, Dover.

[WL] WEYL (Hermann). *Symmetry*, Princeton University Press.

[WN] WENNINGER (Magnus J.). *Polyhedron Models*, Cambridge University Press.

[WO] WONG (Yung-Chow). *Isoclinic n-Planes in Euclidean 2n-Space, Clifford Parallels in Elliptic (2n − 1)-Space and the Hurwitz Matrix Equations*, Memoirs of the A.M.S., n° 41.

[WR] WARNER (Frank). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott-Foresman.

[Y-B] YAGLOM (I. M.) et BOLTYANSKII (V. G.). *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston.

[ZN] ZISMAN (Michel). *Topologie algébrique élémentaire*, Armand Colin.

[ZR] ZWIKKER (C.). *The advanced Geometry of Plane Curves and their Applications*, Dover.

[WF] WOLF (Joseph A.). *Spaces of Constant Curvature*, J. A. Wolf.

[WK] WALKER (R. J.). *Algebraic Curves*, Dover.

[WL] WEYL (Hermann). *Symmetry*, Princeton University Press.

[WN] WENNINGER (Magnus J.). *Polyhedron Models*, Cambridge University Press.

[WO] WONG (Yung-Chow). *Isoclinic n-Planes in Euclidean 2n-Space, Clifford Parallels in Elliptic (2n − 1)-Space and the Hurwitz Matrix Equations*, Memoirs of the A.M.S., n° 41.

[WR] WARNER (Frank). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott-Foresman.

[Y-B] YAGLOM (I. M.) et BOLTYANSKII (V. G.). *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston.

[ZN] ZISMAN (Michel). *Topologie algébrique élémentaire*, Armand Colin.

[ZR] ZWIKKER (C.). *The advanced Geometry of Plane Curves and their Applications*, Dover.

目　录

第13章 二 次 型

欧氏空间的理论是在定义这种空间的正定二次型的基础上建立起来的．但在数学的丛林里，以及在力学或物理中，还会遇到很多其它种类的二次型．正如 Dieudonné 所说的，几乎没有一种数学理论不涉及二次型．举例说：

——分析中的 Hilbert 空间，Sobolev 空间；

——当维数是一个紧流形的维数的一半时，在这个流形的上同调上由上积所提供的二次型或交错型；

——在数论中，Riemann 几何或在相对论里所用到的 Lorentz 流形；

——在力学中，Liouville 型和统而言之的整个正在蓬勃发展的辛几何，以及挠量都涉及二次型．

本书中二次型除了出现在欧氏空间里，还出现在关于圆锥曲线及二次超曲面的各章中，而且在球面几何(第 20 章)与双曲几何(第 19 章)中，以及关于射影对射的 14.5.5 节里也稍有涉及．

这一章只涉及二次型理论的某几个方面，特别是着眼于刚才提及的各种几何应用．如要获得更多知识，可参看 [AN]，[S-T]，[Bl2]，[SE2]．

第一节是定义及例，其中 Artin 空间以后将经常用到．接着，13.2 节研究非欧氏二次型所表现的种种现象：迷向向量及奇异子空间；与所考虑的二次型相关联的、从 E 到它的对偶空间 E^* 内的线性映射 φ，在这里起着主要作用．13.3 节研究欧氏空间正交性的扩张．这一节证明了一个对以后几节有重要意义的技术性结论：可作出任意子空间的非奇异完备化空间．在 13.4 节内可看到任何二次型允许有正交基；当基域是 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$ 时，由此即可推导出这些二次型的分类．13.5 节专门讨论一个经典的重要问题：在欧氏

结构中，寻找一个二次型的轴．在 13.6 节内引进了二次型 q 的群 $O(q)$，它是欧氏向量空间中正交群的自然推广．我们还证明了有关 Artin 空间的一些技术性结论．可以这么说，Artin 空间是与欧氏空间偏离最大的空间．在 13.7 节证明了二次型的群由超平面对称生成，并且在等度量子空间上是可迁的．这个证明比在欧氏情形时困难得多．最后，13.8 节专门讨论在欧氏平面中所遇到的角及有向角的概念在实 Artin 平面内会变成怎样．在那里，将初次接触到双曲几何，而它是第 19 章的研究对象．

本章中 E 是在特征数不为 2 的域 K 上的有限 n 维向量空间（参见 3.3.2）．E 的向量子空间简称为子空间．

13.1 定义及例

13.1.1 定义． 向量空间 E 中的一个二次型就是 $\mathscr{P}_2^{\bullet}(E)$ 的一个元素 q（参见 3.3.1）．以 P 表示导出它的那个唯一的对称双线性型，并称为 q 的极型．

以后也记 $Q(E)=\mathscr{P}_2^{\bullet}(E)$．

13.1.2 注． 我们有(参见 3.3.2.1)：

$$q(x)=P(x,x),\ P(x,y)=\frac{1}{2}\Big(q(x+y)-q(x)-q(y)\Big),$$

$$q(\lambda x)=\lambda^2 q(x).$$

用微分学的语言来说，若 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，则 $q:E\to K$ 是 C^∞ 级的，而且有 Euler 恒等式：

$$q(x)=\frac{1}{2}q'(x)(x),$$

这是因为 $P(x,y)=\frac{1}{2}q'(x)(y)$．对于坐标 $\{x_i\}$，特别可得

$$P(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}y_i\ \frac{\partial q}{\partial x_j}(x_1,\cdots,x_n).$$

最后有

$$P(x, y) = \frac{1}{2} q''(0)(x, y).$$

只要 $q: E \to K$ 满足 $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$（即它是二次齐次的）且在 0 点有二阶导数，上述公式即为有效．有了这两个条件就能使 q 成为一个二次型．这一切都是求导法则的结果，可参看 [CH1]．其思想仅仅是把 $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ 对于 λ 求导．

13.1.3 例

13.1.3.1 欧氏结构，参看 8.1.1．

13.1.3.2 在相对论中会遇到二次型 $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$．

13.1.3.3 设 $\varphi \in E^*$（E 的对偶空间），则 $q = \varphi^2$ 定义为 $q(x) = (\varphi(x))^2$ 是一个二次型，其极型是 $P(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$．更一般地，若 $\varphi, \psi \in E^*$，可定义 $q = \varphi\psi$ 为 $q(x) = \varphi(x)\psi(x)$，它的极型是 $1/2(\varphi(x)\psi(y) + \varphi(y)\psi(x))$．对于 $k_i \in K$ 及 $\varphi_i \in E^*$ 可类似地定义 $q = \sum_i k_i \varphi_i^2$．

13.1.3.4 若 $\{e_i\}$ 是 E 的基，$\{e_i^*\}$ 是 E^* 的对偶基，则有如下的二次型：

(i) $q = \sum_{i=1}^{r} (e_i^*)^2$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$，或者就记为 $q = \sum_{i=1}^{r} x_i^2$．

(ii) $q = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2$ $(1 \leqslant r \leqslant r + s \leqslant n)$．

若 $n = 2p$，且 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,p} \cup \{h_i\}_{i=1,\cdots,p}$ 为 E 的一组基，其相应的坐标记为 x_i，y_i，我们也考虑下述二次型：

(iii) $q = 2\sum_{i=1}^{p} x_i y_i$．

13.1.3.5 若 $F \subset E$ 是一个子空间且 $q \in Q(E)$，则 q 在 F 上的限制 $q|_F$ 是 F 上二次型．

13.1.3.6 **在基下的表示，相关联的矩阵**．设 $\{e_i\}$ 是 E 的一个基，P 是 $q \in Q(E)$ 的极型，则 P（从而 q）被 $P(e_i, e_j)$ 的集合完全确定．把 n 阶方阵 $A = (P(e_i, e_j)) = (a_{ij})$ 称为 q 关于

基 $\{e_i\}$ 的矩阵,以 $q \longleftrightarrow A$ 记这种对应关系．若

$$x \cong X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ y \cong Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则有:

$$\textbf{13.1.3.7} \begin{cases} P(x, y) = {}^tXAY = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j = \sum_i a_{ii}x_iy_i \\ \qquad\qquad + \sum_{i<j} a_{ij}(x_iy_j + x_jy_i), \\ q(x) = {}^tXAX = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = \sum_i a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j. \end{cases}$$

从这些公式可以看出，不用进行 3.3.2.1 的计算就能从 q 得出 P: 把 x_i^2 项换成 x_iy_i，把 x_ix_j 换成 $1/2(x_iy_j + x_jy_i)$ 即可。

如果作基的变换 $\{e_i\} \Rightarrow \{e'_i\}$，其过渡矩阵 S 由 e'_i 关于 $\{e_i\}$ 的坐标所构成(或 $S = M(f)$ 是 f 关于 $\{e_i\}$ 的矩阵,这里 f 是使 $\forall_i$ 有 $f(e_i) = e'_i$ 的自同态),则

13.1.3.8 $\boxed{q \text{ 关于 } \{e'_i\} \text{ 的矩阵} = A' = {}^tSAS.}$

因此我们得到例 13.1.3.4 中的矩阵为

$$\text{(i)}\ A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{(ii)}\ A = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{(iii)}A = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I_t 是 t 阶单位阵.

13.1.3.9 逆象．设 E, E' 是(在同一个域上)两个向量空间，$f \in L(E, E')$ 是态射,且 $q' \in Q(E')$．q' 关于 f 的逆象记为 f^*q'，是如下定义的二次型 $q \in Q(E)$:

$$\boxed{q(x) = (f^*q')(x) = q'(f(x)).}$$

若 P' 是 q' 的极型,则 q 的极型 $P = f^*P'$ 定义为

$$P(x, y) = P'(f(x), f(y)).$$

特别，线性群 $GL(E)$ 通过 $f \longmapsto \{q \longmapsto f^*q\}$ 作用在 $Q(E)$ 上 (其实，$GL(E)$ 内的运算应取作相反的运算：这是因为 $(g\circ f)^*q$

$= f^*(g^*q)$!). 对于基 $\{e_i\}$, $\{e'_i\}$, 若 $q' \longleftrightarrow A'$, U 是 f 关于上述基的矩阵，则

13.1.3.10 $$\boxed{f^*q' = {}^tU A' U.}$$

事实上由 13.1.3.7 有:

$$(f^*q')(x) = {}^tXAX = q'(f(x)) = {}^tf(X)A'f(X) = {}^tX{}^tUA'UX.$$

13.1.4 等价性;分类问题

13.1.4.1 定义. 设 q 和 q' 分别是 E 和 E' 上的二次型，若存在 $f \in \mathrm{Isom}(E; E')$ 使得 $q = f^*q'$，则称 q 与 q' 是等价的. 这时也称结构 (E, q) 与 (E', q') 是等度量的（参见 8.1.5）或同构的. 所谓在域 K 上把二次型分类，就是确定 K 上有限维向量空间中二次型(关于上述等价关系)的一切等价类.

13.1.4.2 对任一维数 n, K 上二次型分类问题可归结为确定 $Q(K^n)$ 在 $\mathrm{GL}(K^n)$ 作用下的所有轨道.

13.1.4.3 例. 与 13.1.3.4(iii) 等价的二次型称为中性二次型（这时 $\dim E$ 必须是偶数）. 例如,若 $K = \mathbf{C}$, $n = 2p$, 则二次型 $q = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ 是中性的，这是因为

$$\sum_{i=1}^{2p} x_i^2 = \sum_{l=1}^{p} (x_l^2 + x_{l+p}^2) = \sum_{l=1}^{p} (x_l + ix_{l+p})(x_l - ix_{l+p}).$$

同理,当 $r = s$, $n = 2r$ 时，例 13.1.3.4 (ii) 的二次型也是中性的.

13.1.4.4 定义. q 是中性二次型的 (E, q) 称为 Artin 空间. $2p$ 维的 Artin 空间常记为 Art_{2p}; 当 $p = 1$ 时称为 Artin 平面。因此同维 Artin 空间互相同构.在文献中有时把 Artin 平面称为“双曲平面”;但我们不采用这种叫法,因为双曲平面的概念完全是另一回事. 我们将在第 19 章中研究双曲平面.

13.1.4.5 在 13.4.6 与 13.4.7 中我们将完整地解决当 $K = \mathbf{C}$ 及 $K = \mathbf{R}$ 时二次型分类问题. 这是一个简单的问题. 但对任意的 K，这却是一个难题,目前我们几乎无法着手讨论. 已经解决的情形有：对 $K = \mathbf{Q}$, [SE2] 用整个第 IV 章给出这个问题的

解法;对有限域,参看 [AN], 第 143—148 页;对代数数域, 差不多需要整整一本书,参见 [OM]. 在 [S-T] 里,读者可以发现许多关于二次型的初等的结果. 至于一般情形, 只有一维时是容易解决的, 我们可以在下面看到.

13.1.4.6 判别式. 13.1.3.8 表明 $\det A$ 依赖于所取的基, 但它在商集 $K/(K^*)^2$ 内的象却与基的取法无关. 这个象被记为 $\operatorname{disc}(q)$, 称为二次型 q 的判别式. 此外, 13.1.3.10 表明两个等价二次型的判别式相等: $\operatorname{disc}(f^*q)=\operatorname{disc}(q)$. 但是,反过来却不正确,例如对 $K=\mathbf{R}$, $n=4$: $q=x^2+y^2+z^2+t^2$, $q'=x^2+y^2-z^2-t^2$ 有相同判别式,但据 13.4.7, 它们不等价.

13.1.4.7 若 $\dim E=1$, 则 q 与 q' 等价的充要条件是 $\operatorname{disc}(q)=\operatorname{disc}(q')$. 这可以从 13.1.3.10 立即得出. 例如若 $K=\mathbf{C}$: $\mathbf{C}/(\mathbf{C}^*)^2=\{0,1\}$, 故有两类二次型: $q=0$, $q=x^2$. 若 $K=\mathbf{R}$: $\mathbf{R}/(\mathbf{R}^*)^2=\{-1,0,1\}$, 则有三类二次型: 0, x^2, $-x^2$. 这是 13.4.6 及 13.4.7 的特殊情形.

今后, (E,q) 表示带有二次型 q 的向量空间, q 的极型是 P.

13.2 奇异元及迷向元,根基,退化性及奇异性

13.2.0 如 8.1.8.1 所示, P 诱导了一个 $\varphi\in L(E,E^*)$: $\varphi(x)(y)=P(x,y)$. 若 $\{e_i\}$ 是 E 的基, $\{e_i^*\}$ 是对偶基, A 是 q 关于 $\{e_i\}$ 的矩阵,则 A 也是 φ 关于基 $\{e_i\}$, $\{e_i^*\}$ 的矩阵,因为

$$a_{ij}=P(e_i,e_j)=\varphi(e_i)(e_j)=e_j^*(\varphi(e_i)).$$

我们记得, $\varphi\in\operatorname{Isom}(E;E^*)$ 是等价于 $\operatorname{Ker}\varphi=0$ 的.

13.2.1 定义. 称 $q^{-1}(0)$ 为迷向锥面(或光锥). 使 $x\in q^{-1}(0)$ 的向量 $x\in E$ 称为迷向向量. 若 $q^{-1}(0)=0$, 称二次型 q 为非迷向的.

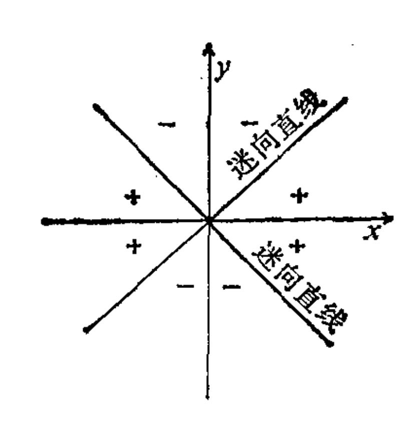
q 的根基是 $\operatorname{rad}(q)=\operatorname{Ker}\varphi=\{x\in E: P(x,y)=0\ \forall y\in E\}$; q 的秩就是 φ 的秩: $\operatorname{rang}(q)=\dim(\varphi(E))$. 若 $\operatorname{rad}(q)=0$, 则称 q 是非退化的, 这等价于 $\operatorname{rang}(q)=\dim E$ 或 $\varphi\in\operatorname{Isom}(E;E^*)$.

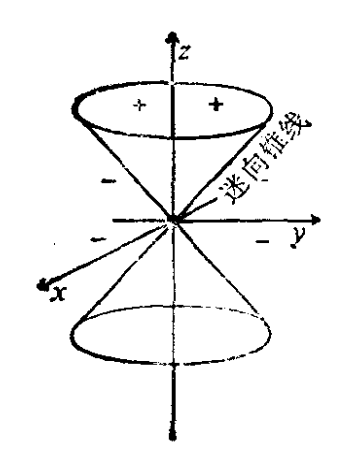
若 $\mathrm{rad}(q) \neq 0$ 则 q 称为退化的.

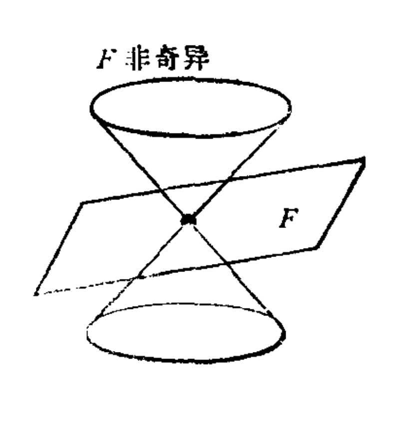
对 E 的子空间 F，F 的根基是

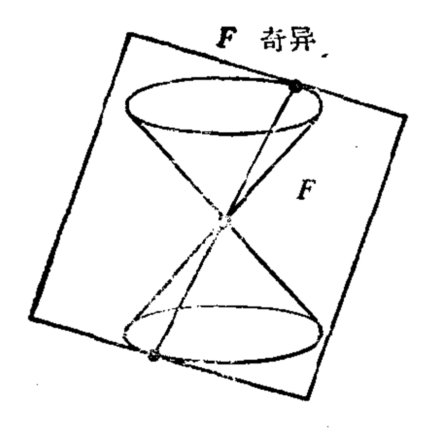
$$\mathrm{rad}(F) = \mathrm{rad}(q/F) = \{x \in F: P(x,y) = 0 \ \forall\, y \in F\}.$$

若 $q|_F$ 是非退化的(或退化的)，则称子空间 F 是非奇异的(相应









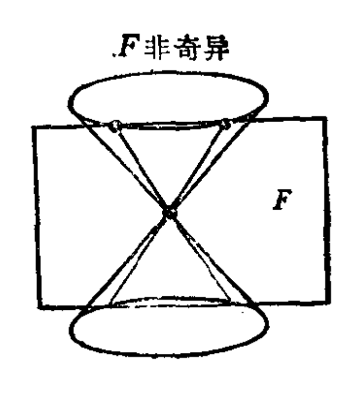


图 13.2.1.

地称为奇异的). 若 $q|_F=0$, 即 $\mathrm{rad}(F)=F$, 则称 F 是完全奇异的.

在图 13.2.1 中,第一个图表示 $\mathbf{R}^2$ 中的 $q=x^2-y^2$, 其余几个表示 $\mathbf{R}^3$ 中的 $q=-x^2-y^2+z^2$. $x^2+y^2-z^2-t^2$ 已经无法图示了, 但我们还是部分地画出了它的迷向锥面在射影空间 $P^3(\mathbf{R})$ 内的投影: 参看图 13.7.10 及 14.4.6.

13.2.2 评注

13.2.2.1 迷向这个词是与 8.8.6.1 相符的. 此外,被我们称为奇异或完全奇异的子空间往往也有人称为迷向或完全迷向的子空间. 但那些称法似易引起混淆.

13.2.2.2 根据初等线性代数, 恒有下式成立:

$$\mathrm{rang}(q)+\dim(\mathrm{rad}(q))=\dim E.$$

13.2.2.3 请注意非迷向与非退化并不等价. 例如 $E=\mathbf{R}^2$ 及 $q=x^2-y^2$. 当然,非迷向蕴含非退化. 若 $K=\mathbf{C}$ (或是代数闭域),则当 $\dim E\geqslant 2$ 时,一个二次型永远不会是非迷向的,这正是 13.7.6 的结果.

13.2.2.4 根据 13.2 的开始部分及 13.1.4.6, 可以看出 q 退化的充要条件是 $\mathrm{disc}(q)=0$; 特别,这个充要条件就是关于某个基有 $\det A=0$.

13.2.2.5 与欧氏空间的情形相反, 甚至 q 非退化时某些子空间也可能是奇异的: 见图 13.2.1 或者更简单地取 $F=Kx$, 这里 x 是迷向的.

13.2.2.6 若 $E=\mathrm{rad}(q)\oplus G$ 是直和, 则 $q|_G$ 非退化 (见 13.9.1).

13.2.3 例

13.2.3.1 若 $(E, q)=\mathrm{Art}_2$, 则 $q^{-1}(0)$ 由 E 的两条不同直线构成, 这两条直线称为迷向直线. 没有附加结构是无法区分这两条直线的(参看 13.7.10 及 13.8.2.1). 它们可确定 q 到相差一个常数倍,这是因为如果取迷向直线上的向量作为基, q 可写成 kxy 的形式.

13.2.3.2 若 $q \longleftrightarrow A$ (参见 13.1.3.6), 则 $\operatorname{rang}(q)=\operatorname{rang}(A)$. 因此例 13.1.3.4 中的秩为: 在 (i) 中等于 r, 在 (ii) 中等于 $r+s$, 在 (iii) 中等于 $2p$. 特别, (iii) 总是非退化的, (i) 是非退化的充要条件是 $r=n$, (ii) 是非退化的充要条件是 $r+s=n$.

13.2.3.3 仍考察例 13.1.3.4, 以下子空间是完全奇异的: 在情形 (i), 若 $K=\mathbf{C}$:

$$F=\mathbf{C}(e_1+ie_2)\oplus\mathbf{C}(e_3+ie_4)\oplus\cdots\oplus\mathbf{C}(e_{2p-1}+ie_{2p}),$$

$$p=\left[\frac{n}{2}\right],\quad \dim F=p;$$

在情形 (ii), 若 $K=\mathbf{R}$:

$$F=\mathbf{R}(e_1+e_{r+1})\oplus\mathbf{R}(e_2+e_{r+2})\oplus\cdots\oplus\mathbf{R}(e_r+e_{2r}),$$

$$\text{若 } r\leqslant s,\ \dim F=r;$$

在情形 (iii), 对任一个 K:

$F=Ke_1\oplus\cdots\oplus Ke_p$, $F'=Kh_1\oplus\cdots\oplus Kh_p$, $\dim F=\dim F'=p$. 其逆可参看 13.7.6. 这里给出一个带有技巧性的引理.

13.2.3.4 引理. 设 (E, q) 是任意取定的, $x\neq 0$ 是迷向向量, $x\notin\operatorname{rad}(q)$, 则存在平面 $P\subset E$ 使得 $x\in P$ 并且 $(P, q|_P)$ 是 Artin 平面. 特别若 (E, q) 中 $\dim E=2$, q 非退化且不是非迷向的,则 (E, q) 是 Artin 平面.

由于 $x\notin\operatorname{rad}(q)$, 故 $\varphi(x)\in E^*$ 非零 (见 13.2.0), 因而存在 z 使得 $P(x, z)=1$. 但不难找到一个

$$y\in Kz+Kx$$

使 $q(y)=0$, 例如 $y=z-\dfrac{q(z)}{2}x$. $q|_{Kz+Kx}$的矩阵是$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,这正是我们所需要的.

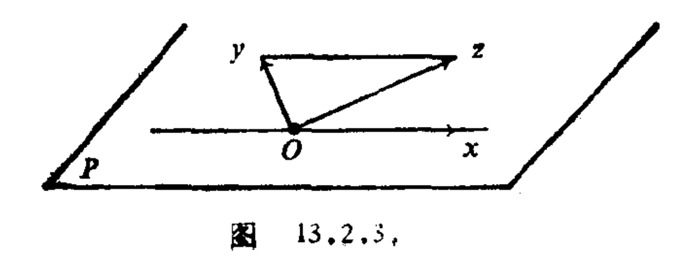


图 13.2.3.

13.2.4 伴随自同态

设 (E, q) 中的 q 非退化，由于 $\varphi \in \text{Isom}(E; E^*)$，我们可仿照 8.1.8.6 的办法来做．对任一 $f \in L(E; E) = \text{End}(E)$，定义它的伴随自同态 ${}^t f$ 为：

13.2.4.1
$$\begin{cases} \forall x, y \in E: P(f(x), y) = P(x, {}^t f(y)), \text{或} \\ {}^t f = \varphi^{-1} \circ f^* \circ \varphi, \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E^* \\ {\scriptstyle {}^t f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ E & \xrightarrow[\varphi]{} & E^* \end{array} \end{cases}$$

其中 f^* 是 f 的普通意义下的转置．关于互相对偶的基 $\{e_i\}$，$\{e_i^*\}$，若 $q \longleftrightarrow A$，U 是 f 关于 $\{e_i\}$ 的矩阵，由于 f^* 关于 $\{e_i^*\}$ 的矩阵是 ${}^t U$，我们有

13.2.4.2 $\boxed{U^* = {}^t f \text{ 关于 } \{e_i\} \text{ 的矩阵} = A^{-1}{}^t U A.}$

特别，$\det {}^t f = \det f^* = \det f$．

13.3 正交性，子空间的非奇异完备化

仿照欧氏空间的模式，我们给出下列定义．

13.3.1 定义． 设 A 是 E 的子集；置

$$A^{\perp} = \{x \in E: P(x, y) = 0 \ \forall y \in A\} = \bigcap_{y \in A} \text{Ker}(\varphi(y)),$$

并称为 A 的正交补．这总是一个向量子空间．两个子集 A 和 B 若满足 $B \subset A^{\perp}$，即 $P(x, y) = 0 \ \forall x \in A, \forall y \in B$，则称 A 和 B 正交，记为 $A \perp B$．关系 $A \perp B$ 是对称的．若 $E_i \perp E_j \forall i \neq j$，则称直和 $E = \bigoplus_i E_i$ 是正交的，且记为 $E = \overset{\perp}{\bigoplus_i} E_i$．若 $e_i \perp e_j \ \forall i \neq j$，则基 $\{e_i\}$ 称为正交基，若还有 $q(e_i) = 1 \forall i$，则称为标准正交基．

例如 $\text{rad}(q) = E^{\perp}$．一般说来对一个子空间 F，$\dim F + \dim F^{\perp} \neq \dim E$，因为 q 可能是退化的．反过来，有以下的初等结果，它们可与 8.1.8.3 一样借助于 2.4.8.1 来进行证明．

13.3.2 命题. 对任一子集 A，有 $A^\perp = \langle A\rangle^\perp$ 及 $A\subset A^{\perp\perp}$. 假设 q 非退化，则对 E 的任一子空间 F 有 $F^{\perp\perp}=F$，$\dim F+\dim F^\perp=\dim E$，$\mathrm{rad}F = F\cap F^\perp$. 子空间 F 是完全奇异的充要条件是 $F\subset F^\perp$. 我们还有以下等价关系：F 非奇异 $\Longleftrightarrow F\cap F^\perp = 0 \Longleftrightarrow E=F\oplus F^\perp \Longleftrightarrow F^\perp$ 非奇异. 对两个子空间 F 和 F'，有

$$(F\cap F')^\perp = F^\perp + F'^\perp,\ (F+F')^\perp = F^\perp\cap F'^\perp.$$

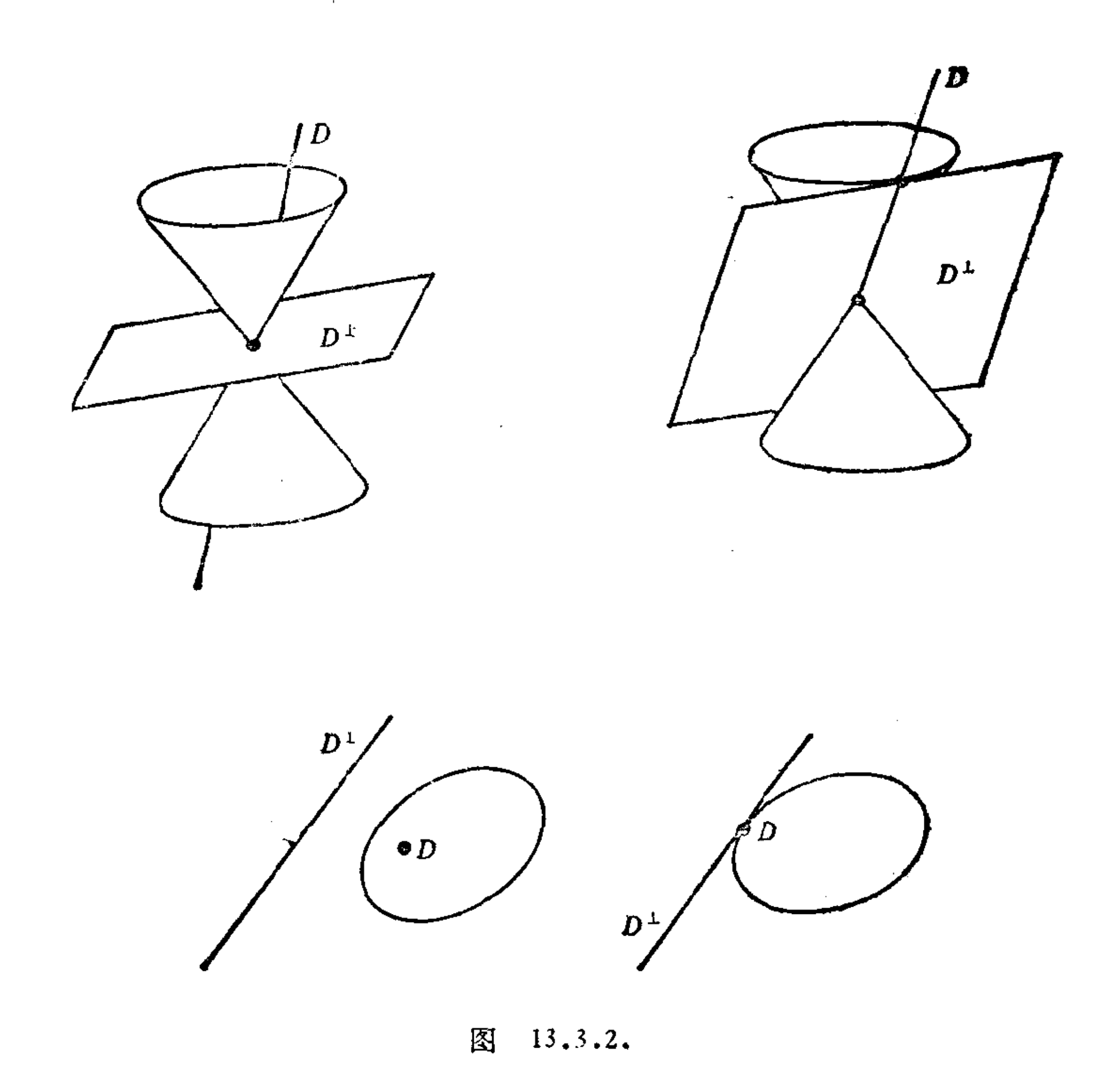


图 13.3.2.

图 13.3.2 表示了仿射平面的截线，它们使人想到一个点关于一条圆锥曲线的"点-配极直线"对偶. 实际上情形正是如此，但我们遵循的步骤与历史发展过程恰恰相反：我们在 14.5 中将利用关于圆锥曲线的定义二次型的对偶性，把它诱导到射影空间中来定义关于圆锥曲线的对偶性.

13.3.3 例

13.3.3.1 若对 (E, q) 有 $E = \overset{\perp}{\underset{i}{\bigoplus}} E_i$，我们可以说 (E, q) 是 $(E_i, q|_{E_i})$ 的直和. 反之,若给出了 $E = \underset{i}{\bigoplus} E_i$ 以及每个 E_i 上的一个二次型 q_i，则可通过极型 P 来定义 $q = \overset{\perp}{\underset{i}{\bigoplus}} q_i$:

$$P\left(\sum_i x_i,\ \sum_j y_j\right) = \sum_i P_i(x_i,\ y_i),$$

这里 P_i 是 q_i 的极型. 因此

$$E = \overset{\perp}{\underset{i}{\bigoplus}} E_i,\ q|_{E_i} = q_i \forall i.$$

13.3.3.2 在上述意义下,对任一 Artin 空间 Art_{2p} 有:

$$\mathrm{Art}_{2p} = \mathrm{Art}_2 \overset{\perp}{\bigoplus} \cdots \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{Art}_2\ (p\ 个项),$$

再采用 13.1.3.4 (iii) 的记号,有: $E_i = Ke_i \oplus Kh_i \forall i$.

13.3.4 非奇异完备化空间

这是简单的、技术性的,但对后面内容又是基本的.

13.3.4.1 命题. 设 q 非退化, F 是 E 的子空间, $s = \dim(\mathrm{rad}(F))$, G 是 $\mathrm{rad}(F)$ 在 F 内的任一补空间, $\{x_i\}_{i=1,\cdots,s}$ 是 $\mathrm{rad}(F)$ 的一个基,则存在 s 个平面 $P_i \subset E$ 使得对任一 i, $(P_i, q|_{P_i})$ 是一个 Artin 平面,对所有的 i 有 $x_i \in P_i$, 对所有的 $i \neq j$ 有 $P_i \perp P_j$, 而且 $G \perp P_i \forall i$. 此外,正交直和

$$\bar{F} = G \overset{\perp}{\bigoplus} P_1 \overset{\perp}{\bigoplus} \cdots \overset{\perp}{\bigoplus} P_s$$

是非奇异子空间且 $(\bar{F}, q|_{\bar{F}})$ 同构于 $G \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{Art}_{2s}$. 这样的 $\bar{F}$ 被称为 F 的非奇异完备化空间.

证明是容易的,只要对 $s = \dim(\mathrm{rad}(F))$ 作递推即可. 作为起点可如下进行: $s = 1$, $\mathrm{rad}(F) = Kx_1$, $F = G \overset{\perp}{\bigoplus} Kx_1$. 根据 13.3.2, 子空间 $G^{\perp}$ 非奇异;由于 $x_1 \in G^{\perp}$, 可应用 13.2.3.4: 存在

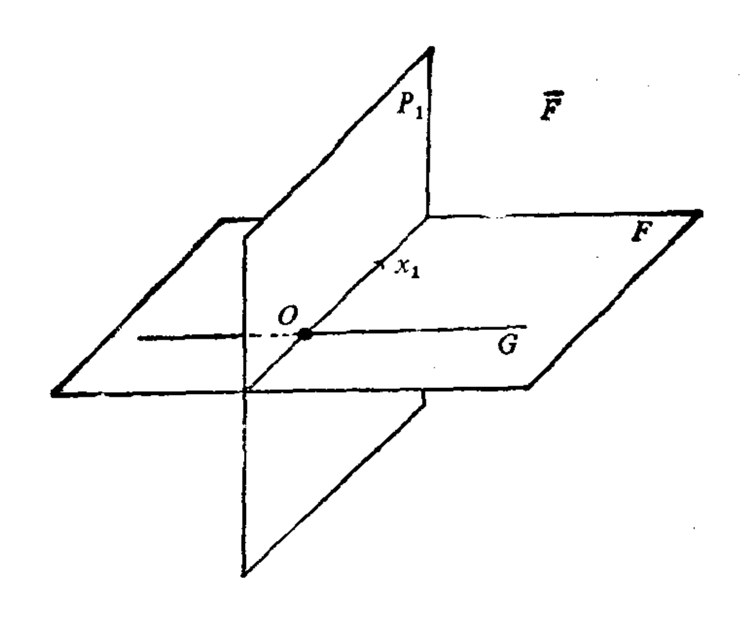


图 13.3.4.

$G^\perp$ 的平面 P_1 使 $x_1 \in P_1$，而且 $(P_1, q|_{P_1})$ 是一个 Artin 平面.

关于这个构造的唯一性参看 13.9.3.

13.3.4.2 推论. 设 q 非退化，则对任一子空间 F 有

$$\dim F + \dim(\mathrm{rad}(F)) \leqslant n = \dim E.$$

特别若 F 是完全奇异的，则 $\dim F \leqslant n/2$；又若 F 是完全奇异的且 $\dim F = n/2 = p$，则必定有 $E = \mathrm{Art}_{2p}$.

本章的其余部分将按如下计划进行：一部分用初等的方法讨论 $\mathbf{C}$ 及 $\mathbf{R}$ 上的二次型的分类及两个二次型的同时对角化.另一部分用几何代数的方法研究二次型 q 的群 $O(q)$，它是第 8 章正交群的推广，内容有：寻找简单的生成元，作用在子空间上的可迁性，最后还将提及单性.

13.4 正交基. 关于 C 及 R 的分类

13.4.1 引理. 对任一 (E, q) 至少存在一个正交基 $\{e_i\}$.

若 $q = 0$，这是平凡的.否则设 x 不是迷向的，则 $\varphi(x) \in E^*$（见 13.2）非零，因此 $x^\perp$ 是超平面，$E = Kx \overset{\perp}{\oplus} x^\perp$. 这样问题就归结为维数 $< n$ 的 $x^\perp$ 的情形，可用递推法进行下去.

13.4.2 推论. 对任一 $(E,\ q)$ 存在一个基使得 $q=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i^2$，$\lambda_i\in K^*$. 当 $K=\mathbf{C}$ 时，对任一 $(E,\ q)$ 存在一组基使

$$q=\sum_{i=1}^{r}x_i^2.$$

当 $K=\mathbf{R}$ 时，对任一 $(E,\ q)$ 存在一组基使

$$q=\sum_{i=1}^{r}x_i^2-\sum_{i=r+1}^{r+s}x_i^2.$$

若 $\{e_i\}$ 是 $(E,\ q)$ 的任一正交基，则有

$$q(x_1,\cdots,x_n)=P\left(\sum_i x_i e_i,\ \sum_j x_j e_j\right)=\sum_{i,j}x_i x_j q(e_i,\ e_j)$$
$$=\sum_i x_i^2 q(e_i,\ e_i);$$

当 $q(e_i,\ e_i)\neq 0$ 时，令 $\lambda_i=q(e_i,\ e_i)$. 若 $K=\mathbf{C}$，则把 e_i 换成 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}e_i$；若 $K=\mathbf{R}$，则当 $\lambda_i>0$ 时把 e_i 换成 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}e_i$，当 $\lambda_i<0$ 时换成 $\frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}}e_i$.

13.4.3 注. 显然可以把假设 $K=\mathbf{C}$ 换成"K 是一个域，它的任一元均有平方根"，特别，可换成"K 是代数闭域". 同样，$K=\mathbf{R}$ 可换成"K 是一个有序域，其中正元都有平方根".

13.4.4 例. 若 $K=\mathbf{C}$，$n=2p$，则任一非退化的 q 等价于一个中性二次型，即 $(E,\ q)$ 与 Art_{2p} 等度量.

13.4.5 由上所述看起来，二次型的分类到 13.4.1 似乎已基本结束. 实际上却如 Artin 所说，连个边都还没有摸着！譬如说，当 $K=\mathbf{R}$ 时，我们就必须证明 $x^2+y^2-z^2-t^2$ 与 $x^2+y^2+z^2-t^2$ 不可能等价. 至于一般情形，请参看 13.1.4.5. 现在我们要指出，从 13.4.2 可以推导出以下的：

13.4.6 定理. $\mathbf{C}$ 上两个二次型为等价的充要条件是空间的维数 n 及秩 r 都相等. 或者说：E 给定后，$\mathrm{GL}(E)$ 在 $Q(E)$ 内的轨道有 $n+1$ 个，它们与可能的秩数 $r=0,1,\cdots,n=\dim E$ 相

关联．特别，非退化二次型构成一个单独的轨道．

13.4.7 定理 (Sylvester 惯性律)． R 上两个二次型等价的充要条件是空间维数 n 以及 13.4.2 的两个整数 r 和 s 都相同．换句话说，E 给定后，$GL(E)$ 在 $Q(E)$ 内的轨道有 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 个．数偶 (r, s) 既不依赖于 q 也不依赖于 13.4.2 的基，称为 q 的符号数．此外，r 和 s 也可描述如下：r（相应地：s）是使 $q|_F$ 为正定(相应地：负定)二次型(参见 8.1.1，即 $q(x)>0$（相应地 <0）$\forall x\in F\backslash 0$）的 E 的子空间 F 的最大维数．

只需证明若 q，q' 等价，则 r，s 必定相同．这可从定理末尾的几何特征得出．现在就来证明这个几何特征．设

$$r' = \sup\{\dim F : q|_F \text{ 是正定的}\},$$
$$s' = \sup\{\dim F : q|_F \text{ 是负定的}\},$$

$\{e_i\}$ 是一组基使得

$$q = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2;$$

因为 $\mathbf{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}e_r \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}e_{r+s}$ 适合对子空间 F 的要求，故 $r' \geqslant r$，$s' \geqslant s$．设 F 使得 $q|_F$ 正定，$G = \mathbf{R}e_{r+1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}e_n$，根据假设，$F \cap G = 0$，从而 $\dim F + \dim G \leqslant n$，即 $r' + (n-r) \leqslant n$，$r' \leqslant r$．同样有 $s' \leqslant s$．

13.4.8 实用约化方法：Gauss 方法． 这就是通过计算来证明 13.4.1；其实际价值是相当大的，我们在以后的具体计算中要用到这个方法，参看 13.9.8．在微分几何中的应用参见 [B-G]，146 页．这种方法可以说是 13.4.1 的对偶，我们要利用线性型，然后再用递推，下面我们将说明最初的几步．如果一个读者从未亲身实践过这一方法，那末动手做一个具体例子是很必要的：见 13.9.6 及 13.9.8．设 $q = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$．

第一种情形：存在 i 使 $a_{ii} \neq 0$，假定是 $\lambda_1 = a_{11} \neq 0$，则

$$q = \lambda_1 x_1^2 + 2Ax_1 + B = \lambda_1\left(x_1 + \frac{A}{\lambda_1}\right)^2 + \left(B - \frac{A^2}{\lambda_1}\right),$$

其中 A（相应地：B）是 $x_2, \cdots, x_n$ 的线性型(相应地:二次型)．因此 $B-\frac{A^2}{\lambda_1}$ 是 $x_2, \cdots, x_n$ 的二次型，我们可对它再次施行刚才的变形或做下面的变形．

第二种情形：所有的 a_{ii} 都是零，但(若 $q \neq 0$!) 存在一个非零的 a_{ij}，假定这是 $\lambda = a_{12}$，则 $q = \lambda x_1 x_2 + Ax_1 + Bx_2 + C$，

$$q = \lambda x_1 x_2 + Ax_1 + Bx_2 + C = \lambda\left(x_1 + \frac{B}{\lambda}\right)\left(x_2 + \frac{A}{\lambda}\right) + C - \frac{AB}{\lambda},$$

把

$$\left(x_1 + \frac{B}{\lambda}\right)\left(x_2 + \frac{A}{\lambda}\right) = uv$$

代换成

$$uv = \frac{(u+v)^2 - (u-v)^2}{4};$$

这里 A，B，C 分别是 $x_3, \cdots, x_n$ 的线性型及二次型．

最后可得 $q = \sum_i \lambda_i \varphi_i^2$，$\varphi_i \in E^*$．

这个具体方法也提供了秩数，见 13.9.5．

13.5 两个二次型同时正交化

13.5.1 设 q，q' 是 E 上两个二次型，是否存在一个基 $\{e_i\}$，它同时关于 q 及 q' 是正交的?一般的回答是否定的，例如：在 $E = \mathbf{R}^2$ 上，$q = x^2 - y^2$，$q' = 2xy$．设 $\{e_i\}$ 是 E 上关于 q 及 q' 的正交基，引入与它们相关联的 φ，$\varphi': E \to E^*$ (见 13.2.0)，又假定 q 非退化，从而可以引入自同态 $f = \varphi^{-1} \circ \varphi': E$ ↺．则对任一 i，e_i 必是 f 的特征向量：事实上，由假设可知 $(\varphi(e_i))^{-1}(0)$ 就是 q 正交超平面 $e_i^{\perp(q)}$，且 $(\varphi'(e_i))^{-1}(0) = e_i^{\perp(q')} \supset e_i^{\perp(q)}$，因此线性型 $\varphi(e_i)$，$\varphi'(e_i)$ 满足(见 2.4.8.2) $\varphi'(e_i) = k\varphi(e_i)$．例如对 $q = x^2 -$

y^2 及 $q'=2xy$，$\varphi^{-1}\circ\varphi'$（关于典范基）的矩阵是

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\ (\text{见 } 13.2.0),$$

这是 $\mathbf{R}^2$ 的一个旋转，因此没有特征向量.

反过来有下述命题.

13.5.2 命题. 若 q 非退化且 $\varphi^{-1}\circ\varphi'$ 有 n 个不同特征值，则存在关于 q 和 q' 同为正交的基.

由假设可知存在 E 的一个基 $\{e_i\}$，它由 $\varphi^{-1}\circ\varphi'$ 的特征向量构成. 这时若特征值是 k_i:

$$\varphi'(e_i)(e_j)=k_i\varphi(e_i)(e_j)=P'(e_i,e_j)=k_iP(e_i,e_j),$$

但由 P 及 P' 的对称性:

$$P'(e_i,e_j)=k_jP(e_i,e_j)=k_iP(e_i,e_j),$$

由于 $k_i\neq k_j$，故 $P(e_i,e_j)=0$，$\forall i\neq j$.

13.5.3 例. 若 K 是代数闭域，则两个一般二次型可同时对角化；若 $K=\mathbf{C}$，则概率是 1.

13.5.4.1 注. 对这个问题的完整的研究可参见 [KG2].

13.5.4.2 几何解释. 在 14.5.4.1 中我们将看到 q 与 q' 的公共正交基的存在性可理解为 $P(E)$ 的与 q,q' 相关联的二次超曲面的公共自配极单形的存在性. 在圆锥曲线的情形，我们将对圆锥曲线偶作分类，特别将找出不可能同时正交化的情形，参见 16.4.10.

13.5.5 定理. 设 E 是欧氏空间，q' 是 E 上任意二次型，则总是存在 E 的标准正交基，它关于 q' 也是正交的.

13.5.6 注. 这个结论有相当重要的实际意义. 它相当于找出一条圆锥曲线或一个欧氏二次超曲面的轴. 在力学上或物理上这意味着惯性椭球具有轴（惯性轴），并且所有微小的运动有对称性（谐振子），这也使得研究稳定性问题成为可能. [AR] 是一本这方面的出色的参考书.

这个结果可推广到无限维的 Hilbert 空间，这是在分析里的主要推广：微分算子的特征函数的正交基；关于这方面可参看 [WR]，254 页.

定理 13.5.5 有一段历史，它是从实际应用中提出来的，参看 [BI2]，第 189—190 页。

从已知数据出发来具体找出这些基向量的方法，就是确定对称矩阵的特征向量的方法，参看 [KE]，第 392 页。

13.5.7 证明. 经典的证明是利用把 E 扩张成 Hermite 空间，可参看 [DR]，第 58 页.由于我们没有提到 Hermite 空间，故给出另外两种证明.

13.5.7.1 第一种证明. 仿照 13.5.1，对 q' 以及 E 的欧氏结构 q 置 $f=\varphi^{-1}\circ\varphi'$. 根据 7.4.3，存在 E 的子空间 V 使得 $f(V)\subset V$ 及 $\dim V=1$ 或 2. 若 $\dim V=1$，则我们已找到 f 的一个特征向量 x；若 $\dim V=2$，也存在 f 的特征向量. 为理解这一点，首先注意到关于任一标准正交基，f 的矩阵是对称的，这是因为根据 13.2.0，此矩阵是 $A^{-1}A'$，其中 A' 和 A 分别是 q' 及 q 的矩阵. 但关于标准正交基，q 的矩阵是单位阵，因此 f 的矩阵就是 A'，当然是对称的.

因而 $f|_V$ 关于一个标准正交基的矩阵是形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 的，其特征值是实数，即方程

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0$$

的根.

总之至少存在 f 的一个特征向量 x.

取 $e_1=x/\|x\|$ 且观察 $H=e_1^{\perp}$，有

$$f(H)\subset H \text{ 及 } \dim H<\dim E;$$

经递推后可见存在 E 的标准正交基 $\{e_i\}$，它由 f 的特征向量构成. 这蕴含着

$$\begin{aligned} P'(e_i, e_j) &= \varphi'(e_i)(e_j)=k\varphi(e_i)(e_j)=kP(e_i, e_j) \\ &= k(e_i|e_j)=0, \forall i\neq j. \end{aligned}$$

即 $\{e_i\}$ 关于 q' 是正交的.

13.5.7.2 微分学的证明. 引入 E 的单位球面 S，定义一个函数 $f: E\backslash 0\to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \|x\|^{-2}q'(x).$$

设 x 使得 $f(x) = \sup\{f(x): x \in S\}$, 因 f 在 $E\backslash 0$ 上是 C^∞ 的,故 f 在 S 上连续,极值必存在. 由于 $f(\lambda x) = f(x) \forall \lambda \neq 0 \forall x \in E\backslash 0$, 故上述向量 x 使 f 取到整个 $E\backslash 0$ 上的极大值, 于是 $f'(x) = 0$. 对 f 求导后可得

$$df(x)(y) = 2\|x\|^{-2}[P'(x, y)\|x\|^2 - q'(x)(x|y)].$$

因此 $\forall$ 使 $(x|y) = 0$ 的 y 有 $P'(x, y) = 0$. 然后即可与第一种证明一样进行递推.

13.5.8 在 8.2.6 及练习 8.12.1 已给出13.5.5 的一个很有用的应用.

在本章的后半部分, 总假定 (E, q) 中的 q 非退化.

13.6 二次型的群. 概论

我们将把欧氏空间中的许多概念推广到一般情形.

13.6.1 定义. 我们把由 (E, q) 的等度量变换构成的群 $\{f \in GL(E): f^*q = q\}$ 称为 q 的群或 q 的正交群,记为 $O(E, q)$, $O(E)$ 或 $O(q)$. 也记

$$O(n, K) = O\left(K^n, \sum_{i=1}^n x_i^2\right),$$

$O(r, s) = O(\mathbf{R}^{r+s}, \ x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2)$. 群 $O(1,3)$ 称为 Lorentz 群.

13.6.2 评注. 若 (E, q), (E', q') 等度量, 则它们的群 $O(q)$, $O(q')$ 同构. 根据 13.2.4, $f \in O(q)$ 等价于 ${}^t f = f^{-1}$, 特别有 $\det f = \pm 1$. 由此可得:

13.6.3 记号. 令 $O^\pm(E) = \{f \in O(E): \det f = \pm 1\}$; $O^+(E)$的元素称为旋转.

$O^+(E)$ 是 $O(E)$ 内正规子群, $O(E)/O^+(E) \cong \mathbf{Z}_2$, 还有乘法规则, 参看 8.2.3.2.

13.6.4 矩阵记法. 关于 E 的一组基 $\{e_i\}$, 若 $q \leftrightarrow A$ 且 f 的矩阵

是 S，由 13.1.3.10 可推导出

13.6.5 $\boxed{f \in O(q) \Longleftrightarrow {}^tSAS = A.}$

例如：对 $O(n, K)$：${}^tSS = I$ 或 $S^{-1} = {}^tS$，也请参看13.9.12. 对 Art_2：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(\mathrm{Art}_2) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow ac = bd = 0,\ ad + bc = \pm 1;$$

详见 13.8.2.

我们恒有 $\pm \mathrm{Id}_E \in O(E)$，而且$-\mathrm{Id}_E \in O^+(E)$ 的充要条件是 $\dim E$ 是偶数.

13.6.6 $O(q)$ 的对合. 在非欧氏的情形，推广 8.2.9，8.2.10 及 8.2.11 时要小心. 由于向量空间 E 的对合 f 都是以下形状的：$f|_S = \mathrm{Id}_S$，$f|_T = -\mathrm{Id}_T$，其中 $E = S \oplus T$ 是直和分解，所以我们首先可得：

13.6.6.1 命题. 要使 $\mathrm{GL}(E)$ 的一个对合在 $O(q)$ 内，必须且只须 $E = S \overset{\perp}{\oplus} T$，即 S 非奇异，$T = S^{\perp}$. 此时称 f 是正交对称或对称. 若 S 是超平面，则称超平面对称，若 $\dim T = 2$，称为(绕 S 的)迴转. 任一超平面对称在 $O^-(E)$ 内，任一迴转在 $O^+(E)$ 内.

对非奇异性的要求使 8.2.12，8.2.13，8.2.11 及 8.2.7 的推广变得复杂多了. 例如 8.2.11 变为：

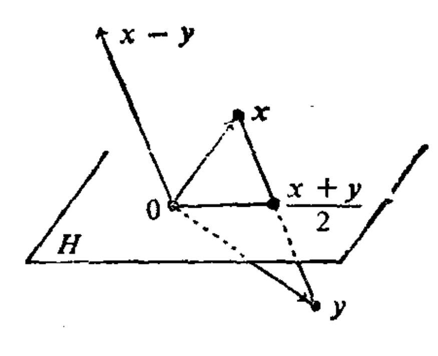


图 13.6.6.

13.6.6.2 引理. 设 $x, y \in E$ 使得 $q(x) = q(y)$，$x - y$ 非迷向；则存在超平面对称 h 使得 $h(x) = y$.

根据 13.3.2，$(x - y)$ 的正交补 $H = (x - y)^{\perp}$ 是非奇异超平面. 设 h 是与 $S = H$ 相关联的向量对称，则有 $h(y) = x$. 这是因为由

$$P(x - y,\ x + y) = q(x) - q(y) = 0$$

可得 $x+y\in H$，从而

$$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2},\ y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2},$$

8.2.12 的证明不能直接用上去．为了弥补这一点，我们将建立一些技术性的结果．

13.6.7 旋转的例以及关于 $O(\mathrm{Art}_{2p})$ 的带有技巧性的引理

13.6.7.1 引理． 设 $E=\mathrm{Art}_{2s}$，F 是 s 维完全奇异子空间，$f\in O(E)$ 使 $f(F)=F$，则 $f\in O^+(E)$．

根据 13.3.4，存在由直和分解(非正交的!) $E=F\oplus F'$ 所产生的基使得 $q\leftrightarrow A$，$A=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}$． f 关于这个基的矩阵是形如 $\begin{pmatrix}U & V\\ 0 & W\end{pmatrix}$ 的，因 $f(F)=F$．条件 13.6.5 可写成

$$\begin{pmatrix}{}^tU & 0\\ {}^tV & {}^tW\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U & V\\ 0 & W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & {}^tUW\\ {}^tWU & {}^tVW+{}^tWV\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},$$

于是 ${}^tUW=I$，然后得 $\det f=(\det U)\ (\det W)=1$．

13.6.7.2 引理． 设 F 是一个子空间使得 $E=\bar{F}$ 是 F 的非奇异完备化空间，则若 $f\in O(E)$ 以及 $f|_F=\mathrm{Id}_F$，可得 $f\in O^+(E)$．

根据 13.3.4.1，有 $E=G\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{Art}_{2s}$，其中 $\mathrm{Art}_{2s}=M\oplus M'$，$F=G+M$，$M=\mathrm{rad}(F)$．由假设，$f|_G=\mathrm{Id}_G$，于是 $f(\mathrm{Art}_{2s})=\mathrm{Art}_{2s}$．由 13.6.7.1 可得 $f|_{\mathrm{Art}_{2s}}\in O^+(\mathrm{Art}_{2s})$，因此

$$\det f=\det(f|_G)\det(f|\mathrm{Art}_{2s})=1\cdot 1=1.$$

13.6.7.3 引理． 设 $f\in O(E)$ 使对任一非迷向的 x 都有 $f(x)-x$ 非零且非迷向，则 $f\in O^+(E)$ 且 E 是 Artin 空间．

这个引理的假设看来有点奇怪，但可这样解释：如果我们想在一般情形下推广 8.2.12 的证明，13.6.6.2 表明除非 f 恰好满足本引理假设，否则就能利用递推法．我们将在 13.7.12 中用到这一点．

现在证明 13.6.7.3．首先假设 $n=2$．因 E 含有非零迷向向量，13.2.3.4 表明 $E=\mathrm{Art}_2$．在 13.8.2 中将看到对于一个适当的基，f

的矩阵或是 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$，或是 $\begin{pmatrix} 0 & k \\ k^{-1} & 0 \end{pmatrix}$，$k \in K^*$。在第一种情形里，$\det f = 1$，在第二种情形里 $f(x + ky) = x + ky$，与引理假设矛盾。

以后假设 $n \geqslant 3$；首先证明两个子空间 $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ 与 $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)$ 是完全奇异的。对于核集，这就是假设条件；对于象集，当 x 非迷向时，已知 $f(x) - x$ 是迷向的，剩下只需对迷向的 x 加以证明。设 x 迷向，由 13.3.4.2 可知 $x^\perp$ 不可能完全奇异，因当 $n \geqslant 3$ 时 $n - 1 > n/2$。故存在 $y \in x^\perp$ 使 $q(y) \neq 0$。则

$$q(x \pm y) = q(y) \neq 0;$$

把引理假设应用于 3 个向量 y，$x + y$，$x - y$：

$$q(f(x) - x + f(y) - y) + q(f(x) - x - (f(y) - y))$$
$$= 2q(f(x) - x) + 2q(f(y) - y) = 2q(f(x) - x) = 0.$$

令 $U = \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)$，由上所述可知 U 是完全奇异的。直接计算后(同 9.3.1)可知

$$\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \perp \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)$$

以及

$$\dim(\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)) + \dim(\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)) = \dim E,$$

于是 $U^\perp = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$。由 13.3.2 知 $U = U^\perp$，$\dim U = \dim E/2$，因此 13.3.4.2 表明 $E = \operatorname{Art}_{2r}$。但 $f(U) = U$，从而 13.6.7.1 蕴含 $f \in O^+(E)$。

13.6.7.4 这里没有说明满足引理假设的 f 是什么样子的，我们没有用到它的存在性，关于存在性可参看 13.9.15 或 [S-T]，第 238 页以后。

13.6.8 研究计划. 在第 8 章我们已看到正交群作用在任一 Grassmann 流形

$$G_{E,k}(k = 0, 1, \cdots, \dim E) \text{ (参见 8.2.7)}$$

上都是可迁的；当 $\dim E = 2$ 时，$O^+(E)$ 是 Abel 群并且与 S^1 同胚(见 8.3.3 及 8.3.6)；$O(E)$ 由超平面对称生成，$O^+(E)$ 由逦转生成(见 8.2.12, 8.4.6)；当 $\dim E = 3$ 或 $\geqslant 5$ 时，$O^+(E)$ 关于

它中心的商群是单群；最后在 8.4.1 里又研究了 $O(E)$ 内的 f 的结构.

对于任意的 (E, q)，我们将只研究其中的某几个问题. 更完整的研究可参看 [S-T]，这书是初等而非常有趣的，关于一般的论述可参看 [BI2]，关于 Clifford 代数可见 [AN]，关于正交群的单性参见 [DE1].

首先，$O(E)$ 作用在 $G_{E,k}$ 上一般不是可迁的，因两个同维子空间不必是等度量的. 例如 $O(1, 1)$（见 13.6.1）不能把使 $q|_D$ 为负定的直线 D 变换成使 $q|_{D'}$ 为正定的直线 D'. 令人惊奇的是 F 和 F' 为等度量的条件已足以保证存在 $f\in O(E)|f(F)=F'$，这就是 Witt 定理：13.7.1. 一个有趣的情形就是极大完全奇异子空间，其中还涉及指向.

$\dim E=2$ 的情形相当类似于欧氏情形，$O^+(E)$ 总是 Abel 的（见 13.8.1)，但对 $E=\mathrm{Art}_2$ 及 $K=\mathbf{R}$，$O^+(E)$ 同胚于不相交和 $\mathbf{R}\cup\mathbf{R}$：见 13.8.3.

群 $O(E)$ 总是由关于非奇异超平面的对称所生成，但其证明相当长：见 13.7.12，就是 Cartan-Dieudonné 定理.

$O(E)$ 的单性问题的讨论是很冗长的，参看 [DE1].

13.6.9 注. 若要作更精细的研究，就须引入 Clifford 代数，正如在第 8 章中引入四元数一样. 关于 Clifford 代数，我们可把它与任何一个二次型相联系，而不局限于欧氏情形，参看 [PO]，[AN]，[BI2].

13.7 Witt 定理及 Cartan-Dieudonné 定理

13.7.1 定理 (Witt, 1936). 设 F 和 F' 是 E 的两个子空间，$f: F\to F'$ 是从 $(F, q|_F)$ 到 $(F', q|_{F'})$ 上的等度量映射. 则存在 $\hat{f}\in O(q)$ 使得 $\hat{f}|_F=f$. 换句话说，$G_{E,k}$ 在 $O(q)$ 作用下的轨道是由关于 q 的限制为等度量的子空间类所构成的.

首先用如下方法归结到 F，F' 非奇异的情形. 由 13.3.4.1,

设 $\bar{F}$, $\bar{F}'$ 是 F, F' 的非奇异完备化空间,即

$$\bar{F}=G\overset{\perp}{\oplus}P_1\overset{\perp}{\oplus}\cdots\overset{\perp}{\oplus}P_s,\ \bar{F}'=G'\overset{\perp}{\oplus}P'_1\overset{\perp}{\oplus}\cdots\overset{\perp}{\oplus}P'_s.$$

其中 P_i 及 P'_i 的基是 (e_i, h_i), (e'_i, h'_i), $e'_i=f(e_i)$. 如果令 $\bar{f}(h_i)=h'_i$ 把 f 扩张为 $\bar{f}: \bar{F}\to\bar{F}'$, 即可得到一个等度量映射.因此以下设 F, F' 非奇异.

首先假定 $\dim F=\dim F'=1$. 取 $x\in F$, $y=f(x)\in F'$, $x\neq 0$. 根据假设,有 $q(x)=q(y)$. $x+y$ 或 $x-y$ 中必有一个非迷向,否则 $q(x+y)+q(x-y)=2q(x)+2q(y)=4q(y)=0$! 根据 13.6.2, 存在关于 $(x+y)^\perp$ 或 $(x-y)^\perp$ 的超平面对称,设为 g. 则 $g(x)=\pm y$, 因此 $\pm g\in O(q)$ 是F 到 F' 上的一个等度量变换.

若 $\dim F$ 任意,则对 $\dim F$ 进行递推.既然F 非奇异,就可写成 $F=F_1\overset{\perp}{\oplus}F_2$, 使 $\dim F_1$, $\dim F_2<\dim F$, 譬如取 $F_1=K\cdot x$, 其中 x 非迷向即可. 设 $F'_1=f(F_1)$. 根据递推的假设,必存在 $g\in O(q)$ 使 $g|_{F_1}=f$. 暂时局限在 $F_1'^\perp$ 内考察. 这个子空间包含 $f(F_2)$ 及 $g(F_2)$ 并且 $f\circ g^{-1}: g(F_2)\to f(F_2)$ 是一个等度量映射, 因而存在 $h\in O(F_1'^\perp, q|_{F_1'^\perp})$ 使 $h|_{g(F_2)}=f\circ g^{-1}$. 现在再回到整个 E 上, 令 $\hat{f}=(\mathrm{Id}_{F'_1}\overset{\perp}{\oplus}h)\circ g$ 即可.

13.7.2 注. Artin 把 Witt 定理称为一个叫人感到丢脸的定理,他的意思是指, 一个无论从其陈述还是从其数学对象来看都是如此简单的定理,居然要等到 1936 年才被提出并证明, 何况这个定理在各个领域都是极其有用的:

——几何, 见后面, 例如 19.4.6.2;

——数论,在 $\mathbb{Q}$ 上二次型分类时当然会遇到这个定理,见 [SE2], 第 IV 章.

13.7.3 推论. 若E的两个子空间 F, F' 是等度量的,则 $F^\perp$ 与 $F'^\perp$ 也是等度量的.

这个推论可能是出乎意外的. 为了熟悉二次型, 读者也许会

有兴趣尝试去直接证明它.

13.7.4 例. 设 $K=\mathbf{C}$, 则 $G_{E,k}$ 在 $O(q)$ 作用下的轨道是由使 q 在其上的限制具有已给秩的 k 维子空间所构成, 见 13.4.6. 特别, $O(q)$ 可迁地作用在同维非奇异子空间上.

若 $K=\mathbf{R}$, 有类似结论,但 q 在这些子空间上的限制有相同的符号数, 见 13.4.7.

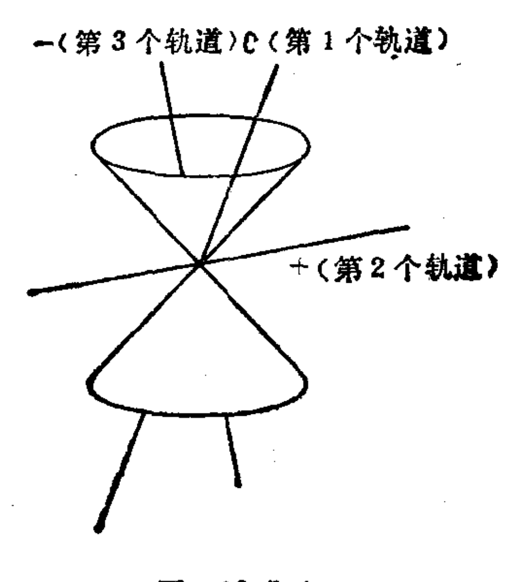


图 13.7.4.

更精确地说,若 $E=\mathbf{R}^3$, $q=x^2+y^2-z^2$, 则在 $G_{E,1}=P(E)$ 内有 3 个轨道, 分别对应于符号数 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. 第 1 个轨道由迷向锥面上的直线构成, 第 2 个轨道由严格地位于锥面外部的直线构成, 第 3 个轨道由严格位于内部的直线构成.

关于 $O(1,1)$ 参看 13.8, 关于 $O(n-1,1)$ 见 18.10, 19.2, 20.6.

13.7.5 推论. 若一个完全奇异子空间不被包含在任一维数比它更大的完全奇异子空间内,就称为极大完全奇异子空间.于是所有的极大完全奇异子空间有相同维数,这个维数被称为 q 的指数;而且,这些子空间构成 $O(q)$ 的一个轨道.

设 F 和 F' 是极大完全奇异的;若 $\dim F>\dim F'$, 则 $F=F_1\overset{\perp}{\oplus}F_2$, 其中 $\dim F_1=\dim F'$. 又设 $f\in \operatorname{Isom}(F_1,F')$ (任意线性映射都是等度量映射!).设 $\hat{f}\in O(q)$ 使 $\hat{f}|_{F_1}=f$; 则 $\hat{f}(F)$

是完全奇异子空间且 $\hat{f}(F)\neq F'$，矛盾.

13.7.6 例. 若 $K=\mathbf{C}$，q 非退化，则 q 的指数 $=[n/2]$.这是因为 q 等价于 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ （见 13.4.6）并且 13.2.3.3 内构作的子空间 F 是极大的.

若 $K=\mathbf{R}$，q 非退化且符号数是 $\{r, s\}$，则

$$q \text{ 的指数 } = \inf\{r, s\}.$$

应用 13.4.7 并且注意到 13.2.3.3 中所构造的子空间 F 是极大的，即可得出上式.

若 $(E, q)=\mathrm{Art}_{2s}$，则 q 的指数 $=s$，13.2.3.3 所构造的 F 是极大的.

13.7.7 评注. 从 Witt 定理可导出一个意想不到的结果：如果 F 是完全奇异的，则任一 $f\in GL(F)$ 都是 $(F, q|_F)$ 的等度量变换，从而 $\exists \hat{f}\in O(q) | \hat{f}|_F=f$. 举例来说，$O(q)$ 不仅作用在迷向锥面的直线上是可迁的，并且作用在锥面的点上也是可迁的（也可参见 13.8.4）.

很自然的会提出这样的问题：如果把 $O(q)$ 换成 $O^+(q)$，Witt 定理是否仍正确？回答是：基本上正确.一个有趣的例外是 $E=\mathrm{Art}_{2s}$，子空间是完全奇异子空间的情形. 反过来，这个例外又给出了一些新的几何现象，参见 14.4.

13.7.8 定理（改进的 Witt 定理）. 当 $O(q)$ 换成 $O^+(q)$，则在满足下述条件时，13.7.1 的陈述仍然有效：

$$\dim F+\dim(\mathrm{rad}\,(F))<\dim E,$$

否则不再有效. 更精确地说，对于使

$$\dim F+\dim(\mathrm{rad}\,(F))=\dim E$$

以及 $f\in O^-(q)$ 的任一 F 与 f，不存在使 $g|_F=f|_F$ 的 $g\in O^+(F)$.

首先设 F 使得 $\dim F+\dim(\mathrm{rad}\,(F))<\dim E$. 再作 F 的非奇异完备化空间 $\bar{F}$（见 13.3.4.1）. 此外，若

$$f\in \mathrm{Isom}\,(F; F'),$$

由 13.7.1，存在 $\hat{f}\in O(q)$ 使 $\hat{f}|_F=f$. 若 $\hat{f}\in O^+(q)$，则不需再证.

否则，取非迷向的 $x\in F^{\perp}$，设 g 是关于超平面 $x^{\perp}$ 的对称．则 $g|_F=\mathrm{Id}_F$，$g\in O^-(q)$，从而 $f\circ g\in O^+(q)$ 满足要求．

现在设 $\dim F+\dim(\mathrm{rad}(F))=\dim E$，$f\in O^-(q)$．如果 $g\in O^+(q)$，$g|_F=f|_F$，则 $g^{-1}\circ f$ 与 13.6.7.2 矛盾．

上面的讨论并没有提供 $O^+(q)$ 在 $G_{E,k}$ 内的轨道的情况．这由以下定理给出．

13.7.9 定理． $G_{E,k}$ 在 $O^+(q)$ 作用下的轨道与在 $O(q)$ 下的轨道相同，但有唯一的例外：$E=\mathrm{Art}_{2s}, k=s$．这时 $O^+(q)$ 作用在 $G_{E,s}$ 的由一切完全奇异子空间构成的子集上恰有二个轨道．

首先考虑不是例外的情形，由 13.3.4.2，存在非迷向的 $x\in F^{\perp}$，则若 $f\in\mathrm{Isom}(F;F')$，据 13.7.1，可构造 $\hat{f}\in O(q)$ 使 $\hat{f}|_F=f$．若 $\hat{f}\in O^+(q)$，则不需再证；否则，$\hat{f}\in O^-(q)$．如果把关于超平面 $x^{\perp}$ 的对称记为 h，则 $\hat{f}\circ h\in O^+(q)$ 且 $(\hat{f}\circ h)(F)=\hat{f}(h(F))=\hat{f}(F)=F'$．现在设 $E=\mathrm{Art}_{2s}$，F 是完全奇异的，则根据 13.6.7.1，$O^+(q)$ 确有二个轨道．

13.7.10 例． 第一种要考虑的情形是 $E=\mathrm{Art}_2$．据 13.2.3.1，极大完全奇异子空间是两条迷向直线，记为 I 及 J．显然 $q^{-1}(0)=I\cup J$ 关于 $O(q)$ 稳定．但 13.7.9 允许把 $O^+(q)$（相应地：$O^-(q)$）刻划为

$f\in O^+(q)$（相应地：$O^-(q)$）若 $f(I)=I$（相应地：$f(I)=J$）．

即 f 使得各个迷向直线稳定（相应地：置换这些迷向直线）．我们可与 8.8.6.4 相对照并参看 13.8．

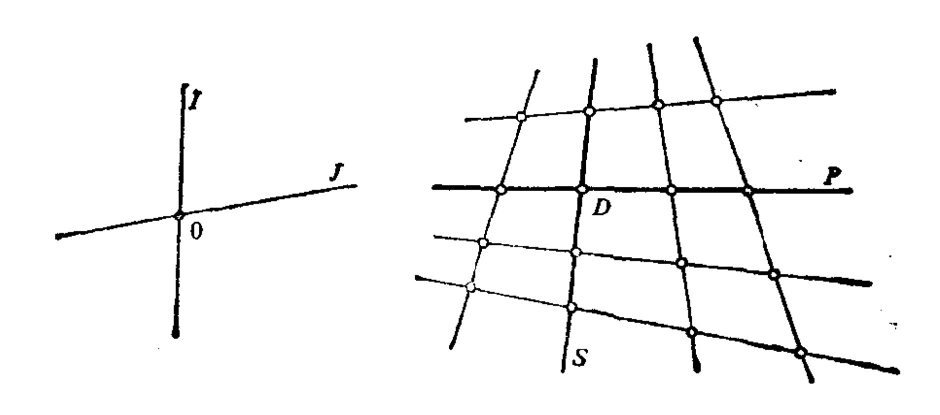


图 13.7.10.

接下去的情形是 $E = \mathrm{Art}_4$，它导致下述有趣的结果：当在射影空间 $P(E)$ 内作解释时，这就是与二次超曲面 $p(q^{-1}(0))\subset P(E)$ 的两族直线(有时被称为母线)有关的结果，见 14.4.1. 上图是作在 $P(E)$ 内的.

13.7.11 推论. 设 Γ 是 $E = \mathrm{Art}_4$ 的完全奇异平面的集合，Π, Σ 是 Γ 在 $O^+(q)$ 作用下的两个轨道. 则

(i) 对 E 的任意迷向直线 D (即完全奇异直线)，存在唯一的 $P \in \Pi$ 及唯一的 $S\in\Sigma$，使得 $D\subset P$，$D\subset S$;

(ii) $\forall P\in\Pi\forall S\in\Sigma$: $\dim P\cap S = 1$ (即 $P\cap S$ 是一条迷向直线);

(iii) $\forall P, P'\in\Pi\forall S, S'\in\Sigma$: $P\cap P' = 0$ 或 $P = P'$, $S\cap S' = 0$ 或 $S = S'$.

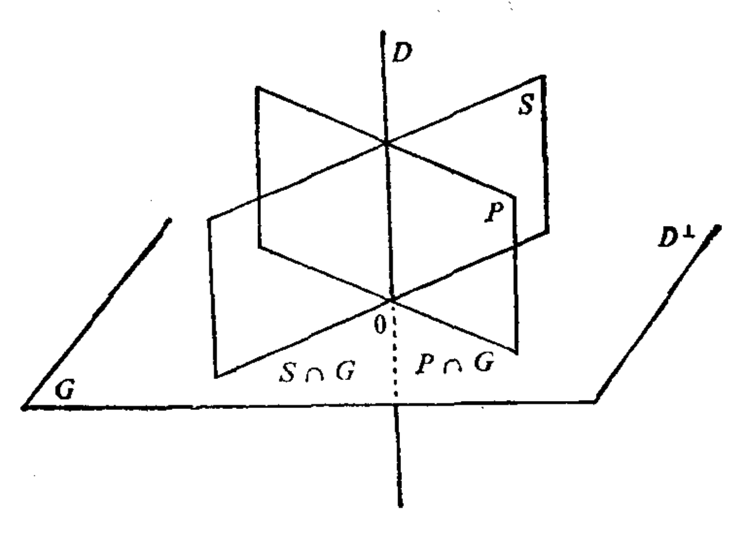


图 13.7.11.

13.7.11.1 借助 13.7.9 所作的证明. 若把 13.7.8 应用 $F = D$ 以及 $P_0\in\Pi$ 或 $S_0\in\Sigma$ 内的任一迷向直线 F'，可知任一迷向直线 D 可被包含在一个 $P\in\Pi$ 或一个 $S\in\Sigma$. 剩下要证 P (以及 S) 的唯一性：设有分解 $D^\perp = D \overset{\perp}{\oplus} G$；$G$ 是一个平面且含有迷向向量，例如 $G\cap P$. 从而 (13.2.3.4) G 是 Artin 平面，它恰含两条迷向直线(见 13.7.10)，这正是 $P\cap G$ 及 $S\cap G$.

设 $P\in\Pi$，$S\in\Sigma$ 是任意的. 假定 $P\cap S = 0$，$x\in P\setminus O$，由于

$\dim x^{\perp}=3$，存在 $y\neq 0, y\in S\cap(x^{\perp})$. 平面 $T=K\cdot x+K\cdot y$ 完全奇异. 由于T与P相交，由 (i) 表明 $T\in\Sigma$; 同理 $T\in\Pi$，这是荒谬的. 而 (iii) 可从 (i) 得出.

13.7.11.2 初等的证明. 把E的坐标记为 x, y, z, t. 由定义得 $q=2xy+2zt$. 我们可找出如下的完全奇异平面：一族是

$$\lambda x=-\mu z,\ \mu y=\lambda t,$$

另一族是:

$$\lambda x=-\mu t,\ \mu y=\lambda z,$$

其中 $(\lambda, \mu)\neq(0, 0)$，很易验证性质 (i)，(ii)，(iii).

13.7.12 定理 (Cartan-Dieudonné). 任一 $f\in O(q)$ 是至多 $n=\dim E$ 个超平面对称的乘积.

仿照 8.2.12 的证明，对 n 作递推. 如果存在使 $f(x)=x$ 的非迷向 x 或存在 x 使 $f(x)-x$ 非迷向，则借助关于超平面 $x^{\perp}$ 的对称(见 13.6.6.1) 或借助 13.6.6.2 即可从 $n-1$ 过渡到 n.

只剩下一种情形：对任一非迷向的 x，$f(x)-x$ 总是迷向的. 但由 13.6.7.3 可知 $f\in O^{+}(q), E=\operatorname{Art}_{2r}$，特别可知 $n=\dim E$ 是偶数. 设 $t\in O^{-}(q)$ 是任意的超平面对称，则因 $t\circ f\in O^{-}(q)$，我们可对它作递推，得 $t\circ f=t_1\cdots t_k$，$k\leqslant n$，于是 $f=tt_1\cdots t_k$. 现在只要证 $k\leqslant n-1$. 但 $\det f=(-1)^{k+1}$，$f\in O^{+}(q)$ 并且 n 是偶数，因此 $k=n$ 是不可能的.

13.7.13 推论. 若 $\dim E=2$，则 $O^{-}(q)$ 由关于非迷向直线的对称所构成.

13.7.14 注

13.7.14.1 可以研究 8.4.6 的推广：参看 13.9.14 或 [S-T]，332 页.

13.7.14.2 如想研究 $O^{+}(q)$ (关于其中心的商群)的单性，可参看 [DE1]. 对 $O^{+}(q)$ 的换位子群的研究可见 [DE1] 或 [S-T]. 对 $O^{+}(q)$ 的中心以及欧氏空间相似性的推广研究也可参看 [DE1] 或 [S-T].

13.7.14.3 8.10 的推广当然是面向 $O(n, \mathbf{C})$ 及 $O(r, s)$ 的，

参见 13.6.1. 但这里不会得到比 8.10 更多的东西，这是因为 $O(n,\mathbf{C})$ 同胚于

$$O(n)\times\mathbf{R}^{n(n-1)/2},$$

而 $O(r, s)$ 同胚于

$$O(r)\times O(s)\times\mathbf{R}^{rs};$$

这些同胚可用初等方法得到，第一种情形可参见譬如说 [CY], 16 页. 这实际上是下面的一般定理的特例：任一李群是紧李群与向量空间的拓扑积，参看 [HN], 234 页及 240 页的注. 初等情形 $O(1, 1)$ 将在 13.8 内研究.

13.7.14.4 也可探索与 8.4.5 及 8.4.6 类似的结果，即 f 可被分解成对称(或迴转)的乘积的最小个数. 为此可见 [S-T], 255 页及 260 页或 [AN], 186 页. 在 13.6.9 里已经指出，对 $O(q)$ 的更精确的研究必须用到 Clifford 代数，这种代数本身地也是当前的基本数学概念(代数拓扑，K 理论，微分算子). 一般的参考文献是 [PO], [AN], [Bl2]; 新近的应用可参见 [A-B-S] 及 [HU], 第 144 页以后.

13.8 二维的情形：Artin 平面，$O(1,1)$

这一节中 $\dim E=2$，仍假定 q 为非退化.

13.8.1 命题. (i) $O^+(E)$ 是 Abel 的；(ii) $O^-(E)$ 由关于非迷向直线的对称所构成；(iii) 对任一 $f\in O^+(E)$, $g\in O^-(E)$ 有 $gfg^{-1}=f^{-1}$.

(ii) 就是 13.7.13. 设 $f\in O^+(E)$, $g\in O^-(E)$, 因此，$g^{-1}f\in O^-(E)$. 设 $f=gg'$, 其中 g, $g'\in O^-(E)$. 从而由 (ii) 知

$$g^2=g'^2=\mathrm{Id}_E,$$

因此 $gfg^{-1}=ggg'g^{-1}=g'g^{-1}=g'^{-1}g^{-1}=(gg')^{-1}=f^{-1}$.

最后设 f, $f'\in O^+(E)$. 取 $O^-(E)$ 中任意一个 g, 根据 (iii) 可得

$$ff'=(gf^{-1}g^{-1})(gf'^{-1}g^{-1})=g(f^{-1}f'^{-1})g^{-1}=g(f'f)^{-1}g^{-1}=f'f.$$

13.8.2 命题. 设 $E=\mathrm{Art}_2$ 且 E 有一组基使 q 的矩阵是 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ (见 13.1.3.8), 则 f 关于这个基的矩阵 A 满足:

$$f\in O^-(q)\Longleftrightarrow A=\begin{pmatrix}0&k^{-1}\\k&0\end{pmatrix}, f\in O^+(q)\Longleftrightarrow A=\begin{pmatrix}k&0\\0&k^{-1}\end{pmatrix}(k\in K^*).$$

特别, $O^+(q)$ 同构于 K^*.

13.8.2.1 我们注意到这个同构与基有关. 若想使它不依赖于基的选取,只须取定一条迷向直线. 当 $K=\mathbf{R}$ 时,这相当于给 E 定向. 与定向的关系如下: 设 $x\in I$, $y\in J$, 且在 $\mathbf{R}_+x$ 与 $\mathbf{R}_+y$ 间的角状区域由 $q>0$ 的半直线构成, 则称 $\{x, y\}$ 是一个定向基(见 8.7.5.4).

为证 13.8.2, 利用 13.7.10. 若 $f\in O^+(q)$, 则必须 $f(I)=I$, $f(J)=J$, 从而 $A=\begin{pmatrix}k&0\\0&h\end{pmatrix}$, 由 $\det f=1$ 导出 $h=k^{-1}$. 若 $f\in O^-(q)$, $A=\begin{pmatrix}0&h\\k&0\end{pmatrix}$, $h=k^{-1}$. 反过来很易看出这两个矩阵满足 13.6.5.

现在我们来研究当 $K=\mathbf{R}$ 时, 对 Art_2 来说 8.6 与 8.7 会变成怎样. 这就涉及到群 $O(1, 1)$, 当然可能相差一个同构 (见 13.6.1). 有关 $K\neq\mathbf{R}$ 时二维的 $O(q)$ 的研究可见 [S-T], 第 271—310 页或 [Bl2], 第 160—175 页.

在本章最末这几节,假定 $(E, q)=\mathrm{Art}_2$, $K=\mathbf{R}$.

13.8.3 $O(E)$ 的拓扑. 正时旋转

13.8.2 的映射

$$\mathbf{R}\ni k\longmapsto\begin{pmatrix}k&0\\0&k^{-1}\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^4 \text{ 及 } \mathbf{R}\ni k\longmapsto\begin{pmatrix}0&k^{-1}\\k&0\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^4$$

当然是到它的象集上的同胚,因此 $O(E)$ 有 4 个连通分支,每一个都同胚于 R_+^*. 把 $O(E)$ 的单位元的连通分支子群记为 $O^{++}(E)$, 它的元素称为 E 的正时旋转. 关于 13.8.2 的基, 正时旋转的矩阵是形如 $\begin{pmatrix}k&0\\0&k^{-1}\end{pmatrix}$ 的, 其中 $k>0$.

13.8.4 轨道. 由于 q 能取 >0 以及 <0 的值，故 $O(E)$ 在 $G_{E,1}$ 上不可迁（见 13.6.8）；但根据 13.7.9 或者对目前这种特别简单情形的直接考察，我们知道 $O^{+}(E)$ 作用在使 $q>0$ 的直线上都是可迁的. 图 13.8.4 表示 $O^{++}(E)$ 在 E 内的轨道，轨道上的箭头标明当 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$ 中的 k 在 R_+^* 内从 0 变到 $+\infty$ 时，各点的运动方向，这里的基是已取定的（见 13.2.3.1 或 13.8.5）. 几乎所有轨道都是双曲线这一事实说明双曲平面的名称也有它的道理（但我们不采用这个术语，参见 13.1.4.4），另一方面这一事实也证实了"双曲几何"这一名词的合理性，这一几何是与上述情况及其推广相关联的. 参看 13.8.9 及整个 19 章.

从图上可以看出 $O^{++}(E)$ 在 $G_{E,1}$ 内的轨道有 4 个：两条迷向直线，以及使 $q>0$ 的直线和使 $q<0$ 的直线；其证明是显而易见的. $O^{++}(E)$ 作用在半直线的集合上有 8 个轨道：除了 4 条迷向半直线外，还有就是由迷向直线所确定的四个开象限. 此外，$O^{+}(E)$ 作用在例如 $q>0$ 的半直线集合上是单可迁的；$O^{++}(E)$ 作用在已给开象限内的半直线上是单可迁的，作用在例如 $q>0$ 的直线集合上也是单可迁的.

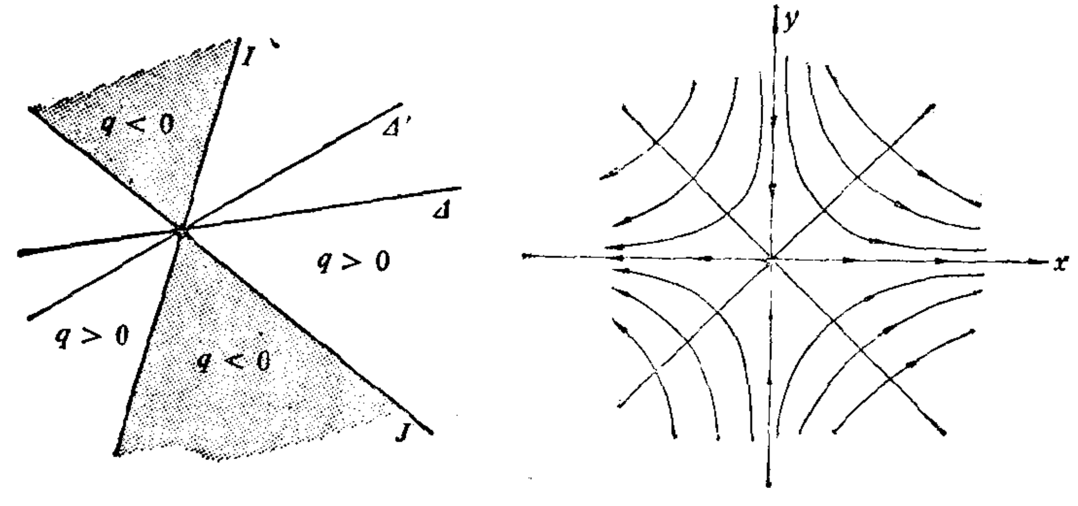


图 13.8.4.

13.8.5 角. 我们可以照搬 8.7 在 E 内建立起关于正时群 $O^{++}(E)$ 的半直线间或直线间的有向角的理论. 我们把这一工作留给读者

去做．不过与 8.3 类似的结果还是值得一提，并且在第 19 章还要用到．我们想要度量 E 内 $q>0$ 的直线间所成的角，即找出一个映射 $\mathbf{R}\to O^{++}(E)$，它是从加法群 $\mathbf{R}$ 到 $O^{++}(E)$ 内的同态．这里比 8.3 容易得多．取定 E 的一个基使 q 的矩阵是 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，或等价地，选取第一条迷向直线设为 I，另一条为 J．则 $f\in O^{++}(E)$ 由 $\begin{pmatrix}k&0\\0&k^{-1}\end{pmatrix}$ 的 $k\in\mathbf{R}_+^*$ 所唯一确定，所求的同态应为从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}_+^*$ 内的同态，因而是指数映射 $t\longmapsto e^t$．与 8.3.7 的 Λ 相反，这里的映射是双射．

对于已定向的 E，在 $q>0$ 的两条直线间的角 $\widehat{\Delta\Delta'}$ 的度量是这样的一个唯一实数 t：使 $\Delta'=f(\Delta)$，f 的矩阵是 $\begin{pmatrix}e^t&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}$．令人感兴趣的是这个度量可借助于交比用纯射影的方法计算．

13.8.6 命题． 设 I，J 是与已取定的基相应的迷向直线，对于使 $q>0$ 的任两条直线 Δ，Δ'，

$$\text{度量}\,(\widehat{\Delta\Delta'})=\frac{1}{2}\log\left([\Delta,\Delta',J,I]\right),$$

这里的交比是定义在射影直线 $P(E)$ 内的．

与 Laguerre 公式(见 8.8.7.2)一样，13.8.6 的公式可直接从矩阵 $\begin{pmatrix}k&0\\0&k^{-1}\end{pmatrix}$ 及 6.6.3 得出．

13.8.7 双曲距离与无向角． 与 8.6 内无向角类似的概念是什么？按照 8.8.7.4，对 $q>0$ 的两条直线，置：

13.8.8 $$\overline{\Delta\Delta'}=\frac{1}{2}\left|\log\left([\Delta,\Delta',J,I]\right)\right|$$

由6.3.1，这个定义只与 (E,q) 有关，而与迷向直线 I，J 的选取无关．我们总有 $\overline{\Delta\Delta'}=|\widehat{\Delta\Delta'}|$ 且读者可验证 $\overline{\cdot\ \cdot}$ 是在 $q>0$ 的直线集合上的一个距离．此外，$\overline{\Delta\Delta'}+\overline{\Delta'\Delta''}=\overline{\Delta\Delta''}$ 当且仅当在

8.7.5.2 的意义下 Δ' 位于Δ与 Δ'' 之间(见 6.8.1 且与 8.7.5.3 比较)。

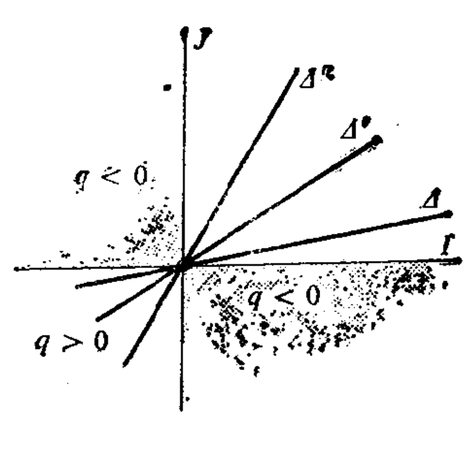


图 13.8.8.

类似于 8.6.3，有一个更简单的方法定义 $\overline{\Delta\Delta'}$.为此我们将用到双曲三角,更精确地说,是函数 Arc ch (“反双曲余弦”)，其定义在0.5 节中曾经提及. 我们有下述命题.

13.8.9 命题. 设 Δ, Δ' 是 $q>0$ 的两条直线，则对 $\xi \in \Delta\backslash 0$, $\xi' \in \Delta'\backslash 0$，纯量 $\dfrac{P(\xi, \xi')}{\sqrt{q(\xi)}\sqrt{q(\xi')}} \geqslant 1$ 且有

$$\overline{\Delta\Delta'} = \operatorname{Arc\ ch} \frac{P(\xi, \xi')}{\sqrt{q(\xi)}\sqrt{q'(\xi')}}.$$

对使 $q = 2xy$ 的基,设 $\xi = (a, b)$, $\xi' = (a', b')$，则有

$$\frac{P(\xi, \xi')}{\sqrt{q(\xi)}\sqrt{q(\xi')}} = \frac{ab' + a'b}{2\sqrt{aa'bb'}}.$$

这个量显然 $\geqslant 1$. 且若 $\Delta' = f(\Delta)$, f 的矩阵是 $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$,则有

$$a' = e^t a,\ b' = e^t b,$$

从而

$$\frac{P(\xi, \xi')}{\sqrt{q(\xi)}\sqrt{q(\xi')}} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t.$$

13.9 练　习

13.9.1 设 q 是 E 上二次型，其根基是 $\mathrm{rad}(q)$. 证明 q 以自然方式在商向量空间 $E/\mathrm{rad}(q)$ 上定义了一个二次型，且后者总是非退化的.

13.9.2 对 E^* 的有限族 $\{\varphi_i\}$ 以及纯量 $k_i \in K^*$，试研究二次型 $\sum_i k_i\varphi_i^2$ 的秩及根基.

13.9.3 设 F 是 E 的子空间. 若子空间 V 满足 $V \supset F$，V 非奇异且 $\dim V = \dim F + \dim(\mathrm{rad}(F))$，证明 V 必是形如 13.3.4.1 的.

13.9.4 把二次型的分类归结为非迷向型的分类问题.

13.9.5 试说明在 13.4.8 的实用方法里出现的总是线性无关的线性型，且这些型的个数等于 q 的秩.

13.9.6 化简 $q = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \pm x_nx_1$，并讨论它的秩.

13.9.7 研究 13.4.8 能否用来证明 13.4.1，并具体说明这个对应关系.

13.9.8 约化 $\mathbf{R}^4$ 上的二次型：

$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2) + xz + xt + zt$；

$\lambda t^2 + yz + zx + xy + \mu(x + y + z)t$（讨论 λ 及 μ）；

$4x^2 + 3y^2 + 9z^2 + 8xz + 4xy + 4yt + 8zt + \lambda t^2$（讨论 λ）. 再写出它们的极型（见 13.1.3.6）.

13.9.9 对 $K = \mathbf{Q}$ 及 $n = \dim E = 1$，证明存在无限多个不等度量的 (E, q).

13.9.10 证明若 $n = 1$，K 是有限域，则恰好存在三类二次型.

13.9.11 证明若 $K = \mathbf{R}$，$n \geqslant 3$ 且两个二次型 q 与 q' 满足 $q(x) + q'(x) > 0 \ \forall\ x \neq 0$，则它们允许有一个公共正交基.

13.9.12 用式子明显地写出 $O(3, 1)$ 的矩阵的 16 个元素应满足

的条件.

13.9.13 讨论 $O(q)$ 及 $O^+(q)$ 的中心.

13.9.14 证明 $O^+(q)$ 由迴转生成.

13.9.15 证明若 $f\in O(E)$ 满足 13.6.7.3 的假设，则必须有 $E=\mathrm{Art}_{4p}$. 再证明确实存在满足 13.6.7.3 的假设的 f.

13.9.16 证明 $O(E)$ 不可能是交换的,唯一的例外是 $E=\mathrm{Art}_2$, 并且K是只含三个元素的域.

第 14 章　射影二次超曲面

在历史上，射影二次超曲面是作为二次超曲面的射影完备化而出现的，并且是以仿射欧氏圆锥曲线开其先河的. 现在的阐述次序恰好相反：射影二次超曲面被定义为在射影空间内与向量空间的一个二次型相关联的对象，而这个射影空间却是这个向量空间导出的.

在某种意义下，我们可以说射影二次超曲面的理论是借助于一本词典从二次型的理论翻译出来的，而这本词典中的定义我们要在这一章中逐步给出. 实际上这一章和下一章中难点很少，但它们的存在又是合乎情理的，因为仅仅有一本词典是不足以使人能讲流利的外语的. 像 14.5.4.3 那样的结果，对某种实际问题已经显得很有必要，这就是本章仍占相当篇幅的原因. 在第 16 章里将利用已构造的工具以证明更隐蔽的结果.

基本的思想是我们可以在射影空间内定义所有源自向量空间及二次型的概念，只要这些概念与非零数乘无关. 在给出第一批定义后，14.2 节用到了已知射影空间的二次超曲面本身构成一个射影空间这一事实；作为其特款的二次超曲面束的概念以后在第 16 章里是很基本的内容. 14.3 节在基域是实数或复数域的情形下研究了二次超曲面的造型的直观的性质，正如我们在 4.3 节对实和复射影空间所作的研究一样. 在 14.4 中考察三维的情形以及所谓"直纹"二次曲面的情形，以极其简单的方式从几何上来给出它们的定义.

14.5 和 14.6 研究对偶性. 关于一个二次超曲面的配极变换的概念在应用中是很基本的. 实际上我们在讨论凸集时已在 11.1.5 中遇到过这个概念.

圆锥曲线的情形将在第 16 章中更详细地进行研究.

在整个这一章里，假定 E 是特征数不为2的域 K 上的有限 $n+1$ 维向量空间.与 E 相关联的射影空间记为 $P(E)$，$p: E\backslash 0 \to P(E)$ 是典范投影.记 $Q(E)$ 为 E 上二次型的向量空间；若 q 是 E 上二次型，则将它的极型记为 P.而且我们总假设 $\dim P(E) = n \geqslant 1$.

14.1 定义及例

设 $q \in Q(E)$，如果把 q 换成 kq，$k \in K^*$，则它的去掉 0 后的迷向锥面在 $P(E)$ 内的投影 $p(q^{-1}(0)\backslash 0)$ 并不改变.这就启发我们引入向量空间 $Q(E)$ 导出的射影空间 $PQ(E) = P(Q(E))$. 请注意，当 q 换成 kq 时，q 的秩、指数(见 13.2.1 及 13.7.5) 以及它的根基都不改变。这就导致以下的定义。

14.1.1 定义. 我们把 $PQ(E)$ 的元素 α 称为 $P(E)$ 的(射影)二次超曲面。α 的象 $\operatorname{im}(\alpha)$ 是

$$\operatorname{im}(\alpha) = p(q^{-1}(0)\backslash 0),$$

其中 $p(q) = \alpha$。$P(E)$ 的二次超曲面全体所成的射影空间就是 $PQ(E)$。当 $n = 2$ 时 α 也称为圆锥曲线。若 $p(q) = \alpha$，则称 q 是 α 或 $\operatorname{im}(\alpha)$ 的一个方程。若 α 的一个方程非退化，则称二次超曲面 α 是正常的。α 的秩或指数就是它的某一个方程的秩或指数。如果有一个方程是退化的，就称此二次超曲面是退化的。

14.1.2 注. 以后我们不再每次指明"q 是 α 的一个方程"，凡是写 q，q'，$\cdots$总是指 α，α'，$\cdots$的方程。

由于 $q = 0$ 已被排除，故二次超曲面的秩总是 $\geqslant 1$ 的。

14.1.3 例

14.1.3.1 若 q 非迷向，则 $\operatorname{im}(\alpha) = \varnothing$，正如在欧氏空间里的 $q = \|\cdot\|^2$ 一样。但这不能作为一个理由，就此不再讨论二次超曲面 α 了。尤其是它的极型 P，还是很值得讨论的，参看 14.5.2.0. 与此相反的是 k 为代数闭域的情形，这时根据 13.7.6，$\operatorname{im}(\alpha) \neq \varnothing\ \forall \alpha \in PQ(E)\ \forall n \geqslant 1$.

14.1.3.2 命题. 设 $n = 1$，α 是二次超曲面.若秩 $(\alpha) = 1$，

则 $\mathrm{im}(\alpha)$ 含一个点，若秩 $(\alpha)=2$，则或者 $\mathrm{im}(\alpha)=\varnothing$，或者 $\mathrm{im}(\alpha)$ 含 2 个不同的点. 此外若 α' 是 $P(E)$ 的另一个二次超曲面，如果 $\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\alpha')$，且 $\mathrm{im}(\alpha)\neq\varnothing$，则 $\alpha=\alpha'$.

只需应用 13.2.3.4 及 13.2.3.1 即可。

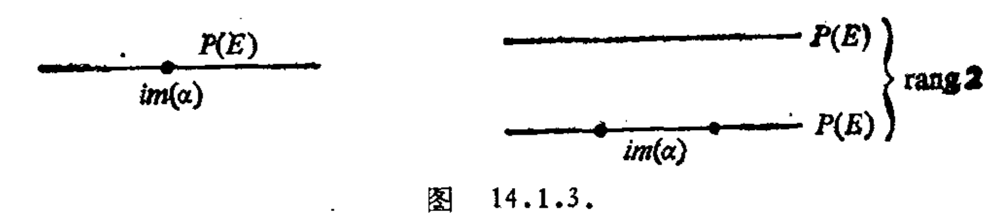


图 14.1.3.

14.1.3.3 遗传性. 设 α 是 $P(E)$ 的二次超曲面，$S=p(F)$ 是 $P(E)$ 的射影子空间. 则若 F 关于 q 不是完全奇异的，我们即可定义 α 与 S 的交为二次超曲面 $\alpha\cap S$，它是以限制 $q|_F$ 作为方程的二次超曲面. 当然我们有

$$\mathrm{im}(\alpha\cap S)=\mathrm{im}(\alpha)\cap S,$$

与此相反，若 F 是完全奇异的，则 $S\subset\mathrm{im}(\alpha)$，其逆亦真.

14.1.3.4 与直线的交. 把 14.1.3.2 与 14.1.3.3 合在一起，即可得出以下事实. 设 $\alpha\in\mathrm{PQ}(E)$，$D=p(F)$ 是 $P(E)$ 的一条直线，则 $D\subset\mathrm{im}(\alpha)$ 当且仅当 F 是完全奇异的；$D\cap\mathrm{im}(\alpha)$ 仅含一个点当且仅当 F 是奇异的但又不是完全奇异的；否则 $D\cap\mathrm{im}(\alpha)$ 是空集或含 2 个点. 特别由 $\#(D\cap\mathrm{im}(\alpha))\geq 3$ 可导致 $D\subset\mathrm{im}(\alpha)$.

14.1.3.5 定义. 设 $S=p(F)$ 是 $P(E)$ 的子空间，若 F 关于 q 奇异，则称 F 与二次超曲面 α 相切，对任一 $m\in\mathrm{im}(\alpha)\cap S$，称 F 与 α 切于 m. 若 α 是正常的，$m\in\mathrm{im}(\alpha)$，则称使 $p(x)=m$ 的射影超平面 $p(x^\perp)$（见 13.3.1）为与 α 切于 m 的超切平面.

14.1.3.6 由 14.1.3.4，要使射影直线 D 与 α 相切，必须且只须 $\#(D\cap\mathrm{im}(\alpha))$ 等于 1 或 ≥ 3. 当 α 正常时，与 α 切于 x 的超平面是所有与 α 相切且含 x 的直线的并集. 这是因为由 14.1.3.4 可知，或者 $D\subset\mathrm{im}(\alpha)$，或者 $D\cap D^\perp=\{x\}$，从而在两种情形里都有 $D\cap D^\perp\ni x$，由 13.3.2，有 $(D\cap D^\perp)^\perp\subset x^\perp$，即 $\langle D^\perp\cup D\rangle\subset x^\perp$，特别有 $D\subset x^\perp$.

14.1.3.7 我们用二次超曲面的语言重新解释 9.5.5。若 X 是欧氏仿射空间,二次型 N^C 是 $\vec{X}$ 上范数的复化,则 N^C 属于 $Q(\vec{X}^C)$ 并且定义 $P(\vec{X}^C)$ 的一个二次超曲面,它的象称为 X 的脐. N^C 是正常的,因此当 $\dim X = 2$时由 2 个点构成(见 14.1.3.1 及 14.1.3.2),称为 X 的循环点。

14.1.3.8 **同构下的象**. 设 E, E' 是两个向量空间, $\bar{f} \in \mathrm{Isom}(E;\ E')$, 与它相关联的同构是:

$$f \in \mathrm{Isom}\,(P(E);\ P(E'))\ (\text{见 } 4.5)\ \text{及}\ \alpha \in PQ(E).$$

所谓 α 在 f 下的象是 $P(E')$ 的一个二次超曲面,它的一个方程是 $((\bar{f})^{-1})^*(q)$ (见13.1.3.9), 这里 q 是 α 的一个方程. 把这个象记为 $f(\alpha)$. 由定义可得

$$\boxed{\mathrm{im}\,(f(\alpha)) = f\,(\mathrm{im}\,(\alpha)).}$$

作为特例, $P(E)$ 的射影群 $GP(E)$ 作用在 $PQ(E)$ 上(而且不需象 13.1.3.9 中那样颠倒其运算规则).

14.1.4. 写法及具体的计算.

14.1.4.1. 我们将利用与 E 的一组基 $\{e_i\}$ 相关联的齐次坐标(见 4.2.3); 若 A 是 q 关于这个基的矩阵 (见 13.1.3.6), 则 $\mathrm{im}\,(\alpha)$ 就是满足

$$^tXAX = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = 0,\quad X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

的点 $X = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的集合。

14.1.4.2. 由 13.2.2.4, α 是正常的等价于 $\det A \neq 0$, 由此可见在 $PQ(E)$ 内的退化二次超曲面构成一个 $n+1$ 次代数超曲面.

14.1.4.3. 关于 E 的一个已知基设 A 是 q 的矩阵, S 是 $\bar{f} \in GL(E)$ 的矩阵, 则根据 13.1.3.10 及 14.1.3.8, 像 $f(\alpha)$ 的一个方程的矩阵为 $^tS^{-1}AS^{-1}$.

14.1.5 **$K = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时二次超曲面的分类**. 这涉及找出 $PQ(E)$

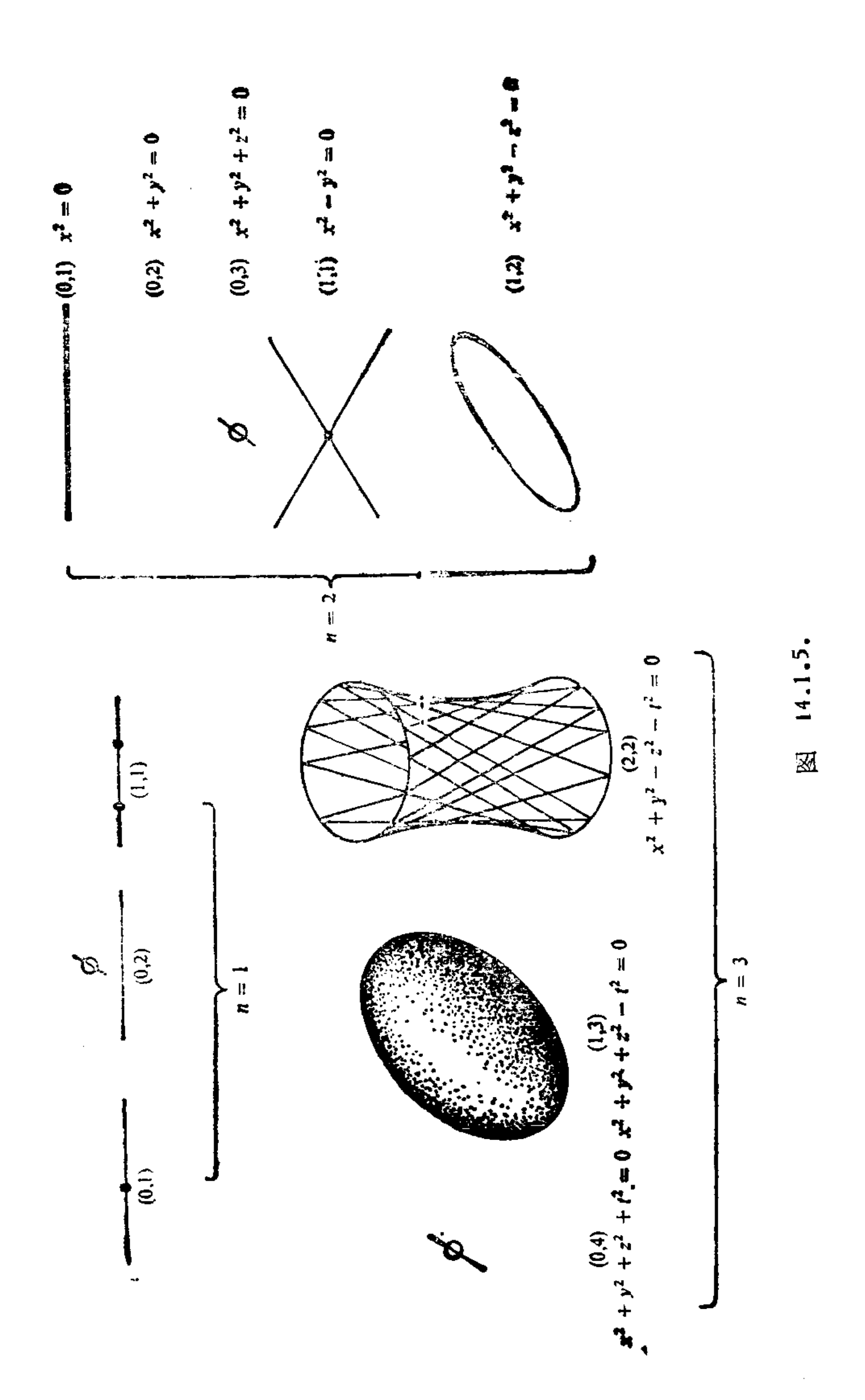

(0,1)
(0,2)
(1,1)
$n = 1$
(0,1) $x^2 = 0$
(0,2) $x^2 + y^2 = 0$
(0,3) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
(1,1) $x^2 - y^2 = 0$
(1,2) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
$n = 2$
(0,4) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$
(1,3) $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$
(2,2) $x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0$
$n = 3$

图 14.1.5.

在按 14.1.3.8 所定义的 $GP(E)$ 的作用下的轨道。但 13.4.6 及 13.4.7 已给出 $GL(E)$ 作用在 $Q(E)$ 上的轨道，且 $GP(E)=GL(E)/K^* \mathrm{Id}_E$（见 4.5.9），剩下的就看一下 $K^* \mathrm{Id}_E$ 怎样作用在 $Q(E)$ 的轨道上。在复数域的情形，秩关于 $q \longmapsto kq (k \in \mathbf{C}^*)$ 是不变的，因而 $PQ(E)$ 内的轨道不少于 $Q(E)$ 内的轨道。但当 $K=\mathbf{R}$ 的情形相反，这时，若 q 的符号数是 (r, s)，则当 $\lambda<0$ 时 λq 的符号数是 (s, r)。因此我们有：

14.1.5.1 定理。 当 $K=\mathbf{C}$ 时，在 $GP(E)$ 作用下 $P(E)$ 的二次超曲面形成 $n+1$ 个轨道，它们以秩 $k: 1 \leqslant k \leqslant n+1$ 作为指标。当 $K=\mathbf{R}$ 时，$P(E)$ 的二次超曲面的轨道以整数偶 (r, s) 作为指标，其中

$$1 \leqslant s \leqslant r \leqslant n+1;$$

作为特例，有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ 种正常二次超曲面（其中[·]指整数部分）。

14.1.5.2 注. 我们在这里当然可以跟 13.4.3 中同样地进行讨论。

在实数的情形，据 13.7.6，我们也可用秩及指数对轨道分类，因为秩 $(q)=r+s$，指数 $(q)=s$。

14.1.5.3 例。 若 K 是代数闭域，则正常二次超曲面仅有一个轨道。

当 $K=\mathbf{R}$ 时，若 $n=1$，则有 3 种类型：(0, 1)，(0, 2)，(1, 1)，它们分别给出：一个点，空集，2 个点。若 $n=2$，有 5 种类型 (0, 1)，(0, 2)，(1, 1)，(0, 3)，(1, 2)，它们分别给出：一条直线(称为双重直线)，一个点，2 条直线，空集，一条正常圆锥曲线。若 $n=3$，有 3 类正常二次曲面 (0, 4)，(1, 3)，(2, 2)，它们分别给出：空集，以及 2 类二次曲面。关于 $n=2$ 时例 (1, 2) 的拓扑及 $n=3$ 时例 (1, 3)，(2, 2) 的拓扑请参见 14.3.3。

14.1.6 零点定理

14.1.6.1 象映射是 $\mathrm{im}(\cdot)$: $\mathrm{PQ}(E) \to \mathscr{P}(P(E))$，这里 $\mathscr{P}(P(E))$ 是 $P(E)$ 的子集的集合.如果这个映射是单射，那末二次超曲面的定义 14.1.1 就会有更大的价值。那时代数的定义将会和一个几何的定义相一致。不过在一般情形下并非如此，例如若 $E = \mathbf{R}^3$，方程为 $q = x^2 + y^2$ 及 $q' = x^2 + 2y^2$ 的二次超曲面有相同的象，即射影坐标为 (0, 0, 1) 的点，但这两个方程代表不同的二次超曲面。尽管如此，我们有以下定理。

14.1.6.2 定理. 若 K 是代数闭域，则

$$\mathrm{im}(\cdot): \mathrm{PQ}(E) \to \mathscr{P}(P(E))$$

是单射。

设 q, q' 使 $p(q^{-1}(0)\backslash 0) = p(q'^{-1}(0)\backslash 0)$，由 14.1.3.1，存在 $x \in E\backslash 0$ 使 $q(x) \neq 0$.必要时用一个常数乘 q'，即可假设 $q'(x) = q(x)$。设 $y \in E\backslash 0$ 使 $p(y) \neq p(x)$，并把射影直线 $\langle p(x), p(y)\rangle$ 记为 D。据 14.1.3.2，由于 $D \cap \mathrm{im}(p(q)) = D \cap \mathrm{im}(p(q'))$，就有 $\alpha \cap D = \alpha' \cap D$；作为特例，

$$\frac{q'(y)}{q(y)} = \frac{q'(x)}{q(x)} = 1.$$

所谓“零点定理”是指一个关于代数簇的一般定理，14.1.6.2 仅是它的一个非常特殊的情形.可参见 [FN] 第 21 页。$K = \mathbf{R}$ 的情形可见 14.8.9。

14.1.7 约化为非退化情形. 这一小节里要从几何角度用象集来描述 13.2.2.6 的结果.把 $p(\mathrm{rad}(q))$的点称为二次曲面的奇异点，它们的集合是一个射影子空间，称为 α 的根基。实际上，若关于一个基 $\{e_i\}$ 有 $q \longleftrightarrow A$，这就相当于求解使 $AX = 0$ 的列向量 X，即 A 的特征值为 0 的特征向量，也即 $\sum_j a_{ij}x_j = 0\ \forall i$ 的解或方程组 $\partial q/\partial x_i = 0$ 的解(见 13.1.2)。

设 $E = \mathrm{rad}(q) \oplus G$ 是一个直和，A 是 α 的根基，即 $A = p(\mathrm{rad}(q))$，B 是在 $P(E)$ 的子空间 $p(G)$ 内由方程 $q|_G$ 所对应的二次超曲面的象，则 A 和 B 是 $P(E)$ 的两个子集。若 $B = \emptyset$，就有 $\mathrm{im}(\alpha) = A$，若 $B \neq \emptyset$，则有以下命题:

14.1.7.1 命题. α 的象是以 A 为顶点以 B 为底的劈锥曲面，也就是说 $P(E)$ 中一切使 $m\in A$, $n\in B$ 的射影直线 $\langle m, n\rangle$ 的并集.

设 $x\in E\backslash 0$ 使 $p(x)\in \mathrm{im}(\alpha)$, 即 $q(x)=0$. 记 $x=y+z$, $y\in \mathrm{rad}(q)$, $z\in G$. 则

$$0=q(x)=q(y+z)=q(y)+2P(y, z)+q(z)=q(z),$$

因此 y 可是 $\mathrm{rad}(q)$ 内任意向量, z 在 $q^{-1}(0)$ 内.

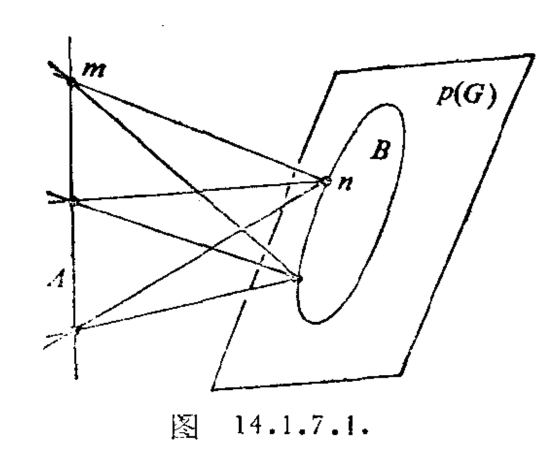


图 14.1.7.1.

14.1.7.2 例如，若 $\dim(\mathrm{rad}(q))=1$, 则 $\mathrm{im}(\alpha)$ 在 $P(E)$ 内是一个真正的锥面,其顶点是点 $p(\mathrm{rad}(q))$, 其底是 $p(G)$ 的

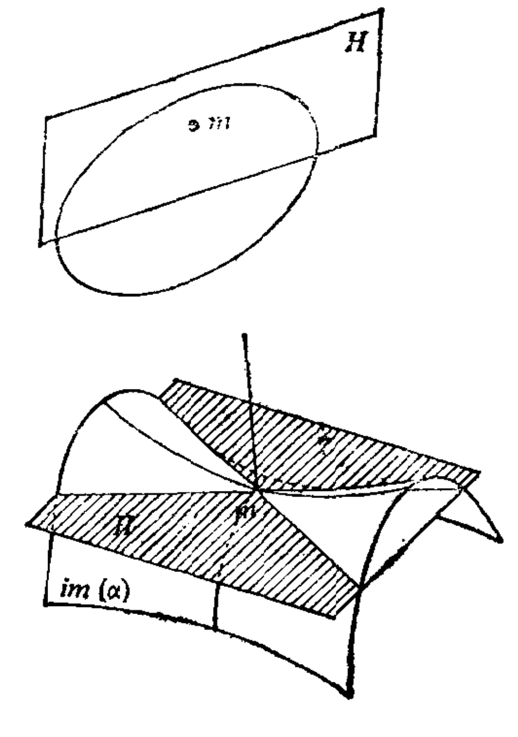


图 14.1.7.2.

正常二次超曲面的象 B. 这个例子的特例是: α是 $P(E)$ 的正常二次超曲面, m是 $\operatorname{im}(\alpha)$ 的一点. 设H是与α切于m的超平面,我们想要知道α与H的交二次超曲面 $\alpha\cap H$ 是怎样的(见14.1.3.3 及 14.1.3.5). 由 13.3.2, $q|_{p^{-1}(H)}$ 的根基是一维的,因此 $\operatorname{im}(\alpha\cap H)$ 是H内一个锥面,其顶点是 m, 底是正常二次超曲面.

若 $n=2$, 则 $\operatorname{im}(\alpha\cap H)$ 缩为一点 m; 若 $n=3$, $\operatorname{im}(\alpha\cap H)$ 或者缩为一点 m, 或者由H内过m的两条不同直线构成(这些都能从 14.1.3.2 得到). 上述两种情形确实出现在图 14.1.5 的类型 (1, 3) 及 (2, 2) 中.

14.2 PQ(E)的子空间;二次超曲面束

从13.1.3.6可知$\dim Q(E)=\frac{(n+1)\ (n+2)}{2}$(也见 3.7.10). 因此有

14.2.1
$$\boxed{\dim \mathrm{PQ}(E)=\frac{n(n+3)}{2}},$$
作为特例,若 $n=1, 2, 3$, 其维数分别是 2, 5, 9.

14.2.2 命题. 设 $m\in P(E)$, 则
$$H(m)=\{\alpha\in \mathrm{PQ}(E): m\in\operatorname{im}(\alpha)\}$$
是一个超平面.

若记 $m=p(x)$, $\alpha=p(q)$, 则条件 $m\in\operatorname{im}(\alpha)$ 等价于 $q(x)=0$, 这个关于 q 的条件是线性的又是非平凡的,因为 $x\neq 0$.

14.2.3 推论. 设 $\{m_i\}_{i=1,\dots,d}$. 是 $P(E)$ 的点, 则 $\{\alpha\in \mathrm{PQ}(E): m_i\in\operatorname{im}(\alpha)\forall i\}$ 是 $\mathrm{PQ}(E)$ 的一个子空间,其维数$\geqslant\frac{n(n+3)}{2}-d$.

作为特例,过 $P(E)$ 的 $\frac{n(n+3)}{2}$ 个点至少有一个二次超曲面.

14.2.4 例. 过射影平面上 5 个不同点至少有一条圆锥曲线. 在 16.1.4 内将详细说明其唯一性. 第二个例子更有趣: 设 $n=3$,

D, D', D'' 是 $P(E)$ 的 3 条直线，则至少在在一个二次曲面 α 使 $\operatorname{im}(\alpha) \supset D \cup D' \cup D''$. 其实在每一条直线上各取 3 个不同点，由 14.2.3 及 14.1.3.4 的结果就可得出上述结论.

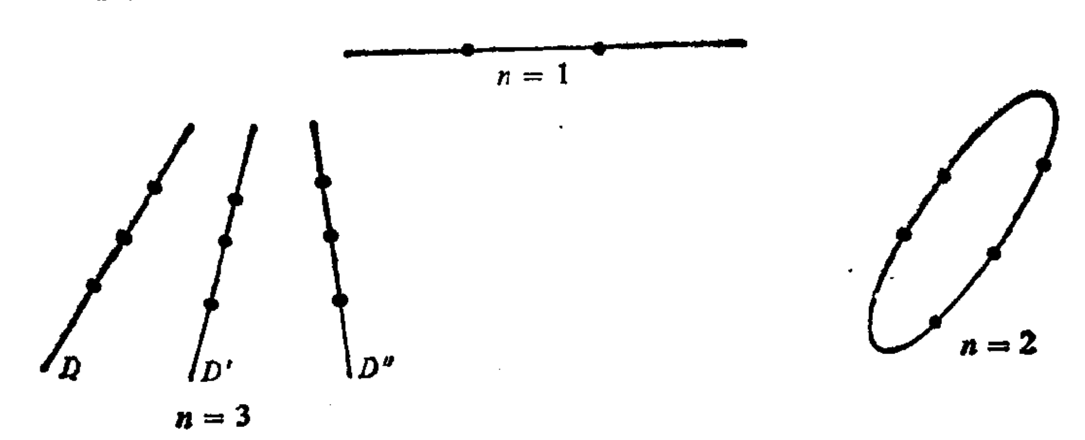


图 14.2.4.

14.2.5 注意. PQ(E) 的超平面并不都是形如 14.2.2 的. 我们将在 14.5.4.6 重新回到这个问题上来.

以下的内容尽管简单，但它们在几何上有很多应用，例如 16.5.3 及 17.5.

14.2.6 定义. 称 PQ(E) 的直线为(二次超曲面)束.

14.2.7 例

14.2.7.1 实际上 (见 4.6.7) 二次超曲面束 $\mathscr{F}$ 由两个不同的二次超曲面 α, α' 所确定: $\mathscr{F} = \langle \alpha, \alpha' \rangle$; 若 $\alpha = p(q)$, $\alpha' = p(q')$, 则 $\{\lambda q + \lambda' q' : (\lambda, \lambda') \neq (0, 0)\}$ 是$\mathscr{F}$的二次超曲面的方程的集合.

14.2.7.2 据 14.2.3，若 $\{m_i\}\left(i = 1, \cdots, \dfrac{n(n+3)}{2} - 1\right)$ 是 $P(E)$ 的点，在一般情况下集 $\{\alpha \in \mathrm{PQ}(E) : m_i \in \operatorname{im}(\alpha) \forall i\}$ 是一个束. 例如若 $n = 2$，且若 φ, ψ, ξ, η 是直线 $\langle m_1, m_2 \rangle$, $\langle m_3, m_4 \rangle$, $\langle m_1, m_3 \rangle$, $\langle m_2, m_4 \rangle$ 的方程(即 E 上线性型)，则过 m_1, m_2, m_3, m_4 的圆锥曲线束$\mathscr{F}$将由方程 $\lambda\varphi\psi + \lambda'\xi\eta$ 所定义(见 13.1.3.3).

14.2.7.3 所谓束 $\mathscr{F}$ 的底是 $P(E)$ 的子集: $\mathscr{F}$ 的底 $= \bigcap_{\alpha \in \mathscr{F}} \operatorname{im}(\alpha)$.

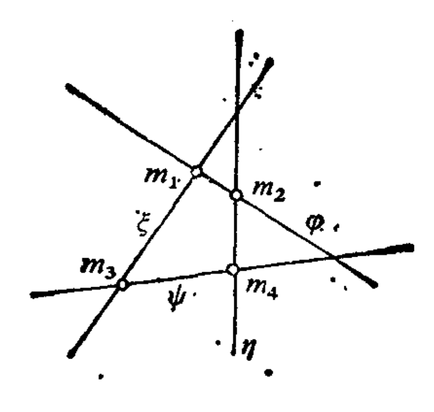


图 14.2.7.

14.2.7.4 根据 14.2.2 和 4.6.12，当束$\mathscr{F}$和 $P(E)$ 的点m给定后，在一般情况下有一个$\mathscr{F}$中的二次超曲面通过 m.

14.2.7.5 为了找出束 $\mathscr{F}$ 中的退化二次超曲面，我们利用 14.1.4.2。设 q, q' 定义$\mathscr{F}$，$q \longleftrightarrow A, q' \longleftrightarrow A'$. 以 $\lambda A+\lambda' A'$ 为矩阵的方程所对应的二次超曲面是退化的充要条件是 $\det(\lambda A+\lambda' A')=0$. 由于这是两个变量 (λ, λ') 的 $n+1$ 次齐次多项式，故在射影直线 $P(K^2)$ 内至多有 $n+1$ 个不同的根，要不就是上述行列式始终等于0。这样，或者$\mathscr{F}$的所有二次超曲面都是退化的，或者$\mathscr{F}$包含至多 $n+1$ 个退化二次超曲面。例如，若K是代数闭域，在一般情况下，$\mathscr{F}$包含 $n+1$ 个退化二次超曲面. $n=2$ 时完整的讨论可见 16.5.

如果束中所有的二次超曲面都退化，则称此束退化。

14.2.8 一维情形

14.2.8.1 命题. 设$\mathscr{F}$是 $D=P(E)$ 的二次超曲面束，其中 $n=\dim P(E)=1$，即D是射影直线. 则$\mathscr{F}$不退化而且必定属于以下两种类型：

(i) 存在 $m_0 \in D$ 使$\mathscr{F}=\{\alpha \in PQ(E): \operatorname{im}(\alpha)=\{m_0, m\}, m \in D\}$ (我们记得，当 $n=1$ 时，非空象集确定了 α，参看 14.1.3.2)；

(ii) 存在D的对合 f (见 6.7) 使

$\forall \alpha \in \mathscr{F}\ \forall m \in P(E) \cap \operatorname{im}(\alpha): D \cap \operatorname{im}(\alpha)=\{m, f(m)\}$.

反之，对D的任意对合f存在$P(E)$的二次超曲面束$\mathscr{F}$使$\forall\alpha\in\mathscr{F}$ $\forall m\in D\cap\operatorname{im}(\alpha)$:

$$D\cap\operatorname{im}(\alpha)=\{m, f(m)\}.$$

设 $\alpha, \alpha'\in\mathscr{F}$ 都是退化的且 $\alpha\neq\alpha'$，则根据 14.1.3.2 可写 $\alpha=p(\varphi^2), \alpha'=p(\varphi'^2)$，其中 $\varphi, \varphi'\in E^*$. 于是 $\varphi^2+\varphi'^2$ 是$\mathscr{F}$中一个二次超曲面的方程，而且这个二次超曲面是正常的。从而$\mathscr{F}$不可能退化。

取 $\alpha\in\mathscr{F}$，α 正常且 $\operatorname{im}(\alpha)\neq\emptyset$，根据 14.2.7.4，这样的$\alpha$存在。取$D$上齐次坐标 (x, y) 使

$$\operatorname{im}(\alpha)=\{p(1, 0), p(0, 1)\};$$

从而 $2xy$ 是α的一个方程。设 $ax^2+2bxy+cy^2$ 是 $\alpha'\in\mathscr{F}$，$\alpha'\neq\alpha$ 的一个方程，我们可假设譬如说 $c\neq 0$。现在只需讨论 $D\cap\operatorname{im}(\beta)$，$\beta\in\mathscr{F}\backslash\alpha$，因此也就只需讨论方程

$$ax^2+2bxy+cy^2+\lambda(2xy)=ax^2+2(b+\lambda)xy+cy^2=0, \ \lambda\in K.$$

由于 $c\neq 0$，故 $(0, 1)$ 不是解，因此我们可找形如 $(1, t)$ 的解，它是以下方程的根：

$$a+2(b+\lambda)t+ct^2=0.$$

这些根满足 $tt'=a/c$，因而属于D上由 $f(t)=a/ct$（且 $f(0)=\infty$，$f(\infty)=0$，见 5.2.4）所定义的对合 f.

反之，由 6.7.3 的证明可知，在适当的齐次坐标下，任一对合可写成 $f(t)=k/t$，$k\in K^*$. 上面的计算表明所找的束$\mathscr{F}$由两个方程

$$q=2xy \ \text{及}\ q'=kx^2+y^2$$

所定义。

14.2.8.2 注. 在第 (ii) 种情形里，对合的双重点正是束的退化二次超曲面. 因而它们的个数是 0 或 2（见 6.7.2）. 在情形 (i) 中，恰有一个退化二次超曲面，其象是 $\{m_0\}$.

14.2.8.3 推论(Desargues 定理). 这里 $\dim E$ 是任意的，$\mathscr{F}$ 是 $P(E)$ 的二次超曲面束，D是$P(E)$的直线. 再假设 $\{\alpha\cap D: \alpha\in\mathscr{F}\}$ 是D的二次超曲面束，即（见 14.1.3.3）$\forall\alpha\in\mathscr{F}: D\not\subset\operatorname{im}(\alpha)$,

并且

$$D\cap\mathscr{F}\text{的底}=\emptyset,$$

则 $\forall m\in D$ 存在唯一的 $\alpha_m\in\mathscr{F}$ 使得 $m\in\operatorname{im}(\alpha_m)$，并且由 $\operatorname{im}(\alpha_m\cap D)=\{m,f(m)\}$，$m\in D$，所定义的映射 $f:D\circlearrowleft$ 是D的对合。它的双重点是与D相切的（见 14.1.3.5）$\alpha\in\mathscr{F}$ 和 D 的交点．特别是，$\mathscr{F}$ 中有 0 个或 2 个二次超曲面与D相切。

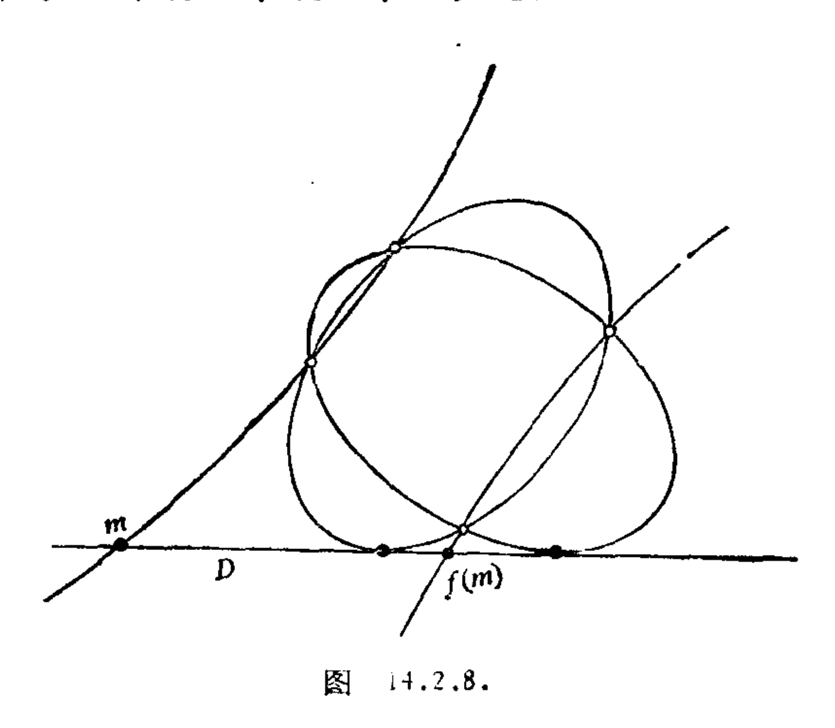


图 14.2.8.

14.3 二次超曲面的拓扑性质与微分性质（$K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$）

在本节中 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$.

据 4.3 节，射影空间$P(E)$有一个自然拓扑，从而对 $\alpha\in\mathrm{PQ}(E)$ 而言，$\operatorname{im}(\alpha)\subset P(E)$ 有一个拓扑空间结构．我们要研究这个 $\operatorname{im}(\alpha)$ 空间。

14.3.1 命题．二次超曲面的任一非空象集都是紧的．当 $n\geqslant 2$ 时，它还是弧连通的．

紧性的证明与 4.3.3.2 中射影空间的紧性的证明一样．使用这一节的记号，若 q 是 $\alpha\in\mathrm{PQ}(E)$ 的方程，则 $\operatorname{im}(\alpha)=p(q^{-1}(0)\backslash 0)=p(q^{-1}(0)\cap S(E))$．由于$S(E)$是紧的，$q$ 连续，因此

$q^{-1}(0)\cap S(E)$ 是紧的. 又因 $P(E)$ 是可分的，故象 $p(q^{-1}(0)\cap S(E))$ 是紧的(见 4.3.3).

对 $n=1$ 的情形，14.1.3.2 表明 $\operatorname{im}(\alpha)$ 可能不连通. 下面假设 $n\geqslant 2$，我们可限于考察 α 为正常的情形，因为据 14.1.7.1，若 A 和 B 弧连通，则 $\operatorname{im}(\alpha)$ 也是弧连通，既然射影直线是弧连通的(见 4.3.3). 若 $K=\mathbf{R}$，当 α 为正常且 $\operatorname{im}(\alpha)\neq\emptyset$ 时，$\operatorname{im}(\alpha)$ 的弧连通性可从14.3.3得到. 若 $K=\mathbf{C}, m, n\in\operatorname{im}(\alpha)$，$m\neq n$，我们将考虑含 m 及 n 的任意射影平面 S. 若 $\alpha\cap S$ 是正常的，则由 14.3.6，二次超曲面 $\alpha\cap S$ 是弧连通的，要不然从它由两条直线构成也可看出它是连通的(见 14.1.7.2 及 14.1.3.2).

14.3.2 实正常的情形. 由于 14.1.7.1，二次超曲面的拓扑可归结为正常二次超曲面的拓扑. 令人惊讶的是实数的情形 ($K=\mathbf{R}$) 比复数的情形更简单. 据 13.4.2，可假设 q 的一个方程是 $\sum_{i=1}^{r} x_i^2-\sum_{i=r+1}^{r+s=n+1} x_i^2$，把由这个方程定义的二次超曲面在 $P^n(\mathbf{R})$ 里的象记为 $C(r, s)$，则有:

14.3.3 命题. 拓扑空间 $C(r, s)$ 同胚于商集 $(S^{r-1}\times S^{s-1})/\mathbf{Z}_2$，这是球面的积 $S^{r-1}\times S^{s-1}$ 关于 $O(r+s)$ 中由 $\pm\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^{r+s}}$ 所构成的子群的商集. 特别，$C(n, 1)$ 同胚于 S^{n-1}，$C(2, 2)$ 同胚于 $S^1\times S^1$.

只要把 $\mathbf{R}^{r+s}=\mathbf{R}^{n+1}$ 看作欧氏空间的乘积欧氏空间 $\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^s$ 即可. 这样，α 的方程可简写成 $q(x, y)=\|x\|^2-\|y\|^2$，$x\in\mathbf{R}^r$，$y\in\mathbf{R}^s$. 把 4.3.3.2 的技巧应用于 14.3.1，即有

$$\operatorname{im}(\alpha)=p(\{(x, y): \|x\|^2-\|y\|^2=0 \text{ 及 } \|x\|^2+\|y\|^2=1\}).$$

但后一个集合就是 $\{(x, y): \|x\|=\|y\|=1/\sqrt{2}\}$，它是 $\mathbf{R}^r$ 与 $\mathbf{R}^s$ 中半径为 $1/\sqrt{2}$ 的球面的乘积. 剩下只要考察射影 $p: \mathbf{R}^{r+s}\to P^{r+s-1}(\mathbf{R})=P(\mathbf{R}^{r+s})$ 的作用效果. 若 $p(x, y)=p(x', y')$，则 $x'=kx$，$y'=ky$，由于

$$\|x'\|=\|x\|=\|y'\|=\|y\|(=1/\sqrt{2}),$$

必须有 $k=\pm 1$.

若 $s=1$，则球面 S^{s-1} 由两个不同的点构成，设这两个点为 a, b，则射影的限制映射 $p: S^{r-1}\times\{a\}\to p(S^{r-1}\times S^{s-1})=\mathrm{im}(\alpha)$ 是双射，因而是同胚。

若 $r=s=2$，14.4.2 中证明 $\mathrm{im}(\alpha)$ 同胚于两条射影直线的积，由 4.3.6 可知它就是这里的 $S^1\times S^1$。

14.3.4 例：实数情形。若 $n=2$，使象非空的只有一种类型，它同胚于圆周 S^1（图 14.1.5）。这个同胚也可从 16.2.4 得到。

若 $n=3$，有两种类型，分别同胚于 S^2 或环面 $S^1\times S^1$。第一种类型在图 14.1.5 上可以看得很清楚。为看出第二种类型要借助于 14.4.2；因为一个平面总是与 $C(2,2)$ 相交的，所以根本不可能在仿射空间里把 $C(2,2)$ 画出来。请注意同一族直线交错的情形，参看 18.8.6 及图 14.3.4。

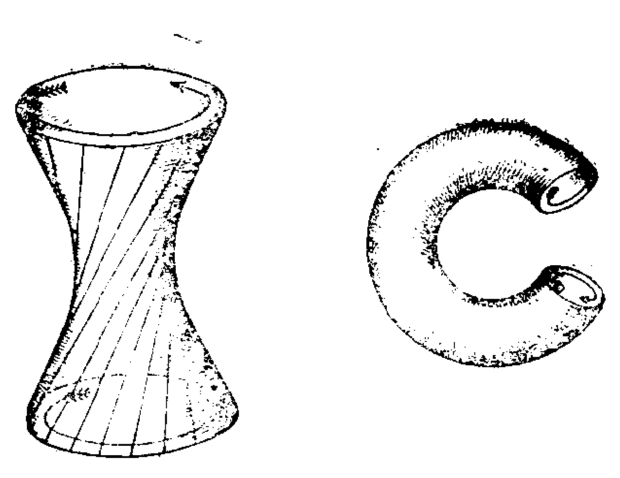


图 14.3.4.

$C(4,4)\subset P^7(\mathbf{R})$ 的情形是有趣的。根据 8.9.8，我们可得到它与 $\mathbf{R}^4$ 的旋转群 $O^+(4)$ 的一个同胚映射。

14.3.5 复数情形．当 $K=\mathbf{C}$ 时，据 13.4.2，正常的二次超曲面只有一种拓扑类型，即由方程 $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$ 在 $P^n(\mathbf{C})$ 内所定义的二次超曲面的类型。把这个二次超曲面的象记为 $C(n)$。这里不存在类似于 14.3.3 那样把 $C(n)$ 的拓扑归结为已知空间的拓扑所得到的结果。我们只有以下的：

14.3.6 命题. $C(2)$ 同胚于 S^2, $C(3)$ 同胚于 $S^2\times S^2$.

第一种情形可从 16.2.4 得到,第二种情形从 14.4.2 得到.

14.3.7 注. 读者猜想得到,数学家已经讨论了 $C(n)$ 的拓扑,这样的讨论已超出本书的范围.第一篇历史性文献是 [CE1]. 其实容易看出, $C(n)$ 同胚于 $P^n(\mathbf{R})$ 的有向直线所成的实 Grassmann 流形,它又可等同于齐次空间

$$O^+(n+1)/O^+(n-1)\times O^+(2)\ (\text{见}8.2.8)$$

但 Grassmann 流形的拓扑已被研究得很充分,特别是它引起了"示性类"的概念,可参看 [HU], 第 18 章.

对 $C(4)$ 和 $C(5)$ 的情形可作特殊的解释,这起因于 $O(5)$ 和 $O(6)$ 的典型群同构,参看 [PO], 第 266 页. 也见 20.5.7.

关于微分几何方面,有以下命题.

14.3.8 命题. 设 α 是 $P(E)$ 的正常二次超曲面,则 α 的象 $C=\operatorname{im}(\alpha)$ 是 $P(E)$ 的 C^∞ 子流形,当 $K=\mathbf{R}$ 时,余维数是 1, 当 $K=\mathbf{C}$ 时,余维数是 2, 此外在任一点 $m\in C$, 与 C 切于 m 的切空间 T_mC 自然地等同于商向量空间 $x^\perp/Kx$, 其中 $p(x)=m$ (也见 14.1.3.5).

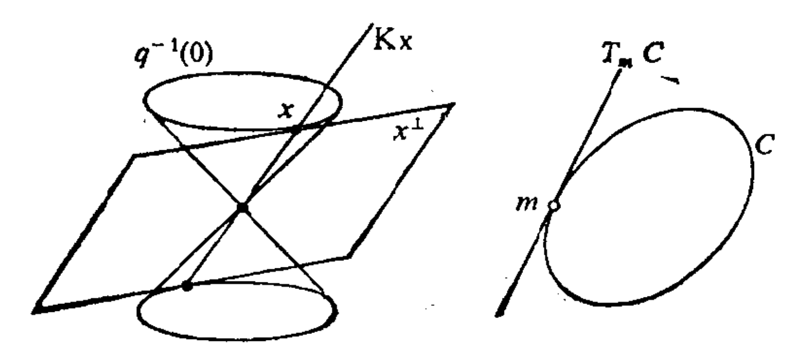


图 14.3.8.

我们利用 4.2.6. 由于 4.2.4.2 中的坐标图是 C^∞ 的,故可讨论如下. 如证 C 是在 $m=p(x)\in C$ 的邻域内的 C^∞ 子流形,我们选取 4.2.4.2 型的一个坐标图:

$$(v_1,,\cdots,v_n)\longmapsto p(v_1,\cdots,v_n,1)$$

使得 $m=p(0,\cdots,0,1)$. 方程 C 转移到 K^n 内后成为

$$f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}v_iv_j+2\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}v_i+a_{n+1,n+1}=0$$

(见 14.1.4.1)，而且导数 $f'(0,\cdots,0)$ 等于

$$\frac{\partial f}{\partial v_i}(0,\cdots,0)=2a_{i,n+1}.$$

因 $\det A\neq 0$ (见 14.1.4.2)，这些导数不全为零，因此

$$f'(0,\cdots,0)\neq 0,$$

故 C 是一个 C^∞ 子流形(甚至是实或复的解析流形，见 4.2.6)。至于切空间 T_mC，它转移到 K^n 内后由 $(f'(0,\cdots,0))^{-1}(0)$ 给出，从而由方程 $\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}y_i=0$ 给出。但 $x^\perp$ 由 $P(x,y)=0$ 给出，即 $\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}y_i+a_{n+1,n+1}y_{n+1}=0$，当我们置 $y_{n+1}=0$ 时，这个方程化成前一方程。而令 $y_{n+1}=0$ 又恰好对应于作商空间 $x^\perp/Kx$ (也见 13.1.2)。

若 α 不是正常的，则要利用 14.1.7.1，也见 14.8.5。关于这里用到的微分几何，可参考 [B-G]，特别是其中的 2.5.7 及 2.6.15 两节。

14.4 当 n=4 及 q 为中性时二次曲面的性质

这里我们研究 $(E,q)=\mathrm{Art}_4$ 的特殊情形，但 K 任意。首先，只要把 13.7.11 的结果翻译到 $P(E)$ 内即可，我们还记得那里有一个完全初等的证明 13.7.11.2。

14.4.1 命题. 设 $C=\mathrm{im}(\alpha)$ 是 $P(E)$ 的二次曲面 α 的象集，其中 $\dim P(E)=3$，α 的一个方程 q 是中性型(见 13.1.4.3)，则 C 包含两族直线 Ξ，Θ，它们满足：

(i) $\forall m\in C$ 存在唯一的 $X\in\Xi$，$T\in\Theta$，使得 $m\in X$ 及 $m\in T$；

(ii) $\forall x\in\Xi\forall T\in\Theta$：$X\cap T$ 由 C 中的一点构成；

(iii) $\forall X,\ X'\in\Xi\forall T,\ T'\in\Theta$；$X\cap X'=\emptyset$ 或 $X=X'$，

$T\cap T'=\emptyset$ 或 $T=T'$.

这两个直线族称为 α 的两个母线族.

14.4.2 推论. 存在自然双射

$$\varphi: C\rightarrow P^1(K)\times P^1(K).$$

此外若 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$, 这些 φ 都是同胚.

固定 $X_0\in\Xi$, $T_0\in\Theta$, 且置 $\varphi(m)=(T(m)\cap X_0, X(m)\cap T_0)$, 这里的 $X(m)$ (相应地: $T(m)$) 是 Ξ (相应地: Θ) 中过 $m\in C$ 的唯一母线. 由 14.4.1 (i) 可知 φ 是确定的, 而且 14.4.1 (ii) 表明 φ 是从 C 到 $X_0\times T_0$ 上的双射, 后者同构于 $P^1(K)\times P^1(K)$. 剩下要证当 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时, 这是同胚. 由于这里出现的都是紧集, 故只需证 φ 的连续性即可, 而连续性很易从 13.7.11.2 的分式得出.

反之, 在任何三维射影空间内可以几何地构造有中性方程的二次曲面的象集, 这可有三种方法. 以下是第一种.

14.4.3 命题. 设 $P(E)$ 是三维的, D, D', D'' 是 $P(E)$ 中彼此都没有公共点的三条直线, 则存在同时与 D, D', D'' 相交的直线, 这些直线的并集就是具有中性方程的二次曲面的象集.

实际上由 14.2.4, 存在二次曲面 α, 其象集 $C=\mathrm{im}(\alpha)$ 包含 $D\cup D'\cup D''$. 首先验证 α 是正常的. 我们利用归谬法. 设 $m\in p(\mathrm{rad}(q))$, 并设 $m\notin D$, 则根据 14.1.7.1, 象集 C 包含整个平面 $\langle m, D\rangle$. 但这时与 D', D'' 都相交的直线必与 $\langle m, D\rangle$ 相遇, 从而与 C 有三个公共点, 所以整条直线都在 C 内(见 14.1.3.4). 但与 D', D'' 都相交的直线充满了整个 $P(E)$ 导致矛盾. 现在由于 q 非退化且 C 包含一条直线, 据 13.3.4.2 可知 q 是中性的.

为了发现另两种方法, 首先我们注意到:

14.4.4 引理. 设 C 如 14.4.1 所述, $(X_i)_{i=1,2,3,4}\subset\Xi$, 则四个点 $T\cap X_i$ 的交比 $[T\cap X_i]$ 与 $T\in\Theta$ 无关. 我们称之为 (X_i) 的交比, 记为 $[X_i]$.

取定 $T_0\in\Theta$ 且设 $P_i=\langle X_i, T_0\rangle$ 是由 X_i 及 T_0 生成的平面. 但对任一 $T\in\Theta$, 有 $P_i\cap T=X_i\cap T$, 从而据 6.5.2 有

$[X_i \cap T] = [P_i]$，这个交比确与T无关.

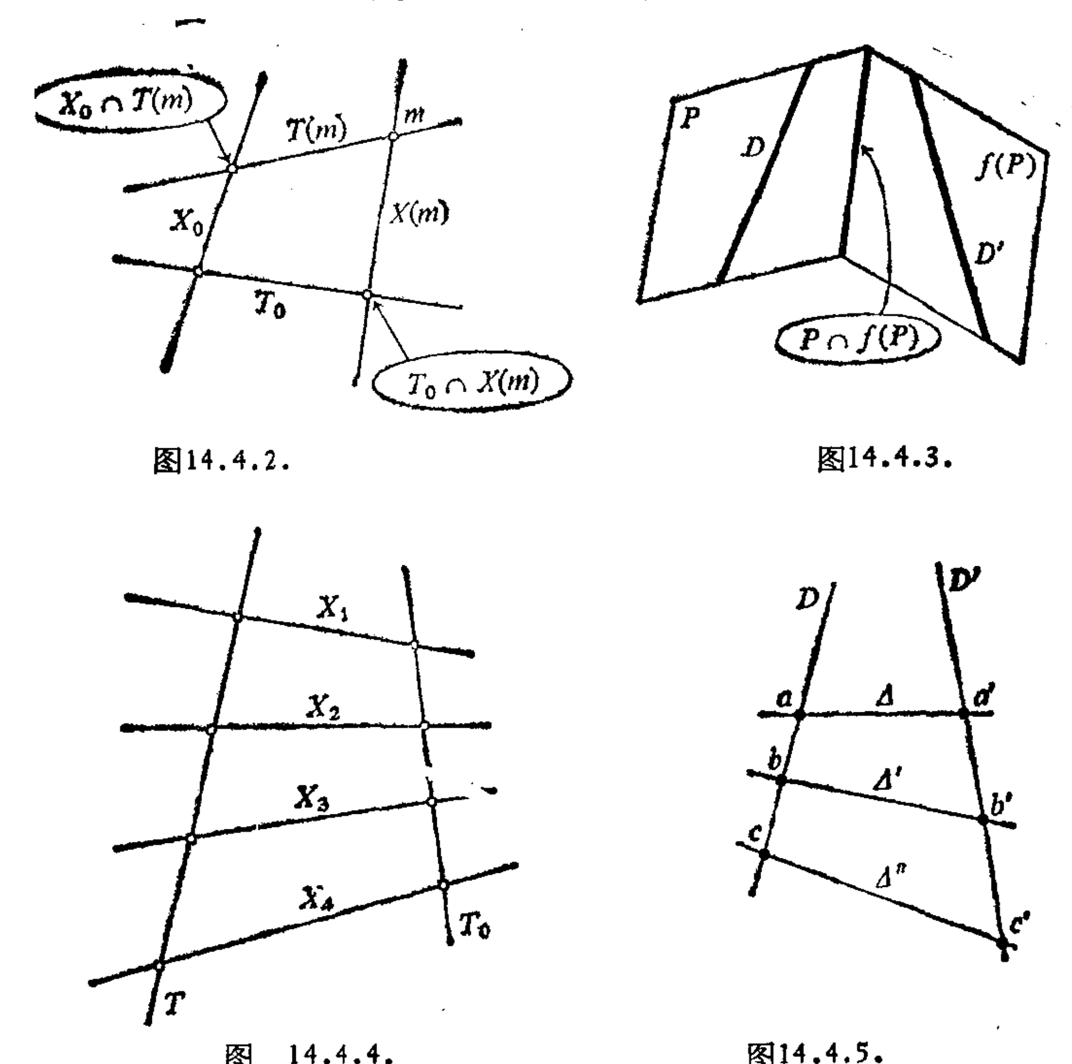


图14.4.2.　　图14.4.3.

图　14.4.4.　　图14.4.5.

14.4.5　推论. 设 D，D' 是 $P(E)$ 的两条直线（这里 $P(E)$ 是三维的）使得 $D \cap D' = \emptyset$ 且 $f \in \mathrm{Isom}\,(D;D')$ 是D与 D' 间的单应，则 $\{\langle m, f(m)\rangle : m \in D\}$ 是具有中性方程的二次曲面的象. 对偶地，设 f 是在过D的平面束$\mathscr{F}$与过 D' 的平面束间的单应，则 $\{P \cap f(P) : P \in \mathscr{F}\}$ 是具有中性方程的二次曲面的象.

对偶的断言可从第一个断言及 6.5.2 得出. 为证第一个断言可取定三个点 a，b，$c \in D$，其象为 $a' = f(b)$，$b' = f(b)$，$c' = f(c) \in D'$. 只需把 14.4.4 应用于过三条直线 $\Delta = \langle a, a'\rangle$，$\Delta' = \langle b, b'\rangle$，$\Delta'' = \langle c, c'\rangle$ 的二次曲面即可(见 14.4.3 及 6.1.5).

14.4.6　例. 设 D, D' 是三维欧氏仿射空间X 中的两条直线，$D \cap D' = \emptyset$，且两个点 $m(t)$，$m'(t)$ 在 D，D' 上作匀速运动，

则当 t 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，仿射直线

$$\langle m(t),\ m'(t)\rangle$$

描出了 X 的一个仿射二次曲面，这是一个双曲抛物面(见 15.3.3.3).

这个结果新近获得了重要的实际意义：建筑师们很容易实现用预应力混凝土构成的拱顶，但有一个条件，即拱顶必须由直线形成(这相当于应力索). 当然，最简单的方法是在直线状的支撑物上每隔相等距离做一个受力点，再把这些钢索张紧在支撑点间. 参看图 14.4.7.1 的说明及 [JE]，178—197 页. 在射影空间的情形不能完全画出 C，这是 4.3.9.1 的推论.

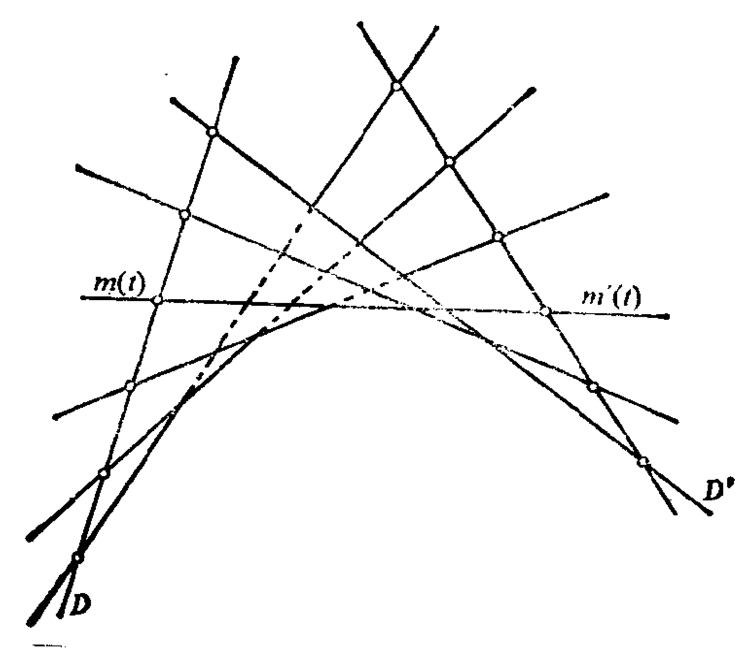


图 14.4.6.1.

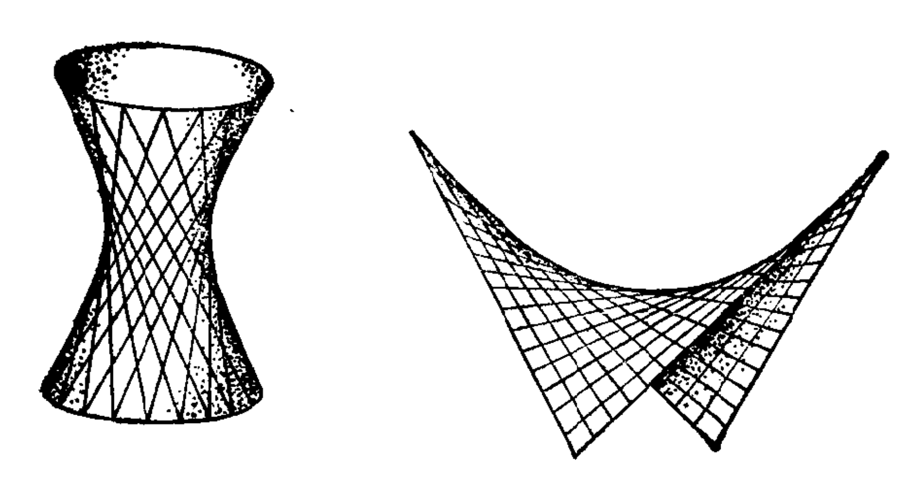


图 14.4.6.2.

14.4.7 注. 若 $n=3$, $K=\mathbf{C}$, 则可发现任一正常二次曲面 α 的象 C 内包含有很多直线,事实上过每个点 m 有两条不同的直线,因为由 14.1.7.2 可知 C 在 m 的切平面割 C 于两条不同的直线，这一事实与 13.1.4.3 一致.

反过来,上面所述表明 14.4.1 中 C 在 m 的切平面正是含 $X(m)$ 及 $T(m)$ 的平面.

一个欧氏球面含有直线!但这是就下述意义而言的:设 $S\subset\mathbf{R}^3$ 是单位球面,把 $\mathbf{R}^3$ 复化为 $\mathbf{C}^3$, $\|\cdot\|^2$ 复化为 N^C (见 9.5.5, 14.1.3.7), 则可得到 S 的复化 $S^C=\{z\in\mathbf{C}^3: N^C(z)=1\}$. 这是 $\mathbf{C}^3$ 的仿射二次曲面(见 15.1.3.2), 从而含有两族母线 (见 14.4.1). 把 (S^C 的) 这些直线称为 S 的迷向直线. 关于上述讨论的应用可参见 [DX], 187—234 页, [DQ], 147 页,经整理的形式可见 [DE5], 144页.

人们曾探讨过 Fedala 水塔的形状,以便能用平板作模板,用直钢筋提供预应力. 单叶双曲面因为有两族母线，故是满足这些条件的理想形状. 它可被沿着两条母线在两个方向上接受预应力. 双重预应力保证混凝土不会产生裂缝,这正是水塔密封性的首要条件.

图为完工后的水塔，其形状是单叶双曲面. 这种形状允许沿着两个方向接受线性预应力;因为曲面包含两族直母线.

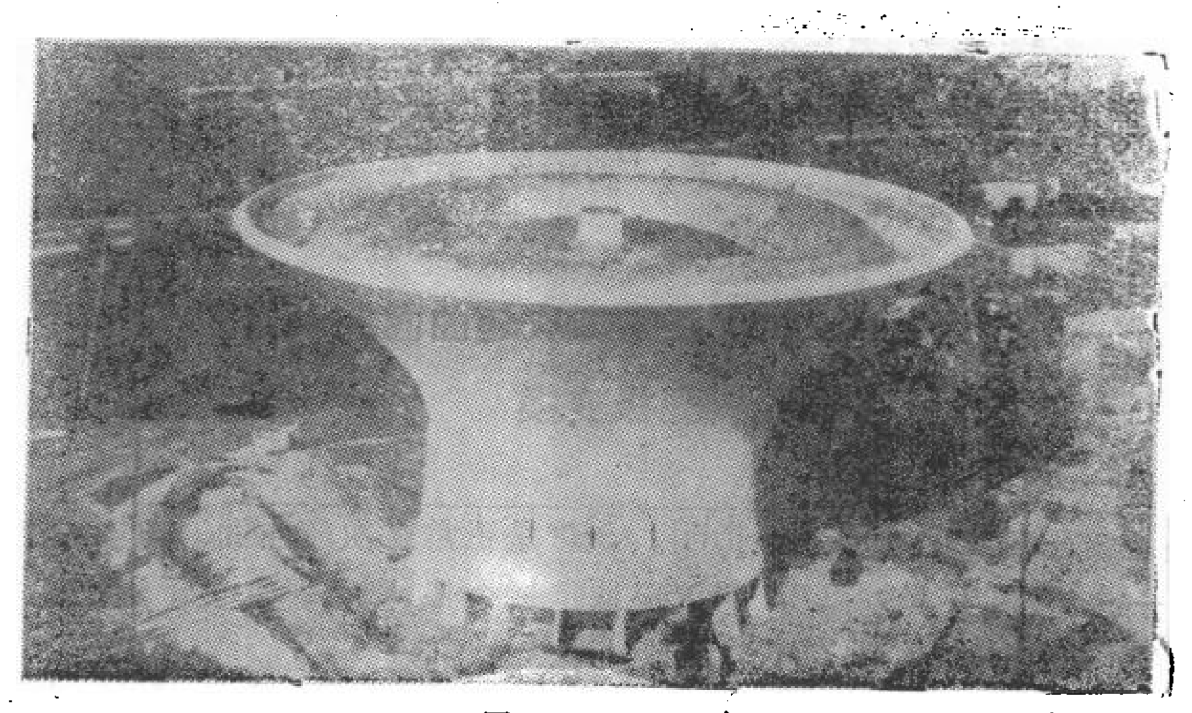


图 14.4.7.1.



图 14.4.7.2.

14.5 关于正常二次超曲面的对偶：配极变换

在本节中除非另外指明，α 总是正常二次超曲面，q 是 α 的一个方程，其极型是P. 若 E 已取定一个基，则 A 是 q 关于这个基的矩阵，且 $C=\operatorname{im}(\alpha)$.

14.5.1 定义. 由 13.2.1，α 通过 q 确定一个同构 $\varphi: E\to E^*$，从

而导出射影空间的同构 $\phi: P(E) \to P(E^*)$. 按照 4.1.3.5, 我们可把 $P(E^*)$ 等同于 $P(E)$ 的超平面集 $\mathscr{H}(E)$. 根据 4.5.4 及 14.1.1, 映射 ϕ 仅依赖于 α (与它的方程 q 无关), 故称 ϕ 为关于正常二次超曲面 α 的配极变换. 若 $m \in P(E)$, 则称 $\phi(m) \in \mathscr{H}(E)$ 为 m 的配极超平面, 记为 $m^\perp$. 若 $n = 2$ 则称为 m 的配极直线.

更一般地, $P(x, y) = 0$ 仅与 $m = p(x)$, $n = p(y)$ 有关 (与 x, y 无关), 也仅与 α 有关(与 P 无关), 则称 m 和 n 关于 α 共轭, 记为 $m \perp n$. 这个关系是对称的. 对任一子集 $S \subset P(E)$, 置 $S^\perp = \{n \in P(E): m \perp n \forall m \in S\}$. 我们总是有 $\langle S \rangle^\perp = S^\perp$, 且 $S^\perp$ 总是一个子空间. 对于子空间 S, T, 有 $S^{\perp\perp} = S$, $\dim S + \dim S^\perp = \dim P(E) - 1$,

$$(S \cap T)^\perp = \langle S^\perp \cup T^\perp \rangle, \ \langle S \cup T \rangle^\perp = S^\perp \cap T^\perp.$$

$S^\perp$ 称为 S 的配极子空间. 当 S 是超平面时, 点 $S^\perp$ 称为 S 的极. 上述内容不过是把 13.3.2 翻译到 $P(E)$ 内. 我们也说 S 和 $S^\perp$ 是(关于 α) 共轭的.

14.5.2 例

14.5.2.0 若 E 是欧氏向量空间, $\|\cdot\|^2$ 是 α 的方程, 则关于 α 的配极变换就是 E 内通常的正交性. 这是配极变换很自然但 $\operatorname{im}(\alpha) = \emptyset$ 的一个典型情形.

14.5.2.1 $m \in \operatorname{im}(\alpha)$ 的超切平面是 $m^\perp$ (见 14.1.3.5).

14.5.2.2 若 $m \in n^\perp$, 则 $n \in m^\perp$, 因为"m, n 共轭"的关系.

14.5.2.3 若 $D = \langle m, n \rangle$ 是一条直线, $m \neq n$, 则 $D^\perp = m^\perp \cap n^\perp$.

14.5.2.4 **遗传性.** 设 T 是一个子空间, 使 $\alpha \cap T$ 仍是正常的 (见 14.1.3.3), 则若 $m \perp n$ (关于 α) 且 $m, n \in T$, 我们关于 $\alpha \cap T$ 仍有 $m \perp n$.

14.5.2.5 **一维情形.** 设 D 是射影直线, α 是 D 的正常二次超曲面, 而且 α 的象集非空; 根据 14.1.3.2, 它的象由 2 个点 a, b 构成, 则(见 6.4.1):

$$m \perp n \Longleftrightarrow [a, b, m, n] = -1.$$

为了看出这一点，我们可在D上取一个齐次坐标(x, y)使得α的一个方程是$q=2xy$（见14.2.8.1）．则(见13.1.3.6)：$(x, y)\perp(x', y')\Longleftrightarrow xy'+x'y=0$；由于$a=p((1,0))$，$b=p((0,1))$，从6.2.3即可得断言．

14.5.2.6 应用14.5.2.4及14.5.2.5即可看到若直线$\langle m, n\rangle$与C交于a，b，则$m\perp n$等价于$[a, b, m, n]=-1$．再应用6.4.4，我们可由此导出m的配极平面$m^{\perp}$的几何作法，见图14.5.2，这里当然假设C包含足够多个点．

14.5.2.7 α的过m的切线与$\mathrm{im}(\alpha)$的接触点是$\mathrm{im}(\alpha)\cap m^{\perp}$的点(图14.5.2)．

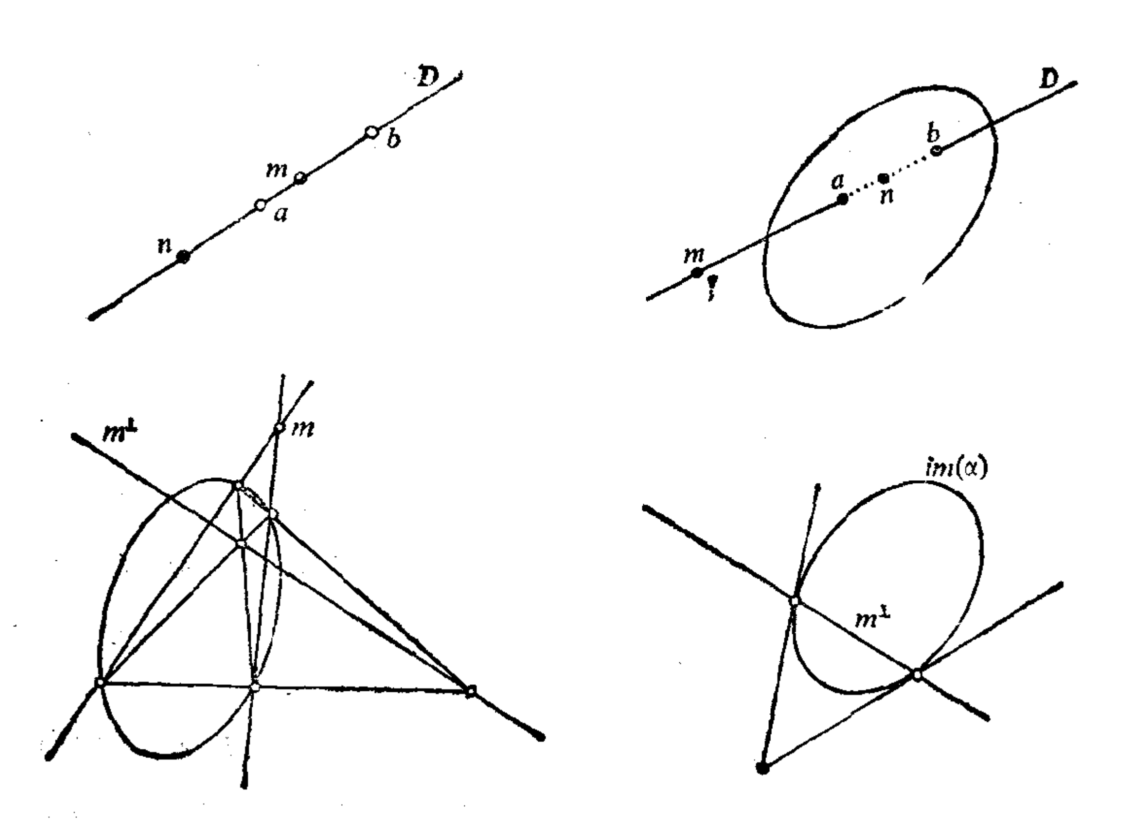


图 14.5.2.

14.5.3 显式计算． 根据13.1.2及13.1.3.6，$p(x)=m$及$p(y)=n$共轭的充要条件是

$$^{t}XAY=0, \text{或} \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j=0, \text{或} \sum_i \frac{\partial q}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_{n+1})y_i=0.$$

例如 x 的配极超平面是 $\sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j=0$。为了找出超平面 $\sum_i \xi_i y_i=0$ 的极，必须计算A的逆阵. 据 13.2.0, 极 x 使得 $\varphi(x)=\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_{n+1})$，因此

$$x=\varphi^{-1}(\xi),$$

即

$$x\longleftrightarrow X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ \vdots\\ x_{n+1}\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \vdots\\ \xi_{n+1}\end{pmatrix}.$$

我们也可解 $n+1$ 个线性方程的齐次方程组,参看 15.5.5.2.

另一类计算是求 α 的以 m 为顶点的切锥面，它被定义为过 m 的 α 的切线的并集. 记 $m=p(x_0)$，则当 α 限制于直线 $D=\langle x_0, x\rangle$ 上为退化时，x 属于这个锥面（参看 14.1.3.5），但关于 x_0 和 x 构成的基，$\alpha\cap D$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix}q(x_0) & P(x_0, x)\\ P(x_0, x) & q(x)\end{pmatrix}$，因此 14.1.4.2 表明我们的锥面方程是 $q(x_0)q(x)-(P(x_0, x))^2=0$. 当 $n=2$ 时即得到直线的集合. 需要时可参看图 14.7.4 或 14.5.2.7 节.

14.5.4 自配极单形，调和外切于一个二次超曲面的二次超曲面.

14.5.4.1 $P(E)$ 的一个单形 $\{m_i\}_{i=1,\cdots,n+1}$ 是 $n+1$ 个独立的点的集合（见 4.6.6），若 m_i 不全独立的，则此单形称为退化的. 若

$$m_i\perp m_j \forall i\neq j,$$

则称此单形关于正常二次超曲面 α 是自配极的. 若这确实是一个单形，则 m_i 的配极是超平面

$$\langle m_1,\cdots,\hat{m}_i,\cdots,m_{n+1}\rangle,$$

这对任一 i 成立. 单形 $\{m_i=p(x_i)\}$ 是自配极的等价于 $\{x_i\}$ 是 (E, q) 的正交基. 因此关于 α 的自配极单形总是存在的（见 13.4.1）. 与此相反，若 α, α' 是两个二次超曲面，13.5 表明同时关于 α 和 α' 为自配极的单形并不总是存在的. $n=2$ 时的全面的讨论可见 16.4.10.

14.5.4.2 现在我们要与两个正常二次超曲面 α, α' 打交道。设 q, q' 是 α, α' 的方程，φ, $\varphi': E \to E^*$ 是相关联的同构(见 14.5.1)。很自然地可以把这对二次超曲面跟同构(见 13.5.1) $f = \varphi^{-1}\circ\varphi' \in \text{Isom}(E)$联系起来，特别是可以考虑它的不变量：迹，行列式等等。在关于 K^* 作商空间后仍然有意义的是 f 的迹 $= 0$(对除去行列式以外的许多其它不变量也是如此)。这个条件可简单地用几何语言解释为：

14.5.4.3 命题. 若存在关于 α 的一个自配极单形 $\{m_i\}$，它又是内接于 α'' 的，即 $m_i \in \text{im}(\alpha')\forall i$，则 f 的迹 $= 0$. 反之，若 K 是代数闭域且 f 的迹 $= 0$，则对任意的 $m \in \text{im}(\alpha')\backslash\text{im}(\alpha)$，存在关于 α 的自配极单形 $\{m_i\}$，它内接于 α' 且使 $m = m_1$.

必要性的证明是显然的。若 $m_i = p(e_i)$，则 $q = \sum_i a_{ii}x_i^2$ (见 14.5.4.1) 若，$q' = \sum_{i,j} a'_{ij}x_ix_j$，则条件 $q'(e_i) = 0$ 导致 $a'_{ii} = 0\forall i$. 从而

$$f\text{ 的迹} = \sum_i a'_{ii}a_{ii}^{-1} = 0\ (\text{见 } 13.2.0).$$

再考虑充分性，我们对维数作递推。首先设 $n = 1$，我们选取一个基 $\{e_1, e_2\}$ 使得 $m = p(e_1)$ 是被考虑的 $\text{im}(\alpha')$ 内的点，$n = p(e_2)$ 是它关于 α 的共轭，则 q 是形如 $ax^2 + cy^2$ 的，q' 是形如 $2b'xy + c'y^2$ 的。关于迹的条件是 $c^{-1}c' = 0$，这就是说 $c' = 0$，$q' = 2b'xy$，从而

$$n = p(e_2) \in \text{im}(\alpha').$$

再假设对 $n - 1$ 结论正确，设 $m \in \text{im}(\alpha')$，$H = m^\perp$ 是它关于 α 的配极超平面。记 $q = \sum_i a_{ii}x_i^2$，其中 $m = p(e_1)$，$q' = \sum_{i,j} a'_{ij}x_ix_j$，于是 $a_{11} = 0$，H 的方程是 $x_1 = 0$. 对于二次超曲面 $\alpha\cap H$, $\alpha'\cap H$ (它们是正常的，因 $m \notin \text{im}(\alpha)$)，与之相关联的同构的迹为

$$\sum_{i=2}^{n+1} a_{ii}^{-1}a'_{ii} = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ii}^{-1}a'_{ii} = 0;$$

由递推假设，在H内存在 $\{m_i\}_{i=2,\cdots,n+1}$，使得 $m_i \perp m_j \forall_{i\neq j}$ 关于α成立且 $m_i \in \operatorname{im}(\alpha')\forall i$. 并集

$$\{m\} \cup \{m_i\}_{i=2,\cdots,n+1}$$

符合命题要求.

14.5.4.4 注. 跟 10.10.3 及 16.6 相似，14.5.4.3 也是一种两者择一的命题：给出两个二次超曲面 α，α'，则或者不存在内接于 α' 的单形使它关于α是自配极的；或者这样的单形有无限多个（至少当K是代数闭域时）.

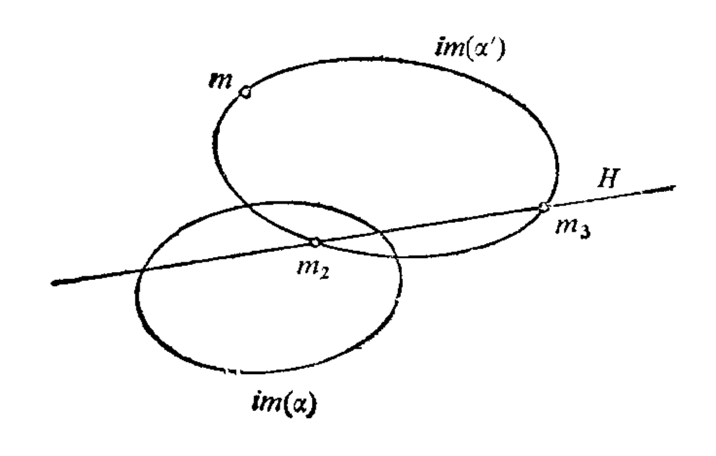
当 f 的迹 $=0$ 时，称 α' 调和外切于 α.

关于两个二次型相关联的不变量的另一种度量解释，见 15.6.4.

14.5.4.5 例. 设E是三维欧氏向量空间，$q' \in Q(E)$ 非退化，且象 $(q')^{-1}(0) \neq 0$，此时这个象是E内以0为顶点的锥面（图 14.5.4）. 置 $q=\|\cdot\|^2$，则 $P(E)$ 中内接于 $\alpha'=p(q')$ 并且关于 $\alpha=p(q)$ 为自配极的单形意味着（见 14.5.2.0）锥面中两两正交的三条直线. 由 14.5.4.3 的证明可看出，要保证存在这样的直线，必须在

$$q' = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$$

中有 $a+a'+a''=0$. 反之，若 $a+a'+a''=0$，则对锥面中任意直线D存在锥面的直线 D'，D''，使得 $D \perp D'$，$D' \perp D''$，$D'' \perp D$，也请参见14.8.9.



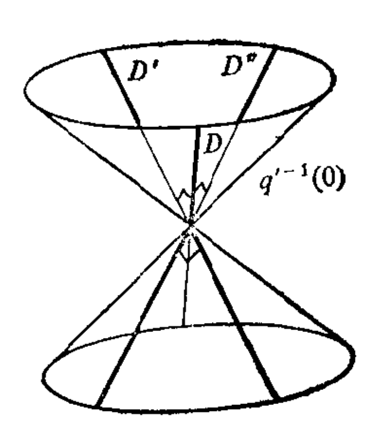


图 14.5.4.

14.5.4.6 PQ(E) 的超平面. 现在我们可以至少就一般的情形来答 14.2.5 提出的问题：PQ (E) 的超平面是怎样的？设 E 有一个任意的基，由 13.1.3.6，PQ (E) 的一个超平面可写成 $\sum_{i\leqslant j} a_{ij}\lambda_{ij}=0$，这里 λ_{ij} 是 K 的元素．记 Λ 为元素是 $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$ 的矩阵．条件 $\sum_{i\leqslant j} a_{ij}\lambda_{ij}=0$ 等价于 ($A\Lambda$) 的迹 $=0$．若这些 λ_{ij} 使 $\det\Lambda\neq 0$，则我们可写成 $A(\Lambda^{-1})^{-1}$ 的迹 $=0$，从而所考虑的超平面可几何地定义为跟一个方程由 Λ^{-1} 给出的二次超曲面调和外切的二次超曲面全体的集合．参见 14.8.8 及 14.8.10.

14.5.5 对合对射. 与正常二次超曲面相关联的配极变换 $\phi:P(E)\to\mathscr{H}(E)$ 有许多几何应用，我们以后将经常遇到．一个常被用到的性质是 14.5.2.2：若 $n\in\phi(m)$，则 $m\in\phi(n)$．因此很自然的想到要寻找满足 14.5.1 中某些性质，尤其是性质 14.5.2.2 的映射 $f:P(E)\to\mathscr{H}(E)$．完整的解答将在 14.8.12 中列出，或参看 [FL]，第 270 页．我们这里限于一种简单的情形：$f:P(E)\to\mathscr{H}(E)$ 是形如 $f=g$ 的，其中 $g\in \text{Isom}(E;E^*)$ (见 4.5)．对 $x\in E$，相应的正交子空间是 $\{y\in E:g(x)(y)=0\}$．因此我们要找出使

$$\forall x\forall y: g(x)(y)=0\Rightarrow g(y)(x)=0$$

的 $g\in\text{Isom}(E;E^*)$．为此，引入双线性型（不必是对称的）$P(x,y)=g(x)(y)$ 将是方便的．我们知道，对 $x\in E\setminus 0$，线性型 $y\longmapsto P(x,y)$ 及 $y\longmapsto P(y,x)$ 有相同的核，因此它们成比例．即 $\exists k(x)\in K^*:P(x,y)=k(x)P(y,x)$．利用与 8.8.5.1 的证明相同的论证，可见 $k(x)$ 与 x 无关：$P(x,y)=kP(y,x)\forall x,y\in E$ (k 是 K^* 内元素)．于是 $P(x,y)=k^2P(x,y)$．由于 g 是同构，存在 $x,y\in E$ 使 $P(x,y)\neq 0$，从而 $k=\pm 1$．$k=1$ 的情形就是关于极型 P 的正常二次超曲面的配极变换．$k=-1$ 的情形是新的．根据交错型的约化理论，此时 E 必须是偶数维的．它引出了令人感兴趣的几何现象并且立即解释了 4.9.12 中遇到的 Möbius 四面体的奇迹．详情可见 14.8.12，[FL]，第 270 页．

14.5.6 退化情形. 当 α 不再正常时，总能利用 $\varphi: E \to E^*$ 定义 $m^\perp$，即对 $m = p(x)$，定义 $m^\perp = \{p(y): P(x, y) = 0\}$；不过当 $x \in \mathrm{rad}(q)$ 时，$m^\perp$ 将是整个 $P(q)$，而不再是超平面. 此外可能有 $m^\perp = n^\perp$ 但 $m \neq n$. 为叙述简便起见，我们不讨论后一种情况的对偶性，但读者应把它作为练习加以讨论，因为很自然地会遇到这种情况. 实际上在二次超曲面束中往往有退化的二次超曲面. 请参见 16.4.10 中的一个例子.

14.6 对偶性:切面二次超曲面及切面方程

14.6.1 设 α 是 $P(E)$ 的正常二次超曲面，观察 α 在 $P(E^*) = \mathscr{H}(E)$ 内超切平面的集 $\{m^\perp: m \in \mathrm{im}(\alpha)\}$（见 14.5.2.1）。$\mathscr{H}(E)$ 的这个子集是怎样的？由 14.5.1，这就是 $\phi(\mathrm{im}(\alpha))$，因而是二次超曲面的象，即 $\mathrm{im}(\alpha^*)$，这里 α^* 是正常二次超曲面 $\alpha^* = \phi(\alpha)$，

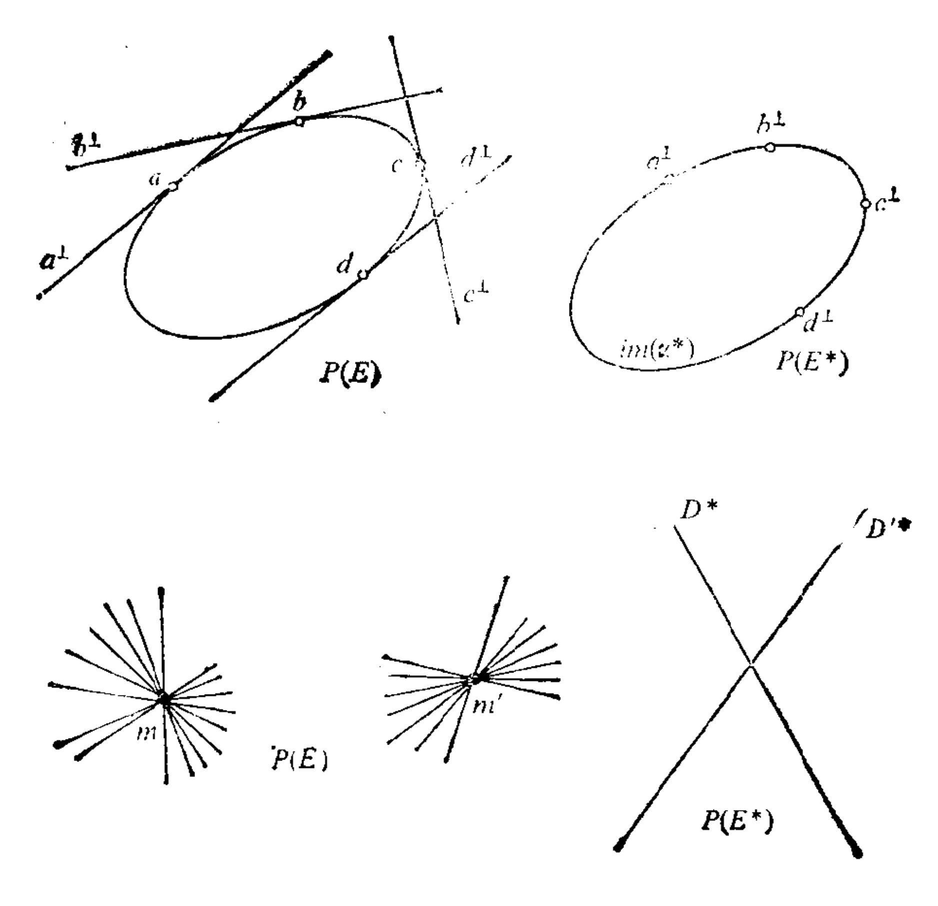


图 14.6.3.

由 α 的正常性有

$$\phi \in \mathrm{Isom}\,(P(E);\ P(E^*)).$$

若 A 是 α 的方程 q 关于 E 的一组基的矩阵，则根据 14.1.4.3 及 13.2.0，α^* 的方程 $(\varphi^{-1})^*(q)$ 关于 E^* 的对偶基的矩阵将是 ${}^tA^{-1}AA^{-1}=A^{-1}$. $(\varphi^{-1})^*(q)=q^*$ 称为 α 的切面方程。实际上 $q^*(\xi)=0$ 是使得超平面 $\xi^{-1}(0)$ 与 α 相切的充要条件。关于 ξ 的坐标 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_{n+1})$，这是 $\sum\limits_{i,j} a_{ij}^*\xi_i\xi_j=0$，其中 a_{ij}^* 是 A^{-1} 的元素，见 14.8.13。

14.6.2 定义. $P(E^*)$ 中的二次超曲面称为切面二次超曲面。二次超曲面的切面束就是 PQ (E^*) 中的一条直线。

14.6.3 例

14.6.3.1 对向量空间 F，记 $PPQ(F)$ 为 F 的正常二次超曲面集合，则 14.6.1 表明 $*$ 定义一个双射:

$$*:PPQ(E)\to PPQ(E^*),$$

并且 $**=\mathrm{Id}_{PPQ(E)}$. 但这个映射不能自然地扩张到整个 PQ (E) 上，我们下面就要看到这一点.

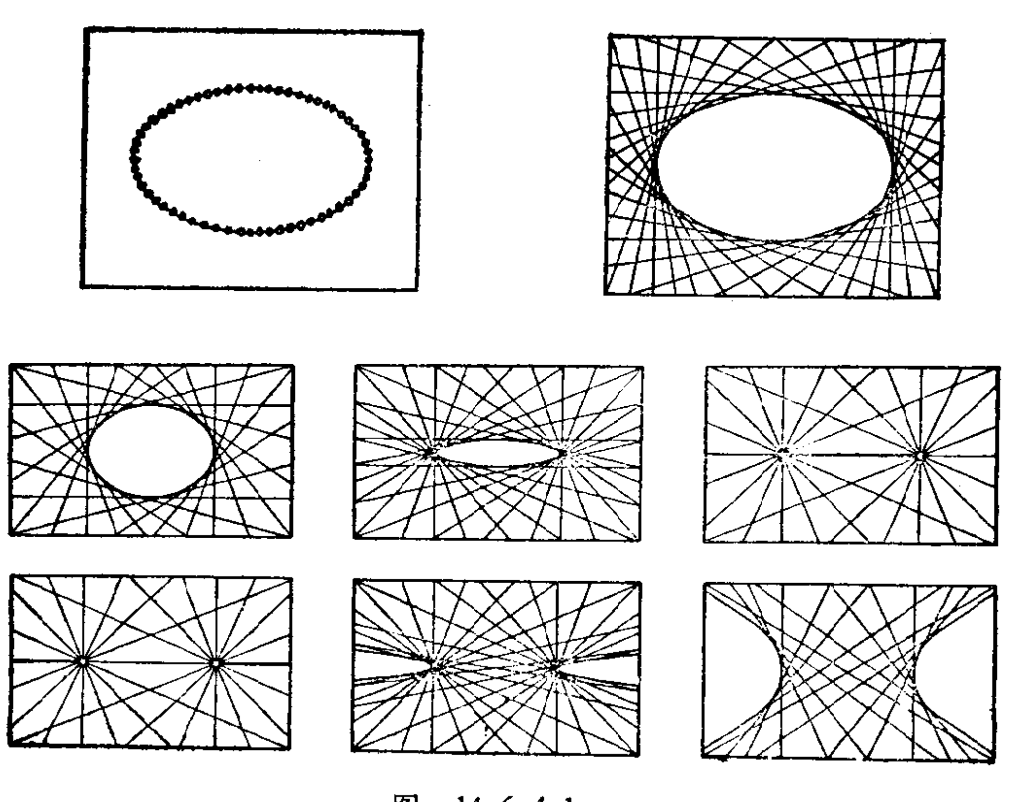


图 14.6.4.1.

14.6.3.2 设 $E=\mathbf{R}^3$，α^* 是 $P(E^*)$ 的圆锥曲线，其方程是 $2\xi\eta=0$，这里 $P(E^*)$ 的典范齐次坐标为 (ξ, η, ζ). 在方程为 $\xi=0$ 及 $\eta=0$ 的两条直线 D^*, D'^* 上，α^* 是退化的．在 $P(E)$ 内 $D^*\cup D'^*$ 中所有直线的集合就是所有过点 $(1, 0, 0)$ 或 $(0, 1, 0)$ 的直线的集合．这样的集合不可能是由 $P(E)$ 内一条圆锥曲线的切线所构成的集合（见 14.1.5.3）.

14.6.4 我们可如此来推广 14.6.1 和 14.6.3.1 的有关情况．设 α, β 在 $PPQ(E)$ 内，考察子集 $S=\{m^\perp: m\in \mathrm{im}(\beta)\}$，这里 $m^\perp$ 是 m 关于 α 的配极超平面．S 是否为切面二次超曲面的象：答案是：对

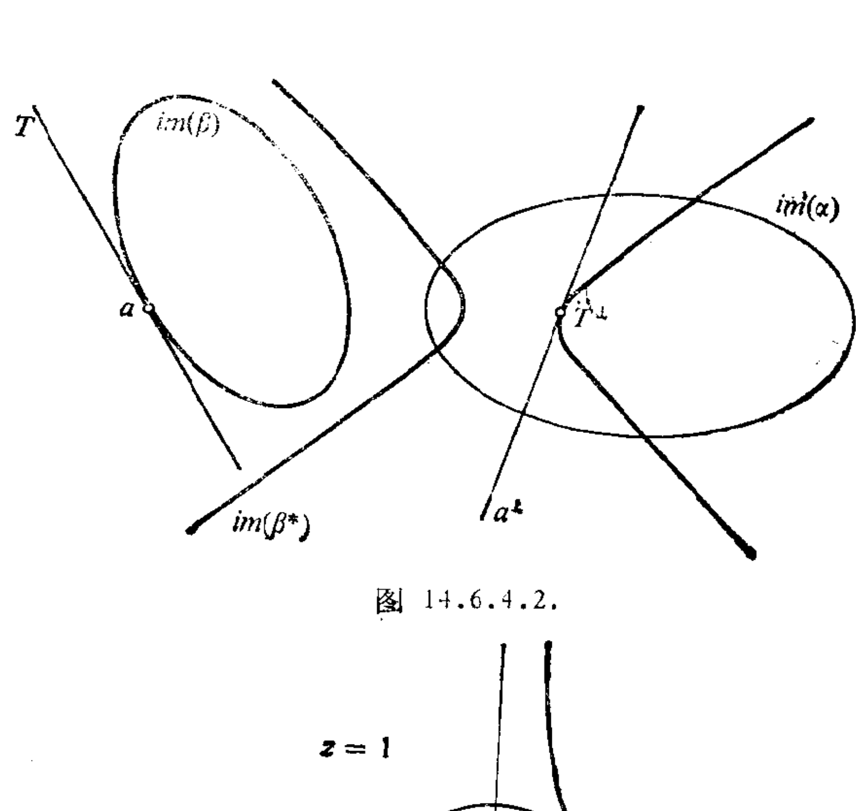


图 14.6.4.2.

图 14.6.5.

的，$S = \operatorname{im}(\phi_\alpha(\beta))$，其中 $\phi_\alpha: P(E) \to P(E^*)$ 是 14.5.1 中与 α 相关联的同构。应用 14.6.3.1 的 $*^{-1} = *$ 于 $\phi_\alpha(\beta) \in PPQ(E^*)$，从而最终可得到 $PPQ(E)$ 的一个二次超曲面，称它为 β 关于 α 的配极二次超曲面，记为 β_α^*。

若 A，B 是 α，β 关于 E 的一个基的矩阵，则根据 14.1.4.3，$\phi_\alpha(\beta)$ 关于 E^* 的对偶基的矩阵是 ${}^tA^{-1}BA^{-1}$，再根据 14.6.1，β_α^* 的矩阵是 $({}^tA^{-1}BA^{-1})^{-1} = AB^{-1}{}^tA$.

我们有 $(\beta_\alpha^*)_\alpha^* = \beta$. 若 $a \in \operatorname{im}(\beta)$，则 $a^\perp$ 切 $\operatorname{im}(\beta_\alpha^*)$ 于 $T^\perp$，这里 T 是切 β 于 a 的超平面。

14.6.5 例

14.6.5.1 在仿射的情形，我们让读者自己去阐明上面所述内容与 11.1.5 之间的关系。

14.6.5.2 若

$$q = x^2 + y^2 - z^2,\ q' = x^2 - y^2 - z^2,$$

分别表示 α，β，则 $\beta_\alpha^* = \beta$（图 14.6.5；关于这一主题可参看 14.8.14）。

14.7 正常二次超曲面的群

14.7.1 设 α 是 $P(E)$ 的正常二次超曲面，q 是 α 的方程，则任一 $f \in O(q)$ 提供了 $\underline{f} \in GP(E)$ 使得 $\underline{f}(\operatorname{im}(\alpha)) = \operatorname{im}(\alpha)$. 其逆是错的：若 $\operatorname{im}(\alpha) = \varnothing$，则任一 $g \in GP(E)$ 使 $\operatorname{im}(\alpha)$ 稳定！与此相对的是当 K 是代数闭域时，14.1.6.2 表明 $\underline{f}(\operatorname{im}(\alpha)) = \operatorname{im}(\alpha)$ 确实等价于 $f \in O(q)$. 这充分说明了以下定义是合理的。

14.7.2 定义. 若 q 是二次超曲面 α 的方程，则定义 $PO(\alpha) = \{\underline{f} \in GP(E): f \in O(q)\}$ 为二次超曲面 α 的群。也称 $PO(\alpha)$ 为 α 的射影正交群。

从 4.5 可知 $PO(\alpha)$ 仅与 α 有关，而与 q 的取法无关。从 13.9.13 可推导出 $PO(\alpha) = O(q)/\pm \mathrm{Id}_E$. 当 $n+1$ 是偶数时，因 $-\mathrm{Id}_E \in O^+(q)$，故可定义 $PO^+(\alpha)$. 当 $K = \mathbf{R}$ 时这与 $P(E)$ 的

可定向性有关.

14.7.3 从 13.7.5 及 13.7.9 可直接推导出: im (α) 中所含的极大子空间有相同的维数,等于 q 的指数减 1, 它们在 PO (α) 的作用下都位于同一轨道上. 当 $P(E)$ 是奇数维时,关于 $\mathrm{PO}^+(\alpha)$ 的作用也有同样的性质, 但有唯一的例外: 当 q 为中性时. 此时有两个不同轨道. 特别是, PO (α) 作用在 im (α) 的点上总是可迁的,而当 $\mathrm{PO}^+(\alpha)$ 存在时,它也有同样性质.

举例来说,这可应用于 14.4 的二次超曲面.

14.7.4 超平面对称的几何实现. 设 $\alpha \in PPQ(E)$, 其方程是 q, $f \in O(q)$ 是关于超平面 $U \subset E$ 的对称(见 13.6.6), 相应的正交直和分解为 $E = U \overset{\perp}{\oplus} D$; 因而$D$是直线. 据 6.4.6, 我们可按如下所述用几何方式得到 $\underline{f} \in \mathrm{PO}(\alpha)$: 若 $m = p(D)$, $H = p(U)$, 则 $t \in P(E) \backslash m$ 的象 $\underline{f}(t)$ 可作为直线 $\langle m, t \rangle$ 上使 $[m, \langle m, t \rangle \cap H, t, \underline{f}(t)] = -1$ 的点而被得到. 此外,H当然就是m关于 α 的配极超平面.

14.5.2.6 证明了 im (α) 作为整体关于 $\underline{f}$ 是稳定的. 请注意, 根据 13.7.12, 这些对称生成 $\mathrm{PO}(\alpha)$.

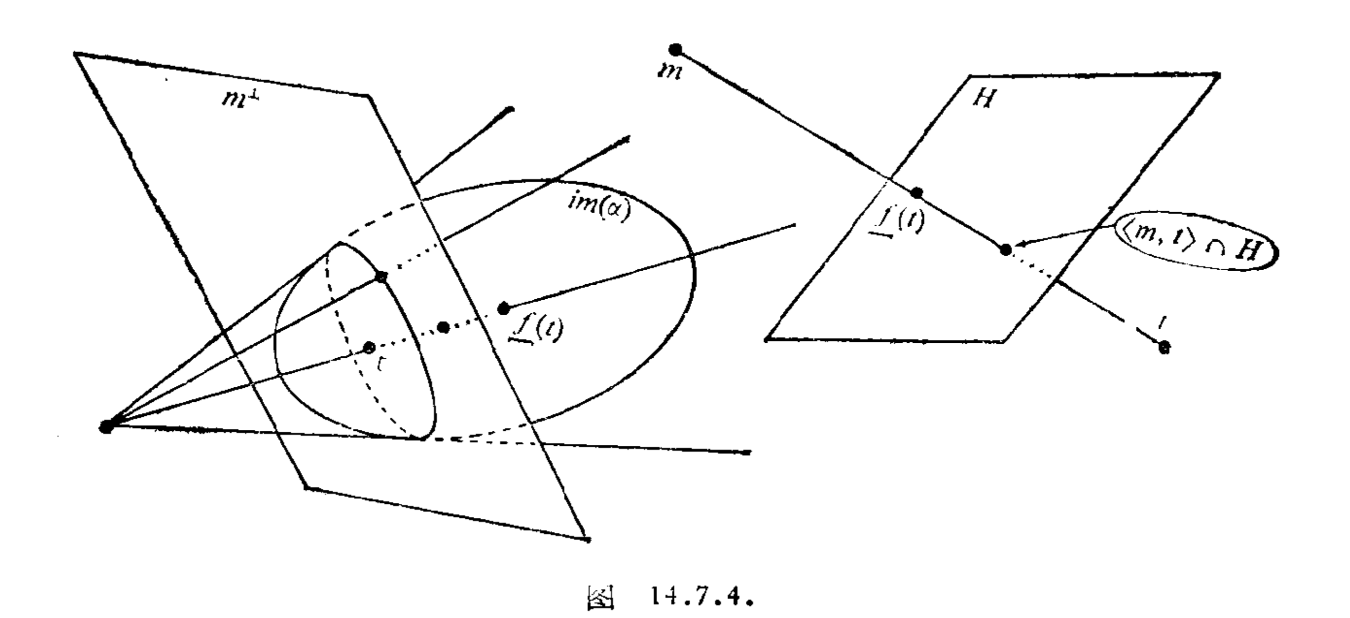


图 14.7.4.

14.8 练　习

14.8.1 当 $K=\mathbf{R}$ 以及 $q(E)=\mathbf{R}$ 时，证明 14.1.6.2 仍然正确。

14.8.2 给出一个点 $m\in P(E)$ 以及一条直线 $D\ni m$，证明 $\{\alpha\in \mathrm{PQ}(E):m\in \mathrm{im}(\alpha)$ 且D与α相切$\}$是一个子空间。若 $m\notin D$ 这是否仍成立？

14.8.3 当 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时研究二次超曲面的象的可定向性。

14.8.4 证明 $C(\mathrm{n})$（见 14.3.7）同胚于 $P^n(\mathbf{R})$ 的有向直线的 Grassmann 流形。

14.8.5 研究一个退化二次超曲面的象能否成为子流形（$K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$）。

14.8.6 设$\mathscr{F}$是 $P(E)$ 的二次超曲面束，α 是正常二次超曲面．证明$\mathscr{F}$至少包含一个二次超曲面调和外切于 α，且若这样的二次超曲面有两个，那末$\mathscr{F}$内所有二次超曲面都如此．

14.8.7 在 $P(E)$ 内给出了 $n(n+3)/2$ 对点 $\{m_i,\ n_i\}$，证明至少存在一个二次超曲面使 $m_i\perp n_i$ 对所有 i 成立（在 14.5.6 的范围内考虑）。

14.8.8 当 $\det \Lambda=0$ 时研究 14.5.4.6。

14.8.9 当 $K=\mathbf{R}$，α' 任意且 $\mathrm{im}(\alpha)=\emptyset$ 时证明 14.5.4.3 仍然正确。

14.8.10 设 α' 是正常二次超曲面，若 $\varphi'^{-1}\circ\varphi$ 的迹 $=0$，则称 α' 调和内切于 α。用几何方式解释这个条件。

14.8.11 设 α 是正常圆锥曲线，$\{a,\ b,\ c\}$，$\{a',\ b',\ c'\}$ 是关于 α 的两个自配极三角形．证明这六个点 a,b,c,a',b',c' 属于同一条圆锥曲线。

14.8.12 **对射**（需要时可见 [FL]，第 260 页以后）。

14.8.12.1 设 Γ 是 $P(E)$ 的子空间的集合．我们把具有以下性质的任一双射 $f:\Gamma\to\Gamma$ 称为 $P(E)$ 的对射：对使 $U\subset V$ 的任

意 $U, V \in \Gamma$，有 $f(U) \supset f(V)$. 证明若 m 是 $P(E)$ 的一个点，则 $f(m)$ 是 $P(E)$ 的超平面. 证明存在 $P(E)$ 的一个典范对射.

14.8.12.2 若 $f^2 = \mathrm{Id}_f$，则称对射 f 是对合的. 利用射影几何基本定理(见 5.4.8) 证明若 f 是对合对射，则 f 可以下述类型的某一个映射 $g: P(E) \to P(E^*)$ 得出:

(i) 存在交错双线性型 P 使得 $\forall m = p(x) \in P(E)$，有 $f(m) = p(\{y \in E : p(x, y) = 0\})$;

(ii) 同样构造法，但这里 $\sigma: K$ 》是 K 的对合自同构，P 关于 σ 是斜线性的，即 $P: E \times E \to K$ 关于 x 是线性的，且满足 $P(y, x) = \sigma(P(x, y)) \forall x, y \in E$.

14.8.12.3 研究不一定是对合的对射.

14.8.12.4 证明(见 4.9.12) 若 $\dim P(E)$ 是奇数，则存在 $P(E)$ 的一对对单形，使每对单形中第一个单形的顶点都在第二个单形的一个面内，而第二个单形的顶点都在第一个单形的一个面内.

14.8.12.5 设 $\mathscr{C}$ 是 3 维欧氏仿射空间 X 的挠量 (参看 [LF-AR]，第 4 章或 [BE] 第 3 章). 在每个点 $m \in X$，我们考虑通过 m 且关于 $\mathscr{C}$ 的矩为零的直线的集合，证明这些直线构成一个平面 $H(m)$. 证明映射 $m \longmapsto H(m)$ 是 X 的射影完备化空间 $\tilde{X}$ (见 5.1) 的一个对合对射在 X 上的限制，这个对合对射是与一个交错型相关联的.

14.8.13 计算二次超曲面 $\sum_{i=1}^{n+1} k_i x_i^2 = 0$ ($k_i \neq 0 \forall i$) 以及 13.9.6 及 13.9.8 中的正常二次超曲面的切面方程.

14.8.14 已知具有公共自配极单形的两个正常二次超曲面 β, γ，找出正常二次超曲面 α 使得 $\gamma = \beta^*_\alpha$. 当 β, γ 是任意正常圆锥曲线时，借助于 16.4.10 讨论同一个问题.

14.8.15 研究以下问题: 找出与 $P(E)$ 内 $n(n+3)/2$ 个已知超平面相切的正常二次超曲面 α. 当 $n = 2$ 时作完整的讨论 (见 16.1.4).

14.8.16 Gérardin 的实现或: 一条射影直线的二次超曲面及圆锥

曲线．设E是特征数不为2的域K上的二维向量空间．把与它相关联的射影直线记为$D = P(E)$，End E 是E的一切自同态的向量空间，$P(\text{End } E)$是相关联的射影空间．证明行列式映射

$$\det: \text{End } E \to K$$

是一个二次型．把与它相关联的$P(\text{End } E)$内的二次曲面记为$Q(D)$．证明$Q(D)$是一个中性二次曲面．研究它的母线与E的自同态间的对应关系．

研究与迹线性型：

$$\text{tr}: \text{End } E \to K$$

相关联的超平面截$Q(D)$所得的圆锥曲线$C(D)$．是否任一圆锥曲线都能如此实现为一个$C(D)$？对$Q(D)$也有同样的问题．

更进一步的细节可见 [GN]，第 IV 章．

第15章　仿射二次超曲面

除了由任一方向上直径的存在性来刻划二次超曲面(见15.5.9)以及掌握从仿射空间到它的射影完备化空间的过渡外，这一章并不含有真正的难点.这里列出的概念及结果都是第3章及第14章联系起来而引出的. 但这样所得的产物即仿射二次超曲面具有相当重要的实际意义. 实际上在三维空间或平面中除去直线与平面外最简单的曲线与曲面就是圆锥曲线与二次曲面，我们到处都能遇到它们. 在数学、力学、物理、天文学中都会用到. 作为第一级近似，行星和彗星都描绘出圆锥曲线；同样，Eiffel 铁塔的顶部以及 Montparnasse 高层的顶部在有风时都画出一个椭圆轨迹，它们的振幅应保持在适当范围内以使那里的人们不致感到不适. 抛物线成为使两条直线接合的最简单方法(见 15.7.6).

欧氏圆锥曲线将是第17章的唯一研究对象.有关仿射及射影二次超曲面的更多内容可参看 [DQ], [ML], [PE], [EE].

本章中我们将使用来自第5章的以下概念:

X 是在特征数 $\neq 2$ 的域 K 上的有限 $n \geqslant 1$ 维的仿射空间. $\hat{X}$ 是与 X 相关联的 $n+1$ 维通用向量空间, $\tilde{X} = P(\hat{X})$ 是 X 的射影完备化空间,则 $\tilde{X} = X \cup \infty_X$ 且 $\infty_X = P(\vec{X})$ 称为 X 的无穷远超平面.

$Q(X) = \mathscr{P}_2(X)$ 表示 X 上仿射二次型的向量空间(见 3.3). 对 $q \in Q(X)$, 它的符号 $\vec{q}$ 在 $Q(\vec{X})$ 内. 与 q 也可联系一个 $\hat{q} \in Q(\hat{X})$ (见 3.3.14), 使 $q = \hat{q}|_X$.

此外对在 a 向量化的 X, 若 $q = q_2 + q_1 + q_0$, 其中 $q_0 \in K$, $q_1 \in X_a^*$, 则 q_2 等同于 $\vec{q}$.

15.1 定义及记法

仿射二次超曲面的最简单定义是在仿射的情形照搬 14.1.1，条件 $\vec{q} \neq 0$ 表明 q 确实是二次的。

15.1.1 定义. α 是 $P(Q(X))$ 的元素，若 $\alpha = p(q)$，$q \in Q(X)$，使 $\vec{q} \neq 0$，则称 α 为 X 的（仿射）二次超曲面，它们的集合记为 $P(Q(X)) = \mathrm{QA}(X)$. 若 $n = 2$，则称为圆锥曲线. α 的象是 $\mathrm{im}(\alpha) = q^{-1}(0)$. q 称为 α 的一个方程.

15.1.1.1 注. 以后我们将不再每次都说"q 是 α 的一个方程". $\mathrm{im}(\alpha)$ 当然仅与 α 有关，而与 q 的取法无关. 凡与 α 相关联的概念都应仅与 $\alpha = p(q)$ 有关，而与 q 无关.

15.1.2 例

15.1.2.1 若 E 是欧氏仿射空间，球面

$$S(a, r) \quad (a \in E, \ r \geqslant 0)$$

是二次超曲面的象，因为只需取 $q = d^2(a, \cdot) - r^2$ 即可. 请注意对任一 $k \in \mathbf{R}$，$q = d^2(a, \cdot) + k$ 都定义一个二次超曲面，但当 $k > 0$ 时，其象是空的.

15.1.2.2 设 X，X' 是两个仿射空间，$f \in \mathrm{Isom}(X; X')$ 且

$$\alpha \in \mathrm{QA}(X),$$

则方程是 $(f^{-1})^*(q)$ 的二次超曲面称为 α 在 f 下的象 $f(\alpha)$ （$(f^{-1})^*$ 定义为 $(f^{-1})^*(q)(x') = q(f^{-1}(x')) \forall x' \in X'$）. 因此 $\mathrm{im}(f(\alpha)) = f(\mathrm{im}(\alpha))$. 特别，$\mathrm{GA}(X)$ 作用在 $\mathrm{QA}(X)$ 上. 对 X 的二次超曲面作分类就相当于寻找这些轨道. 参见 15.2 及 15.3.

15.1.3 其它等价定义

15.1.3.1 设 $\alpha \in \mathrm{QA}(X)$，$q$ 是 α 的方程，与此相应的 $\hat{q} \in Q(\hat{X})$，因此有一个完全确定的射影二次超曲面 $\tilde{\alpha} = p(\hat{q}) \in \mathrm{PQ}(\hat{X})$，因为例如由 3.3.13 或 3.3.15 有 $\widehat{\lambda q} = \lambda \hat{q}$. 由于 $q = \hat{q}|_X$，特别地，$\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\tilde{\alpha}) \cap X$. $\mathrm{im}(\tilde{\alpha}) \cap \infty_X$ 是什么？由于

$$\vec{q} = \hat{q}|_{\vec{X}} \ \text{及} \ \infty_X = P(\vec{X}),$$

因此 $\operatorname{im}(\tilde{\alpha})\cap\infty_X=\operatorname{im}(\vec{\alpha})$，这里 $\vec{\alpha}=p(\vec{q})\in \mathrm{PQ}(\vec{X})$. 或根据 14.1.3.3，$\vec{\alpha}=\tilde{\alpha}\cap\infty_X$.

反之，设 $P(E)$ 是有限维射影空间，$P(H)$ 是 $P(E)$ 的超平面，β 是 $P(E)$ 的二次超曲面，如果想要找出 $X=P(E)\backslash P(H)$的一个二次超曲面(见 5.1)，则我们把 ∞_X 等同于 $P(H)$，且若 r 是 β 的一个方程，命题 3.3.14 表明 $r|_X$ 定义 X 的一个二次超曲面，记为 $\beta|_X$，其唯一条件是 $r|_X\neq 0$，即 $\beta\cap P(H)$ 是一个二次超曲面(见 14.1.3.3) 或 $\infty_X\not\subset\operatorname{im}(\beta)$.

15.1.3.2 附注. 在 X 的仿射二次超曲面 α 与 $\tilde{X}$ 的使 $\operatorname{im}(\beta)\not\supset\infty_X$ 的射影二次超曲面 β 间有一个自然双射 $\sim$. 对 α 的任一方程 q 有 $\tilde{\alpha}=p(\hat{q})$，且 $\tilde{\alpha}\cap\infty_X=\vec{\alpha}$ (这里 $\vec{\alpha}=p(\vec{q})$) 称为 α 的无穷远二次超曲面. (若 $n=2$，称为 α 的无穷远点，若 $n=3$，称为 α 的无穷远圆锥曲线.)我们有 $\operatorname{im}(\alpha)=\operatorname{im}(\tilde{\alpha})\cap X$. 若 $\tilde{\alpha}$ 是正常的则定义 $\alpha\in \mathrm{QA}(X)$ 为正常的. α 的秩定义为 $\tilde{\alpha}$ 的秩，α 的指数定义为 $\tilde{\alpha}$ 的指数.

15.1.4 注. $\operatorname{im}(\beta)\supset\infty_X$ 只可能出现在两种情形中：秩 $(r)=1$，则 $\operatorname{im}(\beta)=\infty_X$，从而 $\operatorname{im}(\beta)\cap X=\varnothing$；或者秩 $(r)=2$，则

$$\operatorname{im}(\beta)=\infty_X\cup H,$$

这里 H 是异于 ∞_X 的超平面，从而 $\operatorname{im}(\beta)\cap X$ 是 X 的 (仿射)超平面. 它的验证留给读者作练习.

15.1.5 实用上，对 $\alpha\in \mathrm{QA}(X)$，我们引入数偶 ($\tilde{\alpha}$ 的秩，$\vec{\alpha}$ 的秩). 关于 $\mathrm{GA}(X)$ 在 $\mathrm{QA}(X)$ 上的作用，这个数偶是不变的(见 5.2.2).

15.1.6 写法. 对 X 的一个仿射标架以及与 3.3.15 类似的记号，我们有以下的写法:

15.1.6.1 $q=\sum\limits_{i,j}a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_i b_ix_i+c$；$\vec{q}=\sum\limits_{i,j}a_{ij}x_ix_j$；在与此相关联的齐次坐标中，

15.1.6.2 $\hat{q}=\sum\limits_{i,j}a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_i b_ix_it+ct^2$.

我们使两个矩阵 $\hat{A}$，$\vec{A}$ 同 q 联系起来，因此

15.1.6.3 $\begin{cases} \vec{A} = (a_{ij}), \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} \vec{A} & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ b_1 \cdots\cdots b_n & c \end{pmatrix} \\ 秩(\alpha) = 秩(\hat{A}), 秩(\tilde{\alpha}) = 秩(\vec{A}). \end{cases}$

15.2 仿射二次型的约化

15.2.1 从 13.1.4.5 我们知道想对仿射二次超曲面进行分类是没有指望的（见 15.1.2.2）。但可以把它们约化为以下三种类型。设 $\alpha = p(q)$，$q \in Q(X)$。根据 13.4，存在 $\vec{X}$ 的基使得 $\vec{q}$ 写成 $\vec{q} = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2$，其中 $r = (\vec{n})$ 的秩，$a_i \neq 0$ $\forall i = 1, \cdots, r$。

对于与这个基相关联的仿射标架，据 15.1.6.1，有

$$q = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c, \quad \prod_{i=1}^{r} a_i \neq 0;$$

作变换 $x_i \longmapsto x_i + \frac{b_i}{a_i}$，我们可假设 q 能写成

$$q = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} b_i x_i + c, \prod_{i=1}^{r} a_i \neq 0.$$

若 $r < n$，则可作变换 $\sum_{i=r+1}^{n} b_i x_i \longmapsto b_n x_n$，从而

$$q = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 + 2b_n x_n + c, \quad \prod_{i=1}^{r} a_i \neq 0;$$

若 $r < n$ 且 $b_n \neq 0$，则可作变换 $x_n \longmapsto x_n + \frac{c}{2b_n}$，得到

$$q = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 + 2x_n, \quad \prod_{i=1}^{r} a_i \neq 0.$$

这样，q 必定是以下三种类型之一：

15.2.2
$$\begin{cases}\text{类型 I} \quad q = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2, \ \prod_{i=1}^{r} a_i \neq 0, \ 1 \leqslant r \leqslant n; \\ \text{类型 II} \quad q = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 + 1, \ \prod_{i=1}^{r} a_i \neq 0, \ 1 \leqslant r \leqslant n; \\ \text{类型 III} \quad q = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 + 2x_n, \ \prod_{i=1}^{r} a_i \neq 0, \ 1 \leqslant r \leqslant n-1.\end{cases}$$

借助于 15.1.5，从下表可看出不同类型的两个二次超曲面在 GA (X) 的元素作用下绝不可能从一个变成另一个:

15.2.3

α 任意

类　　型	$\tilde{\alpha}$ 的　秩	$\vec{\alpha}$ 的　秩
I	r	r
II	$r+1$	r
III	$r+2$	r

α 正常:

类　　型	$\tilde{\alpha}$ 的　秩	$\vec{\alpha}$ 的　秩
II	$n+1$	n
III	$n+1$	$n-1$

15.2.4 注. 在某些情形中可利用"中心方程"进行具体计算：见 15.5.4.

关于这些类型的其它特征及这种约化的几何解释，见 15.7.4.

15.3 当 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时仿射二次超曲面的分类

15.3.1 命题. 设 $K=\mathbf{C}$，则 QA (X) 在 GA (X) 作用下的轨道关于一个已知基具有以下形状:

$$\mathrm{I}(r):\ \sum_{i=1}^{r} x_i^2;\ 1 \leqslant r \leqslant n;$$

$$\mathrm{II}(r):\ \sum_{i=1}^{r} x_i^2 + 1;\ 1 \leqslant r \leqslant n;$$

$$\mathrm{III}(r):\ \sum_{i=1}^{r} x_i^2 + 2x_n;\ 1 \leqslant r \leqslant n-1.$$

特别，正常二次超曲面只有两个轨道：$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 1$ 及 $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 2x_n$.

这可从 13.4.2 的证明中立即得出。对 $K = \mathbf{R}$ 的情形，因为我们的研究是在 QA(X) 内而不是在 $Q(X)$ 内进行，故在类型 I 及 III 内可以交换 r 与 s。为了看出以下形状的轨道的确是不同的，我们应用 13.4.7 于 $\vec{q}$ 及 $\hat{q}$:

15.3.2 命题. 若 $K = \mathbf{R}$，则 QA(X) 在 GA(X) 作用下的轨道关于一个已知基具有以下形状：

$$\mathrm{I}(r,s):\ \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2,\ r \geqslant s,\ 1 \leqslant r+s \leqslant n;$$

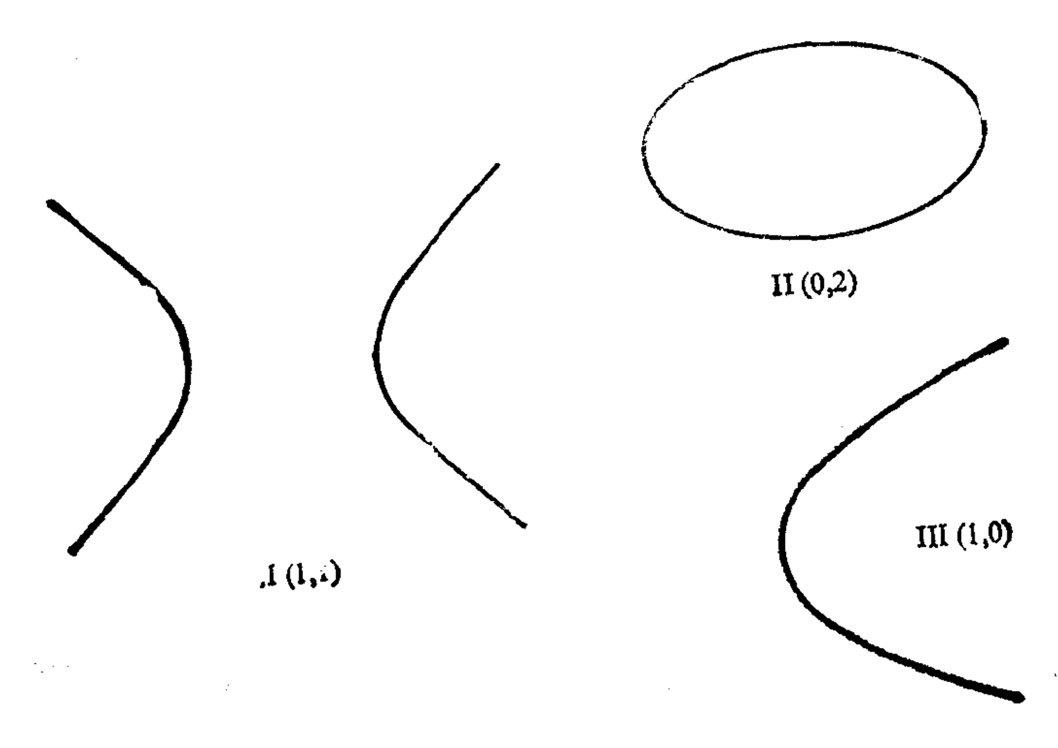


图 15.3.3.1.

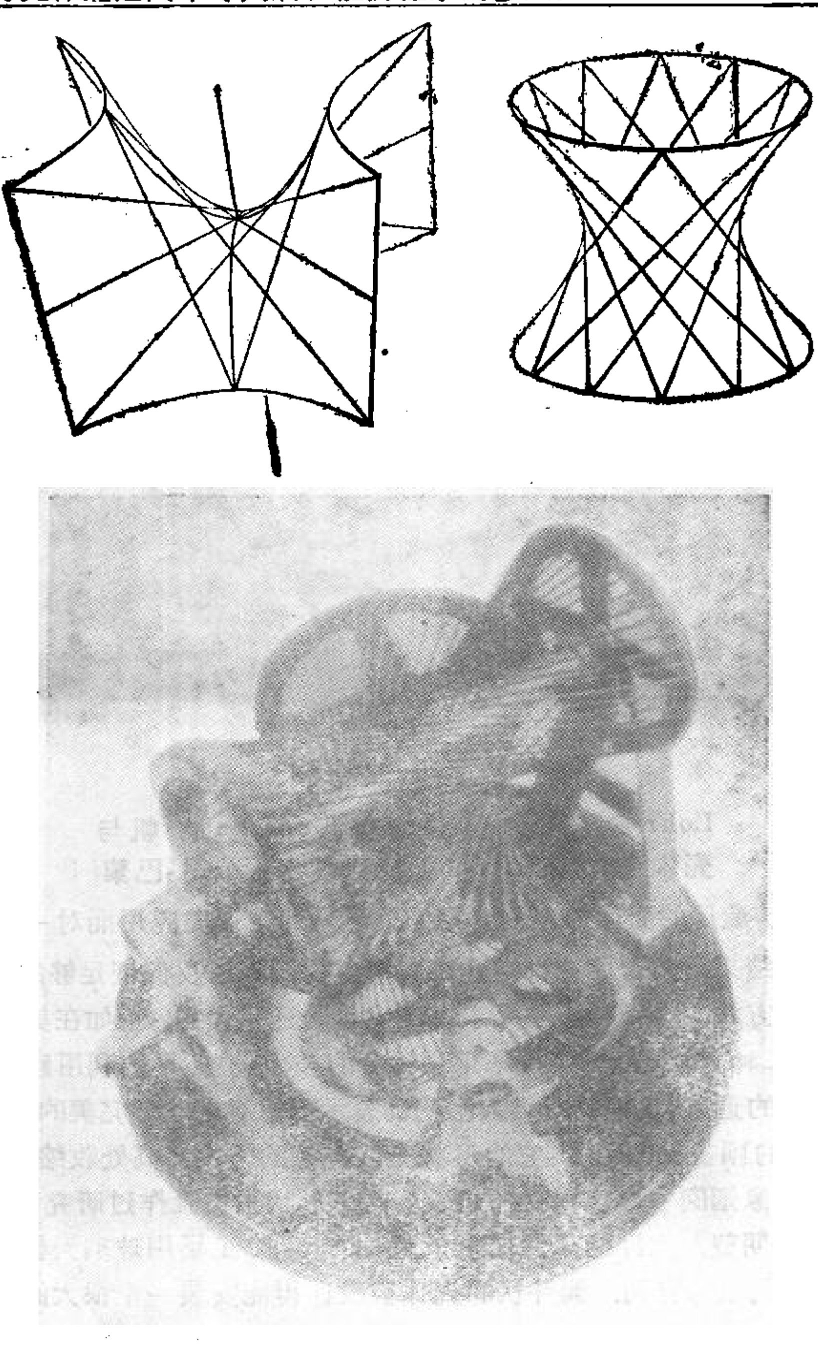


图 15.3.3.2.

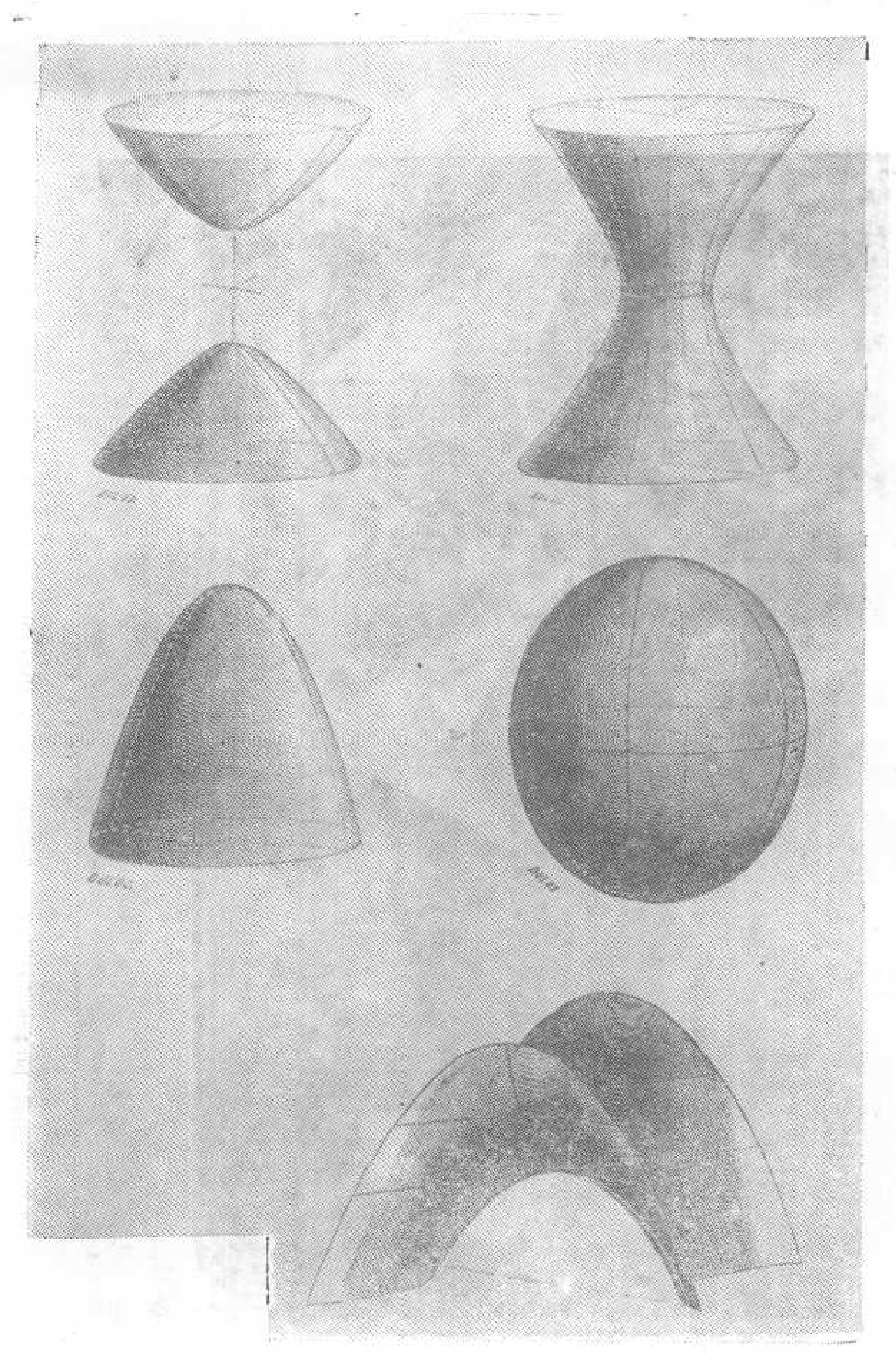
Lohr 铸造厂，引自 Jürgen Joedicke 的«帆与壳体结构»，Vincent 及 Fréal 出版公司，巴黎

Lohr 铸造厂的壳体的不同寻常的外形是为了这类应用而对一种典型形状作探索的结果. 为了迅速排空开工时产生的浓烟以及保证足够的通风，有两种可能的方法. 第一种方法是求助于完善的通风设施，正如在美国所流行的那样. 第二种方法与之相反，不采用过分的技术设施，尽力利用建筑的形状以得到自然的通风. 工程的负责人已明确表示不想寻求过分完美的解决方法. 这样，大厅的顶盖就诞生了，它的形状是以连续的方式向高处收缩的，这就保证了大厅能像烟囱一样获得良好通风，这个形状用实验作过研究，其结果肯定了原先的期望. 大厅的采光提出了另一个问题. 工场用玻璃天棚在北面照明，事实证明极为有利. 漏斗状的壳体被设计得能安装一个很大的东北玻璃

天棚. 每个壳体在水平投影上的尺寸是 13.5×15 米，安放在 4 个柱子上. 其形状是两个成平面对称的双曲抛物面，各有三条直线边沿，并在第 4 个曲线边沿上被联结起来，装有玻璃的表面是倾斜的平面. 其顶端构成通风烟囱，形状接近于旋转单叶双曲面. 壳体的基脚由弯曲的拉力构件接合，中部在呈弯势之前由位于窗平面上的两根对角线梁支撑住. 壳体所受的力通过对模型作实验来确定. 为此目的，工程师制作了 1/10 比例的模型，再通过应变方法确定它所承受的力. 将壳体浇灌混凝土时的脚手架放在行车的轨道上，浇好后即将脚手架降低再移到别处用作下一个壳体的模架. 没有一种通常覆盖屋顶的方法能用到这里，因为壳体的坡度在 20° 到 90° 之间变化. 因此已决定放弃经典的覆盖方法. 用特殊塑料防水的试验尚未结束. 虽然如此，没有覆盖层的壳体经过两个冬天后仍能防止水的渗入.



Hilbert 和 Cohn-Vossen 的《直观几何》，Chelsea 出版社



Rouche 和 de Comberousse,《几何教程》, Gauthier-Villars 出版社,巴黎.

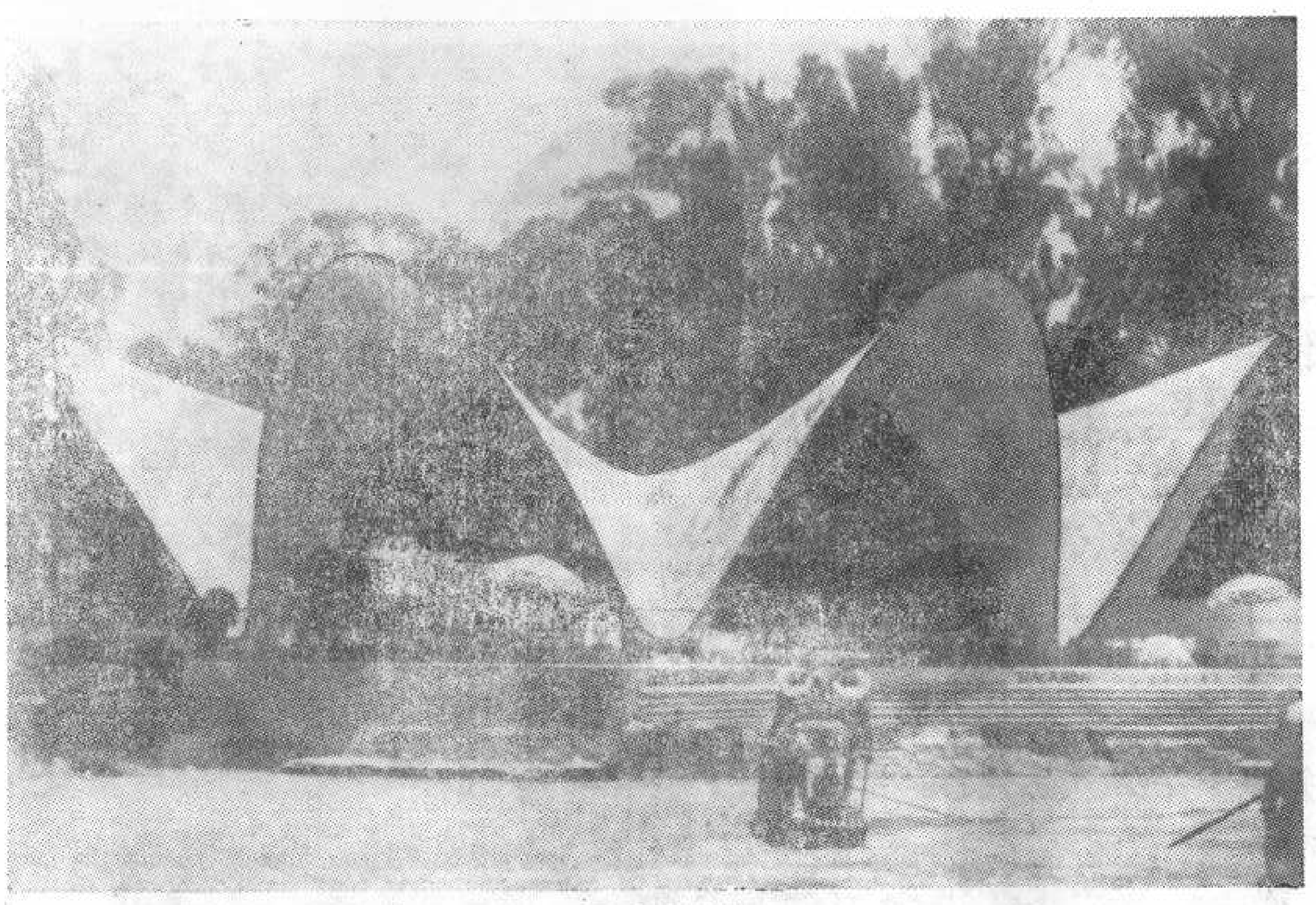


图 15.3.3.3.

引自 Jürgen Joedicke，《帆与壳体结构》，Vincent 及 Fréal 出版公司，巴黎.

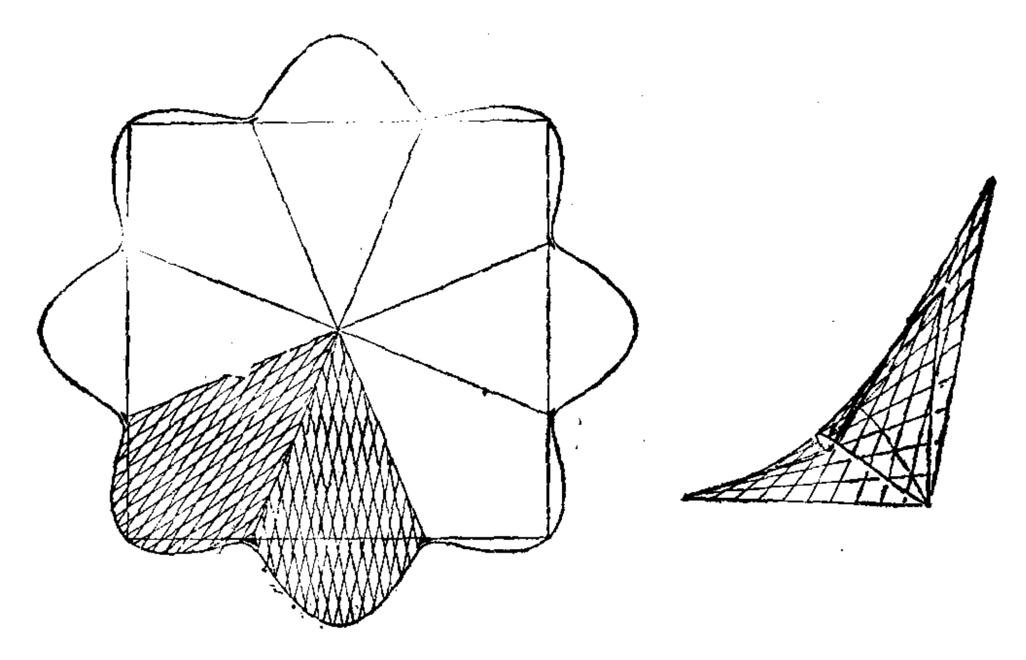


图 15.3.3.3.

壳体由双曲抛物面的八个相等的截片组成. 示意图表明了每个截片的几何结构.

$$\mathrm{II}(r, s): \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2 + 1,\ 1 \leqslant r + s \leqslant n;$$

$$\mathrm{III}(r, s): \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2 + 2x_n,\ r \geqslant s,\ 1 \leqslant r + s \leqslant n - 1.$$

15.3.3 低维的例

15.3.3.1 当 $K = \mathbf{C}$ 以及 $n = 2$ 时，方程为 $x_1^2 + x_2^2 + 1$ 的圆锥曲线 α 的象同胚于柱面 $\mathbf{R} \times S^1$：实际上 $\tilde{\alpha}$ 有一个象同胚于 S^2 (见 14.3.6) 且 $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\tilde{\alpha}) \backslash [\mathrm{im}(\tilde{\alpha}) \cap \infty_X]$ 是从 $\mathrm{im}(\tilde{\alpha})$ 中除去子集 $\mathrm{im}(\tilde{\alpha}) \cap \infty_X$ 而得到的，后一个子集由两个不同点构成，从一个球面 S^2 中除去两个点后同胚于 $\mathbf{R} \times S^1$. 对于方程为 $x_1^2 + 2x_2$ 的 α，它的象是图象 $x_2 = -x_1^2/2$，同胚于 $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$.

15.3.3.2 当 $K = \mathbf{R}$ 以及 $n = 2$ 时，正常圆锥曲线是 II(2, 0)，II(1, 1)，II(0, 2)，III(1, 0). 其中第一个的象是空集. 我们把类型 II(1, 1) (相应地：II(0, 2)，III(1, 0)) 的仿射圆锥曲线称为双曲线(相应地：椭圆，抛物线).

15.3.3.3 当 $K = \mathbf{R}$ 以及 $n = 3$ 时，象为非空的正常仿射二

次曲面是 II(2，1)，II(1，2)，II(0，3)，III(2，0)，III(1，1)，分别称为：双叶双曲面，单叶双曲面，椭球，椭圆抛物面，双曲抛物面。只有 II(1，2)，和 III(1，1) 含有仿射直线，因为这是使二次型 $\tilde{q}$ 为中性的仅有的情形（见13.1.4.3，14.4 及 14.4.6）。

15.4 实及复的正常仿射二次超曲面的拓扑性质及微分性质

15.4.1 我们把退化的情形留给读者作练习，故假设在这一节里 $\alpha \in QA(X)$ 是正常的，$K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$。在复数情形，只有当 α 是第 III 类型时才是容易的，因此时 im (α) 是 $x_n=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2$ 的图象(见 15.3.1)，从而 im (α) 同胚于 $\mathbf{C}^{n-1}\simeq\mathbf{R}^{2(n-1)}$。若 α 是第 II 类型的，则 im (α) 是

$$\operatorname{im}(\tilde{\alpha})\backslash[\operatorname{im}(\tilde{\alpha})\cap\infty_X],$$

这里 im $(\tilde{\alpha})$ 是 14.3.7 的 $C(n+1)$，它的拓扑不是初等的，且在 $C(n+1)$ 内 im $(\tilde{\alpha})\cap\infty_X$ 与 $C(n)$ 同胚。我们将不再讨论这些情形。

15.4.2 与之相对的是当 $K=\mathbf{R}$ 时，我们将看到正常二次超曲面的象的同胚类都是初等的。在图 15.3.3 中我们看出 II(2，1) 同胚于 $\mathbf{R}^2\times\{$两个点$\}$ 或 $\mathbf{R}^2\times S^0$，这里 S^0 是 $\mathbf{R}$ 内的 0 维球面。II(1,2) 同胚于 $\mathbf{R}\times S^1$，II(0，3) 同胚于 S^2。这个现象是有一般性的。

15.4.3 **命题.** II(r, s) 类型的正常仿射二次超曲面的象微分同胚于 $\mathbf{R}^r\times S^{s-1}$。

取一组基使 α 可写成

$$\sum_{i=1}^{r}x_i^2-\sum_{i=r+1}^{n}x_i^2+1,$$

再把空间 X 等同于 $\mathbf{R}^{r+s}$ 且把 $\mathbf{R}^{r+s}$ 写成欧氏空间的积 $\mathbf{R}^{r+s}=\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^s$。把坐标写成数偶 (x, y)，则 im (α) 的方程是 $\|x\|^2-\|y\|^2+$

$1=0$。但映射 $(x, y) \longmapsto \left(x, \dfrac{y}{\sqrt{\|x\|^2+1}}\right)$ 是 $\mathbf{R}^{r+s}$ 的 C^∞ 微分同胚 f，它把使 $\|x\|^2-\|y\|^2+1=0$ 的 (x, y) 变换为使 $\|y\|=1$ 的 (x, y)。从而 $f(\text{im}(\alpha))=\mathbf{R}^r\times S^{s-1}$。

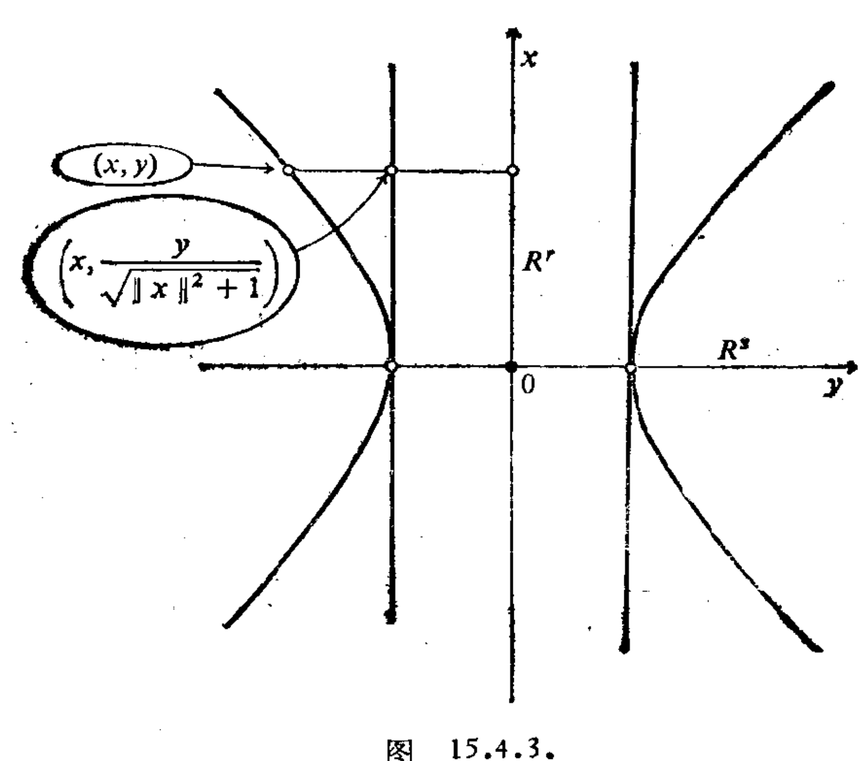


图 15.4.3.

15.4.4 至于第 III 类型的 α，正如在 15.4.1 中已经指出的，它们的象是一个 $n-1$ 元函数的图象，从而总是同胚于 $\mathbf{R}^{n-1}$ 的。

15.4.5 子流形的观点. 在正常二次超曲面的情形显然 15.3.1 或 15.3.2 的方程定义了一些子流形，它们的实余维数分别是一或二，按 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 而定；只要应用 [B-G]，第 56 页即可得到。至于 α 在 $m\in\text{im}(\alpha)$ 的切空间，它与 m 关于 α 的配极超平面 $m^\perp$ 等同。这可与 14.3.8 同样证明，不过更简单些。

15.4.6 凸性. 从 15.3 的图形中可看出对 r, s 的某些值，$\text{II}(r, s)$ 或 $\text{III}(r, s)$ 类型的二次超曲面的象是 X 的凸形的边界.事实上:

15.4.7 命题. 实正常仿射二次超曲面的象是一个凸形的边界当且仅当它们是 $\text{II}(0,n)$ 或 $\text{III}(n-1,0)$ 类型的.在 $\text{II}(n-1,1)$ 的情形，象集的两个连通分支的每一个(见 15.4.3) 都是一个凸形

的边界。

在 III(r, s) 的情形,有关断言可从 11.8、11.2 得出，因为这里涉及的是函数图象。II$(0, n)$ 的情形就是单位球面，它是单位球 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1$ 所成的凸形的边界。II$(n-1, 1)$ 的情形也提供了一个凸形，因为它是下列函数

$$x_n = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 1}$$

的两个图象的并集,而这些图象都有凸的边界(见 11.8、11.2)。因此只剩下对 $2 \leqslant r \leqslant n-1$ 证明 II$(r, n-r)$ 不可能是凸形的边界，为此仍要应用 11.8，11.2，不过是对象集的局部表达式来用。例如在 $x_n = 1$、其余坐标均为 0 的点 n 处，可将象集看成下式

$$x_n = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{n-1} x_i^2}$$

的图象。

15.4.8 **注**．在一个仿射空间 X 内,凸形的整个边界以及二次超曲面的整个象集都有以下性质：当用 X 内不含于这些超曲面中的几乎所有的直线(见 14.1.3.4) 截割这些超曲面时，其交点至多是两个．Marchaud 的一个非常精致的定理断定其逆也对,参看 [MD]．这一结果属于所谓“有限几何”的范围，这方面的基本参考文献是 [H-K]，但也见 [PL]．

15.5 正常仿射二次超曲面的配极变换

这里的 K 又是任意的。

15.5.1 若 α 是 X 的正常二次超曲面，则把 $\tilde{X}$ 内关于 $\tilde{\alpha}$ 的配极变换称为关于 α 的配极变换。当然这样做的前提是这个配极变换在 X 内有意义．例如当 $m \in X$ 关于 α 的配极超平面 $m^{\perp}$ 异于 ∞_X

时，此时 $m^{\perp}\cap X$ 是X的超平面，仍被称为m的配极超平面并记为 $m^{\perp}$.

15.5.2 中心．我们期待着 ∞_X 点的配极超平面以及 ∞_X 的极点起仿射的作用。确实，设 $c=\infty_X^{\perp}$ 是 $\tilde{X}$ 的超平面 ∞_X 的极点，则有两种可能：$c\in\infty_X$ 或 $c\in X$．首先假设 $c\in X$ 且应用 14.7.4 于 $H=\infty_X$ 以及 $m=c$．考虑到 6.4.2，我们看到X关于中心c的对称，即$-\mathrm{Id}_{X_c}$，属于 $\tilde{\alpha}$ 的群，特别它使 $\mathrm{im}(\alpha)$ 稳定，即c是 $\mathrm{im}(\alpha)$ 的对称中心。我们可把这一点精确地表述为：

15.5.3 命题．对于一个正常仿射二次超曲面α，以下三个条件等价：

(i) 二次超曲面α是第 II 类型的(见 15.2.2)；

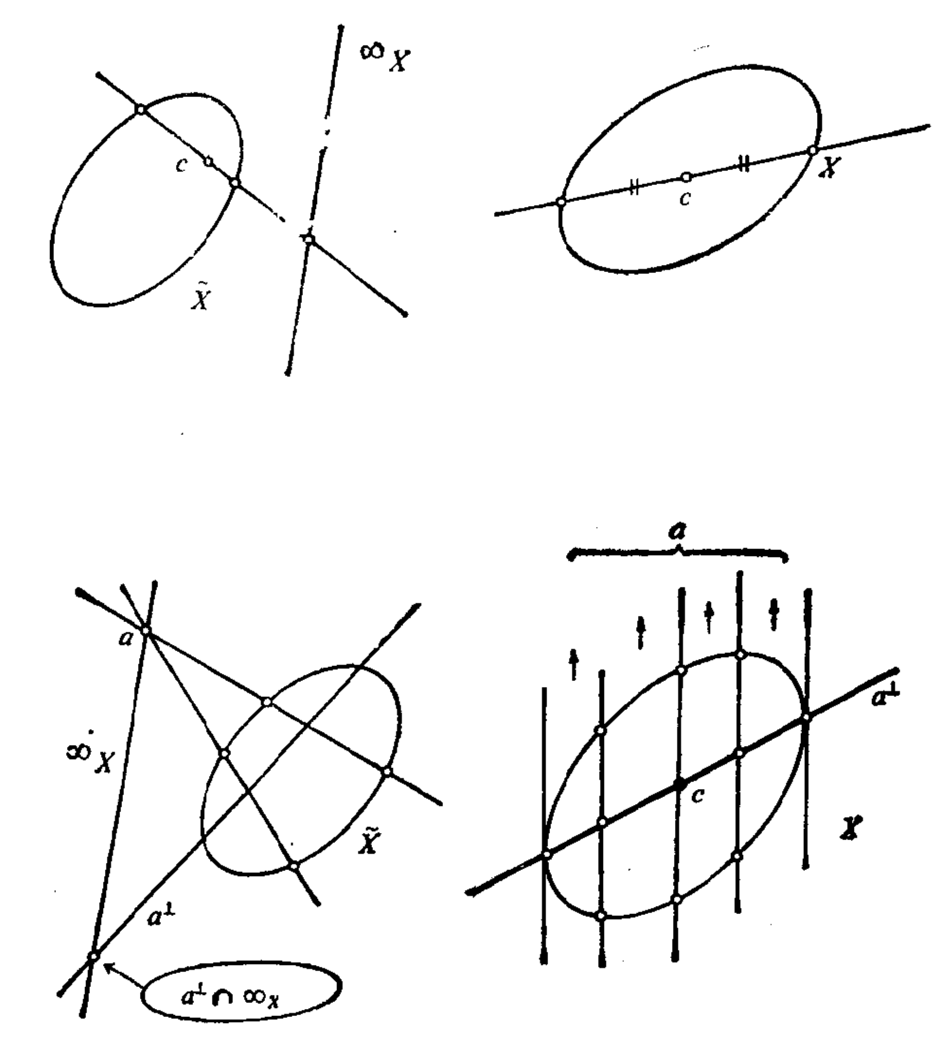


图 15.5.3.

(ii) $\infty_X^\perp \not\in X$;

(iii) 超平面 ∞_X 不与 α 相切。

若这三个条件之一满足,则点 $c=\infty_X^\perp$ 是 $\operatorname{im}(\alpha)$ 的对称中心。我们称 α 是有心二次超曲面,$c=\infty_X^\perp$ 称为它的中心。我们也称第 III 类型的二次超曲面为抛物面。

(ii) 和 (iii) 的等价性就是 14.5.2.1。关于 (i) 和 (ii) 的等价性,我们可把 15.5.5.2 的中心方程应用于第 II 类型的情形,$\infty_X^\perp$ 的齐次坐标 $(x_1,\cdots,x_n,t)$ 是 $(0,\cdots,0,1)$,而在第 III 类型的情形,则是 $(0,\cdots,0,1,0)$。但 $(0,\cdots,0,1)\in X$,$(0,\cdots,0,1,0)\in\infty_X$。

15.5.4 注。反过来,我们可利用配极变换得到 15.2 的一个几何证明。但在退化的情形,这也和 15.2 的显式计算同样复杂。此外,15.2 的计算结合 13.4.8 可以得到完整的具体约化方法。对于这个具体约化方法,最好先借助方程 15.5.5.2 找出可能有的中心,然后再应用 15.2。参见 15.7.4 及 15.7.10。

15.5.5 记法。如果在一个任意的仿射标架内 α 有一个由 15.1.6.1 给出的方程 q,则关于与此相关联的齐次坐标 $(x_1,\cdots,x_n,t)$,X 内的配极变换可如下得到(应用 13.1.3.6 及 14.5.3):

15.5.5.1 $(\xi_1,\cdots,\xi_n,\theta)$ 的配极超平面的方程为:

$$\sum_{i,j}a_{ij}\xi_ix_j+\sum_i b_i(\theta x_i+t\xi_i)+c\theta t=0.$$

举例说,为了寻找 ∞_X 的极,我们知道这个极 $\infty_X^\perp$ 属于生成 ∞_X 的几个点 $(1,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1,0)$ 的配极超平面内,这样就得到中心方程组:

15.5.5.2 $$\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_i}=\sum_j a_{ij}x_j+b_i=0,\ i=1,\cdots,n.$$

15.5.6 直径。现在考虑一个点 $a\in\infty_X$(图 15.5.3),和它的配极超平面 $a^\perp$。14.7.4 及 6.4.2 表明 α 的象关于下述仿射对称是整体稳定的:这个仿射对称是绕 X 的仿射超平面 $a^\perp=a^\perp\cap X$,并且平行于以 a 为无穷远点的直线的方向(若 $a^\perp\neq\infty_X$!)所作的对称。

15.5.7　定义. 所谓仿射空间X的子集F的直径是指有下述性质的超平面H：存在X的直线的方向$\vec{D}$，使得绕H且平行于$\vec{D}$的仿射对称使F保持稳定。

15.5.8　15.5.6 中的讨论表明正常仿射二次超曲面α具有直径，即有超平面仿射对称.实际上它所有的直径与使$a^{\perp}\neq\infty_X$的$a\in\infty_X$一样多。但$a^{\perp}=\infty_X$等价于$a=\infty_X^{\perp}$。因此只有两种可能性：

第一种情形：若α是以c为中心的二次超曲面，则 im (α) 关于所有的直线方向都是对称的，因此关于所有的超平面方向是对称的，这是因为$a\longmapsto a^{\perp}\cap\infty$是关于$\bar{\alpha}$的配极变换，而这里的$\bar{\alpha}$不是退化的(见 15.1.3)。此外相应的对称超平面都通过中心c。

第二种情形：若α是抛物面，设$c=\infty_X^{\perp}\in\infty_X$是它与无穷远超平面的接触点，则除$c$外所有的直线方向都是对称方向。直径不可能取所有的超平面方向，特别，直径总是包含c的方向在内的。举例来说在平面的情形直径都是平行的。

很自然地我们想要知道上述性质是否刻划了二次超曲面的象集的特征。当$K=\mathbf{R}$时，回答是令人满意的。

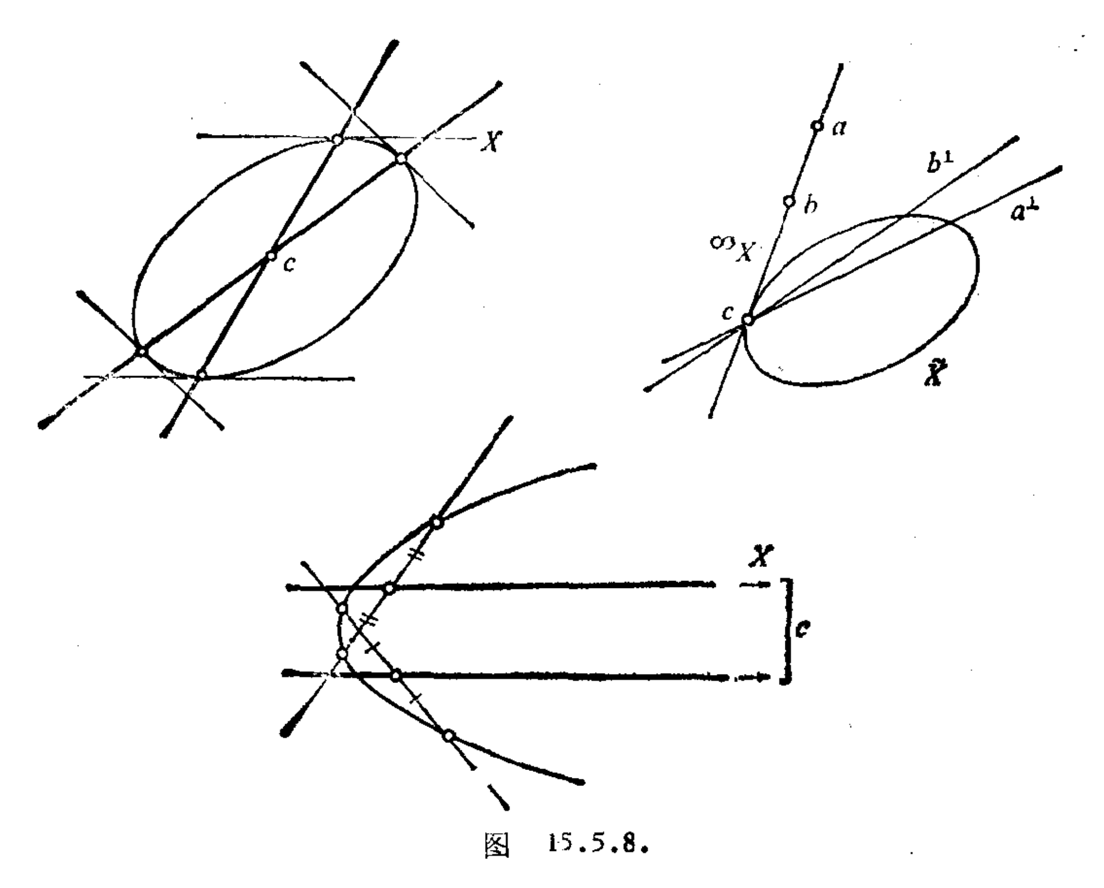


图　15.5.8.

15.5.9 定理. 设K是有限维实欧氏仿射空间的一个紧集,使得对任意的超平面方向,K有一个平行于此方向的直径,则K是有相同中心而且彼此位似的一些二次超曲面的并集.

只要把 2.7.5.9 及 2.7.5.10 应用到K在X的仿射群内的稳定子群 $G = GA_K(X)$ 即可. 由此可得在X上存在一个关于G不变的欧氏结构. 但 8.2.9 表明定理假设中的仿射对称是关于这个欧氏结构的正交对称.由于对每一方向都有这样的对称,根据 8.2.12 可得 $G = Is_c(X)$, 这里 c 是K的中心. 因此 $\forall x \in K$, 子集K应包含x在G下的轨道, 它是以 c 为中心过 x 的球面.

以 11.8.10.7 为基础,可对 15.5.9 作出一个几何的证明.

15.5.10 注. 读者可以看到,有一些问题我们并没有给出解答.也还可以提出别的一些问题:例如对平面代数曲线的直径的研究.关于后一问题,可参看 [LB2], 第 150 页.

15.5.9 的应用之一是关于 Minkowski 几何的. 这种几何就是关于有限维赋范实向量空间的度量结构,其度量定义为 $d(x, y) = \|x - y\|$. 这样的一种几何是否有对合等度量变换? 15.5.9 表明若这种几何关于所有的方向都有对合等度量变换, 则它必定是欧氏几何. 关于这些 Minkowski 度量,请看 [B-K], 第 133 页以后.

直径是与 $\mathrm{im}(\alpha)$ 中平行于已知方向的弦的中点轨迹有联系的,请参看 15.7.5.

正常仿射二次超曲面α的两个直径 H, H' 称为共轭的, 若它们的方向 $\vec{H}$, $\vec{H'}$ 关于 $\vec{\alpha}$ 满足 $(\vec{H})^{\perp} \perp (\vec{H'})^{\perp}$. 在圆锥曲线的情形,我们得出一些应该熟记的简单图形, 参看 15.7.7, 也见 15.6.4.

若α不是正常的,也可定义(见 14.5.6) 一个配极变换, 参看 15.7.4 中借助于这个配极变换对 15.2 的解释.

15.5.11 渐近锥面,渐近线. 我们也期待着 $\mathrm{im}(\alpha) \cap \infty_X$ 的点起某种作用, 对这些点的切线也有同样的期望. 我们把以 c 为顶点外切于α的锥面称为α的渐近锥面(见 14.5.3). 只有当 $c \in X$ 时才使人感兴趣.若 $n = 2$, 此锥面由两条直线构成或缩成 c 点.若这两条直线存在,则被称为α的渐近线.当 $n = 2$, $K = \mathbf{R}$ 时,只

有双曲线才有渐近线。当 $n=3$，$K=\mathbf{R}$ 时，只有双曲面 II(2，1) 及 II(1，2) 才存在渐近锥面。见 15.7.11。

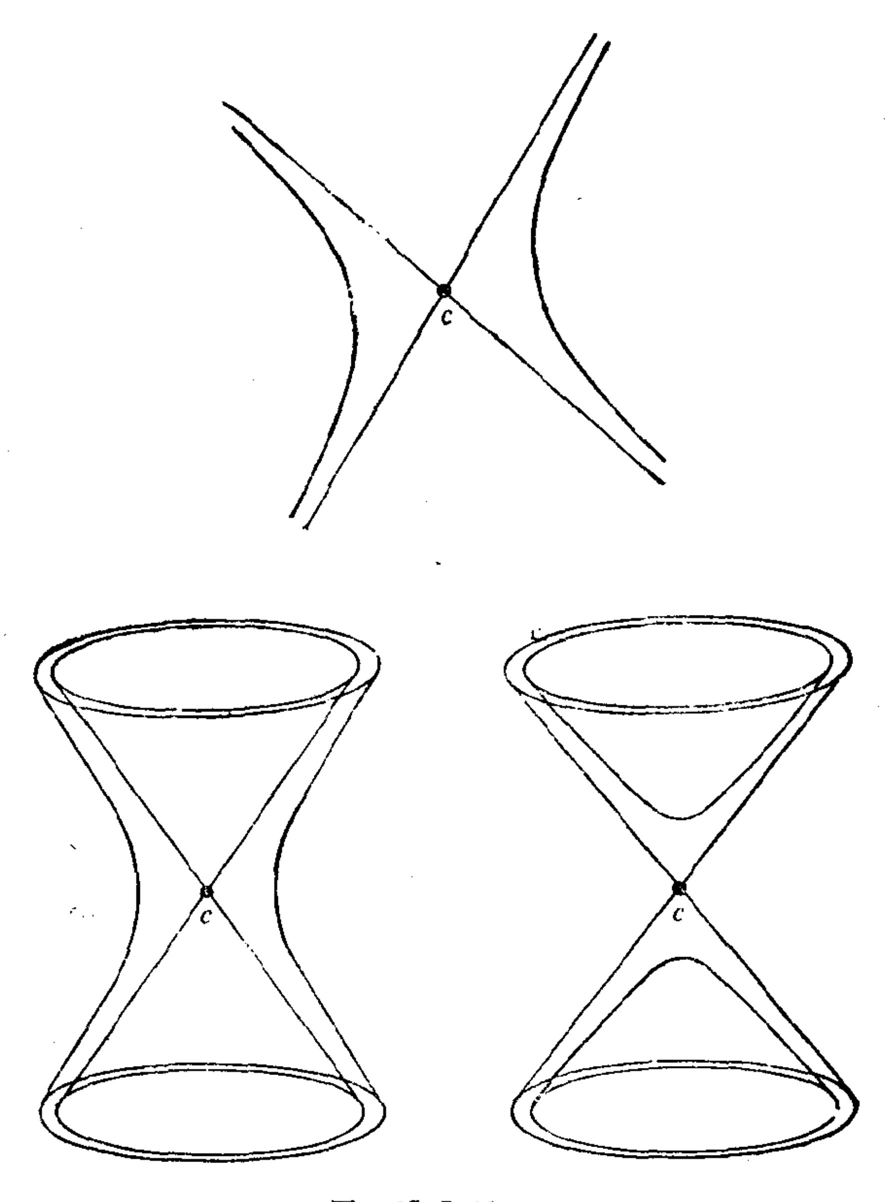


图 15.5.11.

15.6 欧氏仿射二次超曲面

15.6.1 分类。 若 X 是欧氏仿射空间，则必须在 Is (X) 的作用下而不是在 GA (X) 的作用下，对 X 的正常仿射二次超曲面作出分类。利用 13.5.5 以及 15.3 的技巧，我们总可找到一个标准正交标架，使 α 的方程有以下形式：

$$\sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{n} a_i x_i^2 + 1 \text{ 或 } \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{n-1} a_i x_i^2 + 2x_n,$$

$$\text{其中 } a_i > 0 \ \forall_i.$$

这种类型的方程被称为既约的，见 15.7.10. 若要得到完全的分类，也就是使不同方程对应于不同轨道，只需加上条件 $a_i \leqslant a_j \forall\ i<j$, i、$j=1,\cdots,r$ 及 $\forall i<j$, i, $j=r+1,\cdots,n-1$ 或 n.

15.6.2 第 17 章我们将详细地研究欧氏圆锥曲线. 在任意维数的情形，我们只限于以下的不变量的研究. 关于其它结果可参看 [EE].

15.6.3 我们把 $H(0,n)$ 类型的二次超曲面称为仿射空间 X 的椭球面，即它是形如 $\mathscr{E}=\mathscr{E}(q)=\{x\in X: q(x)=1\}$ 的，其中

$$q\in Q(X_a)$$

是正定二次型，$a\in X$（见 15.3.2). 若 X_a 的一个基 $\{m_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 使 q 写成 $\sum_i x_i^2$，即 $\{m_i\}$ 是 q 的标准正交基(见 13.3.1)，则称 $\{m_i\}$ 是关于 q 的共轭集.

现在再假定 X 是欧氏空间，有一个任意的欧氏结构（与 q 无关!)，且如 8.11.5 那样把 X_a 的一个向量集的 Gram 行列式记为 Gram $(\cdot,\cdots,\cdot)$，则:

15.6.4 Appolonius 定理. 对欧氏空间 X 的每一椭球面都可联系一些纯量 $A(\mathscr{E},k)$ $(k=1,\cdots,n)$，使得对于$\mathscr{E}$的任意共轭集 $\{m_i\}$，有

$$A(\mathscr{E},k)=\sum_{i_1<\cdots<i_k} \operatorname{Gram}(m_{i_1},\cdots,m_{i_k}).$$

15.6.5 $A(\mathscr{E},k)$ 的计算. 根据 13.5.5，存在关于欧氏结构$\|\cdot\|^2$的标准正交基，它关于 q 又是正交的. 设在这个基 $\{e_i\}$ 之下 $q=\sum_i \lambda_i x_i^2$，则集合 $\left\{m_i=\dfrac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\}$ 关于 $\mathscr{E}=\mathscr{E}(q)$ 是共轭的. 显然

$$\operatorname{Gram}(m_{i_1},\cdots,m_{i_k})=\|m_{i_1}\|^2\cdot\cdots\cdot\|m_{i_k}\|^2=\lambda_{i_1}^{-1}\cdots\lambda_{i_k}^{-1},$$

从而

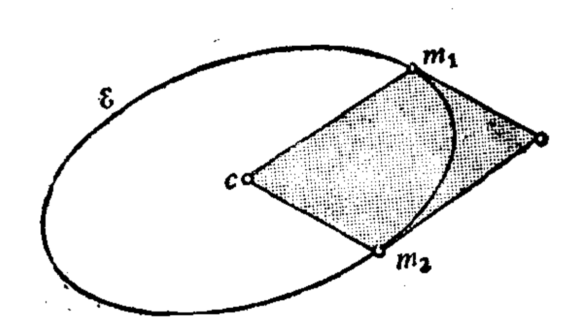
$$A(\mathscr{E},k)=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\lambda_{i_1}^{-1}\cdots\lambda_{i_k}^{-1}(k=1,\cdots,n).$$

15.6.6 例. 对任意的 n, 8.11.6 表明 $A(\mathscr{E},n)$ 是在 a 及 m_i 上构造的平行六面体的体积 (见 9.12.4.2), 这个体积是常量 (也见 11.8.9.4). 这一结果并不以 X 上的欧氏结构作为必要条件, 见 2.7.4. 它只是以几何方式表达了以下事实: 若 $f\in O(q)$, 则 $|\det f|=1$; 见 13.6.2.

对任意的 n 及 $k=1$: $A(\mathscr{E},1)=\sum_{i=1}^{n}\|m_i\|^2$. 因此对关于一组标准正交基的平面椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, 我们总有 $\|m_1\|^2+\|m_2\|^2=a^2+b^2$ 及阴影部分的面积 $=ab$. 这就是原始的 Appolonius 定理.

对 $n=3$, $k=2$, 将有(见 8.11.8)

$$A(\mathscr{E},2)=\|m_1\wedge m_2\|^2+\|m_2\wedge m_3\|^2+\|m_3\wedge m_1\|^2,$$



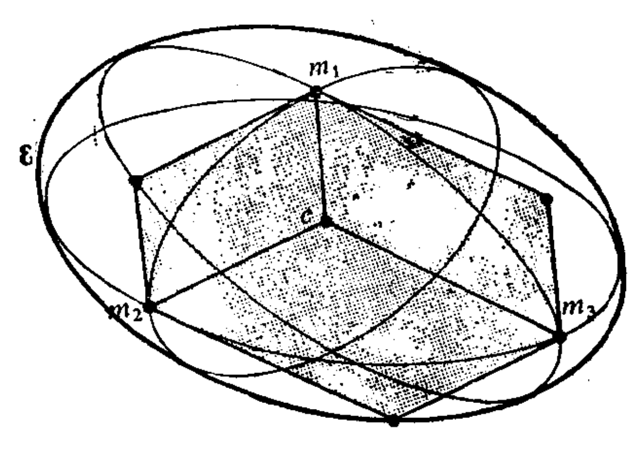


图 15.6.6.

即在$\mathscr{E}$的共轭集 $\{m_1, m_2, m_3\}$ 上作出的三个平行四边形的面积之和是常量.

15.6.7 证明. 对于 $\mathscr{E}=q^{-1}(1)$ 取定一个共轭集 $\{m_i\}$ 并设二次型$\|\cdot\|^2$关于这个基的矩阵是 B.对于另一个共轭集 $\{m_i'\}$，根据 13.1.3.8 及 13.6.5，$\|\cdot\|^2$的矩阵 B' 将是 $B'={}^tSBS$，其中${}^tSS=I$. 因此 $B'=S^{-1}BS$ 与B相似,从而有

$$\det(B'+\lambda I)=\sum_{k=0}^{n}\lambda^k A(\mathscr{E},k)=\det(B+\lambda I),$$

这里的 $A(\mathscr{E},k)$ 仅依赖于 A，即仅依赖于$\mathscr{E}$，但根据线性代数可知

$$\det(B'+\lambda I)=\sum_{k=0}^{n}\lambda^k\left(\sum_{i_1<\cdots<i_k}M'_{i_1\cdots i_k}\right),$$

这里的 $M'_{i_1\cdots i_k}$ 是由使

$$i,\ j=i_1,\cdots,\ i_k$$

的 b'_{ij} 所构成的矩阵的行列式. 但由 13.1.3.6 中 B' 的定义可知 $b'_{ij}=(m'_i|m'_j)$，从而

$$M'_{i_1\cdots i_k}=\mathrm{Gram}\,(m_{i_1},\cdots,\ m_{i_k}).$$

15.6.8 轴. 15.6.1表明欧氏仿射空间的正常二次超曲面的象具有对称轴. 若它是第 II 类型的,这个对称就是关于n个坐标超平面的超平面对称 $x_i\longmapsto -x_i$ (其它的 x_j 不动),若是第 III 类型的,则要除去对称 $x_n\longmapsto -x_n$.

15.7 练　习

15.7.1 研究对仿射二次超曲面的"零点定理".

15.7.2 当$n=2$或 3，$K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时研究退化仿射二次超曲面的性质.

15.7.3 研究退化二次超曲面的中心及直径.

15.7.4 对任意仿射二次超曲面定义配极变换.证明此时第 I，II，III 类型可刻划为:

第 I 类型：$\infty_{\frac{1}{x}} \cap \mathrm{im}(\alpha) \neq \emptyset$；

第 II 类型：$\infty_{\frac{1}{x}} \cap X \neq \emptyset$，$\infty_{\frac{1}{x}} \cap \mathrm{im}(\alpha) = \emptyset$；

第 III 类型：$\infty_{\frac{1}{x}} \cap X = \emptyset$.

用几何方法证明 15.2.2.

15.7.5 研究仿射圆锥曲线的平行于已知方向的弦的中点的轨迹.

15.7.6 设 $C = \mathrm{im}(\alpha)$ 是正常平面圆锥曲线的非空象，m 是平面的一点，$\langle m, a\rangle$，$\langle m, b\rangle$ 是 C 的两条不同切线，过 m 且与 C 切

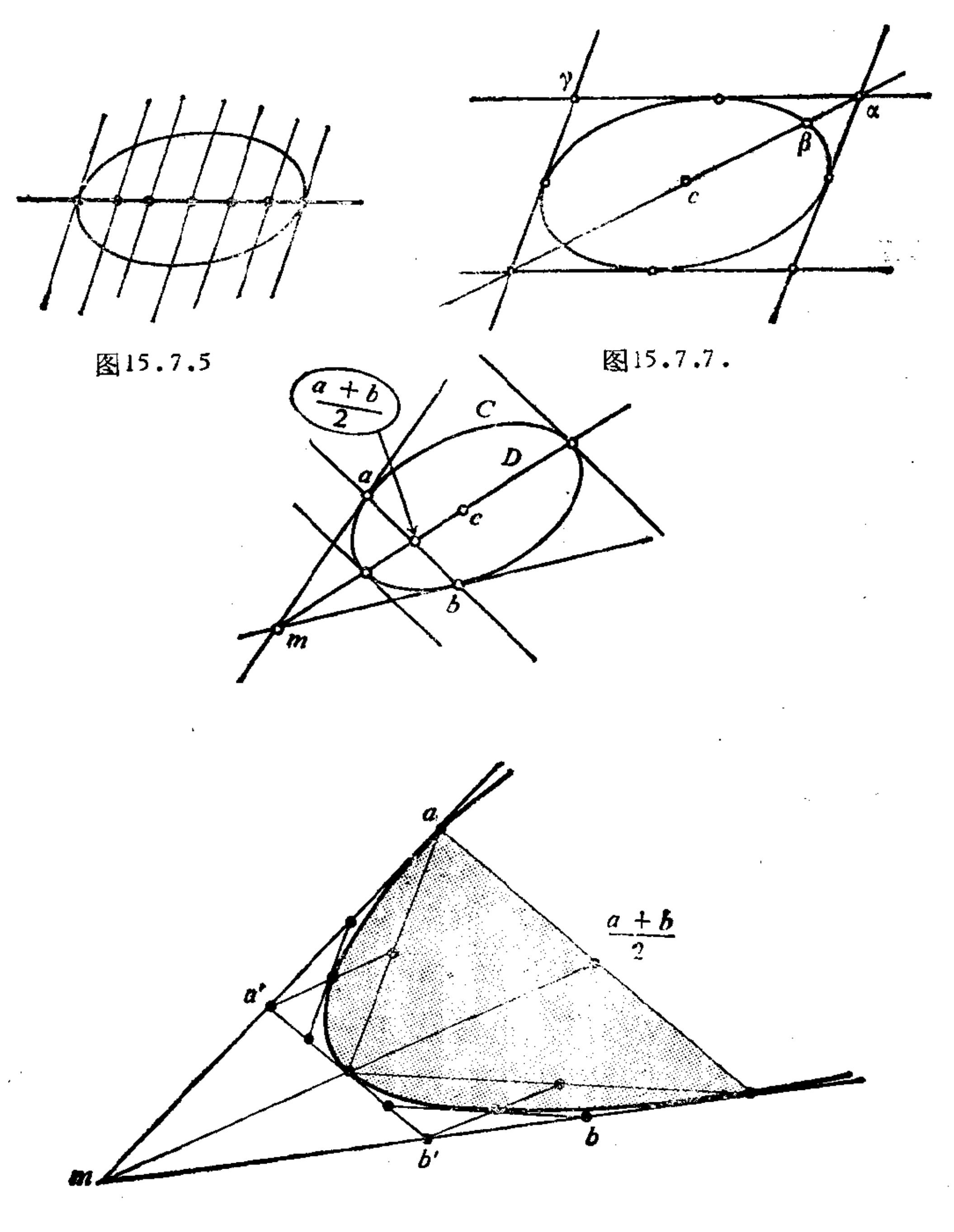


图15.7.5

图15.7.7.

图 15.7.6.

于 a 及 b. 证明直线 $D=\left\langle m, \frac{a+b}{2}\right\rangle$ 是 α 的一条直径，而且 α 在 $C\cap D$ 处的切线都与 $\langle a, b\rangle$ 平行. 若 α 是抛物线，证明 D 总是与 C 相交于 m 和 $\frac{a+b}{2}$ 的中点. 这样当已知抛物线的两点以及在这两点上的切线后，由上面的性质即可用几何作图法作出抛物线弧上一系列点.

注意到图 15.7.6 中三角形 $\{m, a', b'\}$ 的面积是三角形 $\{m, a, b\}$ 的 1/4，根据这一事实，应用 Archimède 的极限方法推导出阴影部分的面积等于 $\{m, a, b\}$ 的面积的 2/3. 再用积分学证明这一结论.

15.7.7 证明存在椭圆的外切平行四边形，而且其中一个切点可任意选取. 对于图 15.7.7 的点 α, β，证明总有 $\overrightarrow{c\alpha}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{c\beta}$. 对于同图中的点 α, γ，证明方向 $\overrightarrow{c\alpha}$, $\overrightarrow{c\gamma}$ 关于 $\vec{\alpha}$ 共轭.

15.7.8 证明 15.6.1 的细节.

15.7.9 设 Q 是三维欧氏仿射空间的有心正常二次曲面的象，x 是一个固定点，$x\notin Q$. 通过 x 作三条两两正交的直线 D, E, F，使 D 截 Q 于 a, b, E 截 Q 于 c, d, F 截 Q 于 e, f. 证明和式

$$\frac{1}{\overline{xa}\cdot\overline{xb}}+\frac{1}{\overline{xc}\cdot\overline{xd}}+\frac{1}{\overline{xe}\cdot\overline{xf}}$$

是常数. 给出例子及推广.

通过 x 再作三条直线 D, E, F，使它们的方向关于 Q 两两共轭，且 D 截 Q 于 a, b, E 截 Q 于 c, d, F 截 Q 于 e, f. 证明和式

$$\overline{xa}\cdot\overline{xb}+\overline{xc}\cdot\overline{xd}+\overline{xe}\cdot\overline{xf}$$

是常数. 给出例子及推广. 也参见 17.9.12.

15.7.10 对于 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 中下列方程的二次曲线(面)，找出标准正交的仿射标架使得新方程具有 15.6.1 中所述的类型. 找出这些新方程以及所得二次曲线(面)的性质. 此外再给出它们可能有的轴及渐近线. 如果方程中含有参数，则所得的结果要根据参数的

取值加以讨论。

$$yz + zx + xy + \lambda(x + y + z) + \mu = 0,$$

$$4x^2 + 3y^2 + 9z^2 + 8xz + 4xy + 4y + 8z + \lambda = 0,$$

$$x^2+(2\lambda^2 + 1)(y^2 + z^2) - 2(yz + zx + xy) + 2\lambda^3 - 3\lambda^2+1=0,$$

$$(\mu z - \nu y)^2 + (\nu x - \lambda z)^2 + (\lambda y - \mu x)^2 = 1,$$

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6yz + 4zx + 12xy + 2x + 3y + \lambda z + \mu = 0,$$

$$x^2 + 2\lambda xy + y^2 - ax - by = 0,$$

$$x^2 + \lambda(\lambda + 1)xy + \lambda^2 y(y - a) = 0,$$

$$\alpha x^2 - 2xy + \beta y^2 - 2\beta x - 2\alpha y = 0,$$

$$(\alpha - 1)x^2 + 2\beta xy - (\alpha + 1)y^2 + 2\alpha x + 2\beta y - (\alpha + 1) = 0.$$

15.7.11 对实仿射平面的双曲线，证明 15.5.11 引入的渐近线概念与通过参数曲线定义的概念一致.

15.7.12 证明若一个严格的平行四边形内接于圆锥曲线，则它的中心是这个圆锥曲线的中心.

15.7.13 **切距球面**. 设Q是三维欧氏仿射空间的有心二次曲面. 证明外切于Q的直三面角的顶点轨迹是一个球面，称为Q的切距球面. 当Q是抛物面时，它变成什么样子?

证明调和外切于Q的球面（见14.5.4.4）就是正交于切距球面的球面.

证明二次曲面的一个切面束的切距球面构成一个球面束.

试与 17.4.2.3, 17.6.1 及 17.9.5 比较.

15.7.14 设Q是三维欧氏仿射空间的二次曲面，研究Q的圆口截面，即在Q上截得一个圆的平面，以及所截得的圆.（利用 14.1.3.7 及 17.4.2，我们能够研究在欧氏仿射空间的射影完备化空间的复化空间的无穷远平面内发生些什么. 我们也研究切Q于两个不同点的球面以及它们与Q的交.）

15.7.15 设Q是三维欧氏仿射空间的二次曲面，m是一个点. 证明Q的过m的法线"一般说来"是 6 条. 证明所有过m的法线在Q上的垂足都包含在一个二次锥面内，其顶点是 m，并包含Q的中心以及Q的轴的过m的平行线. 试与 17.5.5.6 比较.

15.7.16 详细证明在三维欧氏空间里如何用细线制作各种二次曲面，参看 17.2.2.5 及 17.6.4.

15.7.17 **同焦二次曲面.** 在 $\mathbf{R}^3$ 内考虑方程为

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0,\ a>b>c,$$

的二次曲面族 $Q(\lambda)$.研究过定点 (x_0, y_0, z_0) 可通过多少个 $Q(\lambda)$. 证明当有三个 $Q(\lambda)$ 通过同一个点时，它们在这一点的切平面是两两正交的(见 17.6.3.3).

15.7.18 在一个仿射平面上有四个点，其中任意三点都不共线.请用阴影标出具有下述性质的区域：由阴影区域中的点与四个已知点确定的圆锥曲线是椭圆.

15.7.19 找出使一个欧氏仿射二次超曲面保持稳定的所有欧氏对称(见 9.2.4).

15.7.20 设$\mathscr{E}$是 n 维欧氏仿射空间的以 0 为中心的椭球面. 考虑$\mathscr{E}$内使向量 $\overrightarrow{0a_i}$ 两两正交的点集 $\{a_i\}_{i=1,\cdots,n}$. 证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(0a_i)^2}$$

是一个常数.

由此推导出包含这些 a_i 的超平面的包络(见 10.13.12). 利用以 0 为中心的球面的配极变换重新证明 15.7.13.

第 16 章　射影圆锥曲线

自从古希腊时代以来，特别是经过了 19 世纪几何学家的发展，圆锥曲线已成为大量研究工作的对象，因而在这方面的成果是为数可观的；[EE] 中对这些成果作了系统的阐述．在多少带点古典意味的结果中，我们选了关于圆锥曲线内接和外切多边形的 Poncelet 定理作为本书的一个较难的定理；在我们看来，这是关于圆锥曲线的最漂亮的结果(第 16.6 节)．

在二次超曲面中间，圆锥曲线具有两个突出的优点：第一，可用射影直线来参数化，从而引出圆锥曲线上的交比和单应的概念(第 16.2 和 16.3 节)，第二，两个圆锥曲线的相交理论使我们有可能得出 Bezout 定理，并对圆锥曲线束作充分的研究(第 16.4 和 16.5 节)．

本章中，$P=P(E)$ 是特征数不为 2 的域 K 上的射影平面；$P^*=P(E^*)$．我们常将一点 $m\in P$ 和 m 的射影坐标，即三元数组 (x, y, z) 等同起来．$ab=\langle a, b\rangle$ 表示连接点 a 和点 $b(a\neq b)$ 的射影直线(参见 16.1.2)．

通常总已取定一条圆锥曲线 $\alpha\in PQ(E)$，常用 $C=\operatorname{im}(\alpha)$表示 α 的象，q 表示 α 的方程．但在第 16.7 节中，α 和 q 是就仿射平面 X 上的圆锥曲线而言的．

16.1　复习，记法及补充

16.1.1　根据 14.1.3.2 和 14.1.7.1，或者 α 是正常的，或者 α 的象 C 仅含一点、一条直线或两条直线．

16.1.2　**约定**．设已给定一条正常圆锥曲线(或是这么指明的，或是并没指明但容易看出的)，且 a，b 是 $\operatorname{im}(\alpha)=C$ 上已知的两

点，则在 $a \neq b$ 时记号ab表示射影直线 $\langle a, b\rangle = ab$，而在 $a = b$ 时，aa 表示 α 在 a 的切线(参见 14.1.3.5)． 在用了这一约定而得出的那些结论中(例如 16.2.2，16.2.11)，我们让读者自己去验证所得的结论确实是成立的;其中一般性的理由见 14.1.3.2.

16.1.3 记法. 对于P的齐次坐标 (x, y, z)，习惯上将 α 的矩阵 A 和 α 的一个方程写成下面的形式:

16.1.3.1

$$q = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy,$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{pmatrix}.$$

将P在齐次坐标下的射影标架记为 p, q, r, s，即 $p = (1, 0, 0)$，$q = (0, 1, 0)$，$r = (0, 0, 1)$，$s = (1, 1, 1)$(参见 4.4)．于是:

16.1.3.2 三角形 $\{p, q, r\}$ 关于 α 是自配极的充要条件是 $b = b' = b'' = 0$ (参见 14.5.4)．三角形 $\{p, q, r\}$ 内接于C的充要条件是 $a = a' = a'' = 0$；另外，$s \in C$ 的充要条件是 $b + b' + b'' = 0$. 要使 $q, r \in C$ 而且 pq，pr 相切于 C，必须且只须 α 的方程形如 $ax^2 + 2byz$；另外，$s \in C$ 等价于 α 的方程形如 $a(x^2 - yz)$ (要用到 14.5.3)．

以上结论使我们可以在圆锥曲线的情形下更详尽地讨论 14.1.6 和 14.2.4 中的内容:

16.1.4 命题. 经过内中任意三点都不共线的、P 上的五点，有且仅有一条正常圆锥曲线．对任意域K，设 α 和 β 是两条圆锥曲线，使得 $\mathrm{im}(\alpha)$ 非空且不退化为一点；则从 $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$ 必有 $\alpha = \beta$.

根据 4.6.8，可取前四点构成的射影标架：$\{p, q, r, s\}$；根据 16.1.3.2，当 C 包含这四点时，α 的方程必定有下面的形式:

$$by(z - x) + b'x(z - y).$$

设 $(x_0, y_0, z_0) = t$ 是已给的第五点，则它不在直线 pq，qr，rp，ps，qs，rs 上蕴含着 x_0，y_0，z_0 各不相同且都不为零，因而 by_0

$(z_0 - x_0) + b'x_0(z_0 - y_0) = 0$ 在$\widetilde{K}$中有唯一解 (b, b')，而且 $bb' \neq 0$，$b + b' \neq 0$；因而圆锥曲线

$$byz + b'zx + b''xy$$

是正常的，这是因为 $\det A = bb'b'' \neq 0$。

现在设α, β使 $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$；首先假定$\alpha$退化，则根据 14.1.3，14.1.7.1 和假设条件，由 $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$ 就可推出 $\alpha = \beta$. 若α是正常的，$k = \# K > 3$ 且 $C \neq \emptyset$，则 $\# C \geqslant 5$；事实上，若 $a \in C$，则P上经过a的直线数目为 $k + 1 > 4$，其中不与C相切的数目 >3，都与C交于a以外的一点. 由定理的第一部分，我们就得出所需结论. 剩下的是$\# K = 3$的情形；上述结果表明C至少包含四点. 如果我们取这四点构成射影标架，由前段可知当α正常时，α的方程必为 $b(xy + yz + zx)$.

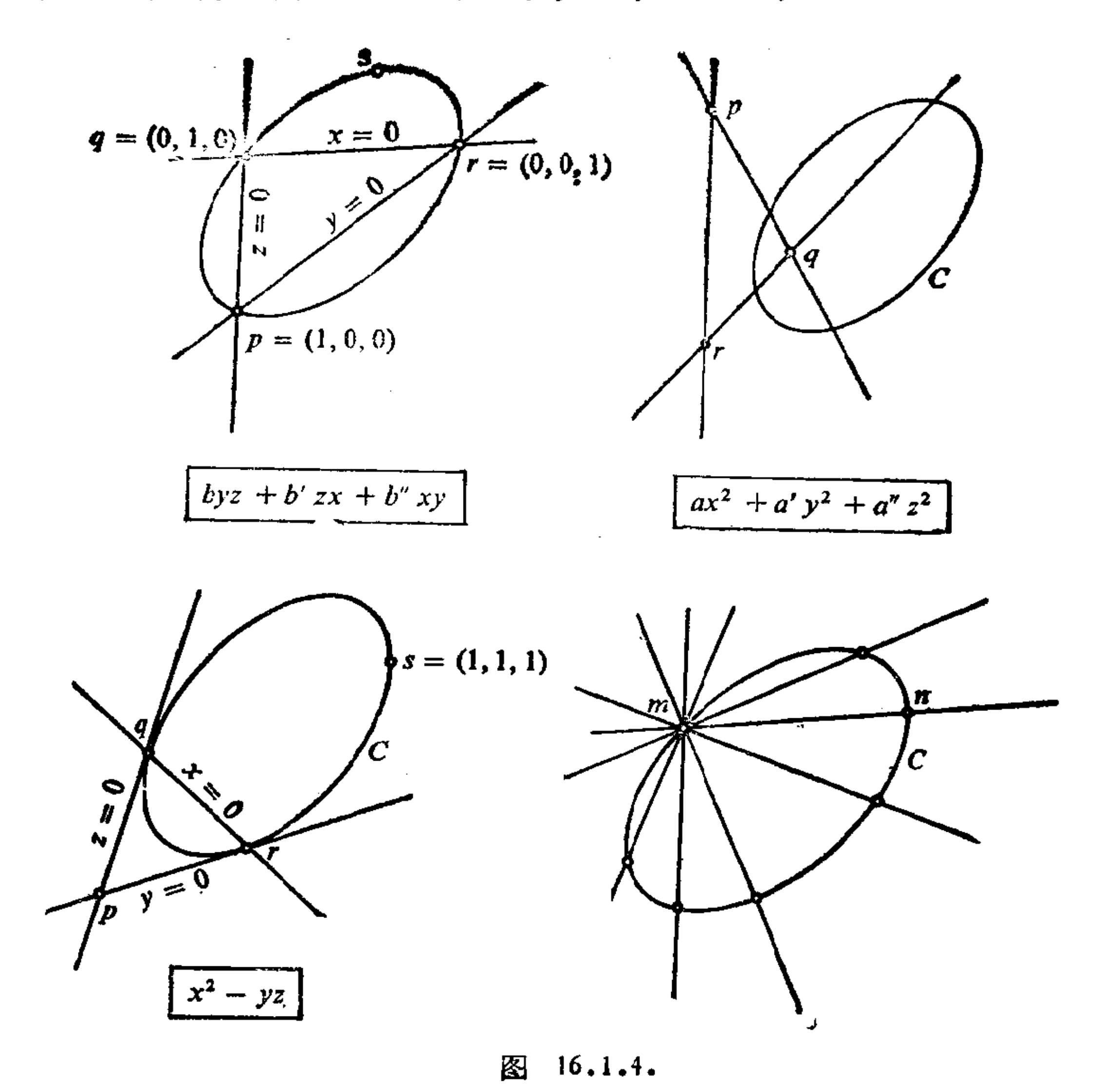


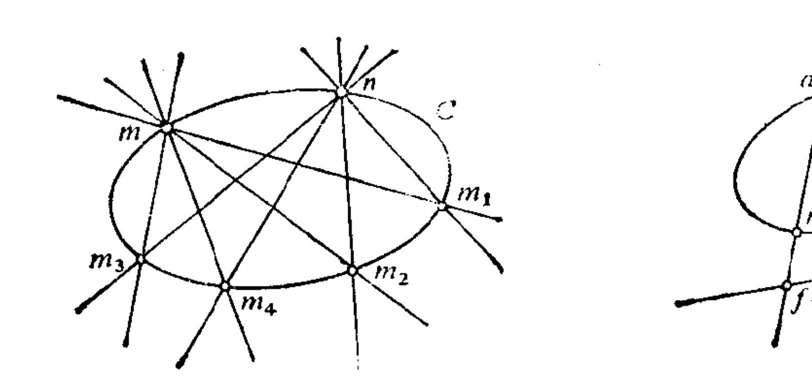
图 16.1.4.

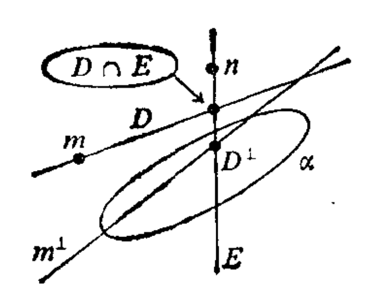
16.2 良好参数化映射，四点的交比，Pascal 定理

16.2.1 上述内容启发我们将每条经过 $m\in C$ 的直线 D 跟点 $D\cap C$ 联系起来．更精确地说：对 $m\in P$，用 m^* 来记 P 上含 m 的所有直线构成的 P^* 的直线(参见 4.1.3.5)．设 $m\in C$，当 α 正常时，置(利用 16.1.2)：

16.2.2 $\pi_m: C=\operatorname{im}(\alpha)\ni n\longmapsto mn\in m^*$.

16.2.3 命题．对每一 $m\in C$，π_m 是一个双射．对任何 $m,n\in C$，$\pi_n\ \pi_m^{-1}: m^*\to n^*$ 是一个单应．反过来，若 m, n 是 P 的不同的两点，且 $f: m^*\to n^*$ 是单应，则存在一条 P 上的圆锥曲线 α，使得 $\operatorname{im}(\alpha)=\{D\cap f(D): D\in m^*\}$；这条圆锥曲线经过 m 和 n．这条圆锥曲线退化的充要条件是 $f(mn)=mn$；这时它由 mn 和另一





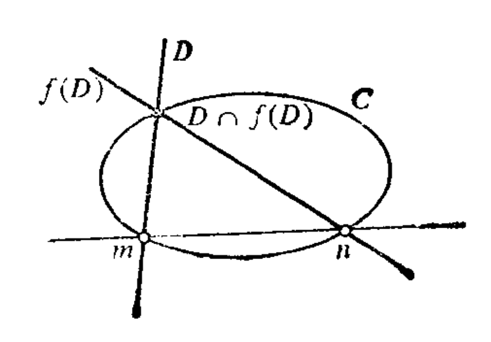


图 16.2.3

条直线组成.

由 14.1.3.2 和 14.1.3.5 就可得出双射的结论. 现在如果 m, $n\in C$, 取射影标架使 $m=(0,1,0)$, $n=(0,0,1)$, 而且 α 的方程为 x^2-yz, 根据 16.1.3.2 这总是可以做到的. 于是 m^* 由方程为 $\lambda x+\mu z=0$ 的直线 D 构成, n^* 由方程为 $\lambda'x+\mu'y=0$ 的直线 D' 构成;因而 $D\cap D'\in C$ 等价于 $\lambda\lambda'=\mu\mu'$, 这是$(\lambda,\mu)\in\widetilde{K}$ 和 $(\lambda',\mu')\in\widetilde{K}$ 之间的一个单应.

反过来, 首先假定 $f(mn)=mn$; 则结论在 6.5.9 中已经证得. 否则, 对 m, n 和 $D_i\cap f(D_i)$ $(i=1,2,3)$ 这五点应用 16.1.4, 其中 D_i 是各不相同且异于 mn 的,即可.

16.2.4 推论. 若 $K=\mathbf{C}$ 且 α 正常, 则 $\mathrm{im}(\alpha)$ 与 $P^1(\mathbf{C})$ 同胚; 若 $K=\mathbf{R}$, α 正常且有非空象集,则 $\mathrm{im}(\alpha)$ 同胚于 $P^1(\mathbf{R})$.

在前面所取的标架下, 可以看到 π_m^{-1} 恒同于映射 $\widetilde{K}\ni(\lambda,\mu)\longmapsto(\lambda\mu,-\mu^2,-\lambda^2)\in P$, $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时, 这是连续映射.

16.2.5 命题. 设 α 是有非空象 C 的正常圆锥曲线, m_i $(i=1,2,3,4)$ 是 C 上四点, 其中至多有两点是相同的; 则四条直线 mm_i 的交比 $[mm_i]$ (参见 6.5 和 16.1.2) 与点 $m\in C$ 无关. 把它称为 C 上四点 m_i 的**交比**,记为 $[m_i]$ 或 $[m_i]_C$. 其实, 若有三点重合, 仍是可以定义的, 因为这时它们是调和分割的, 将这一交比记为 $[m_i]=-1$ (参见 6.4).

命题由 16.1.4 和 6.1.4 即可证得.

应用 6.5, 我们还可以有以下结论:

16.2.6 设 α 正常, $a\in C$, D 是一条直线且 $a\notin D$; 则 $C\ni m\longmapsto am\cap D\in D$ 是一个双射而且保持交比. 一个例子就是 $n=1$, $K=\mathbf{R}$ 或 $n=2$, $K=\mathbf{C}$ 时的球极投影: 参见 18.1.4, 18.10.7, 20.6.

16.2.7 例

16.2.7.1 设 α 是一条正常圆锥曲线, m, n 是 P 上不同的两点,则集 $\{D\cap E$: 直线 $D\ni m$, 直线 $E\ni n$, $D\perp E\}$ 是圆锥曲线的象集而且包含 m 和 n.

事实上，由 14.5 就有 $E = nD^{\perp}$；而 $m^* \ni D \longmapsto D^{\perp} \in m^{\perp}$ 是一个单应，它使 $m^{\perp} \ni x \longmapsto nx \in n^*$，所以由 16.2.3 的最后一段即可证明命题.

一个这样的几何轨迹的例子是欧氏空间中圆锥曲线的切距圆，见 17.4.2.3.

16.2.7.2 根据对偶原理，由 16.2.3 即可推得：若 $f:D \to E$ 是 P 上两直线间的单应，则当 m 取遍 D 上的点时，直线 $\langle m, f(m)\rangle$ 包络出 P 上一条与 D 和 E 相切的圆锥曲线. 这个结果的一种很特殊的情形是 9.6.7.1.

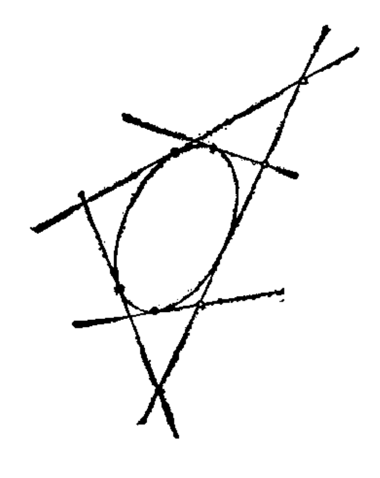


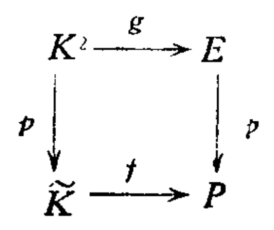
图 16.2.7.

16.2.7.3 由 14.6.1 可推得：若 α 是正常圆锥曲线且象集非空，则可以用两种等价的方式定义 α 的四条切线的交比，或者是作为四个切点的交比，或者是作为任一切线与这四条切线的四个交点的交比.

16.2.7.4 一个漂亮的应用是可容已知角的弧，见 17.4.2.2.

16.2.8 评注. 根据 16.1.3.2，象集非空的正常圆锥曲线必有形如 $x^2 - yz$ 的方程；但这时映射 $K^2 \ni (\lambda, \mu) \longmapsto (\lambda\mu, \lambda^2, \mu^2) \in E$ 在商空间上诱导出 $f:\widetilde{K} \to C$，它是双射，而且保持交比——其实这是 16.2.3 中证明的一个应用. 更一般地，我们有下面的命题.

16.2.9 命题. 每一保持交比的双射 $f:\widetilde{K} \to C$ 称为象集非空的正常圆锥曲线的良好参数化映射. 对任一良好参数化映射，总存在 $g \in \mathscr{P}_2^{\bullet}(K^2; E)$（参见 3.3.1）使下图交换：



$$\begin{array}{ccc} K^2 & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \widetilde{K} & \xrightarrow{f} & P \end{array}$$

即 $f \circ p = p \circ g$；而且在不计相差 K^* 中一个纯量的情况下，这样的 g 是唯一的. 反过来，设 $g \in \mathscr{P}_2^{\bullet}(K^2; E)$ 而 $f:\widetilde{K} \to P$ 是在商空

间上的诱导映射;那么,如果 f 是单射,其象 $f(\widetilde{K})=C$ 就是一个正常圆锥曲线的象集,而且 f 是一个良好参数化映射. 而对任意两个 C 上的良好参数化映射 $f, g:\widetilde{K}\to C$,总有

$$g^{-1}\circ f\in \mathrm{GP}(\widetilde{K}).$$

最后一个结论由定义和 6.1.4 即可得出. 给定 f 后,g 的存在性可由我们已经碰到过的 $g:(\lambda,\mu)\longmapsto(\lambda^2,\lambda\mu,\mu^2)$ 的存在性导出;唯一性是显然的,由 $\mathscr{P}_2^\bullet$ 的定义即可看出. 为证明反过来的结论,记

$$x=u\lambda^2+u'\lambda\mu+u''\mu^2,$$
$$y=v\lambda^2+v'\lambda\mu+v''\mu^2,$$
$$z=w\lambda^2+w'\lambda\mu+w''\mu^2;$$

我们先证行列式

$$\begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix}\neq 0.$$

如若不然,就有一个形如

$$(\lambda,\mu)\longmapsto(a\lambda^2+b\lambda\mu+c\mu^2,\ a'\lambda^2+b'\lambda\mu+c'\mu^2)$$

的映射,我们留给读者证明:这时只要 $\#K\geqslant 3$,商空间上的诱导映射 $\widetilde{K}\to\widetilde{K}$ 是不可能为单射的.

由此即可推得:存在线性无关的 $\varphi,\eta,\zeta\in E^*$ 使 $\lambda^2=\varphi(x,y,z)$,$\lambda\mu=\eta(x,y,z)$,$\mu^2=\zeta(x,y,z)$. 因而 $f(\widetilde{K})$ 是以方程为 $\eta^2-\varphi\zeta=0$ 的圆锥曲线作为象集的;这条圆锥曲线是正常的,因为 φ,η,ζ 都是线性无关的. 最后,f 还是一个良好参数化映射,因为在不计可能相差 $\widetilde{K}$ 和 P 中的单应的情形下,我们有

$$(\lambda,\mu)\longmapsto(\lambda^2,\lambda\mu,\mu^2),$$

由 16.2.8 可知它确实是良好参数化映射.

16.2.10 注. 这里,我们就圆锥曲线而言涉及到了一个关于有理曲线的一般定理的特殊情形,那就是 Lüroth 定理,但这个定理只在 K 是代数闭域时才成立. 例如可参见 [WK],第 149—151 页.

16.2.11 Pascal 定理. 设 C 是一条正常圆锥曲线的象，a, b, c, d, e, f 是 C 上六点，其中至多只有三对点是重合的(参见 16.1.2)，则 $ab\cap de,\ bc\cap ef,\ cd\cap fa$ 共线.

令 $x = bc\cap ed,\ y = cd\cap ef,\ z = ab\cap de,\ t = af\cap dc$；由 16.2.5 和 6.5.2 就有：

$$[z, x, d, e] = [ba, bc, bd, be]$$
$$= [fa, fc, fd, fe] = [t, c, d, y],$$

于是由6.5.8可知 zt, xc, ey 三线共点.

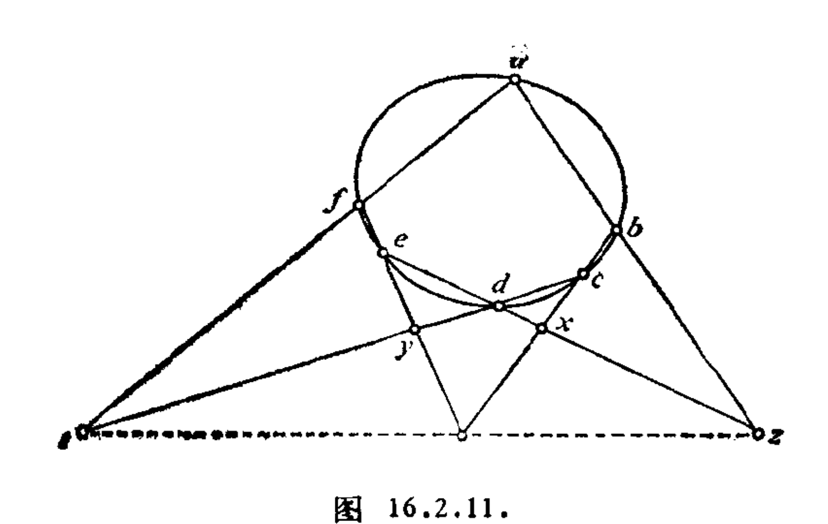


图 16.2.11.

16.2.12 我们注意到，当 C 由两条直线组成时，Pascal 定理就是 Pappus 定理，参见 5.4.1. 我们好象还不知道 Pascal 是怎样对圆来证明他的定理的；但我们却知道，他是通过投影从圆过渡到圆锥曲线的情形的，参见 17.1.5. 关于“神秘六点形”的其它证明和性质，可见 16.8.3，16.8.4，16.8.5. 16.2.11 的逆命题是显而易见的. 只要注意到一条直线与一条圆锥曲线至多交于两点. 这一点我们在 16.3.3，16.7.3 中都将用到. 由 14.6 可以推出：

16.2.13 推论 (Brianchon). 若一个六边形外切于一条正常圆锥曲线，则它的三条对角线共点.

Pascal 和 Brianchon 的结论对退化的情形也适用(参见 16.1.2)，在图 16.2.13 中我们画了两种情形，其中一种是极限情形.

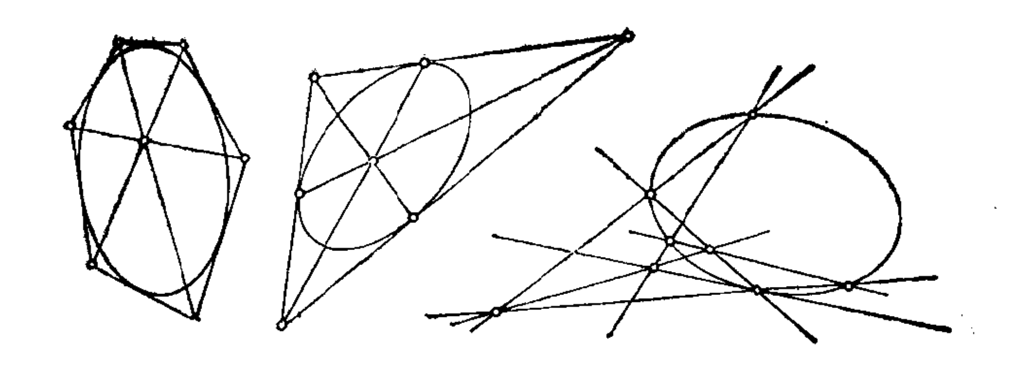


图 16.2.13.

16.2.14 设 α 正常，$(m_i)_{i=1,2,3,4}\subset C$，则对 $f\in \mathrm{GP}(P)$ 有

$$[f(m_i)]_{f(C)}=[m_i]_C.$$

16.3 圆锥曲线的单应和单应群. 应用

本节中 α 是正常圆锥曲线且象集 C 非空.

16.3.1 定义. C 的任一保持交比的双射称为 α 的或 C 的单应；若 $f^2=\mathrm{Id}_C$ 且 $f\neq \mathrm{Id}_C$，则称 f 是一个对合. α 的单应群记为 $\mathrm{GP}(C)$ 或 $\mathrm{GP}(\alpha)$.

16.3.2 根据16.2，若 $a\in C$，则 $f\in \mathrm{GP}(C)$ 等价于

$$\pi_a\circ f\circ\pi_a^{-1}\in \mathrm{GP}(a^*);$$

对任一良好参数化映射也有同样的结论. C 的对合与 6.7 意义下的对合是相应的. 例如，存在唯一的单应将 C 上已知三点映成指定的三点. 所以 $\mathrm{GP}(C)$ 恒同构于 $\mathrm{GP}(\tilde{K})$（但同构的方式并不唯一），因而也记为 $\mathrm{GP}(1;K)$.

我们也注意到，另外有一种找出 α 的单应的方法，其出发点是 16.2.14：取 $f\in \mathrm{PO}(\alpha)$（参见 14.7）；在 16.3.8 中我们很快就会看到，再没有其它的单应了. 暂时，我们来考虑将 C 的单应和整个 P 联系起来.

16.3.3 定理(单应轴定理). 设 $f\in \mathrm{GP}(C)$；则存在一条 P 上的直线Δ，使得只要 $m,n\in C$ 且 $m\neq n$，$m'=f(m)$，就有 $n'=$

$f(n) \Longleftrightarrow m'n \cap mn' \in \Delta$. 称$\Delta$为$f$的轴. f的固定点就是$\Delta \cap C$的点.

在遇有需要时,我们是不会忘记利用16.1.2的.设$(a_i)_{i=1,2,3,4,5}$是C上的点; 令$a'_i = f(a_i)$, $s_{ij} = a_i a'_j \cap a'_i a_j$. 设$a_1$, a_2, a_3各不相同,又设Δ是直线$s_{12}s_{13}$; 由6.5.8和16.2.5可知点s_{14}和s_{15}都属于Δ. 由16.2.11(以及它的逆命题,参见16.2.12),点s_{45}属于Δ(反之亦然).

16.3.4 评注. 若K是代数闭域,我们不用16.2.11,而直接从6.5.8出发来证明16.3.3; 其实, $\Delta = s_{12}s_{13}$必与C相交,且就交在f的固定点,因此Δ的特点就是它是连结这些点的直线(参见16.1.2). 这样,16.2.11可以很简单地从16.3.3导出! 因此,如果愿意的话,就可以利用K的代数闭包和α在该闭包上的扩张. 值得注意的是,即使$\operatorname{im}(\alpha) \neq \varnothing$, f仍可能没有固定点,参见下图.

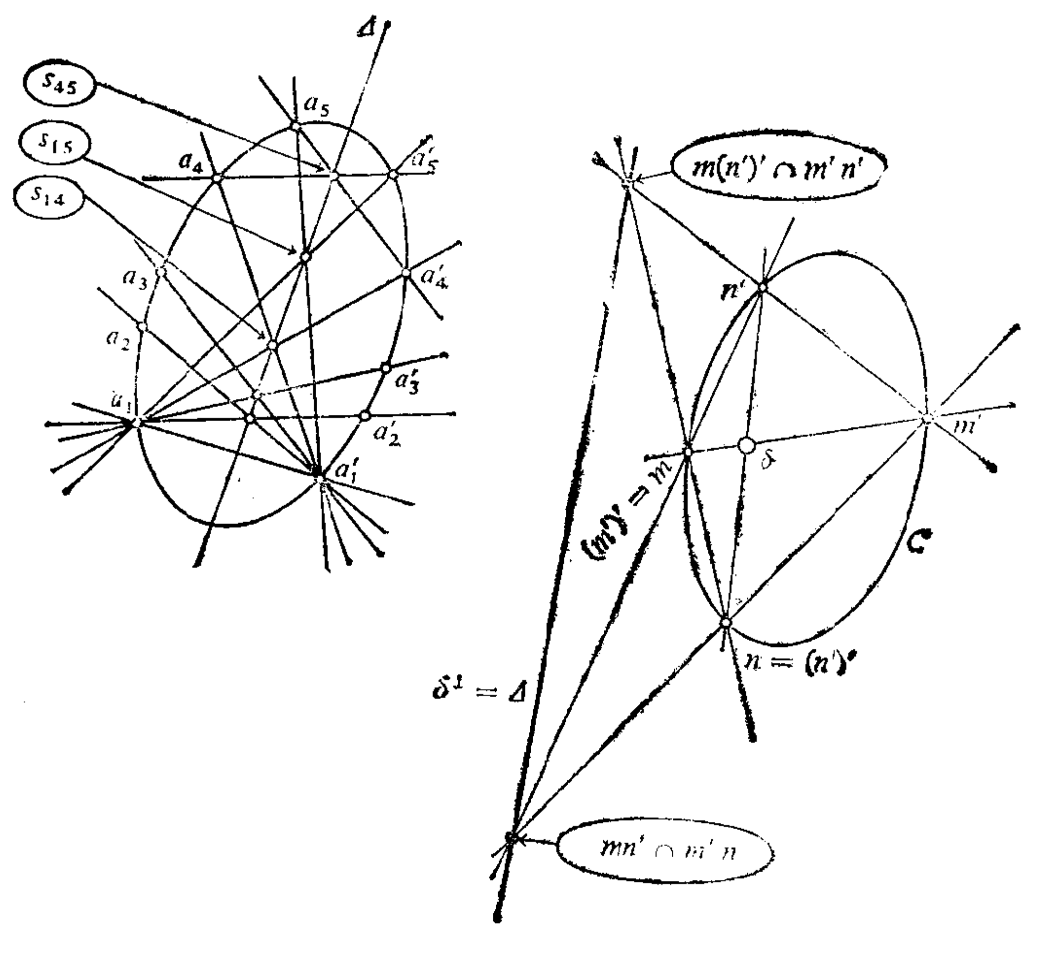


图 16.3.6.

16.3.5 例. 圆的旋转是单应；这可由 8.8.7.2 推出，我们在 17.4.2 中还会讨论这个问题. 考虑对合的情形，就有下面的:

16.3.6 推论 (Frégier). 双射 $f\in \mathrm{GP}(C)$ 是对合的充要条件是存在 $\delta\in P\backslash C$ 使:

$$\forall m\in C:\{m, f(m)\}=C\cap \delta m\ (\text{参见}16.1.2).$$

点 δ 称为 f 的 Frégier 点；它是 f 的轴Δ的极点 $\Delta^{\perp}$.

必要性可由 14.5.2.6 得出(参见图 14.5.2)；充分性来自 6.7.4，它和 16.3.3 一起表明，根据 $\{m, f(m)\}=C\cap\delta m$ 的条件，δ 确实决定了一个对合.

16.3.6.1 问题. 若 $f\in\mathrm{GP}(C)$ 不再是对合，要问：当 m 跑遍 C 时，直线 $\langle m, f(m)\rangle$ 情形如何？回答可见 16.8.8.

16.3.7 例. 若 C 是欧氏平面上的圆，δ 是它的中心，$a\in C$ 是任意一点，则 δ 在 C 上所决定的对合就是对径点的对合；而 π_a 在 a^* 上所决定的对合就是正交直线的对合；我们在 16.3.10.2 和 17.5 中还会讨论这些问题.

现在我们可以回答 16.3.2 中提出的问题了:

16.3.8 命题. 限制 $\mathrm{PO}(\alpha)\ni g\longmapsto g|_C\in\mathrm{GP}(C)$ 是双射，因此 $\mathrm{GP}(C)$ 自然地同构于 $\mathrm{PO}(\alpha)$.

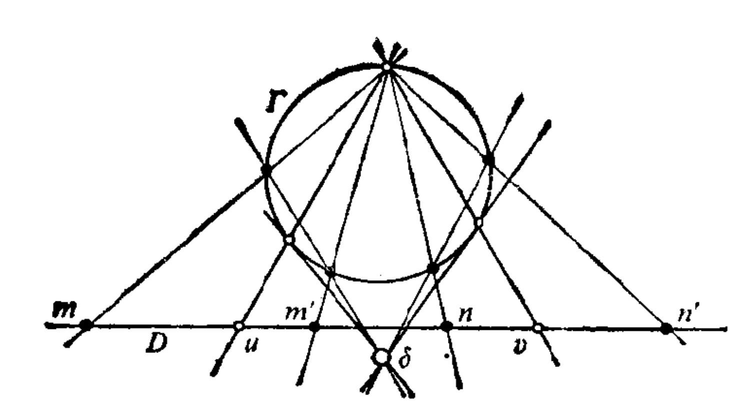
由 16.2.14 知道，$g|_C$ 确实在 $\mathrm{GP}(C)$ 中；C 至少包含构成一个射影标架的四点，由此即可得出单射性，参见 16.1.4 中的证明(若 $\# K=3$，则只有这四点!). 为证明满射性，我们先借助于 6.7.3 归结到对合的情形；但由 14.7.4 可知，Frégier 点 δ 和轴 $\Delta=\delta^{\perp}$ 的对合就是一个 $g\in\mathrm{PO}(\alpha)$ 的限制.

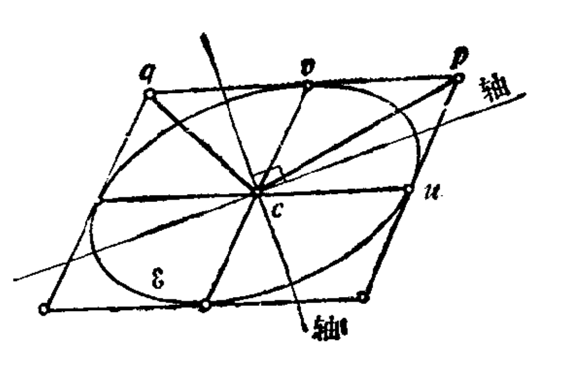
16.3.9 推论. 若 K 是代数闭域，则不论是在 α 正常时或 q 非退化时，都有下列同构:

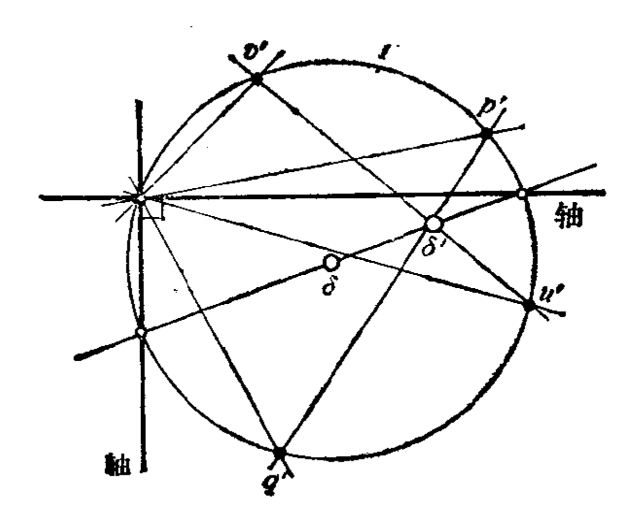
$$\mathrm{GP}(K^2)=\mathrm{GP}(\tilde{K})=\mathrm{GP}(1;K)\cong\mathrm{PO}(q)$$
$$\cong O^+(K^3;x^2+y^2+z^2).$$

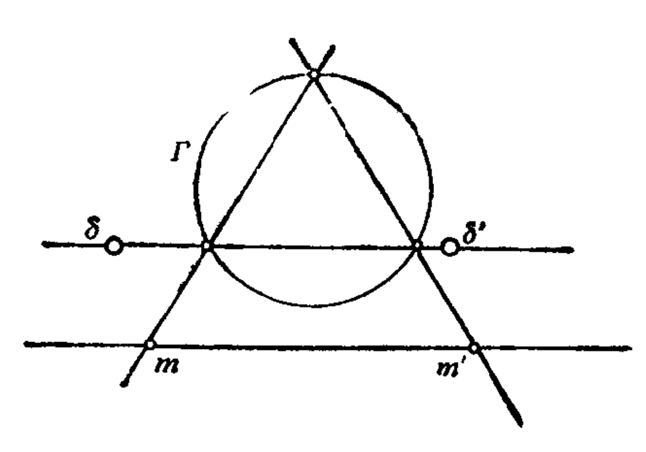
若 $K=\mathbf{R}$ 且 $q=x^2+y^2-z^2$，则有:

$$\mathrm{GP}(\mathbf{R}^2)=\mathrm{GP}(\tilde{\mathbf{R}})=\mathrm{GP}(1;\mathbf{R})$$
$$\cong\mathrm{PO}(q)\cong O^+(2, 1).$$


Γ
m
m'
n
n'
D
u
v
δ


q
v
p
轴
u
c
ε
轴


v'
p'
轴
δ'
δ
u'
轴
q'


Γ
δ
δ'
m
m'

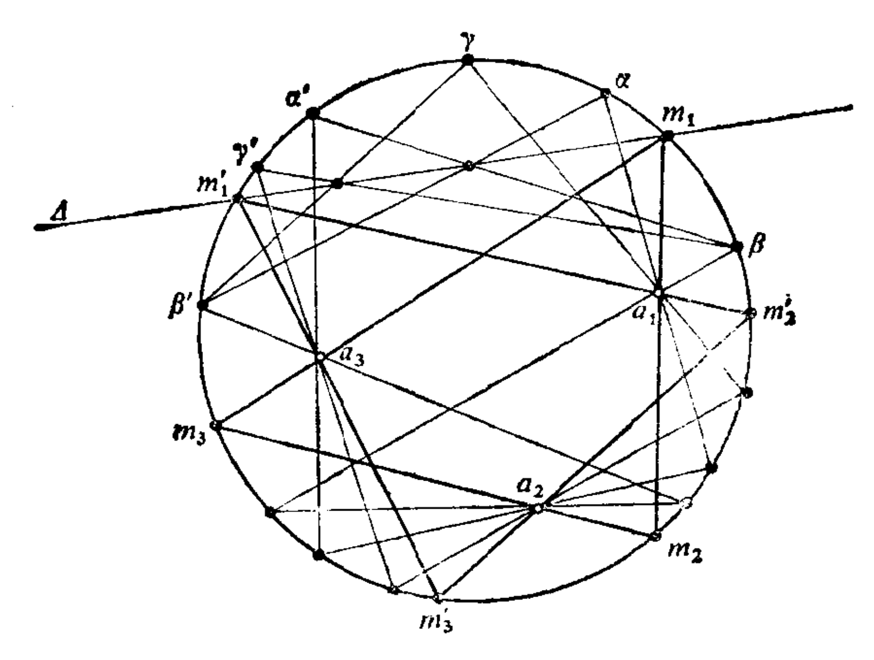

γ
α'
α
m1
γ'
m'1
Δ
β
β'
a1
m'2
a3
m3
a2
m2
m'3

图 16.3.10.

这样我们就找出了某些“典型群”之间的同构；关于这个问题，参见 [DE1]，第 IV 章.

16.3.10 应用

16.3.10.1 既然有了三对对应点以后，单应的轴就知道了，我们就可以利用 16.3.3 几何地画出任一点在一个单应下的象．至于对合，Frégier 点通过两对点就能决定它们，所以情形就更简单.

例如，一个对合的两重点就是从 δ 向 C 引的切线的切点；两个对合所共有的那对对应点，可通过找出 C 和连结它们的 Frégier 点的直线所共有的点而得到.

根据 16.2.6，上述的作图也使我们能解决前面关于一条直线 D 或者一个直线束 a^* 的那些问题（参见 16.2.3）；图 16.3.10 就是用来解决这些问题的，其中我们用到包含 D 的一张欧氏仿射平面 X 和 X 上一个辅助圆 Γ.

16.3.10.2 椭圆轴的确定. 设 $\mathscr{E}$ 是欧氏仿射平面 X 上以 c 为中心的椭圆，而且已知两条共轭直径为 cu，cv（图 16.3.10）——这是实用时常见的情形，例如在画法几何或在 16.7.3 中都是这样．根据 15.7.7，向量 $\overrightarrow{cu}$，$\overrightarrow{cv}$ 以及 $\overrightarrow{cp}$，$\overrightarrow{cq}$ 分别关于 $\vec{\alpha}$ 共轭，因而它们的方向在射影直线 c^* 上是对合的，既然关于 $\vec{\alpha}$ 在 ∞_X 上的配极变换是一个对合——因为它是对合的、单应的非恒等变换，而且 c^* 自然地同构于 ∞_X.

于是，求 $\mathscr{E}$ 的轴就是求关于 $\vec{\alpha}$ 共轭而且正交的方向；根据 16.3.7，其作图如图 16.3.10 所示.

也可参见 17.9.22.

16.3.10.3 Castillon 问题. 问题是这样的：设在欧氏平面上给定一个圆 Γ 和 n 个点 $a_i \notin \Gamma (i=1,\cdots,n)$，求一个内接于 Γ 的多边形 $\{m_i\} (i=1,\cdots,n)$ 使 $a_i \in m_i m_{i+1} (i=1,\cdots,n)$. 这个问题对任一射影平面上有非空象集 C 的圆锥曲线和 $P\backslash C$ 的点 a_i 来说，是同样容易解决的．基本的想法是 m_1 是以 $f=\varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_1$ 定义的单应 $f \in GP(C)$ 的固定点，其中 φ_i 是 Frégier 点 a_i 的 C 的对合；具体构作时只要先作 $\alpha'=f(\alpha)$，$\beta'=f(\beta)$，$\gamma'=f(\gamma)$，

其中 α, β, γ 是 C 上任意的不同的点，然后再根据下式作出 f 的轴 Δ:

$$\langle \alpha\beta' \cap \alpha'\beta,\ \beta\gamma' \cap \beta'\gamma \rangle = \Delta,$$

所求的点 m_1 就是 $\Delta \cap C$ 的点。见图 16.3.10 以及第 10.11.4 节。

16.4 两条圆锥曲线的相交. Bezout 定理

在本章最后几节中，域 K 满足 $\# K \geqslant 5$.

16.4.1 设 $\varphi \in \mathscr{P}_n^{\bullet}(K^2)$ 是 K^2 上的齐次多项式，次数 $n \leqslant 4$；为了讨论使 $\varphi(a, b) = 0$ 的 $(a, b) \in K^2$，我们注意到 $\varphi(ka, kb) = 0$，从而可求出在 $\widetilde{K} = P(K^2)$ 上的那些"根"。还要注意到，在不计相差 K^* 的纯量的情形下，当 $(a, b) \neq (0, 0)$ 时 $\omega: (\lambda, \mu) \longmapsto b\lambda - a\mu$ 是 K^2 上唯一能使 $\omega(a, b) = 0$ 的线性形式. 上述内容引出了:

16.4.2 引理. 设 $\varphi \in \mathscr{P}_n^{\bullet}(K^2)$，$n \leqslant 4$；若 $m = p(a, b)$ 时 $\varphi(a, b) = 0$，则称 $m \in \widetilde{K}$ 是 φ 的**根**. 下面假定 $\varphi \neq 0$.

(i) 要使 m 是 φ 的根，必须且只须存在 $\psi \in \mathscr{P}_{n-1}^{\bullet}(K^2)$ 使 $\varphi = (b\lambda - a\mu)\psi$. 称整数 ω 为 m 的**阶**，如果 $\varphi = (b\lambda - a\mu)^{\omega}\psi$，其中 $\psi \in \mathscr{P}_{n-\omega}^{\bullet}(K^2)$，而且 m 不是 ψ 的根. 记 $R(\varphi) = \{(m_i, \omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}$ 为 φ 在 $\widetilde{K}$ 中不同的根 m_i 的集合，其中 ω_i 表示 m_i 的阶. 若 $\varphi' \in \mathscr{P}_n^{\bullet}(K^2)\backslash 0$，等式 $R(\varphi) = R(\varphi')$ 就表示 φ 和 φ' 有相同的根，它们的阶也相同.

(ii) 若 $m_i = p(a_i, b_i)$，总有: $\varphi = \prod_{i=1}^{k} (b_i\lambda - a_i\mu)^{\omega_i}\psi$，其中 ψ 在 $\mathscr{P}^{\bullet}_{n-\sum_{i=1}^{k}\omega_i}(K^2)\backslash 0$ 中，而且 ψ 没有根；特别有 $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = n$ 或 $\sum_{i=1}^{k} \omega_i \leqslant n - 2$.

(iii) 若 $R(\varphi) = R(\varphi')$ 且 $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = n$，则 $\varphi' = k\varphi$，$k \in$

K^*.

(iv) 若 $f \in \mathrm{GP}(K^2)$，则 $R(\varphi \circ f) = \{f^{-1}(m_i), \omega_i\}_{i=1,\cdots,k}$.

(v) 若K是代数闭域，则对任何φ有 $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = n$.

为了证明引理，我们得回到K上通常的多项式的情形，在K上取值，将 $\lambda/\mu = x$ 作为未知数；这么一来，有可能会漏掉一个显然的根 $p(1, 0) = \infty \in \widetilde{K}$. 但因 $\varphi \neq 0$，只有有限个根，所以可作一个 $\widetilde{K}$ 的单应使∞不是根. 这时，上面那些性质在 $K[X]$ 中是经典的结果，因为K的基数大于所考虑的多项式的次数.

16.4.3　一条圆锥曲线与另一条正常圆锥曲线相交.

设α是以非空的C为象集的正常圆锥曲线；α' 是另一条圆锥曲线，不一定是正常的，方程为q'. 设f是α的一个良好参数化映射，g是如 16.2.9 中与f相应的映射：则若

$$m = p(x) \in C \cap C',$$

其中C'表示α'的象，就有 $q'(x) = 0$. 但 $m \in C$，所以存在 $(a, b) \in K^2$ 使 $x = g(a, b)$；由此即得 $q'(g(a, b)) = 0$，即 $(q' \circ g)(a, b) = 0$. 于是 $q' \circ g : K^2 \to K$ 显然在 $\mathscr{P}_4^\circ(K^2)$ 中；但我们在下面用得到这种情形下的具体算式(参见 16.2.8)：

$$g : (\lambda, \mu) \longmapsto (\lambda^2, \lambda\mu, \mu^2),$$

$$q' = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy,$$

由此即得

16.4.4

$$q' \circ g = a\lambda^4 + 2b''\lambda^3\mu + (a' + 2b')\lambda^2\mu^2 + 2b\lambda\mu^3 + a''\mu^4.$$

我们首先注意到由 $q' \circ g \neq 0$ 可推出 $q' = a'(y^2 - xz) = a'q$，因此 $\alpha' = \alpha$，这就又顺便地证明了 16.1.4 的末尾. 以下，我们假定 $\alpha' \neq \alpha$，因而也就有 $q' \circ g \neq 0$，从而可以利用 16.4.2.

现在我们注意到，若 $m \in C \cap C'$，则 $f^{-1}(m)$ 作为 $q' \circ g$ 的根的阶是只与α和α'有关，而与使 $\alpha' = p(q')$ 的 q' 以及对C所取的良好参数化映射f都无关的，这可由 16.4.2 (iv) 和 16.2.9 的命题中最后一个结论推出. 由此即可引出：

16.4.5 定义. 若 $m\in C\cap C'$, 上述整数称为 m 的阶. 记 $C\square C'=\{(m_i,\omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}$, 其中 m_i 遍取 $C\cap C'$, ω_i 则表示 m_i 的阶. C' 称为在 m 处与 C 相切(相应地: 密切,超切), 如果 m 的阶 $\geqslant 2$ (相应地: $\geqslant 3$, $=4$). 若 $m\notin C\cap C'$, 称它是零阶的.

16.4.6 评注. $\#(C\cap C')$ 是有限数,这一点可由 16.4.2 和 16.4.3 得出.

必须注意, $C\square C'$ 仅在 C 是正常时才有意义; 而当 C' 也正常时, 我们在 16.4.7.4 中将会看到 $C'\square C=C\square C'$. 在 16.4.7.3 和 16.4.12.1 中将会说明何以要用相切、密切这两个词.

16.4.7 阶的解释. 由于阶是良好参数化映射下的不变量,我们可以假定 q 和 q' 是如 16.4.4 中那样给定的;这时, 我们来看点 $m=p(1,0,0)$ 的阶是什么. 由于 $m=f(p(1,0))$, 这个阶就是 $(1,0)$ 作为 16.4.4 中的根的阶,因此:

$$\textbf{16.4.7.1}\quad \begin{cases} m\text{的阶}\geqslant 1 \Longleftrightarrow a=0;\\ m\text{的阶}\geqslant 2 \Longleftrightarrow a=b''=0;\\ m\text{的阶}\geqslant 3 \Longleftrightarrow a=b''=a'+2b'=0;\\ m\text{的阶}=4 \Longleftrightarrow a=b''=a'+2b'=b=0. \end{cases}$$

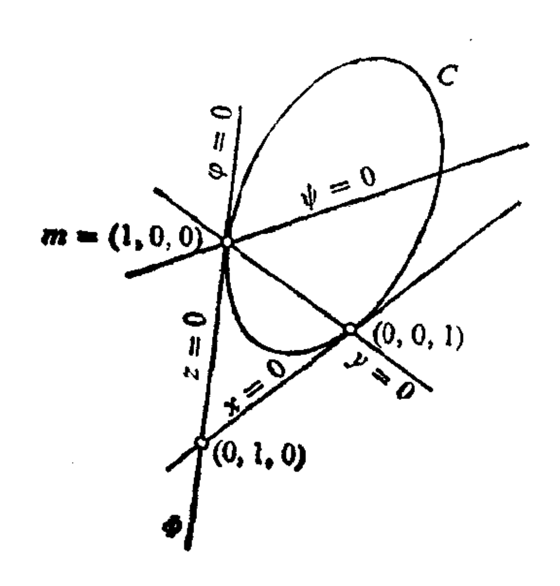


图 16.4.7.

阶 $\geqslant 1$: $m\in C'$ 的条件就是 $a=0$.

阶 $\geqslant 2$: 由 13.1.3.7 后面的讨论以及 14.5.3 可知, (x_0,y_0,z_0) 关于 α' 的极线的方程为

$$\textbf{16.4.7.2}\quad ax_0x+a'y_0y+a''z_0z+b(y_0z+z_0y)+b'(z_0x+x_0z)+b''(x_0y+y_0x)=0;$$

特殊地, $m=(1,0,0)$ 关于 α' 的极线 $m^\perp$ 为

$$ax+b'z+b''y=0;$$

因而 $m\in C'$, $b''=0$ 的条件就正好表示了 $z=0$——它已经在 m

处与 α 相切—— 是 α' 在 m 处的一条切线（注意，C' 可以是退化的）.

阶 $\geqslant 3$：若阶 $\geqslant 3$，可写

$$q' = a'(y^2 - xz) + z(2by + a''z),$$

即 $q' = kq + \varphi\phi$，其中 $k \in K$，$\varphi, \phi \in E^*\backslash O$，而且 φ 是 α' 在 m 处的切线 Φ 的方程. 反过来，若 $q' = kq + \varphi\phi$，且 φ 是 Φ 的方程，则 m 的阶 $\geqslant 3$.

阶 $=4$：这时，可写 $q' = kq + \varphi^2$，其中 φ 是 α 在 m 处的切线的方程，反之亦然. 总之，有：

16.4.7.3 命题. 设 $\alpha, \alpha' \in \mathrm{PQ}(P)$，其中 α 正常，方程为 q，象集 C 非空，α' 不一定正常，象集为 C'，而且 $\alpha' \neq \alpha$；设 $m \in C \cap C'$，φ 是 α 在 m 处的切线 Φ 的一个方程. 则：

m 的阶 $\geqslant 2 \Leftrightarrow \Phi$ 与 α' 相切；

m 的阶 $\geqslant 3 \Leftrightarrow \alpha'$ 的任一方程必形如 $q' = kq + \varphi\phi$，其中

$$\phi \in E^*\backslash O,\ k \in K;$$

m 的阶 $=4 \Leftrightarrow \alpha'$ 的任一方程必形如 $q' = kq + \varphi^2$，其中 $k \in K$.

16.4.7.4 推论. 若 C 和 C' 都是正常的，则：

$$C \square C' = C' \square C.$$

考察下面的列出 $C \square C'$ 的所有可能性的表格，即可证得推论（用到 16.4.2）：

16.4.7.5 表格.

类型	$C \square C'$	$\sum_{i=1}^{k} \omega_i$	$\#(C \cap C')$	$\#\{m$: 阶$(m) \geqslant 2\}$	$\#\{m$: 阶$(m) = 4\}$
	$(a, 1)$	1	1	0	0
	$(a, 1), (b, 1)$	2	2	0	0
	$(a, 2)$	2	1	1	0
I	$(a,1), (b,1), (c,1), (d,1)$	4	4	0	0
II	$(a, 2), (b, 1), (c, 1)$	4	3	1	0
III	$(a,2), (b, 2)$	4	2	2	0
IV	$(a,3), (b, 1)$	4	2	1	0
V	$(a, 4)$	4	1	1	1

根据 16.4.7.3，当 C 和 C' 都是正常时，最后三列中的整数具有关于 C 和 C' 对称的性质；于是可以用这三列中的整数来鉴别表格中的各行.

16.4.8 定理. 设 $\alpha, \alpha', \alpha'' \in \mathrm{PQ}(P)$，$\alpha$ 正常且有非空象集 C，α' 和 α'' 任意(但与 α 不同)，象集分别为 C', C''；置 $C\square C' = \{(m_i, \omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}$，则：

(i) $\sum_{i=1}^{k} \omega_i$ 可取值 0, 1, 2, 4；

(ii) 若 $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 4$，则 $C\square C' = C\square C''$ 等价于 α'' 属于 α 和 α' 决定的圆锥曲线束(参见 14.2.7.1)；

(iii) 若 $F: P \to P'$ 是 P 与另一射影平面 P' 间的单应，则：$f(C)\square f(C') = f(C\square C') = \{(f(m_i), \omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}$；

(iv) 若 K 是代数闭域，则：$\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 4$.

(i) 和 (iv) 可由上述讨论和 16.4.2 (v) 得出. 由 14.1.3.8 的定义即可得出 (iii). 为证 (ii)，设 q, q', q'' 分别是$\alpha, \alpha', \alpha''$ 的方程，g 是 α 的一个良好参数化映射，再置 $\varphi = q'\circ g, \varphi' = q''\circ g$. 根据 16.4.2 的记法，$C\square C' = C\square C''$ 时就有 $R(\varphi) = R(\varphi')$；但这样就由 16.4.2 (iii) 推出 $\varphi' = k\varphi, k \in K^*$，因而 $(q'' - kq')\circ g = 0$，于是由 16.4.4 后面的讨论，$q'' - kq' = hq, h \in K$. 这正说明，以 $q'' = kq' + hq$ 为方程的 α'' 是属于 α 和 α' 定义的圆锥曲线束的(参见 14.2.7.1). 充分性是显然的.

16.4.9 注. 16.4.8(iv) 是对任意两对 P 的代数曲线都成立的 Bezout 定理在圆锥曲线情形下的结论. 困难在于首先要定义公共点的阶数(或"重数")；然后要证明重数之和等于这两对曲线的次数的乘积 (在我们的情形是 $2\times 2=4$). 关于这个定理的叙述，可见 [FN]，第 112 页，其中给出的是近代语言的叙述，或者在必要时可见 [WK]，第 111 页，那里的叙述更为初等，没有很系统地用到交换代数.

另一种比我们刚才的做法更几何化的处理方法，将在16.4.11.2中给出．

16.4.10 圆锥曲线相交的例．束中的退化圆锥曲线

我们要给出表16.4.7.5中五种类型的例子，与此同时还要对α和α'所决定的束$\mathscr{F}$中的退化圆锥曲线作系统的讨论．

类型 I：四个不同的点

设a, b, c, d是这样的四个点；若φ, ψ, ξ, η分别是直线ab, cd, bc, da的方程，则经过这四点的圆锥曲线束的方程是$\{k\varphi\psi+h\xi\eta:\ (k, h)\in\tilde{K}\}$（参见14.2.7.2）．束$\mathscr{F}$显然包含三条不同的退化圆锥曲线，它们分别由直线$\{ab, cd\}$, $\{ac, db\}$, $\{ad, bc\}$构成；根据14.2.7.5，可以知道没有其它可能了．从图14.5.2的作

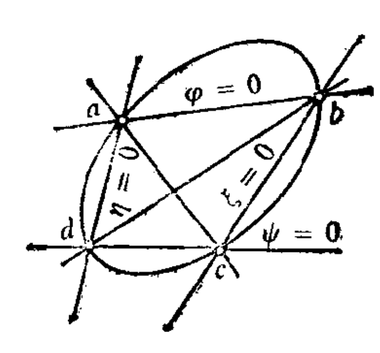


图 16.4.10.1.

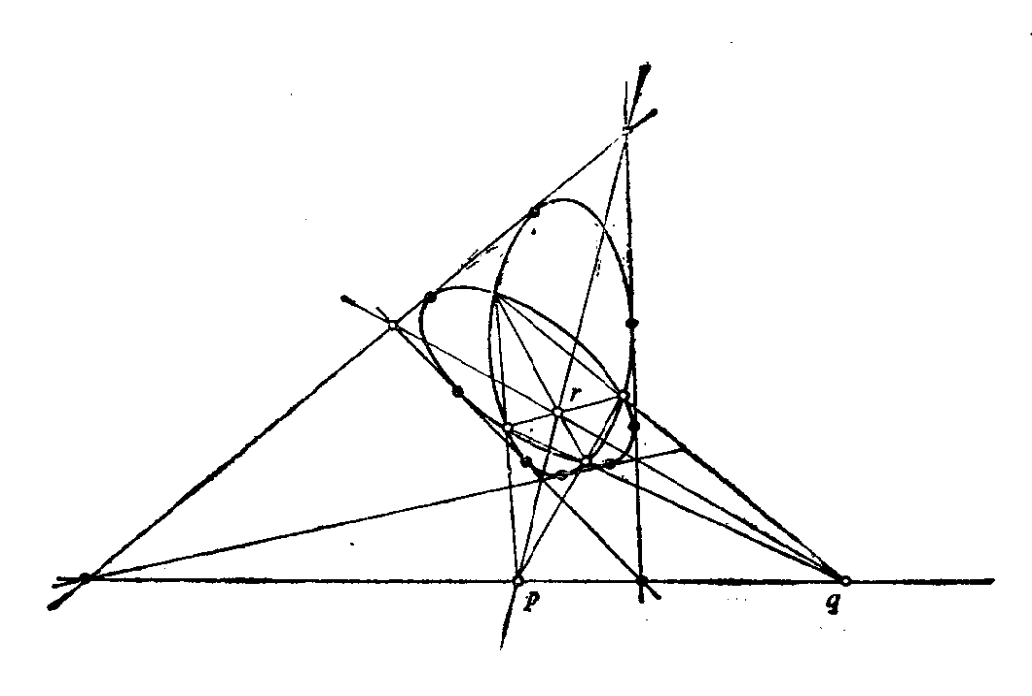


图 16.4.10.2.

法中可以看出三角形 $\{p = ab\cap cd,\ q = ac\cap db,\ r = ad\cap bc\}$ 关于 $\mathscr{F}$ 中所有圆锥曲线都是自配极的，而且这样的三角形是唯一的；事实上，我们可取一个射影标架 $\{p, q, r, s\}$，其中 s 属于 $\mathscr{F}$ 中所有的圆锥曲线，因而 $\mathscr{F}$ 由方程形如 $k(x^2 - z^2) + h(y^2 - z^2)$ 的圆锥曲线构成，其中 $(k, h) \in \tilde{K}$，而 x^2, y^2, z^2 的系数可以是不同的(由此可得出一个正交基的唯一性，亦即一个自配极三角形的唯一性，参见 14.5.4).

这个自配极三角形的唯一性有一个很有意义的推论如下：若 α, α' 还容有四条不同的公切线，则它们满足图 16.4.10.2 中的相交性质，即它们的六个交点位于 $\{p, q, r\}$ 的边上；事实上我们可以用 14.6 的对偶形式：α, α' 的公切线就是 α^*, α'^* 的公共点，因而三条直线 AA', BB', CC' 关于 α, α' 两两共轭，它们构成的三角形就是关于 α 和 α' 自配极的.

类型 II: $(a, 2), (b, 1), (c, 1)$

取前面三点为 a, b, c 的射影标架；假设 $\mathscr{F}$ 中正常圆锥曲线在 a 处的公切线 Φ (参见 16.4.7.3) 方程为 $x + y$；则 $\mathscr{F}$ 由方程为 $\{ky(x + z) + hxz : (k, h) \in \tilde{K}\}$ 的圆锥曲线构成；两条退化圆锥曲线为 $y(x + z) = 0$ 和 $xz = 0$，即 $\{ab, ac\}$ 和 $\{\Phi, bc\}$. 由于(参见 14.1.4.2) $\det A = k^2h/4$，没有其他可能了.

类型 III: **双切圆锥曲线**

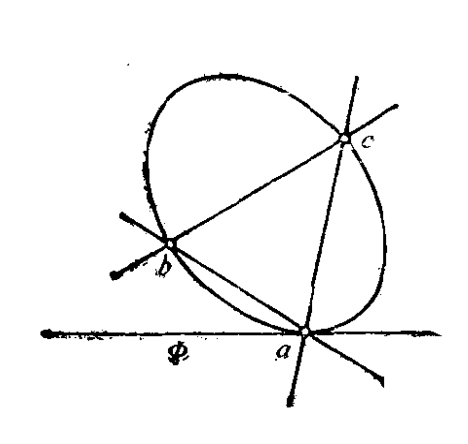


图 16.4.10.3.

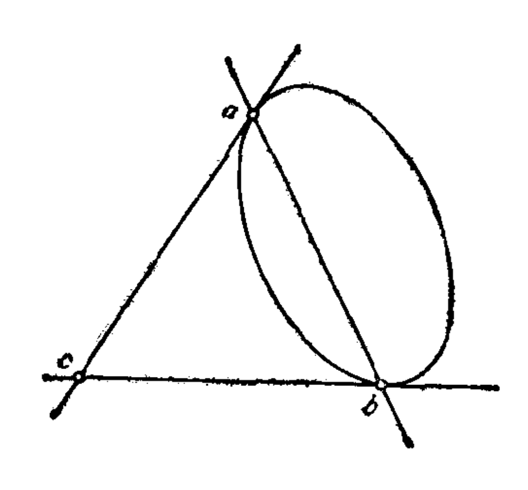


图 16.4.10.4.

根据 16.1.3.2，在某适当标架 $\{a, b, c\}$ 中束 $\mathscr{F}$ 是由方程为 $kx^2 + hyz$ 的圆锥曲线构成的，其中 c 是在 a 和 b 处的公切线的公共点．$\mathscr{F}$ 中的退化圆锥曲线，一条是 $\{ca, cb\}$，另一条就是一条直线 ab（"两重直线"），跟 $\det A = -kh^2/4$ 时看出的情形是一样的．

类型 IV：密切圆锥曲线

根据 16 4.7 中的讨论，我们可以将 $\mathscr{F}$ 中的圆锥曲线的方程

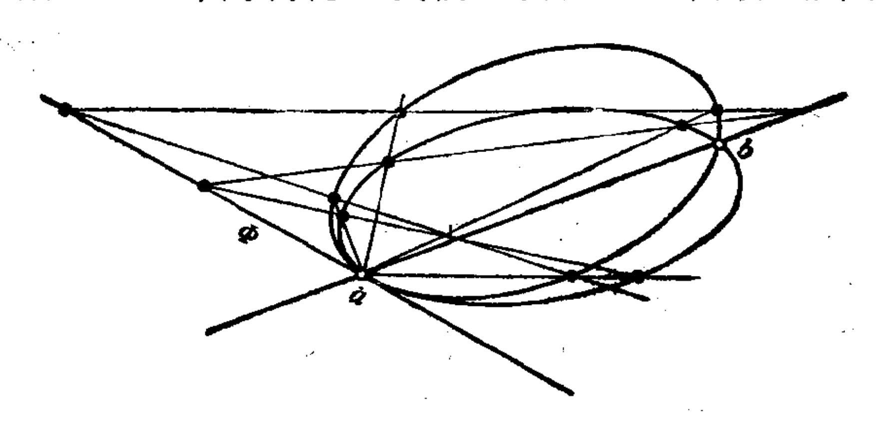


图 16.4.10.5.

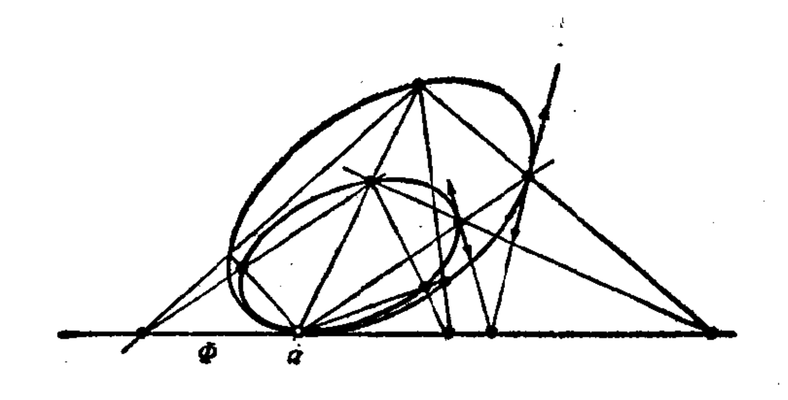


图 16.4.10.6.

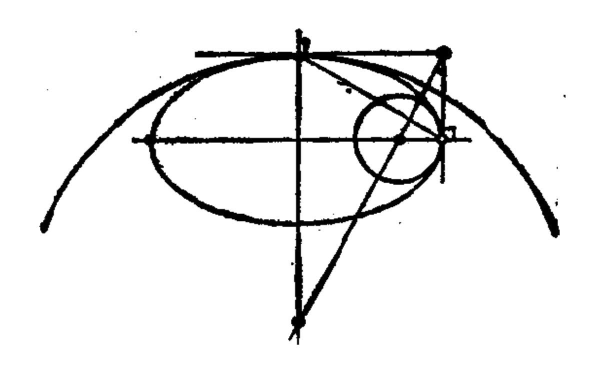


图 16.4.10.7.

取为

$$k(y^2 - zx) + hyz,$$

因为 $\mathscr{F}$ 中圆锥曲线都跟 $y^2 - xz$ 在 a 处密切而且经过 b. $\mathscr{F}$ 中只有一条退化的圆锥曲线，它的象集就是 $\{ab, \Phi\}$. 有关从几何上描述在 a 处密切的特征，当 $K = \mathbf{R}$ 时见 16.4.12；对一般情形，在 16.4.13 中有一个通过单应描述的特征.

类型 V：超切圆锥曲线

根据 16.4.7，可将 $\mathscr{F}$ 写为 $k(y^2 - zx) + hz^2$. 唯一的一条退化圆锥曲线是以 z^2 为方程，以切线 Φ 那条两重直线为象集的. 图 16.4.10.6 表示了如何从 $\mathscr{F}$ 中一条圆锥曲线作出它所有的圆锥曲线来. 要从几何上描述两个超切圆锥曲线是很困难的；在欧氏的情形，它们必须有相同的曲率，但这并不是充分的条件. 除非这些圆锥曲线有一条公共的经过 a 点的欧氏对称轴，这时由“密切”就能推得“超切”；图 16.4.10.7 表示了两个在椭圆顶点处密切——从而也超切——的圆，同时也画出了求得它们的中心的作法. 在 16.4.13 中有一个对任意的 K 都适用的特征. 在 19.6.8.3 中也还会遇到超切的圆锥曲线.

16.4.11 注

16.4.11.1 对两条圆锥曲线的公共点的深入讨论，涉及到解四次方程的问题，例如16.4.4；不过，如果知道这两条圆锥曲线所定义的束 $\mathscr{F}$ 中某一条退化的圆锥曲线，就只剩下两个二次方程要解了. 然而，$\mathscr{F}$ 中退化圆锥曲线的讨论是解三次方程的问题，参见 14.2.7.5. 由此推得（因为 16.4.4 是 K 上任一四次方程），任一四次方程总可化为一个三次方程（因而可用根式解出）.

16.4.11.2 16.4.10 中五种类型的讨论表明，$C \square C'$ 可通过取束 $\mathscr{F}$ 中一条退化圆锥曲线 C'' 并计算 C'' 中直线与 C 的交点数目来算出，计算交点数目时，对 C'' 中每一直线，要将属于两条直线的点的阶数相加，一条切线的切点阶数计为 2，对退化为一条直线（“两重直线”）的圆锥曲线要加倍计数：参见图 16.4.11. 如果要用这种几何的方式来定义 $C \square C'$，必须说明得出的结果与所选

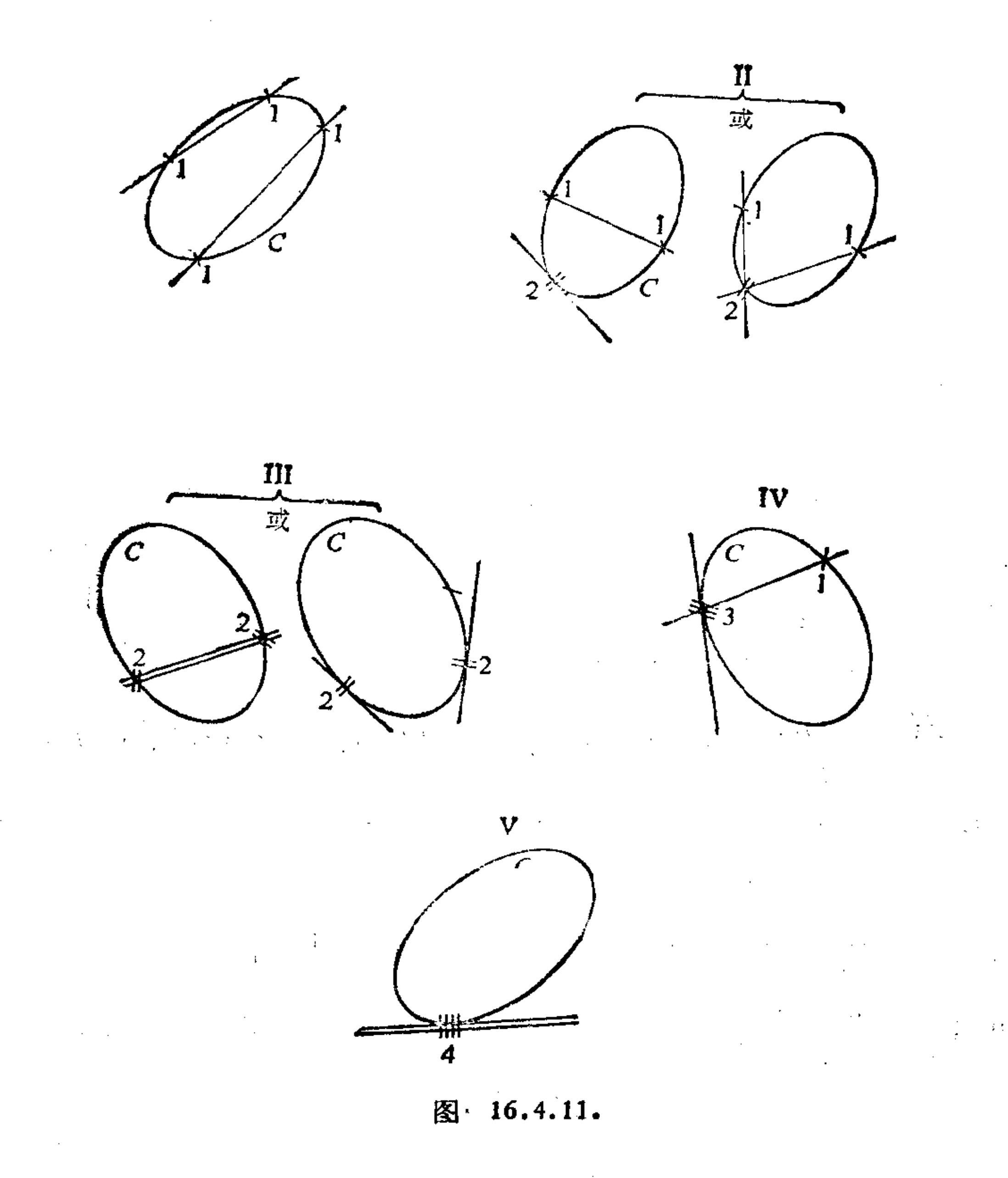


图 16.4.11.

取的圆锥曲线无关，详见 [SG]，第 XII 章．为了保证退化圆锥曲线的存在和这些圆锥曲线跟一条直线的相交，这一方法是假定 K 为代数闭域的．

16.4.11.3　相切理论． 我们可以对可微分曲线定义一套相切理论；阶数 $\geqslant 2$ 就等价于说它们是相切的，阶数 $\geqslant 3$ 或等于 4，在 $K=\mathbf{R}$ 的圆锥曲线的情形下就对应于我们的密切或超切的概念．关于这种相切理论，可见 [LF1]，第 74 页以后，或 [DE5]，第 32 页，问题 9．

16.4.12　密切圆锥曲线与微分几何． 设 P 是实射影平面，D 是

P 上一条直线而 $X = P\backslash D$ 是相应的实仿射平面(参见 5.1.3)；设 C，C' 是在 $m \in C \cap C'$ ($m \notin D$) 相切的两条 P 上的正常圆锥曲线．根据 16.7.2, 可以把 C, C' 考虑为 C^∞ 的(参见 [B-G]，第 8 章对这一点以及下文都有阐述)正则几何弧．若还在 X 加上欧氏结构,则有:

16.4.12.1 命题． C 和 C' 在 m 处密切的充要条件是 X 中的相应的几何弧有相同曲率．

我们可以假设 C，C' 有良好参数化映射，使 (0, 1) 的象为 m，且在取 m 处的切线为标准正交坐标系的轴后对 C 而言形如 $t \longmapsto (f(t),\ g(t))$，对 C' 则形如 $t \longmapsto (u(t),\ v(t))$，且 $g'(0) = v'(0) = 0$．设 q 是 C 的一个方程，定义 16.4.5 和代数中关于多项式的三重根的经典结果表明，若

$$\frac{d^2(q(u(t), v(t)))}{dt^2}(0) = q''_{x^2}(m)(f'(0))^2 + q'_y(m)g''(0) = 0,$$

则 C 密切于 C'．但我们也有 $q(f(t),\ g(t)) = 0\ \forall t$，由此即得:

$$q''_{x^2}(m)(u'(0))^2 + q'_y(m)v''(0) = 0.$$

由这两个关系式,再加上 $g'(0) = v'(0)$，就推出了 C 和 C' 的两个曲率 $\dfrac{|g''(0)|}{(f'(0))^2}$ 和 $\dfrac{|v''(0)|}{(u'(0))^2}$ 是相等的．逆命题同时也已得证．

16.4.13 密切、超切圆锥曲线与单应． 这里 K 又是任意的．设给定 P 上一条直线 D 和一点 $a \in D$，则存在 P 的单应 f 使 $f(x) = x\ \forall x \in D$ 而且对任一经过 a 的直线 S 有 $f(S) = S$．这样的单应称为以 D 为轴、以 a 为心的安射．给定直线 D 以及与 a 共线的两点 $(m, f(m))$ 后，安射也就确定了．它除了 D 的点外没有其它固定点．

为了证明上述结论，只须把 D 放到无穷远去(参见 5.4)；这时可以看到，f 在仿射平面 $P\backslash D$ 上的限制正是一个以 a 为方向的向量平移．

在使 D 的方程为 $z = 0$ 且 $a = p((1, 0, 0))$ 的齐次坐标系中，f 的一个矩阵形如

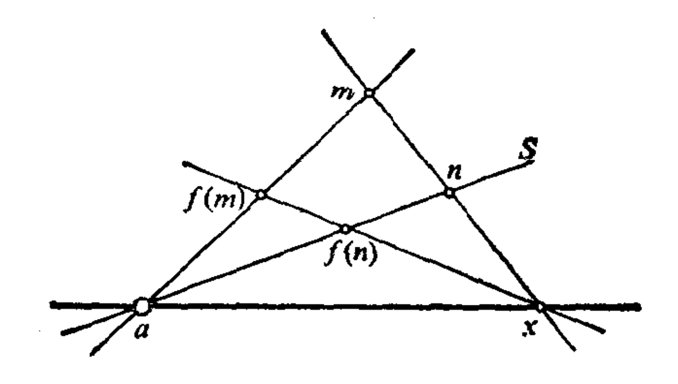


图 16.4.13.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16.4.13.1 命题. 设 C, C' 是两条正常圆锥曲线，在一公共点 $a \in C \cap C'$ 有同一条切线 T。要使 C 和 C' 在 a 处密切，必须且只须存在一个以 a 为心、以 D 为轴的经过 a 点的安射 f，使 $f(C) = C'$。另外，C 和 C' 超切的充要条件是 $D = T$。

首先注意到，这个命题证实了图 16.4.10.5 和 16.4.10.6 是合理的．设 f 是以 a 为心、以 D 为轴的安射；若 $D \neq T$，设 b 是 $D \cap C$ 的第二个点，则根据安射的性质，$f(C)$ 是一条在 a 处与 T 相切的、经过 b 点的圆锥曲线；另外，C 和 $f(C)$ 除 a 和 b 外没有其它公共点．因此，根据表 16.4.7.5，在 a 点处 C 和 $f(C)$ 的相交是第 IV 类型的．若 $D = T$ 而 $z = 0$ 是 D 的一个方程，则可有下式：$q = a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx$（参见 16.4 7.1）；但我们已经看到 f 是形如 $(x, y, z) \longmapsto (x + \alpha z, y, z)$ 的，所以 f^{-1} 是 $(x, y, z) \longmapsto (x - \alpha z, y, z)$ 而 $f(C)$ 的方程为

$$q' = a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx - 2b'\alpha z^2 \text{（参见 14.1.3.8），}$$

从而由 16.4.7.3 可知 $f(C)$ 确实超切于 C。

反过来，设 C, C' 在 a 处密切，m, m' 是 C, C' 与一条过 a 点的直线的交点，且 $m \neq m'$；又设 D 是连接 a 点和 $C \cap C'$ 的点 b 的直线，其中 b 当 C 与 C' 不超切时是跟 a 不同的点，而当 C 与 C' 超切时 $D = T$。则以 D 为轴、以 a 为心的使 $f(m) = m'$ 的

安射 f 给出一条圆锥曲线 $C'' = f(C)$，根据前面的讨论和 16.4.8 (ii)，这条圆锥曲线属于 C 和 C' 所定义的束．但 $f(m) = m' \in C'$，因此 $C'' = C'$。

16.5 圆锥曲线束

本节中考虑的所有圆锥曲线束都是非退化的(参见 14.2.7.5)。

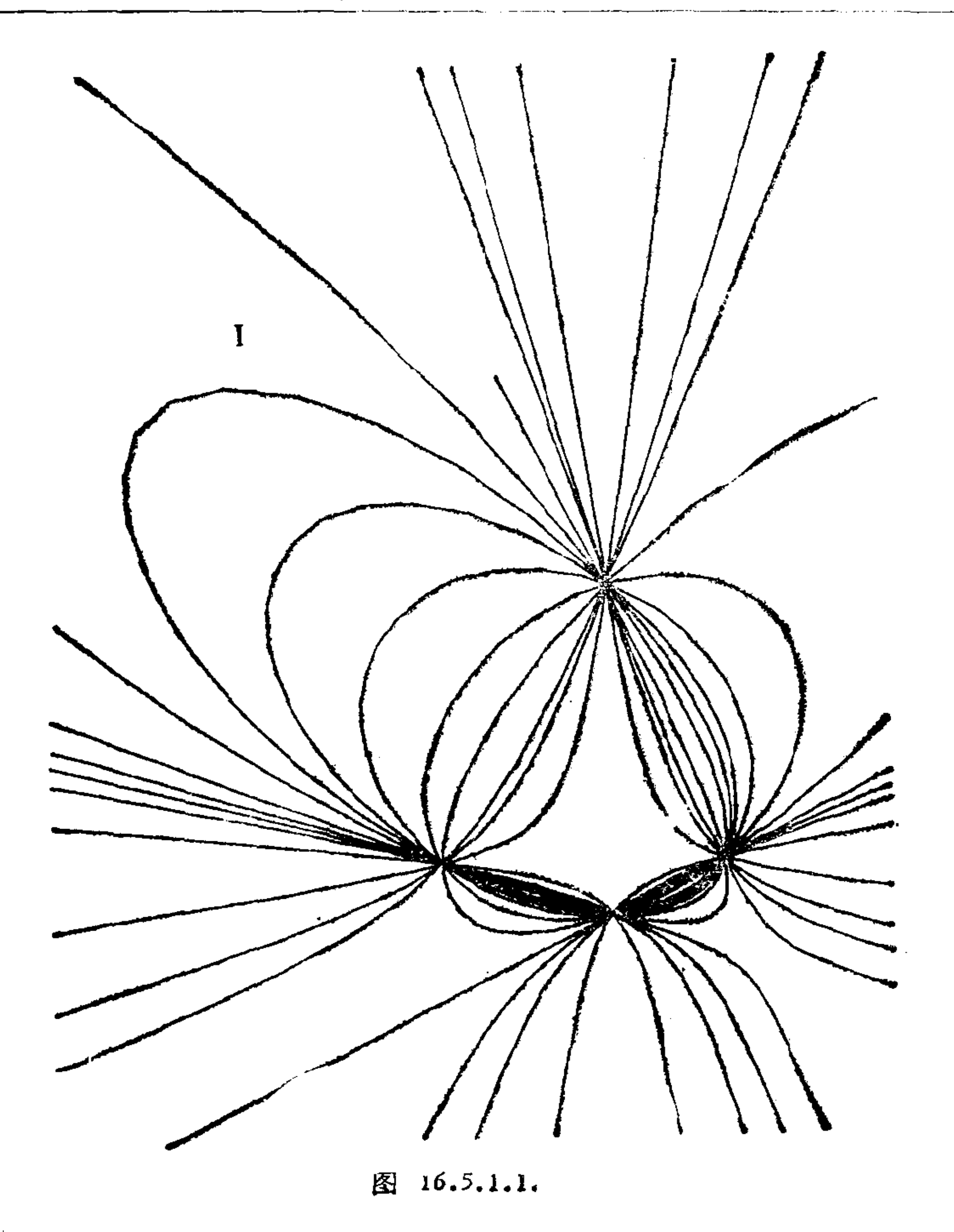


图 16.5.1.1.

16.5.1 命题. 设 P 是射影平面，α 是 P 上的象集 C 非空的正常圆锥曲线，$m_i(i=1,\cdots,k)$ 是 C 上带有整数 $\omega_i \geqslant 1$ 的点，且 $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 4$，则

$$\mathscr{F} = \{\alpha' \in \mathrm{PQ}(P): C' = \mathrm{im}(\alpha'),$$
$$C \square C' = \{(m_i,\ \omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}\}$$

是 P 的一个圆锥曲线束．这样的圆锥曲线束称为满的，我们根据

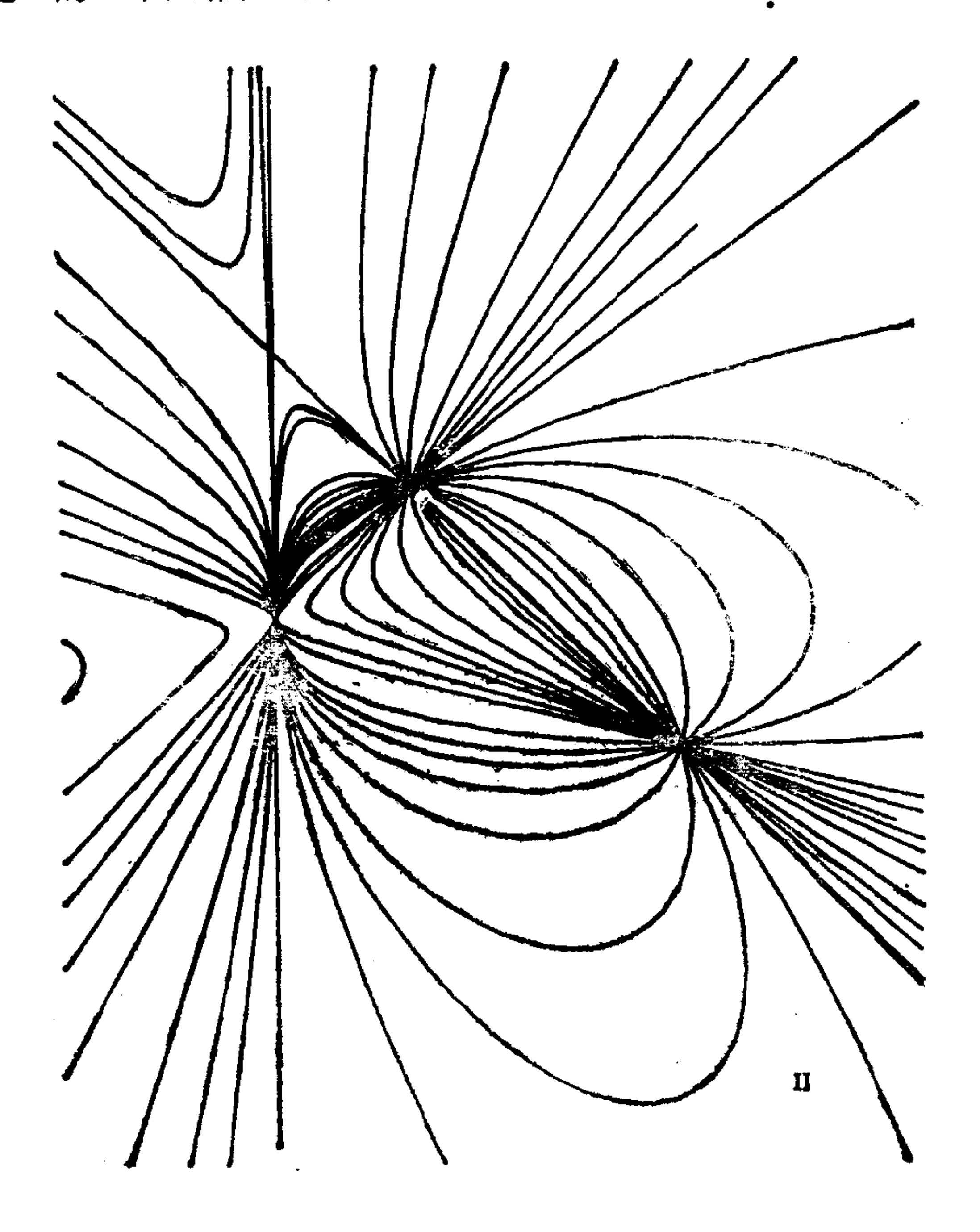


图 16.5.1.2.

16.4.7.5 将它跟 I, II, III, IV, V 中某一类型相应起来. 集合 $\{(m_i, \omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}$ 只与 $\mathscr{F}$ 有关，而与出发的那条正常圆锥曲线 α 无关，特别是类型只与 $\mathscr{F}$ 有关. 给定两个满圆锥曲线束 $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ 后,要有 $f\in \mathrm{GP}(P)$ 使 $f(\mathscr{F})=\mathscr{F}'$, 必须 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}'$ 类型相同. 反过来,若 $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ 都是满的,且有同一类型 I, 或 II, 或 III, 则存在 $f\in \mathrm{GP}(P)$ 使 $f(\mathscr{F})=\mathscr{F}'$; 在 $K=\mathbf{R}$ 或 K 为代

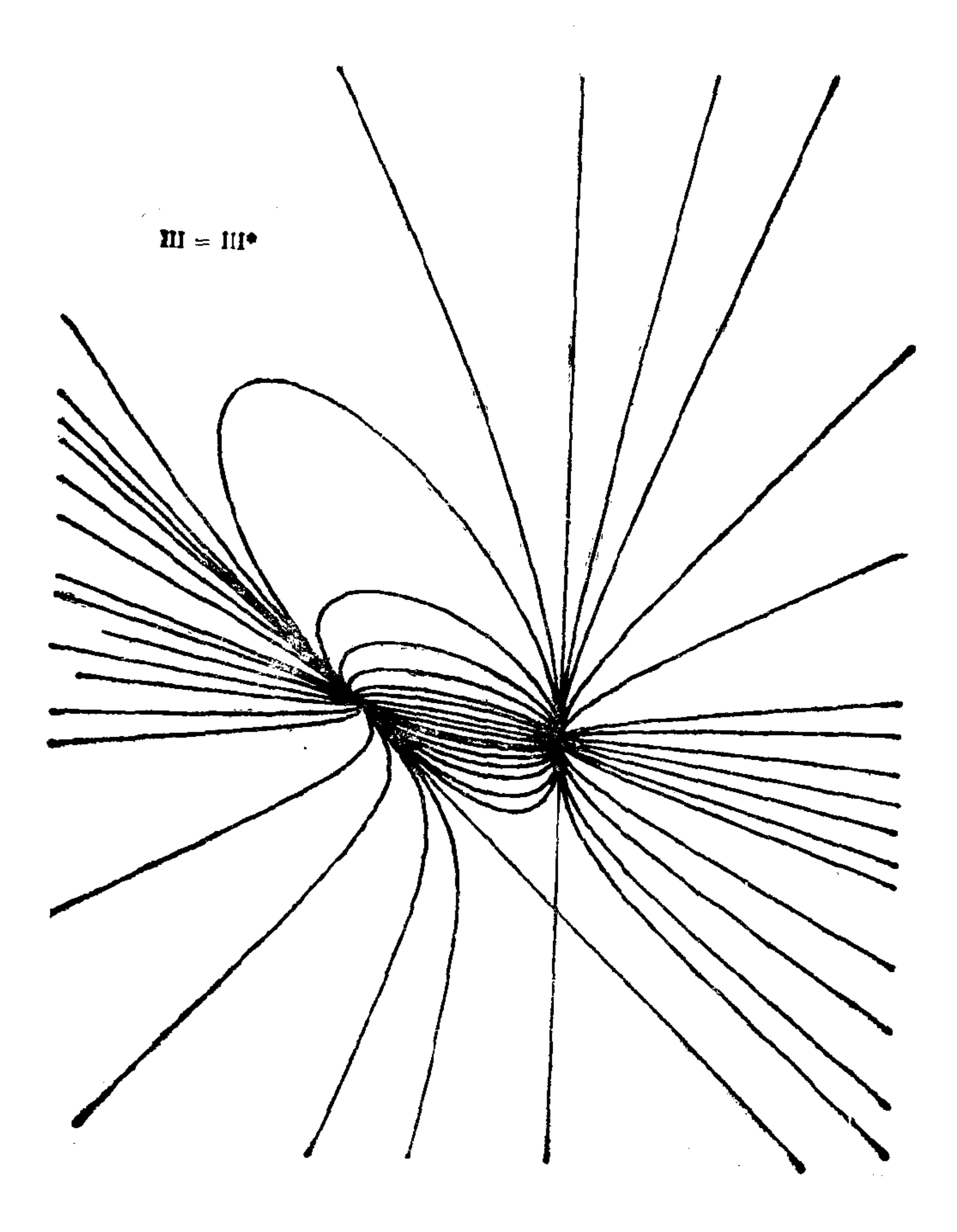


图 16.5.1.3.

数闭域时，对类型 IV 或 V 也有同样的结论.

为证 $\mathscr{F}=\{\cdots\}$ 是圆锥曲线束，只要应用例 16.4.10，其中列出了使 $C\square C'=\{\cdots\}$ 的圆锥曲线 C'；再由 16.4.8 即可得出结论. 由 16.4.7.4 可推得，类型只与 $\mathscr{F}$ 有关，而与 C 无关. 最后，关于最末那个结论，我们先由 16.4.8 (iii) 看出 $\mathscr{F}$ 和 $f(\mathscr{F})$ 有相同类型. 对逆命题来说，当类型为 I 或 II 或 III 时，我们利用

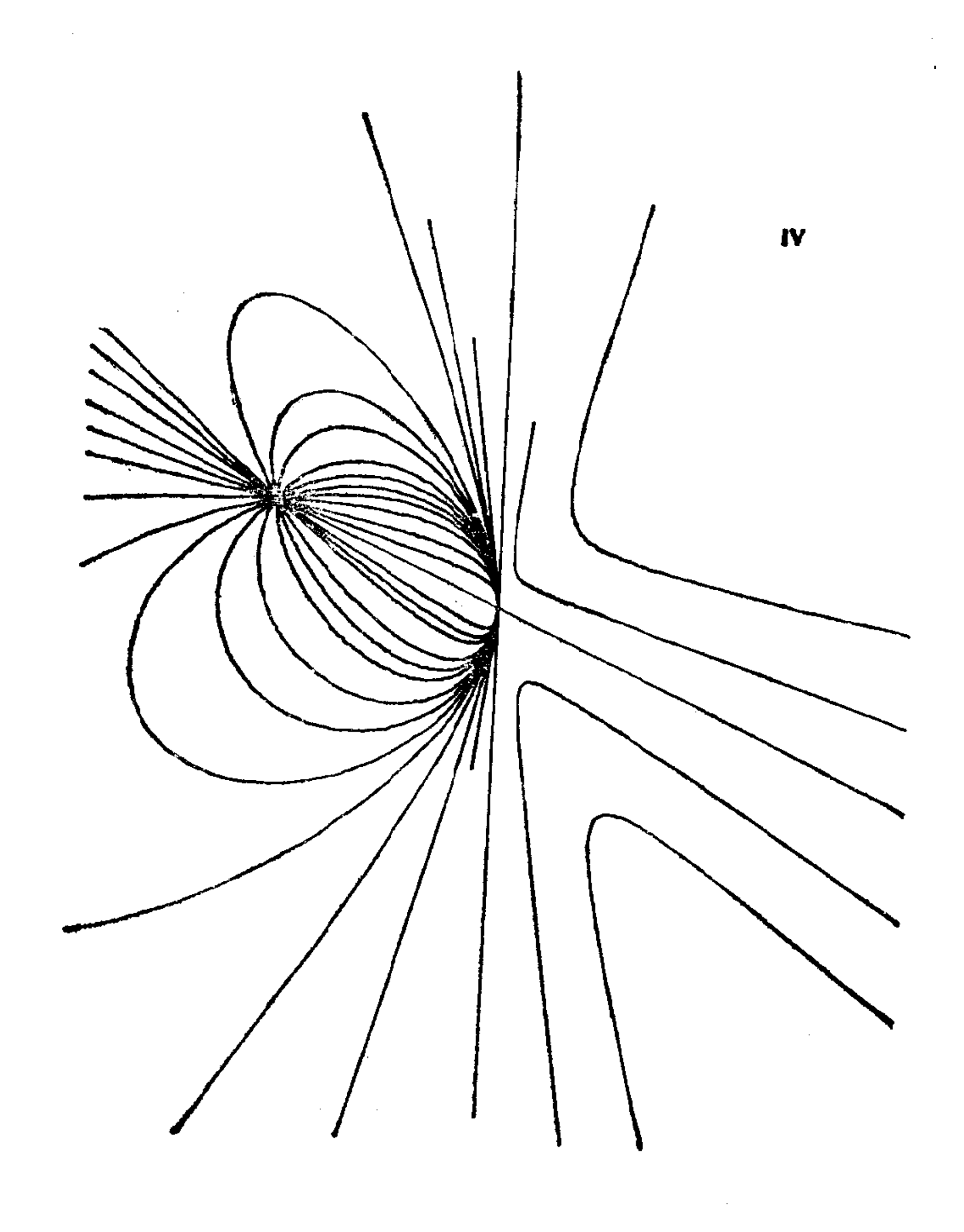


图 16.5.1.4.

它们可表示为 $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, \Phi\}$, $\{a, b, c\}$ 以及 $\mathrm{GP}(P)$ 在这些元素上可迁(参见 4.5.10) 的事实. 在 IV 或 V 的情形，我们一般并不能得出结论，因为必须给出一条圆锥曲线来决定这样的圆锥曲线束，而两条圆锥曲线一般是不能通过 $\mathrm{GP}(P)$ 互演的(参见 13.1.4.5). 若 K 为代数闭域或 $K=\mathbf{R}$，则可利用 14.1.5.3，从而归结到同一条圆锥曲线 C 上. 但这时类型 IV 由两个点 a, b 和 C 所定义，而类型 V 由一点所定义. 而根据 16.3.8，C 的群(参

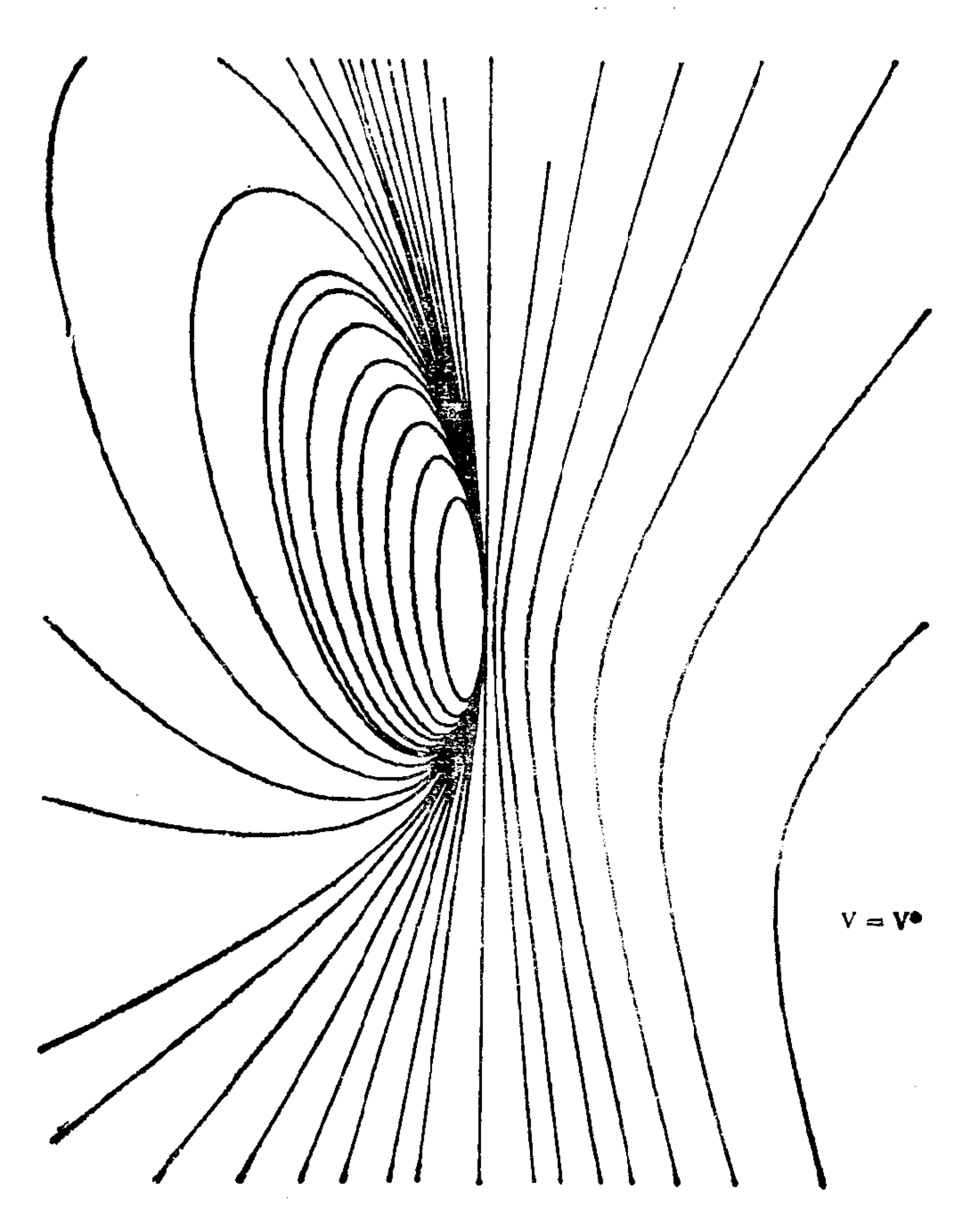


图 16.5.1.5.

见 16.3.1) 在 C 的三点上是可迁的.

16.5.2 注. 在 16.4.10 中我们对满圆锥曲线束给出了具体的方程,并找出了这些束中的退化圆锥曲线.

对 $K=\mathbf{R}$ 时的非满圆锥曲线束,可见 16.8.15; 但也可如下进行讨论.

若 $\mathscr{F}$ 是一个非满的圆锥曲线束, $K=\mathbf{R}$; 则由 7.3 和 7.6, 可以定义 P^C 的圆锥曲线束 $\mathscr{F}^C$, 称之为 $\mathscr{F}$ 的复化束. 可在 P^C 中对 $\mathscr{F}^C$ 进行讨论; 然后再回到 P 中, 就可能的情形将 P^C 中所得到的结论在 P 中加以解释. 这种技巧的例可见 17.5.

16.5.3 线性的用处

16.5.3.1 设 $\mathscr{F}$ 是 P 的圆锥曲线束, $m\in P$; 则存在 m' 使 m, m' 对于 $\mathscr{F}$ 中任一圆锥曲线共轭.

我们在这里应用配极变换的拓广 14.5.6; 设 q, q' 是 $\mathscr{F}$ 的两个方程,极型为 Π, Π'. 若 $m=p(x)$, m 对于 q (相应地, q') 的配极直线就是 $\Pi(x,\cdot)=0$ (相应地, $\Pi'(x,\cdot)=0$); 因此所有使 $\Pi(x,x')=\Pi'(x,x')=0$ 的 $m'=p(x')$ 都适合要求,因为 $kq+hq'$ 的极型是 $k\Pi+h\Pi'$.

16.5.3.2 我们看到,若 $\mathscr{F}$ 是第 I 类型的,则当 m 不在公共自配极三角形的边上时, m' 是唯一的. 从 P 的一个子集到自身的映射 $m\longmapsto m'$ 称为二次变换,它起着重要的作用. 参见例如 [DQ], 第 153 页, [ML], 第 52 页, [FN] 第 171 页以后.

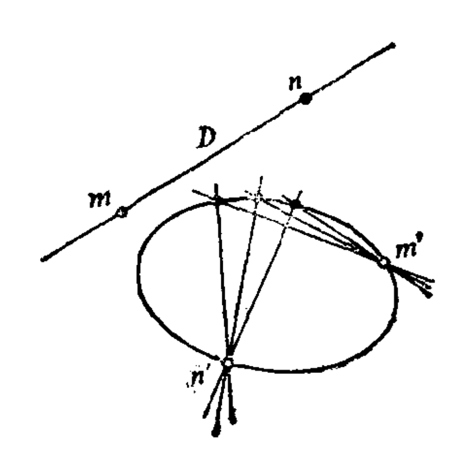


图 16.5.3.

16.5.3.3 16.5.3.1 表明了, 若 $m\in P$, 则它关于 $\mathscr{F}$ 中不同圆锥曲线的配极直线都经过 m', 而且,当它们是一条直线时(这就是 m 不属于 $\mathscr{F}$ 中任一退化圆锥曲线的根基时的情形),这条 $(m')^*$ 的直线单应于定义 $\mathscr{F}$ 中圆锥曲线 $kq+hq'$ 的 $(k,h)\in\tilde{K}$, 取 P 上一条

不经过 $\mathscr{F}$ 中所有退化圆锥曲线的任一根基的直线 D，又取两点 $m, n \in D$；则 D 关于 $kq+hq'$ 的极点就是 m 和 n 关于 $kq+hq'$ 的配极直线的交，因此，由上述讨论和 16.2.3 可知：D 的极点集合是 P 上一条圆锥曲线，它经过 m' 和 n'。实际上，这条圆锥曲线是 D 在"二次变换"下的象集，这个变换因而将直线变成了圆锥曲线。由此可以看出它为什么叫这个名称，16.8.24 也是说明这个缘故的。

16.5.4 Desargues 定理. 我们先回顾一下 14.2.8.3，因为下面一直要用到它．设 $\mathscr{F}$ 是一个非退化的圆锥曲线束；一条直线 D 称为关于 $\mathscr{F}$ 是良好的，如果 D 不含 $\mathscr{F}$ 的基中的任何一点(参见 14.2.7.3)而且不含于 $\mathscr{F}$ 中一条(退化)圆锥曲线中．于是，若 D 是一条关于 $\mathscr{F}$ 良好的直线，则存在一个 D 的对合 f 使 $\operatorname{im}(\alpha)\cap D$，$\forall\alpha\in\mathscr{F}$，形如 $\{m, f(m)\}$，$m\in D$。

16.5.5 应用

16.5.5.1 十一点圆锥曲线. 设 $\{a, b, c, d\}$ 是一个射影标架，$p=ab\cap cd$，$q=ac\cap db$，$r=ad\cap bc$，D 是一条不含这七个点的直线，则存在一个含下列十一个点的圆锥曲线：

——p, q, r；

——关于 a 和 b 调和共轭于 $u=ab\cap D$ 的点 u'，以及相应于 ac，ad，bc，bd，cd 的五个同样类型的点；

——D 上 Desargues 对合的两个两重点 α，β (如果它们存在的话)，该对合的对应点是 $\{ab\cap D, cd\cap D\}$，$\{ac\cap D, db\cap D\}$，$\{ad\cap D, bc\cap D\}$。

事实上，只要引进一个过 a, b, c, d 的圆锥曲线束，再注意到上述十一点都位于 16.5.3.3 中 D 关于该束相应的那条圆锥曲线上。

16.5.5.2 跟一条直线相切的一束圆锥曲线. 若 $\mathscr{F}$ 是圆锥曲线束，D 是一条关于 $\mathscr{F}$ 良好的直线(参见 16.5.4)，则存在两条或不存在 $\mathscr{F}$ 中的圆锥曲线与 D 相切，切点是 $\mathscr{F}$ 在 D 上决定的对合的二重点．具体的作法可由 16.3.10.1 得出；特别还可利用 $\mathscr{F}$ 的退化圆锥曲线。

16.5.5.3 $n=3$ 时的 Poncelet 大定理. 设 $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ 是正常圆锥曲线的象集 C 中的两个内接三角形;则存在一个与 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 的六条边相切的圆锥曲线 Γ. 推论: 若存在一个三角形 $\mathscr{C}$ 内接于圆锥曲线 C 而外切于圆锥曲线 Γ, 则只要有从 $a\in C$ 出发的 Γ 的两条不同切线存在, 就必定存在其它的以 a 为一个顶点的上面那样的三角形;若 K 是代数闭域,我们就可以在 $C\backslash\Gamma$ 任取一点 a, 若 $K=\mathbf{R}$, 可取充分靠近 $\mathscr{C}$ 的一个顶点的任意一个 a.

为了证明上述结论,设各点已如图取定,只要能将 16.2.7.2 用到两条直线 D 和 E 上去,从而(由 6.1.4) 证得 $[b, d, e, c]=[d', b', c', e']$; 而 16.2.5 表明其中每一式都等于 $[b, b', c', c]_C$.

在 10.10.4 和 10.13.3 中, 我们已经碰到过这个问题; 16.6 整

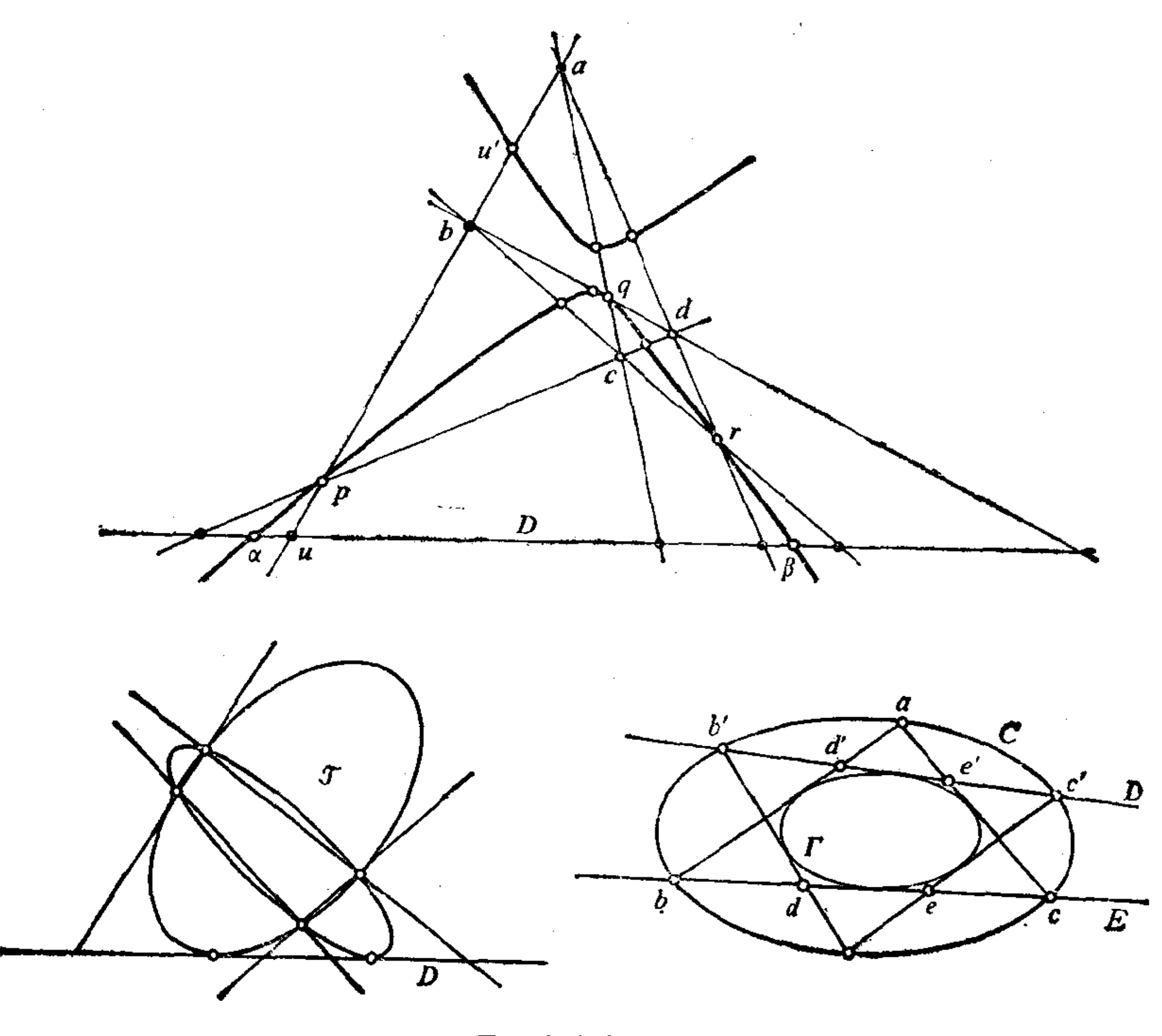


图 16.5.5.

节都将讨论这个问题.

16.5.6 对偶性

16.5.6.1 已知条件、记法等一如 14.6 中的情形. P^* 的圆锥曲线束，即 $PQ(P^*)$ 的一条直线，称为圆锥曲线的切束. 这个切束称为满的，如果它在 16.5.1 的意义下对 P^* 来说是满的;满的切束构成五种类型，记为 I*, II*, III*, IV*, V*.下面的三个图都是在 P 中,而不是在 P^* 中作出的,而由定义，在 P^* 中它们将跟 P 中的 I, II, IV 的图形一致! 在 P 中，类型 I 情形下的退化圆锥曲线表示为点对 $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$, $\{c, c'\}$; 其余四种情形留给读者去讨论.

16.5.6.2 确切地说，我们并未画出类型 III* 和 V* 的情形，因为它们是跟 III 和 V 的图形一样的. 为了说明这一现象，我们提出下面这个问题: 设 $\mathscr{F}$ 是 P 的一个圆锥曲线束(不是切束!). 对非退化的 $\alpha \in \mathscr{F}$，由 14.6.1 可知有 $\alpha^* \in PQ(E^*)$. 那么，这些 α^* 的集合是什么呢? 若在任一坐标系下，A 和 B 是定义 $\mathscr{F}$ 的矩

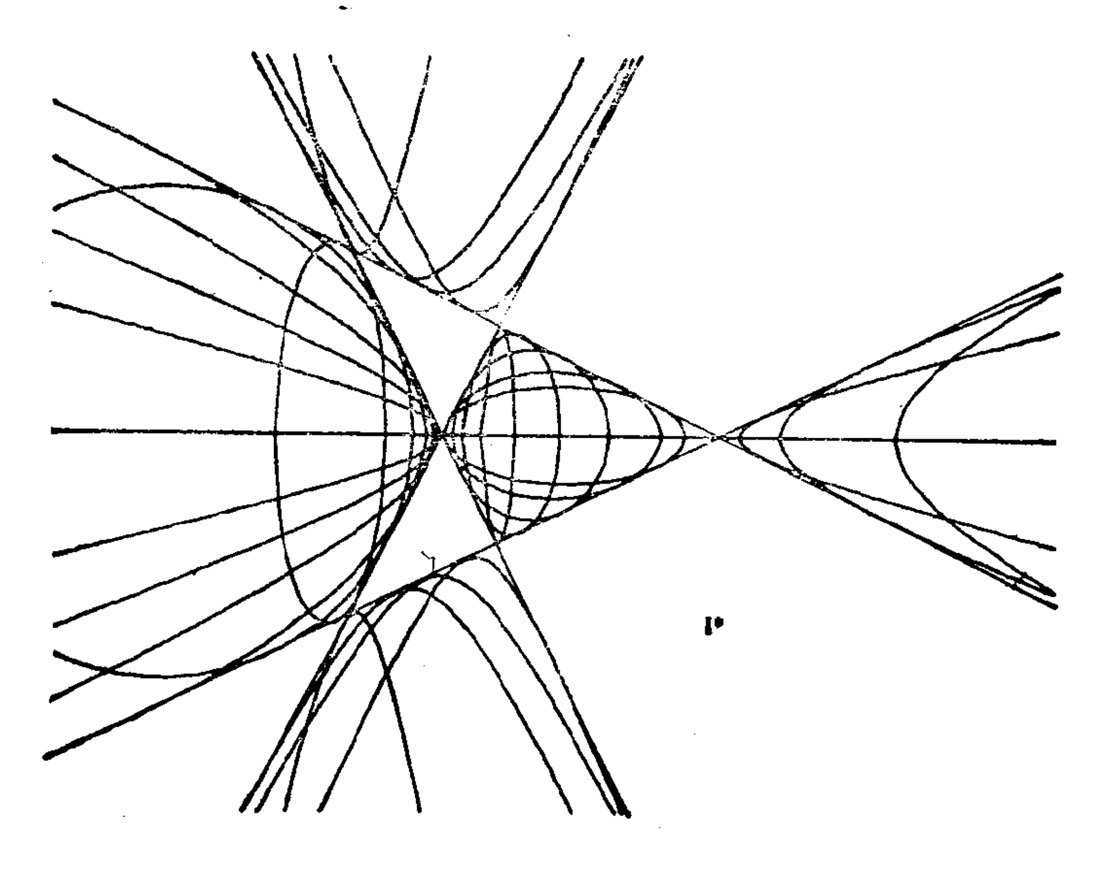


图 16.5.6.1.

阵，则由 14.6.1 可知所求的那些 α^* 的矩阵是 $(\lambda A+\mu B)^{-1}$，其中 λ, μ 使

$$\det(\lambda A+\mu B)\neq 0.$$

求逆矩阵的法则表明，$(\lambda A+\mu B)^{-1}$ 的系数都是 λ, μ 的二次齐次多项式乘以 $[\det(\lambda A+\mu B)]^{-1}$，因而可以去掉这个公因子而得到同样的圆锥曲线．于是，α^* 的集合包含在一个映射 $f\in \mathscr{P}_2^{\bullet}(K^2; Q(E^*))$ 的象集中；这个映射形如 $\lambda^2U+\lambda\mu V+\mu^2W$，其

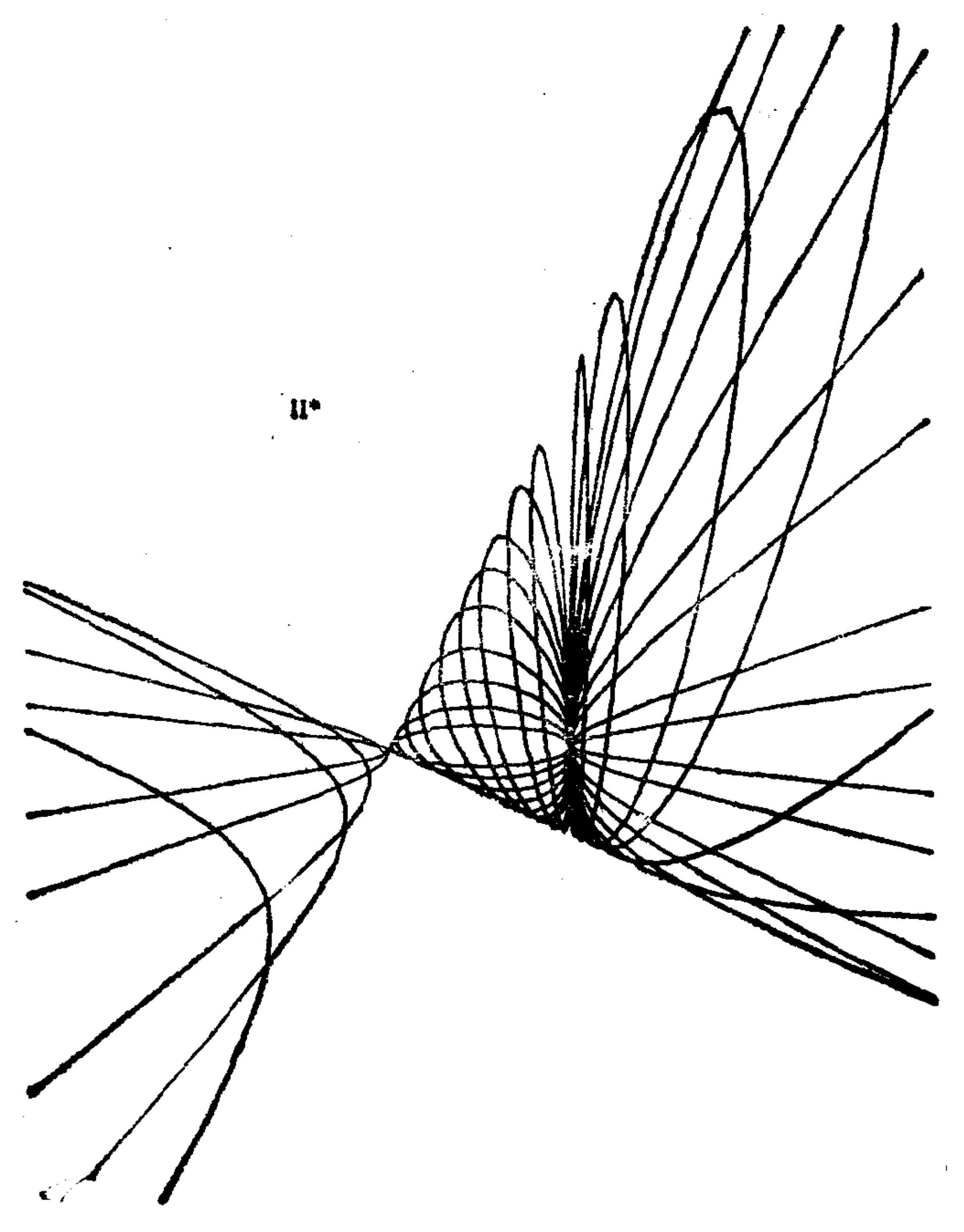


图 16.5.6.2.

中 U, V, W 是 $Q(E^*)$ 中三个向量，因而这个映射其实是在空间 $KU + KV + KW$ 中取值的. 作 16.2.9 的证明中的商空间诱导映射后，我们看到我们的象集是 $PQ(E^*)$ 的一个射影平面中的一条圆锥曲线或一条直线. 在 16.4.10 中所给出的坐标系中具体地就类型 I 到 V 算出逆矩阵，可以表明这个象集对类型 I, II, IV 而言是一条正常圆锥曲线，而对类型 III 和 V 是一条直线. 因

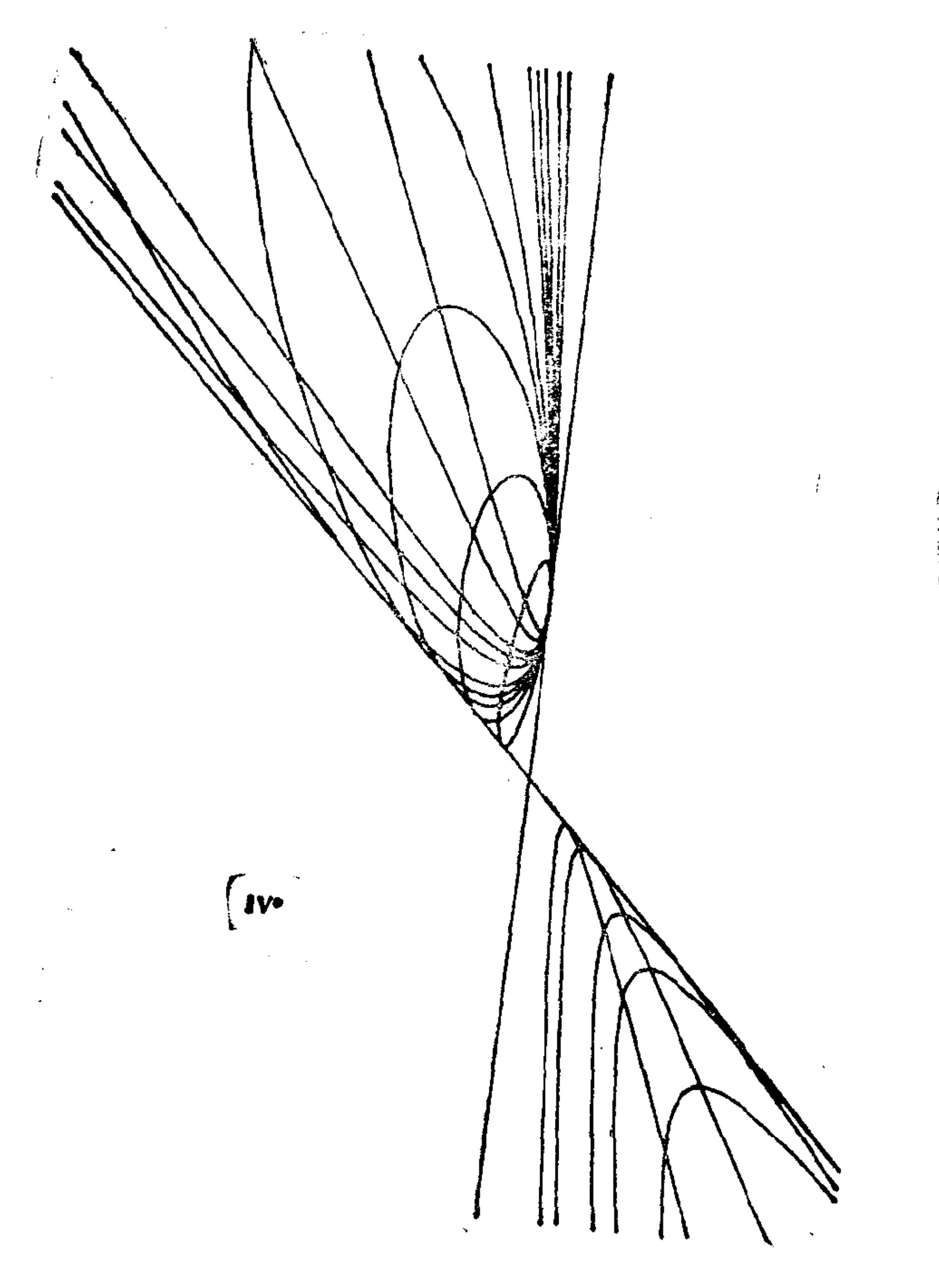


图 16.5.6.3.

而我们看到,类型 III 和 V 的那些圆锥曲线束也是切束(不过其中的退化圆锥曲线并不相同),而且类型 I 或 II 或 IV 的圆锥曲线束都是 $PQ(E^*)$ 的圆锥曲线;后一结论给出了 16.5.3.3 的另一种证明. 我们也可以说,14.6.3.1 中引进的映射 $*$: $PPQ(E) \to PPQ(E^*)$ 可以沿 $PQ(E)$ 的某些直线自然地延拓.

16.5.6.3 Plücker 定理. 如果我们在 P^* 中进行 16.5.4 中的讨论,就可以看到:若 $\mathscr{F}^*$ 是 P 上圆锥曲线束,m 是 P 上一点,m 既不位于 $\mathscr{F}^*$ 的任一条公切线上,也不是 $\mathscr{F}^*$ 中某一圆锥曲线的退化点,则从 m 出发所作的 $\mathscr{F}^*$ 中圆锥曲线的切线构成一个 m^* 的对合(参见 16.2.1).

例如(参见 16.5.5.2),经过平面上每一适当的点,有一个切束中的两条或零条圆锥曲线(参见 16.5.6 的图).

16.6 Poncelet 大定理

16.6.1 我们的目的是要证明,若 C 和 Γ 是两条圆锥曲线,使得存在一个 n 边形既内接于 C 又外切于 Γ,则另外还存在许多这样的多边形. 这个结果的所有著名的证明都相当艰涩而冗长. 我们将要给出的证明也未能脱出这一窠臼,它是由 Hart 提出的,我们采用的是 [LB2] 中第 116 页至 120 页的讲法. 有些更简洁的证明——它们的基本思想是 Cayley 提出的——都用到跟一个圆锥曲线束相应的三次曲线;这时就必须知道可以将一个群的结构赋予这条三次曲线(参见例如 [FN],第 124 页),而且,如果我们知道了这条三次曲线通过椭圆函数所作的参数化映射(参见例如 [LG1],第 12 页),就得到了 Poncelet 定理的一个很深刻的解释. 关于这方面,在 [GIS] 的 $I(d)$ 一节中有很近代的阐述. 也可参见 16.6.12.4 的末尾.

另一种简洁明瞭地证明这一定理的方法是 Chasles 提出的,建立在"多义代数对应"概念的基础上,在目前的情形下是 (2, 2) 对应;这种方法是值得一提的,因为对应的概念近来有了重要的进

展．但是若要给出形式上严格而完整的叙述，例如对推论 16.6.1 而言，看来势必是很长的．读者可以通过研究下面两本参考书完成这一工作：[DE8]，第 1 卷，第 38—39 页，[DQ]，第 158—159 页．

16.6.2 跟我们通常的证明中 $K=\mathbf{C}$ 或为代数闭域的假定不同，我们现在采用一个任意域 K，虽然基数 $\geqslant 5$ 这一点是早在 16.4 开头就提出了的．我们下面用到的论断是对任何域都适用的，其中包括 $\mathbf{R}$：经过任一点，必有束中一条圆锥曲线，过某条圆锥曲线上一点的任一直线必与那条圆锥曲线交于另一点，且有 Desargues 对合 16.5.4．

16.6.3 证明的思想是对多边形的边数 n 作归纳法，但这是通过对一种更一般的情形得到的结果来实现的，那种情形处理的多边形内接于 C 而且各边分别跟与 Γ 一起构成圆锥曲线束的 n 条圆锥曲线 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n$ 相切；我们的定理就是 $\Gamma_1=\cdots=\Gamma_n$ 的情形．这是一个很好的例子，说明有的结论推广后证明起来更容易．在下面，我们取定所考虑的射影平面上的一个圆锥曲线束 $\mathscr{F}$，以及一条有非空象集 C 的正常圆锥曲线 $\alpha\in\mathscr{F}$；我们下面考察的 $\mathscr{F}$ 中的圆锥曲线都是正常的、有非空象集的，从而由 16.1.4 可知它们可以等同于它们的象集，以后我们也总是这么做的．我们考察的所有的点都不属于束 $\mathscr{F}$ 的底，所有的直线都是关于 $\mathscr{F}$ 良好的(参见 16.5.4 和 14.2.7.3)．

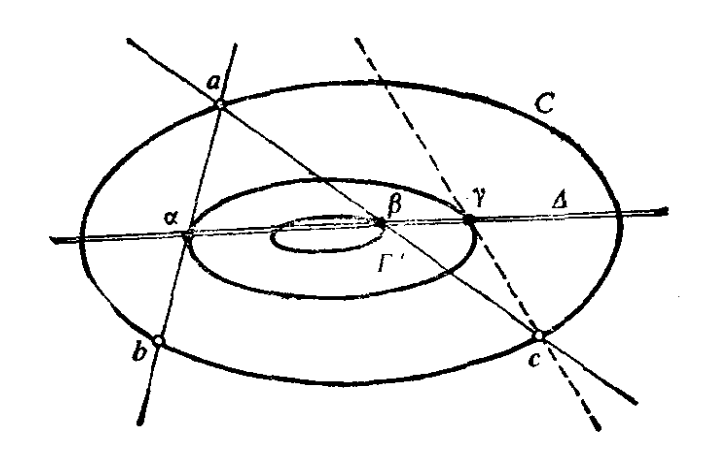
16.6.4 **命题**．设 $a,b,c\in C$ 各不相同，$\Gamma,\Gamma'\in\mathscr{F}$ 且 Γ 切 ab 于 α，Γ' 切 ac 于 β；令 $\Delta=\alpha\beta$，则存在 $d\in C$ 使 Γ 切 cd 于 $\Delta\cap cd$，Γ' 切 bd 于 $\Delta\cap bd$；另外，还存在 $\Gamma''\in\mathscr{F}$，切 ad 于 $\Delta\cap ad$，切 bc 于 $\Delta\cap bc$．

设 $a,b,c,d\in C$ 各不相同，$\Gamma\in\mathscr{F}$ 切 ab 于 α，切 cd 于 γ；则存在 $\Gamma'\in\mathscr{F}$ 切 ac 于 $\alpha\gamma\cap ac$（从而由本命题的第一部分可知它也切 bd 于 $\alpha\gamma\cap ac$)．

设 γ 是 $\Gamma\cap\Delta$ 上不同于 α 的一点，设 $\mathscr{G}$ 是由 Γ 和以 $\{ab\}\cup\{c\gamma\}$ 为象集的退化圆锥曲线构成的束；在直线 ac 上，两个圆锥曲

线束 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 给出同一个对合，即由下列两个二次超曲面定义的 ac 的二次超曲面束所相应的对合：象集为$\{a,c\}$的二次超曲面和限制 $\Gamma\cap ac$（参见 14.1.3.3 并注意到集 $\Gamma\cap ac$ 可能是空集，然而 $\Gamma\cap ac$ 确实可作为 ac 的二次超曲面）。

但是 ac 关于 $\mathscr{G}$ 的对合含有二重点 $\Gamma'\cap ac=\{\beta,\beta\}$；因此存在 $\Sigma\in\mathscr{G}$ 使 $\Sigma\cap ac=\{\beta,\beta\}$. 但又因 $\Sigma\cap\Delta=\{\alpha,\alpha\}$，就可知$\Sigma$是以 $\alpha\beta$（二重直线）为象集的退化圆锥曲线，而且 $\mathscr{G}$ 中所有的圆锥曲线与 $c\gamma$ 相切于 γ. 特殊地，Γ 在 γ 的切线经过 c. 下面只要置 $d=c\gamma\cap C$ 就可以了. 重复应用以上论证，不过把 a, b, c 换成 c, b, d, 就可以看到 Γ' 也与 bd 在 $bd\cap\Delta$ 处相切. 然后在点 $\delta=ad\cap\Delta$ 对 $\mathscr{F}$ 中过 δ 点的圆锥曲线 Γ'' 进行相仿的论证即可



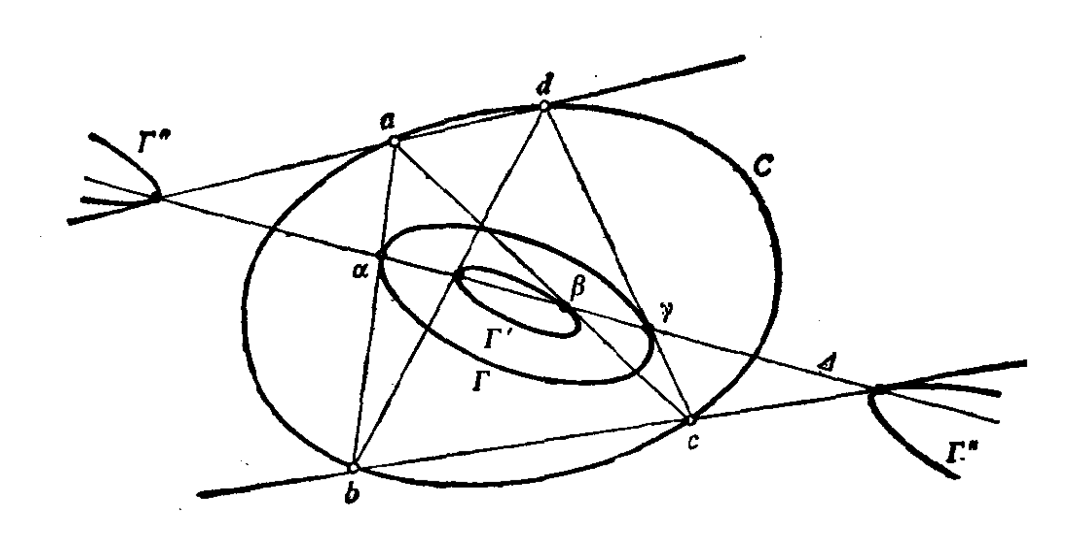


图 16.6.4.

推出，Γ'' 切 ad 于 δ；同样也切 bc 于 $\Delta\cap bc$。这样的论证也证明了命题的第一部分。

16.6.5 推论. 设 $a, b, c\in C$ 各不相同，$\Gamma', \Gamma''\in\mathscr{F}$ 分别切 ab 于 γ，切 ac 于 β，则恰好存在两条与 bc 相切的圆锥曲线 $\Gamma_1, \Gamma_2\in\mathscr{F}$，其中一条 Γ_1 切于 α_1 并使 α_1, β, γ 共线，另一条 Γ_2 切于 α_2 并使 $a\alpha_2, b\beta, c\gamma$ 共点。对于各不相同的 $a, b, c\in C$ 和分别切 bc, ca, ab 于 α, β, γ 的 $\Gamma, \Gamma', \Gamma''\in\mathscr{F}$，如果 $a\alpha, b\beta, c\gamma$ 是共点的，就称六元组 $(a, b, c, \Gamma, \Gamma', \Gamma'')$ 是正的。

Γ_1 的存在性可由 16.6.4 推出；Γ_2 的存在性可由 Γ_1 的存在和 16.5.5.2 推出，$a\alpha_2$, $b\beta$, $c\gamma$ 共点可由 6.7.2 和 6.4.5 推出。

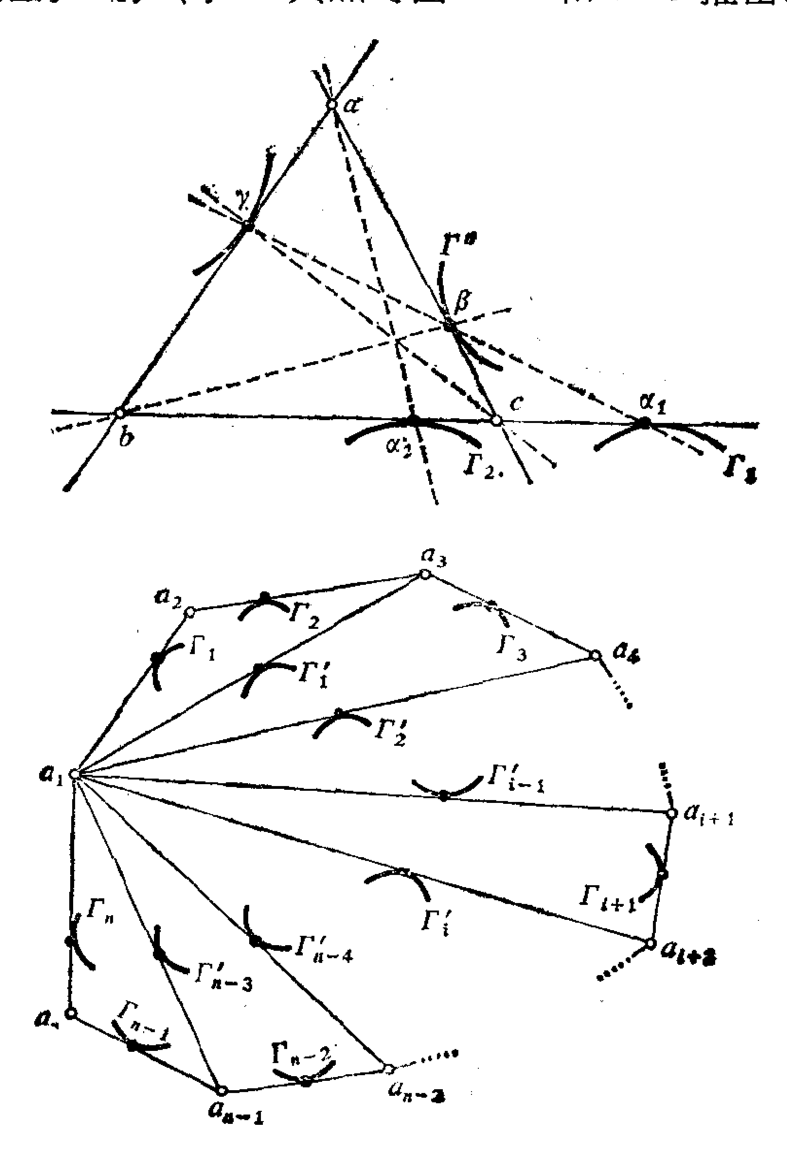


图 16.6.5.

16.6.6 设有 $2n$ 元组 $(a_1, \cdots, a_n, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$，其中 $a_i \in C$ 各不相同，Γ_i 是 a_ia_{i+1} 的切线 $\forall_i = 1, \cdots, n$（当然：$a_{n+1} = a_1$）．由 16.6.5，下列条件使我们可以用归纳法定义 $\Gamma'_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, \cdots, n-3)$：一开始，六元组 $(a_1, a_2, a_3, \Gamma_2, \Gamma'_1, \Gamma_1)$ 是正的；随后，六元组 $(a_1, a_{i+1}, a_{i+2}, \Gamma_{i+1}, \Gamma'_i, \Gamma'_{i-1})$ 是正的 $\forall i = 2, \cdots, n-3$. 最后我们就得出一个定义好了的六元组 $(a_1, a_{n-1}, a_n, \Gamma_{n-1}, \Gamma_n, \Gamma'_{n-3})$；我们称 $2n$ 元组 $(a_1, \cdots, a_n, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$是正的，如果六元组 $(a_1, a_{n-1}, a_n, \Gamma_{n-1}, \Gamma_n, \Gamma'_{n-3})$ 是正的．这样定义后，就可以叙述 Poncelet 定理如下：

16.6.7 定理． 设 $(a_1, \cdots, a_n, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$ 是正的 $2n$ 元组，b', $b'' \in C$ 各不相同并使 bb'' 相切于 Γ_1，则存在一个正的 $2n$ 元组 $(b_1, \cdots, b_n, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$ 使 $b_1 = b'$, $b_2 = b''$.

16.6.7.1 $n = 3$ 的情形． 主要思想是利用 16.6.4 来作相继的转移．设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别是 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 与 a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1 的切点，α' 是 $b'b''$ 与 Γ_1 的切点．16.6.4 的最后一部分表明，存在 $\Sigma \in \mathscr{F}$ 切 a_1b' 于 $\beta' = a_1b' \cap \alpha_1\alpha'$ 而切 $b''a_2$ 于 $\beta'' = b''a_2 \cap \alpha_1\alpha'$. 根据 16.6.4 的第一部分，存在 $b''' \in C$ 使 Γ_2 也切 $b''b'''$ 于 $\alpha'' = b''b''' \cap \beta''\alpha_2$，而且 Σ 也切 a_3b''' 于 $\beta''' = a_3b''' \cap \alpha_2\beta''$. 最后，16.6.4 的最后一部分表明，存在 $\Theta \in \mathscr{F}$ 分别切 a_3a_1 和 $b'''b'$ 于 $\lambda = a_3a_1 \cap \beta'''\beta'$ 和 $\mu = b'''b' \cap \beta'''\beta'$. 剩下的只要证明 $\Theta = \Gamma_3$. 我们用反证法证明这一点：直线 a_1b', a_2b'', a_3b''' 不共点，因为它们都与 Σ 相切．将 5.5.1 用于两对三角形 $\{\{a_1, a_2, a_3\}, \{\beta', \beta'', \beta'''\}\}$, $\{\{\beta', \beta'', \beta'''\}, \{b', b'', b'''\}\}$，就知 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda$ 也好，α', α'', μ 也好，都是不共线的．因为假定了 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不共线，由 16.6.5 就推得 $\lambda = \alpha_3$，因此 $\Theta = \Gamma_3$；但因 α'_1, α'', μ 不共线，就知六元组 $(b', b'', b''', \alpha', \alpha'', \mu)$ 是正的．

16.6.7.2 对 n 作归纳． 这是直接由 16.6.7.1 和 16.6.6 中的构造作出的．由那里的构造可知 $(a_1, a_2, a_3, \Gamma_2, \Gamma'_1, \Gamma_1)$ 是正的，根据 16.6.7.1，从它可导出一个正的六元组 $(b_1 = b', b_2 = b'', b_3, \Gamma_2, \Gamma'_1, \Gamma_1)$；然后从 $(a_1, a_3, a_4, \Gamma_3, \Gamma'_2, \Gamma'_1)$ 可导出一个正的六元

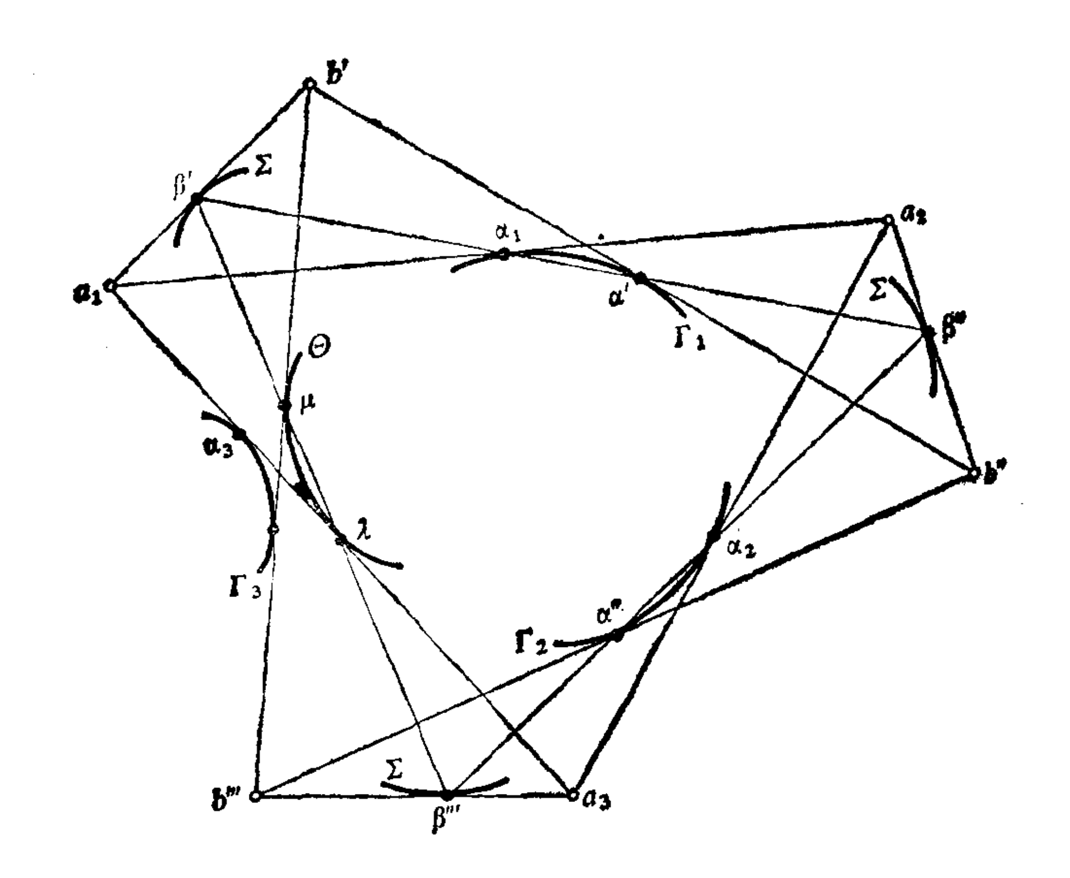


图 16.6.7.

组 $(b_1, b_3, b_4, \Gamma_3, \Gamma_2', \Gamma_1')$，等等……，最后得出的 $2n$ 元组 $(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n)$ 根据定义是正的.

16.6.8 注. 若K是任意域，不一定存在与 a_1a_2 不同的 $b'b''$ 跟 Γ_1 相切，其中 $b', b''\in C$ 且 $b'\neq b''$，而且对任一给定的 $b'\in C$ 都是如此；例如可参见图 16.6.12. 然而当K是代数闭域时就不会有这个问题. 若 $K=\mathbf{R}$，我们仍然可以看到对充分邻近 a_1 的每一 $b'\in C$，总能找到另一点 $b''\in C$，使 $b'b''$ 跟 Γ_1 相切. 因此，在上述两种情形下，我们推出：若有一个正的 $2n$ 元组，则存在一个这种 $2n$ 元组的不可数族.

16.6.9 现在我们回头讨论最初提出并引发出 16.6.7 的问题，即跟那些内接于 C 而外切于 Γ 的多边形相对应的形如 $(a_1, \cdots, a_n, \Gamma, \cdots, \Gamma)$ 的 $2n$ 元组的问题；我们注意到，对于由 C 和 Γ 定义的圆锥曲线束 $\mathscr{F}$ 来说，$\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n\in\mathscr{F}$ 的条件自然是满足的. 不过，我们还得验证：

16.6.10 引理. $2n$ 元组 $(a_1, \cdots, a_n, \Gamma, \cdots, \Gamma)$ 必为正的.

根据 16.6.5，存在一个正的 $2n$ 元组 $(a_1, \cdots, a_n, \Gamma, \cdots, \Gamma, \Gamma')$；若对这个 $2n$ 元组应用 16.6.7 并置 $b' = a_2$，$b'' = a_3$，就必定得出一个 $2n$ 元组$(a_2, \cdots, a_n, a_1, \Gamma, \cdots, \Gamma, \Gamma')$，这是因为过一点只能向一条圆锥曲线引两条不同的切线． 由此可知 a_1a_2 也与 Γ' 相切；对 $a_2a_3, \cdots$ 也有同样的结论． 于是 Γ 和 Γ' 有 n 条相异的公切线 $a_ia_{i+1}(i = 1, \cdots, n)$，可见 $n \geqslant 5$ 时 $\Gamma = \Gamma'$（参见 16.1.4）． 剩下的是 $n = 3$ 和 $n = 4$ 的情形；$n = 3$ 的情形如图 16.2.13 所示(也可参见 16.8.2)． $n = 4$ 时，利用配极变换可以证明图 16.6.10 中的共线性；而这就表示两个六元组 $(a_1, a_2, a_3, \Gamma, \Gamma', \Gamma)$ 和 $(a_1, a_3, a_4, \Gamma, \Gamma, \Gamma)$ 都是正的．

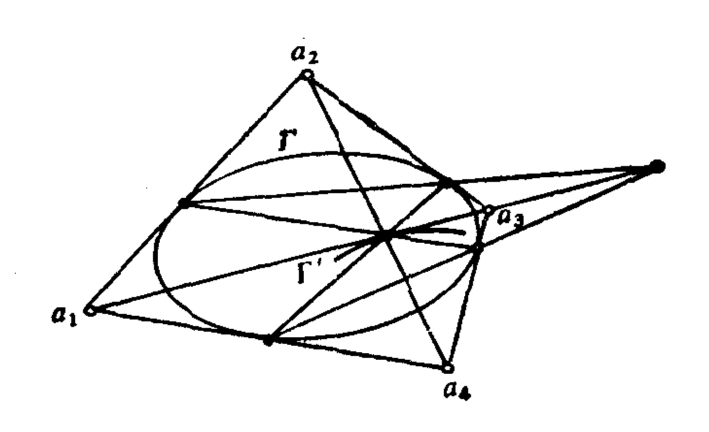


图 16.6.10.

16.6.11 推论． 设$(a_1, \cdots, a_n)$是一个有 n 个不同顶点的多边形，内接于圆锥曲线 C 而外切于圆锥曲线 Γ，则只要有 $b', b'' \in C$ 使 $b' \neq b''$ 且 $b'b''$ 相切于 Γ，就必定存在一个多边形 $(b', b'', b_3, \cdots, b_n)$ 内接于 C 而外切于 Γ． 特别当 $K = \mathbf{C}$ 或 $\mathbf{R}$ 时，存在不可数无穷多个这样的多边形．

关于存在性，可见 16.6.12.4 和 17.6.7．

16.6.12 评注

16.6.12.1 参阅 17.6.5 中 C 与 Γ 共焦的很有意义的情形．

16.6.12.2 若 (a_i) 是内接于 C、外切于 Γ 的，则 16.6.7 表明所有的直线 $a_ia_{i+2}(i = 1, \cdots, n)$ 都与 C 和 Γ 定义的束 $\mathscr{F}$ 中的同一条圆锥曲线 Γ_2 相切（可如 16.6.10 中的证明一样地进行论

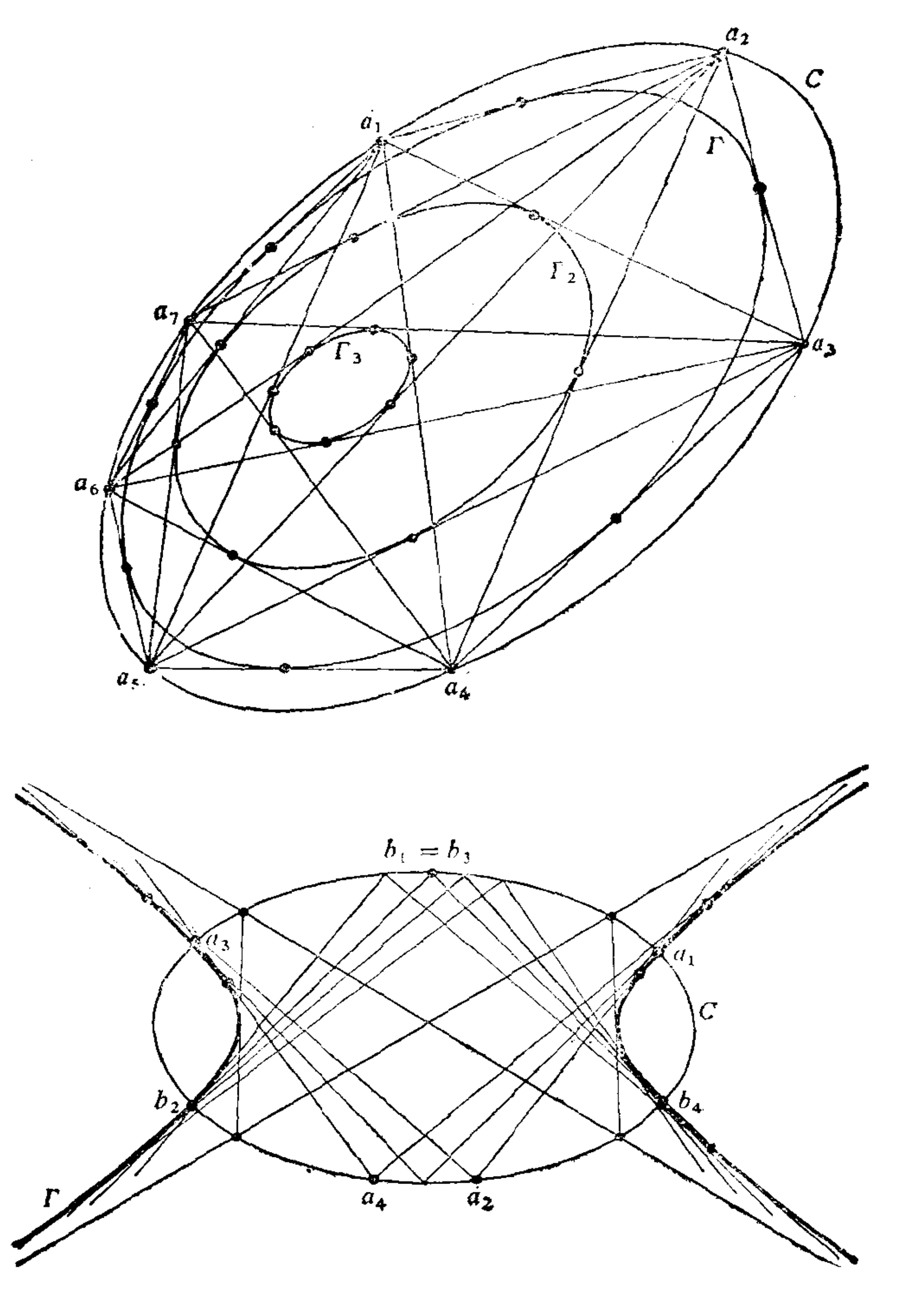


图 16.6.12.

证). 同样地，所有的 $a_i a_{i+3}$ 都相切于一条 $\Gamma_3 \in \mathscr{F}$，等等….正多边形跟同心圆的类比似乎可以告诉我们，在我们所考虑的图形上有一个跟关于这些圆的圆心的旋转群相类似的群. Poncelet 定理最本质的困难在于，这样一个群存在，但它并不对应于 $\mathfrak{S}_X$ 的

任何子群．关于这个群，参见 16.6.1．

16.6.12.3 在一些不同的情形下，Poncelet 多边形可能以某些 a_i 相等时的很有趣的退化形式出现；参见［LB2］第 142 页以及图 16.6.12．

在这个图中，当 b_2 和 b_4 都是 C 和 Γ 的公共点时，四边形 (a_1, a_2, a_3, a_4) 退化为 (b_1, b_2, b_1, b_4)；还可以注意到四边形中两边为 Γ 的渐近线时的情形．

16.6.12.4 Cayley 已经知道为使一个内接于 C、外切于 Γ 的 n 边形存在，C 和 Γ 的方程应满足什么显式的条件．若 A, B 是代表 C 和 Γ 的矩阵，我们在形式上把函数 $\sqrt{\det(A+\lambda B)}$ 关于 λ 展开：

$$\sqrt{\det(A+\lambda B)}=\sum_{i=0}^{\infty}\sigma_i\lambda^i.$$

于是所求的条件可用行列式写作：

$$\begin{vmatrix} \sigma_3 & \sigma_4 & \cdots & \sigma_{p+1} \\ \sigma_4 & \sigma_5 & \cdots & \sigma_{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{p+1} & \sigma_{p+2} & \cdots & \sigma_{2p-1} \end{vmatrix}=0,\quad n=2p \text{ 时；}$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_{p+1} \\ \sigma_3 & \sigma_4 & \cdots & \sigma_{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{p+1} & \sigma_{p+2} & \cdots & \sigma_{2p} \end{vmatrix}=0,\quad n=2p+1 \text{ 时．}$$

我们希望读者写出这些条件中的前几个条件，首先是当 A 和 B 都是对角阵的情形，这就是例如说 17.6 的共焦圆锥曲线的情形；然后是两个圆的情形，并与 10.13.3 所得结果作一比较．关于 Cayley 这些公式的证明，可见［LB2］或一本很新的参考书［GR-HA］．

16.6.12.5 关于 Poncelet 定理，也可参阅［B-H-H］．

16.7 仿射圆锥曲线

16.7.1 方程. 大致上仍援用15.1中的记号，不过我们在这里碰到的是一个仿射平面 X. α 的一个方程可写为

16.7.1.1 $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$;

如果 $\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \neq 0$，则圆锥曲线 α 是正常的. 它在无穷远处的点(参见15.1.3.2)由

$$ax^2+2bxy+cy^2=0 \text{ 或 } cm^2+2bm+a=0$$

给出，后一式中我们用 m 表示一条直线的斜率，这是很方便的；只要再把 $m=\infty$ 的情形也补上就行了(例如参见5.2.4). 例如，若 $K=\mathbf{R}$ 且 $C=\mathrm{im}(\alpha)\neq\emptyset$，$\alpha$ 正常，则(参见15.3.3.2)这个象当 $ac-b^2>0$ 时是一个椭圆，$ac-b^2=0$ 时是一条抛物线，$ac-b^2<0$ 时是一条双曲线. 16.7.1.1的中心，根据15.5.5.2可知是由 $ax+by+d=0$，$bx+cy+e=0$ 给出的. 求渐近线时可利用14.5.3.

16.7.2 良好参数化映射. 由16.2.6可知，C 与一条绕 $a\in C$ 转动的动直线 D 相交；我们可取 D 的斜率 m 作为 $\tilde{K}=K\cup\infty$ 中的参数. 根据16.2.9，结果总是形如

$$x=\frac{um^2+u'm+u''}{wm^2+w'm+w''},\quad y=\frac{vm^2+v'm+v''}{wm^2+w'm+w''}$$

的. 一种特殊的情形是：当 C 是双曲线或抛物线时，取 $a\in\infty_X\cap C$，也就是说用适当的平行线来截割 C；这时就得出熟悉的函数 $x\longmapsto\alpha x^2+\beta x+\gamma$ 和

$$x\longmapsto\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},$$

它们的图象是抛物线和双曲线. 也可参见17.7.1和17.8.2.

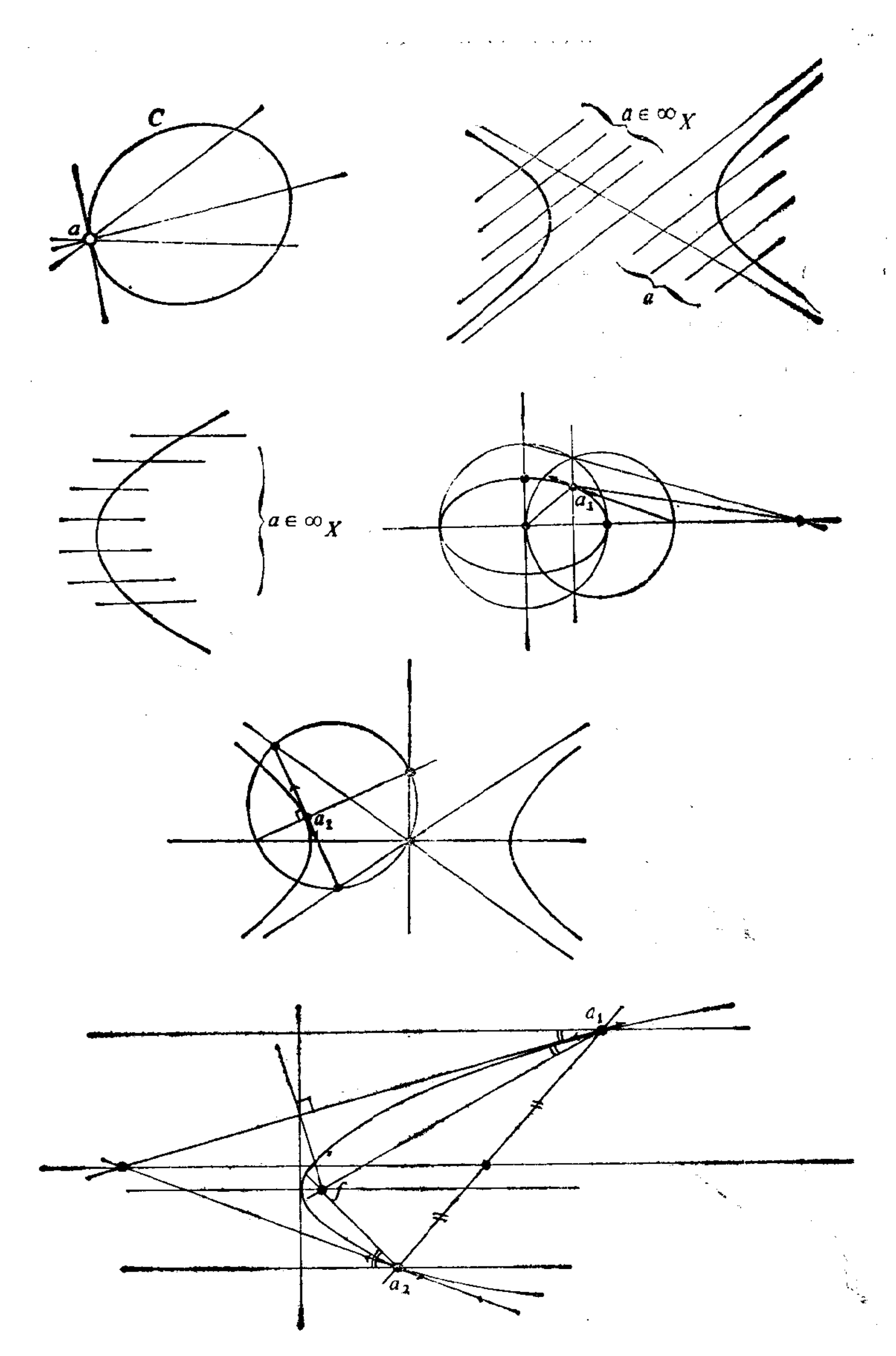


图 16.7.2.

16.7.3 过五点的圆锥曲线的结构。 16.2.11 和 16.2.13 两图说明了对经过 C 上一个已知点的任一直线 D，怎么找到 $C\cap D$ 和在该点的切线．从 15.5.6 可以得出 C 的所有直径，从而圆心就作为两条直径的交而得出（参见图 16.7.3）．有了中心、两个点和在这两点处的切线后，就可以得出共轭方向的对合（参见 15.6.3 和 15.7.5），从而根据 16.3.10.2 的结构就可得出 C 的轴的方向，这个做法对任一 X 上的欧氏结构都是可行的，在实用中画图的那张纸和标尺的长度单位就决定了这个欧氏结构．有了轴（参见 15.6.8）、一个点和在这点处的切线后，由 17.7 和 17.8 显而易见地可决定顶

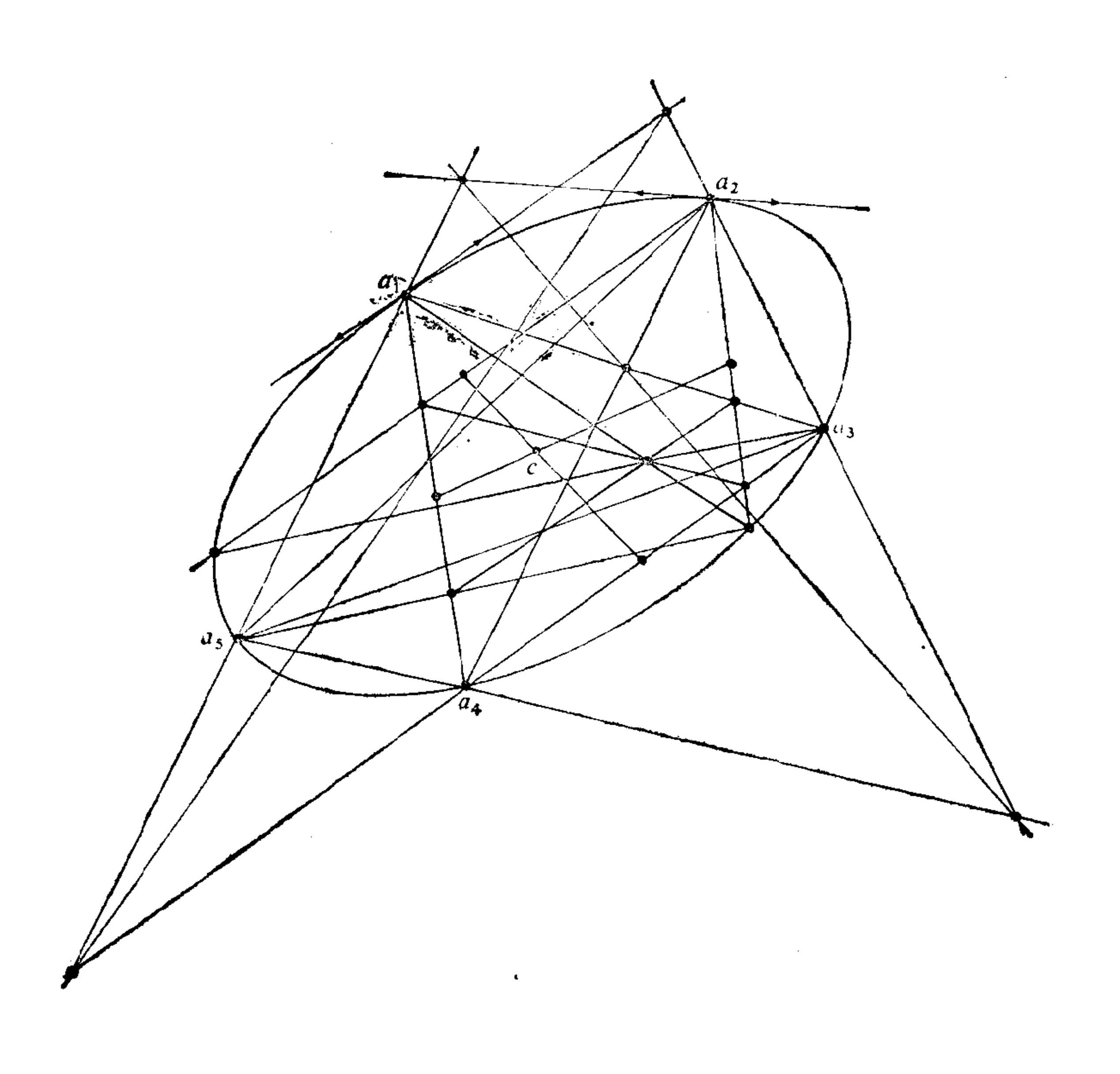


图 16.7.3.

点等等…。如果我们考虑的是一条抛物线，有两个点和在这两点处的切线就足够了，参见下段。

16.7.4 与四条直线相切的抛物线。 根据 16.1.4 和对偶原理可知，存在唯一的一条圆锥曲线与 X 上给定的四条直线 D_i（相互不平行，任何三条不共点）以及 X 的无穷远直线 ∞_X 相切，即与 D_i 相切的一条抛物线。为了用欧氏几何的作图法来决定这条抛物线，我们在和图 16.2.13 对偶的图上作出它与 D_1 和 D_2 的切点。于是我们利用 15.5.8 来得出轴的方向；然后根据 17.9.18.1 就能作出图来。

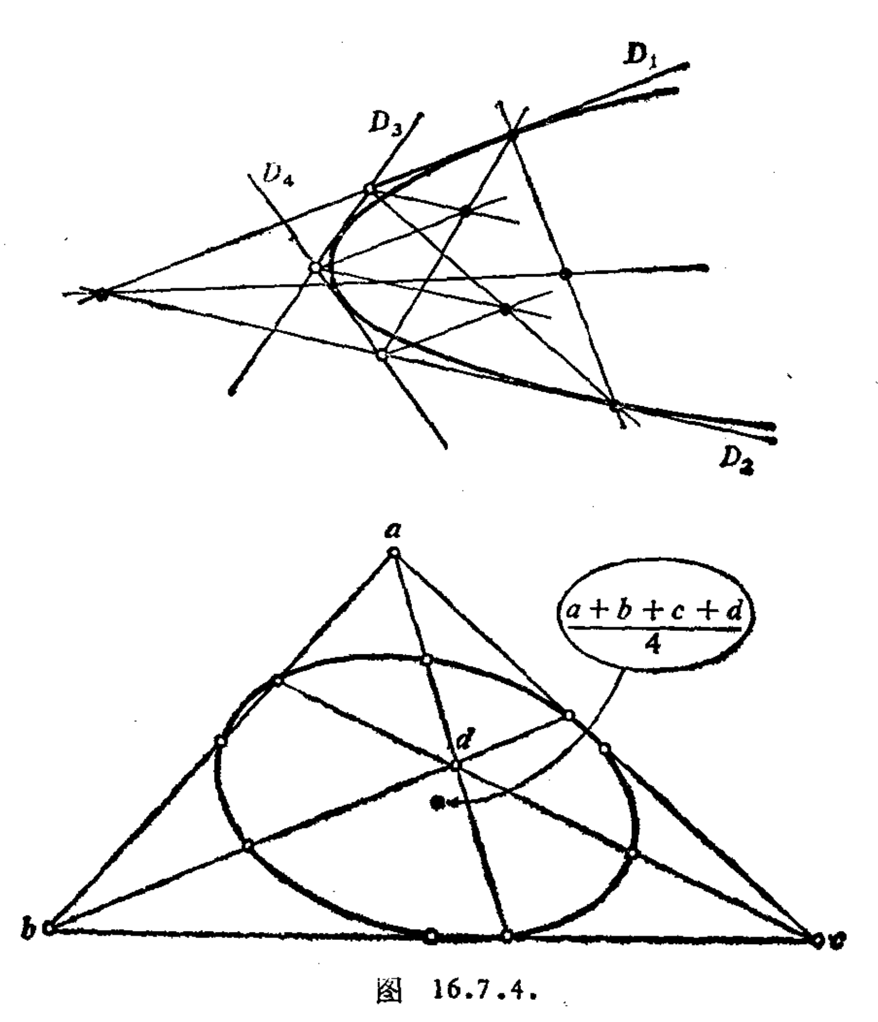


图 16.7.4.

16.7.5 九点圆锥曲线。 把 16.5.5.1 换成仿射的说法，就可以对 $a, b, c, d \in X$ 得出一条经过 p, q, r 和 ab, ac, ad, bc, bd, cd 的六个中点的圆锥曲线；它在无穷远处的点就是 $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{cd})$，$(\overrightarrow{ad}, \overrightarrow{bc})$，$(\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{db})$ 决定的 ∞_X 的对合的二重点，因此在几何上很容易

做出(参见 16.3.10). 另外, 由 3.4.10 和 15.7.7 可知, 这条圆锥曲线的中心是 $\frac{a+b+c+d}{4}$. 当 d 是 $\{a, b, c\}$ 的垂心时,就是九点圆的特殊情形,参见 10.11.3 和 17.5.4.

16.8 练习

16.8.1 证明: 对一条正常圆锥曲线的象集 C 上的四点 a, b, c, d, $[a, b, c, d]=-1$ 的充要条件是 $ab \perp cd$.

16.8.2 证明: 若 a, b, c 组成 C 的外切三角形,切点为 α, β, γ, 则 $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ 共点(参见图 16.2.13); 这一证明应该只用解析几何.

16.8.3 Steiner 与 Pascal 直线. 设 C 是正常圆锥曲线, $a_i(i=1, \cdots, 6)$ 是 C 上的点;由 16.2.11 可知对这些 a_i 组成的每个六点组(顺序任取),有一条相应的直线, 称为这个六点组的 Pascal 直线. 证明: 对 C 上给定的六个点,至多存在 60 条 Pascal 直线;举出一个确实有 60 条不同的 Pascal 直线的例子. 证明: 这些直线是三三共点的,因而我们得出 20 个点, 它们包含在关于 C 共轭的 10 个点对中.

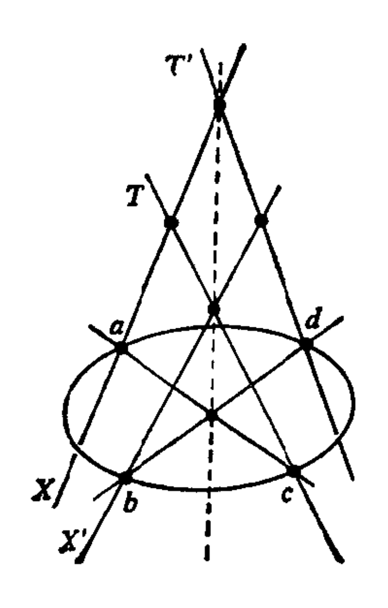


图 16.8.4.

16.8.4 设C是正常圆锥曲线的非空象集;将P嵌入一个三维射影空间$\hat{P}$中. 证明: 存在一个方程为中性的(参见14.4)二次曲面,其象Q使得 $C = Q \cap P$. 设 a, b, c, d 是C上四点, X, X' 是母线族Ξ中过 a, b 的母线(参见14.4), T, T' 是母线族Θ中过 c, d 的母线. 证明: $ac \cap bd, X \cap T', X' \cap T$ 这些点是共线的. 从中引出 Pascal 定理的一种证明. 并用这种方法来讨论前面的练习。

16.8.5 取给定六点中的四点所构成的射影标架, 来证明 Pascal 定理。

16.8.6 设 C 是正常圆锥曲线的非空象集, 且 p, q, r 使得C与 pq 在q相切,与 pr 在r相切. 证明: 只要 $m, n \in C$, 就有

$$[q, r, m, n]_C^2 = [pq, pr, pm, pn].$$

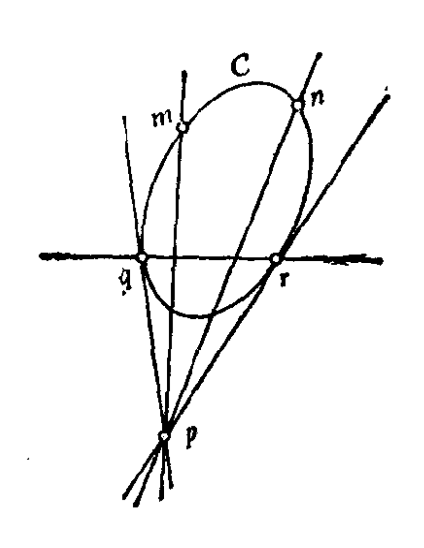


图 16.8.6.

16.8.7 证明: 一条有非空象集的正常圆锥曲线的两个对合是可交换的充要条件是它们的 Frégier 点共轭.

16.8.8 设f是一个不是对合的单应, $f \neq \mathrm{Id}_C$, 其中C是一条正常圆锥曲线的非空象集. 证明 $\{\langle m, f(m)\rangle: m \in C\}$ 是一条双切于C的圆锥曲线的切线的集合. 反之亦然. 对两条双切的圆锥曲线,利用上述结论给出16.6中那些结论的简捷证明.

16.8.9 定义并讨论一个圆锥曲线束中四条圆锥曲线的交比.

16.8.10 讨论图 16.5.6 中区域变化的情形.

16.8.11 说明图 16.4.10.5, 16.4.10.6 和 16.4.10.7 各图的作法是合理的.

16.8.12 对跟 16.5.6.2 对偶的圆锥曲线束进行具体的计算.

16.8.13 当 $n = 2p$ 时, 在一个外切于 Γ、内接于 C 的 n 边形中连接相隔 p 个顶点的顶点所得的直线有什么性质?

16.8.14 证明: 在切束的类型 IV* 的情形下, 有一点是密切点.

16.8.15 **$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ 时圆锥曲线束的分类.** 在 $K = \mathbf{R}$ 时,给出圆锥曲线束的一个分类(参见 [LY], 第 259 页).

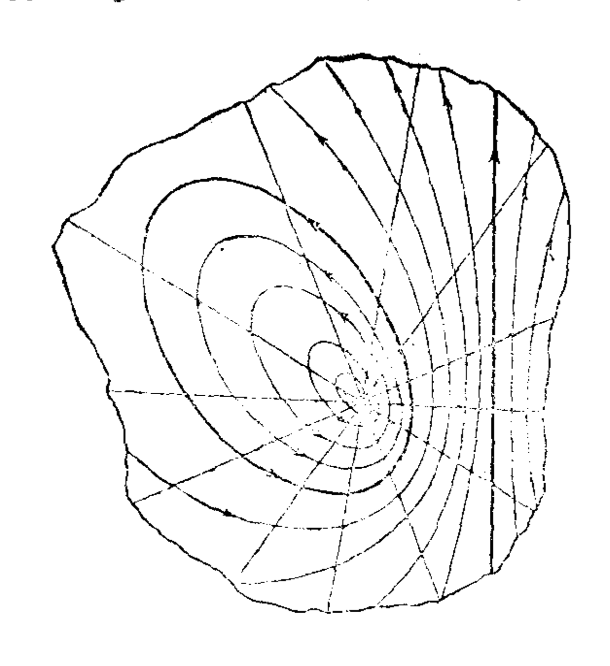


图 16.8.15.

16.8.16 当 K 只含三个元素时,讨论 $xz - y^2 = 0$ 和 $xy + z^2 = 0$ 的交点.

16.8.17 域 K 含七个元素;证明 $xz - y^2 = 0$ 和

$$2x^2 + z^2 - 2xy - yz = 0$$

(相应地: $x^2 + 4yz = 0$ 和 $z^2 + xy = 0$) 有唯一的公共点,而且它们所定义的圆锥曲线束只含唯一的一条退化圆锥曲线(相应地:没有退化的圆锥曲线).

16.8.18 由 16.2.3 推出 16.1.4.

16.8.19 用 16.8.4 的方法证明 Pappus 定理。

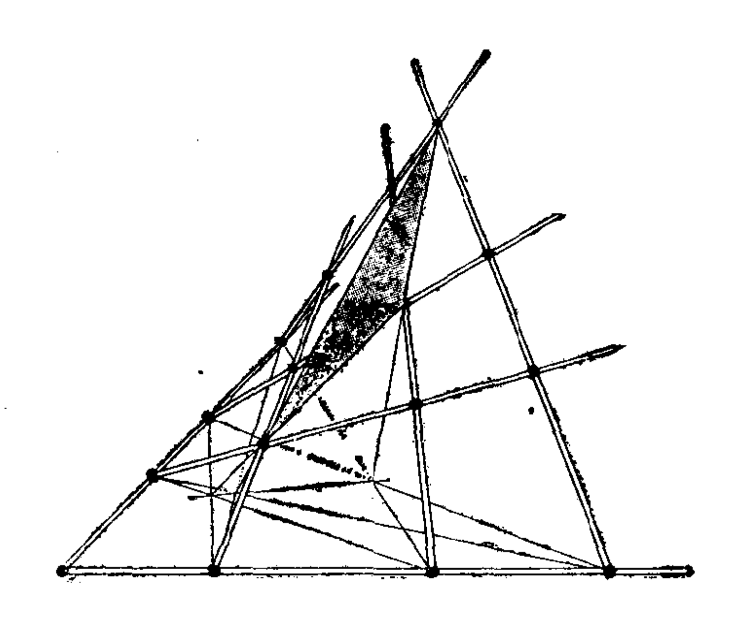


图 16.8.19.

16.8.20 设 $D_i(i=1,\cdots,6)$ 是跟同一条圆锥曲线相切的六条直线；证明：若 φ_i 是 D_i 的方程，则 φ_i^2 在 $Q(E)$ 中是线性相关的（参见 13.1.3.3）。

16.8.21 讨论在 16.5.6.2 所引进的映射 $\mathscr{F}\to PQ(E^*)$ 下 $\mathscr{F}$ 中退化圆锥曲线的象集。

16.8.22 具体作出经过仿射平面上给定的四点的抛物线。

16.8.23 是否存在一对圆锥曲线，它们有四个不同的公共点，但没有四条不同的公切线？

16.8.24 在齐次坐标下具体计算一个简单的二次变换。

第 17 章　欧氏圆锥曲线

本章应用前几章中的结果来研究欧氏平面上的圆锥曲线：椭圆，双曲线，抛物线．通过很初等的讨论就可以看出，这些圆锥曲线(圆除外)可以定义为到一个点(焦点)和一条直线(准线)的距离之比为常数的点的集合；同时，除抛物线外，又可以定义为到两点的距离之和(或差)为常数的点的集合(17.2 节)．

这些性质自古以来就是人所熟知的；但是，找出它们之间的一个深刻而统一的解释，却是一项很有吸引力的工作；这就是十九世纪的几何学家所作的，我们将在 17.4 中加以阐述．然后，我们利用 17.4 的方法，从第十六章的射影的结论导出许多关于欧氏圆锥曲线的结论，这是 17.5 和 17.6 的内容．Poncelet 大定理被用于讨论内接于椭圆的最大周长多边形；一个出乎意外的结果是：这样的多边形的个数是无穷的．

最后两节 17.7 和 17.8 不加证明地叙述一些专门关于椭圆、双曲线(包括等轴双曲线)的结论．其实，我们认为，读者在前面各章中已积累了各种不同的方法，也许会有兴趣考虑一下哪种方法可以用来证明其中哪个结论．

关于欧氏圆锥曲线的其它结果，可参见 [EE]，[DQ]，[ML]．

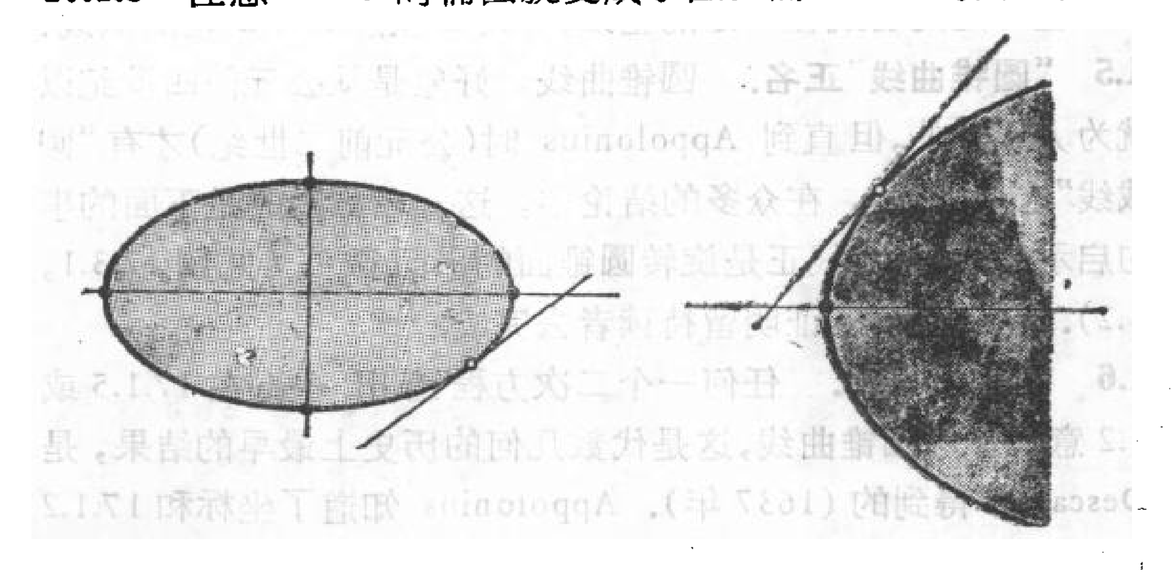
在整个这一章中，X 表示一个欧氏仿射平面，$\tilde{X}$ 是 X 的射影完备化空间，$\tilde{X}^C$ 是 $\tilde{X}$ 的复化射影空间(参见 7.6)，I, J 是 X 的循环点(参见 9.5.5.1)．若不作另外申明，C 总表示 X 上一条正常圆锥曲线的非空象集；根据 16.1.4，可将 C 和以它为象集的圆锥曲线 α 等同起来．

17.1 Descartes 原理

17.1.1 根据 15.6 和 15.3.3.2 中的定义，我们可以找到一个标准正交标架，使 C 的方程为

17.1.2
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \ (a\geqslant b) & \text{(椭圆)}, \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 & \text{(双曲线)}, \\ y^2-2px=0 & \text{(抛物线)}. \end{cases}$$

17.1.3 注意 $a=b$ 时椭圆就变成了圆. 而 $a=b$ 时的双曲线，按



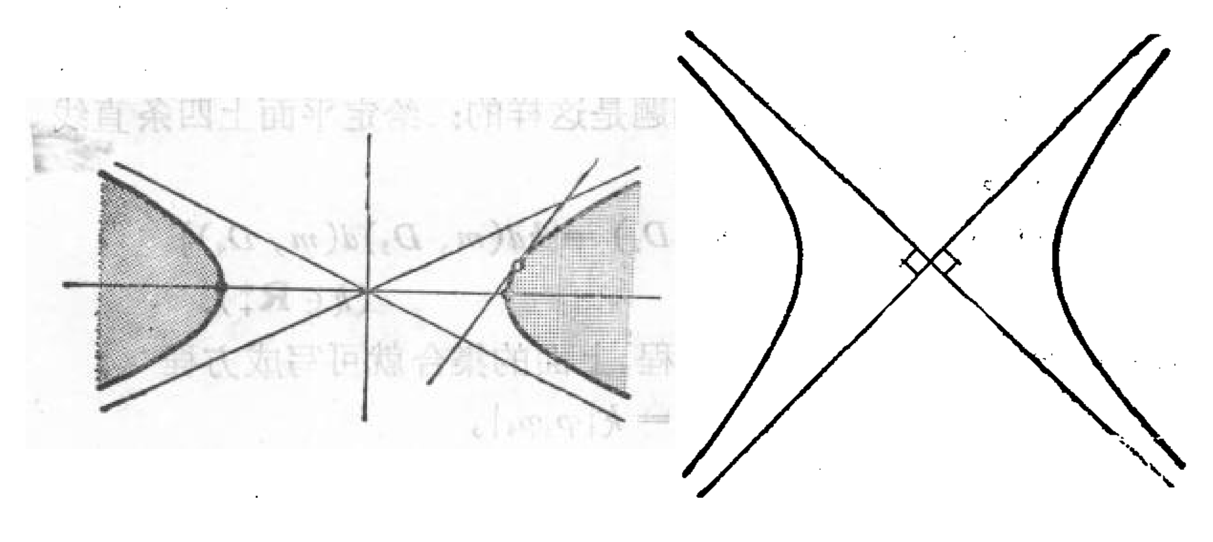


图 17.1.3.

定义叫作等轴双曲线；它们就是渐近方向正交的双曲线；正如圆比之于椭圆一样，等轴双曲线比之于一般的双曲线具有更多的性质：例如可见 17.8.3. 位于轴上的点称为顶点；椭圆有四个顶点，双曲线有两个，抛物线有一个.

17.1.4 切线，凸性，法线. 根据 15.4.6，椭圆和抛物线总是凸集的边界；双曲线的两个凸分支，各是一个凸集的边界. C 在 m 处的切线，可以定义为 m 的极线(参见 14.5.2.1)，也可以定义为 C 作为 C^∞ 子流形的切空间 (参见 14.3.8) 或者参数弧段 C 的切线 (参见 16.2.9)，或者还可定义为 C 的连通分支所围成的严格凸集在 m 点的唯一支撑线(参见 11.6.4)，所有这些定义都是一致的.

C 在 m 处的切线在 m 处的垂线，称为 C 在点 $m\in C$ 处的法线.

17.1.5 "圆锥曲线"正名. 圆锥曲线，好象是从公元前四世纪以来就为人所知的，但直到 Appolonius 时(公元前二世纪)才有"圆锥截线"这个名称. 在众多的结论中，这一名称受的是下面的事实的启示：圆锥曲线正是旋转圆锥面的平面截线 (见图 17.3.1, 17.3.2). 这一事实的证明留待读者去完成.

17.1.6 "四线轨迹". 任何一个二次方程给出一条在 17.1.5 或 17.1.2 意义下的圆锥曲线，这是代数几何的历史上最早的结果，是由 Descartes 得到的 (1637 年). Appolonius 知道了坐标和 17.1.2 中的方程. 但是 Descartes 能定义出 n 次曲线. 这一方法的有力，可以通过解决下面这个自古希腊时代以来悬而未决的问题得到说明；这个称为"四线轨迹"的问题是这样的：给定平面上四条直线 $D_i(i=1,2,3,4)$ 后，求集合

$$\{m\in X: d(m,D_1)d(m,D_2)=kd(m,D_3)d(m,D_4)\}\quad (k\in \mathbf{R}_+^*).$$

而若 $\varphi_i=0$ 是 D_i 的一个方程，上面的集合就可写成方程

$$|\varphi_1\varphi_2|=k|\varphi_3\varphi_4|,$$

于是它由以 $\varphi_1\varphi_2\pm k\varphi_3\varphi_4=0$ 为方程的两条圆锥曲线组成 (Descartes 当时漏掉了一条). 可以注意到，当 k 变动时，这些圆锥曲线构成一个圆锥曲线束(参见 16.4.10). 试与 [I-R] 第 367 页的

练习 350 相互对照.

17.1.7 参见 17.9.1 中这一方法的另一个应用.

17.2 度量性质：初等的阐述

17.2.1 单焦性质

17.2.1.1 命题. 在 X 上圆锥曲线的非空的、不是圆的象集与 X 的子集 $\{m\in X;\ fm=e\cdot d(m,\ D)\}$ 之间有一个恒同关系，其中 D 是 X 上一条直线，f 是 X 上一点，$f\notin D$，$e\in\mathbf{R}_{+}^{*}$.

这个命题可通过下面的计算得出，其中 $x=h$ 表示 D 的方程，$(c,\ 0)$ 是 f 的坐标. 这时，命题中的子集由

$$(x-c)^2+y^2=e^2(x-h)^2$$

所定义；为使它跟 17.1.2 的方程一致，当 $e\neq 1$ 时取 $h=\dfrac{c}{e^2}$，从而得出

17.2.1.2 $$\frac{x^2}{\frac{c^2}{e^2}}+\frac{y^2}{(1-e^2)\frac{c^2}{e^2}}-1=0;$$

当 $e=1$ 时取 $h=-c$，从而得出

17.2.1.3 $y^2=-4cx$.

反过来，17.1.2 中的方程，在抛物线的情形令 $p=-2c$，$e=1$ 就写成了 17.2.1.3 的形式，在另两种情形可写成 17.2.1.2 的形式：

对椭圆 $(a>b)$ 有 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，$e=c/a$，$h=c/e^2$，

对双曲线有 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，$e=c/a$，$h=c/e^2$.

17.2.1.4 常数 e 称为 C 的离心率；椭圆(相应地：抛物线，双曲线)的特征是 $e<1$ (相应地：$=1$，>1). 这样的一点 f 称为 C 的一个焦点，D 称为相应的准线. 上面的讨论表明，除了 C 是抛物线的情形(这时它只有一个焦点，位于轴上)，C 有两个焦点，位于 x 轴(在椭圆的情形称为长轴，在双曲线的情形称为横轴，或在两种情形统称为焦轴)上.

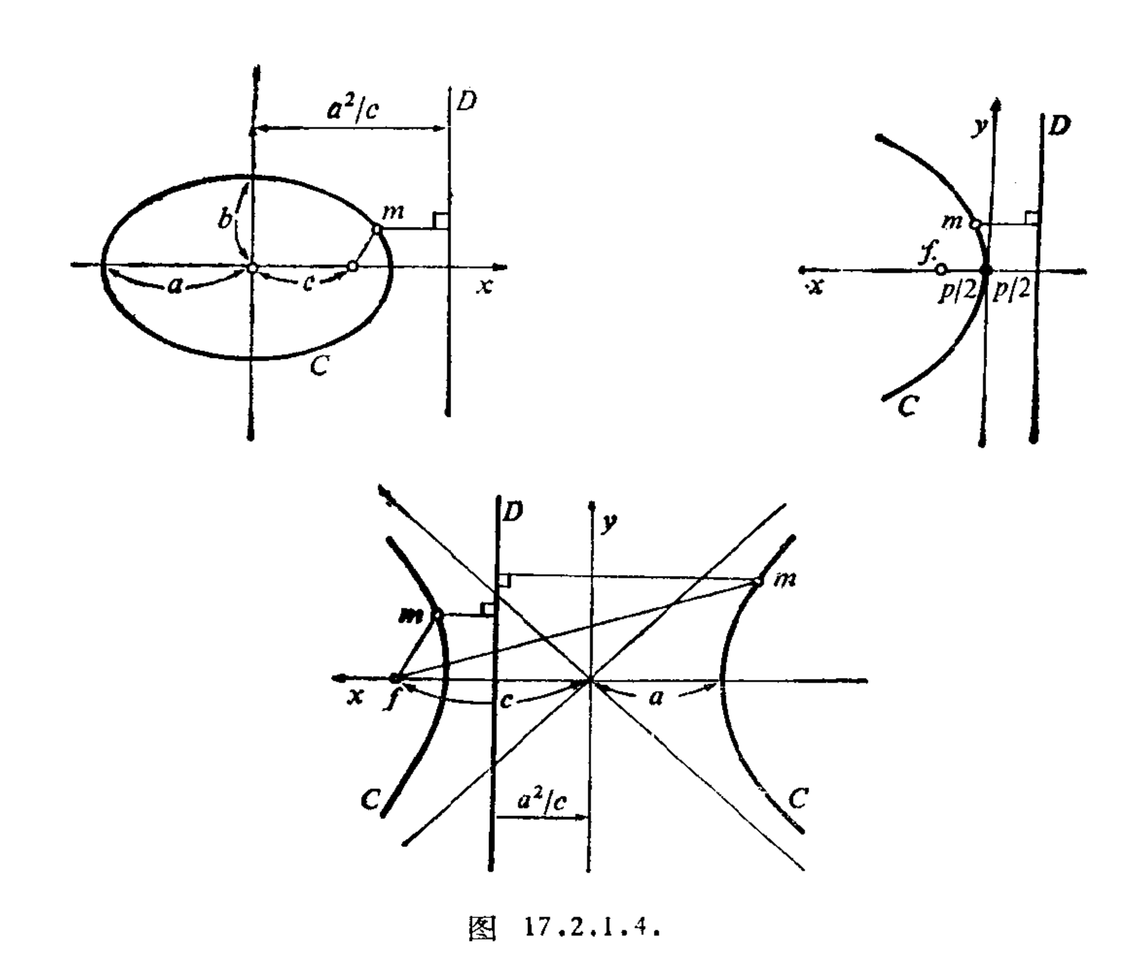


图 17.2.1.4.

17.2.1.5 相应的凸区域(参见 17.1.4) 为 $\{m: mf \leqslant e \cdot d(m, D)\}$.

17.2.1.6 设 $m, n \in C$, $p = D \cap mn$ (必要时可在 $\tilde{X}$ 中讨论); 则 pf 是 $\{fm, fn\}$ 的平分线(参见 8.7.7.4). 事实上,由于 $\frac{pm}{pn} = \frac{d(m, D)}{d(n, D)} = \frac{fm}{fn}$,这一点可从 10.3.8 推出.取极限情形即知 C 在 m 处的切线与 D 交于 p 且使 $\overline{fm, fp} = \pi/2$. 这首先就给出了 C 在 m 处的切线的一种作法;其次它还说明了若 S 是一条过 f 的直线,则它的过 f 的共轭直线 S' (参见 15.5.1) 使 $S \perp S'$. 这一性质表明了焦点的特征(参见 17.4.3). 例如由它可推出所谓 Poncelet "小定理": 设 ma, mb 与 C 在 a 和 b 处相切,则对 C 的任一焦点,直线 fm 是 fa 和 fb 的平方线. 其实,置 $p = ab \cap D$, 则由配极变换可知极线 $p^{\perp}$ 经过 m 和 f, 因而 $[fa, fb, fp, fm] = -1$, 于是从 8.7.7.5 即可推得结论. 也可参见 17.6.3.6.

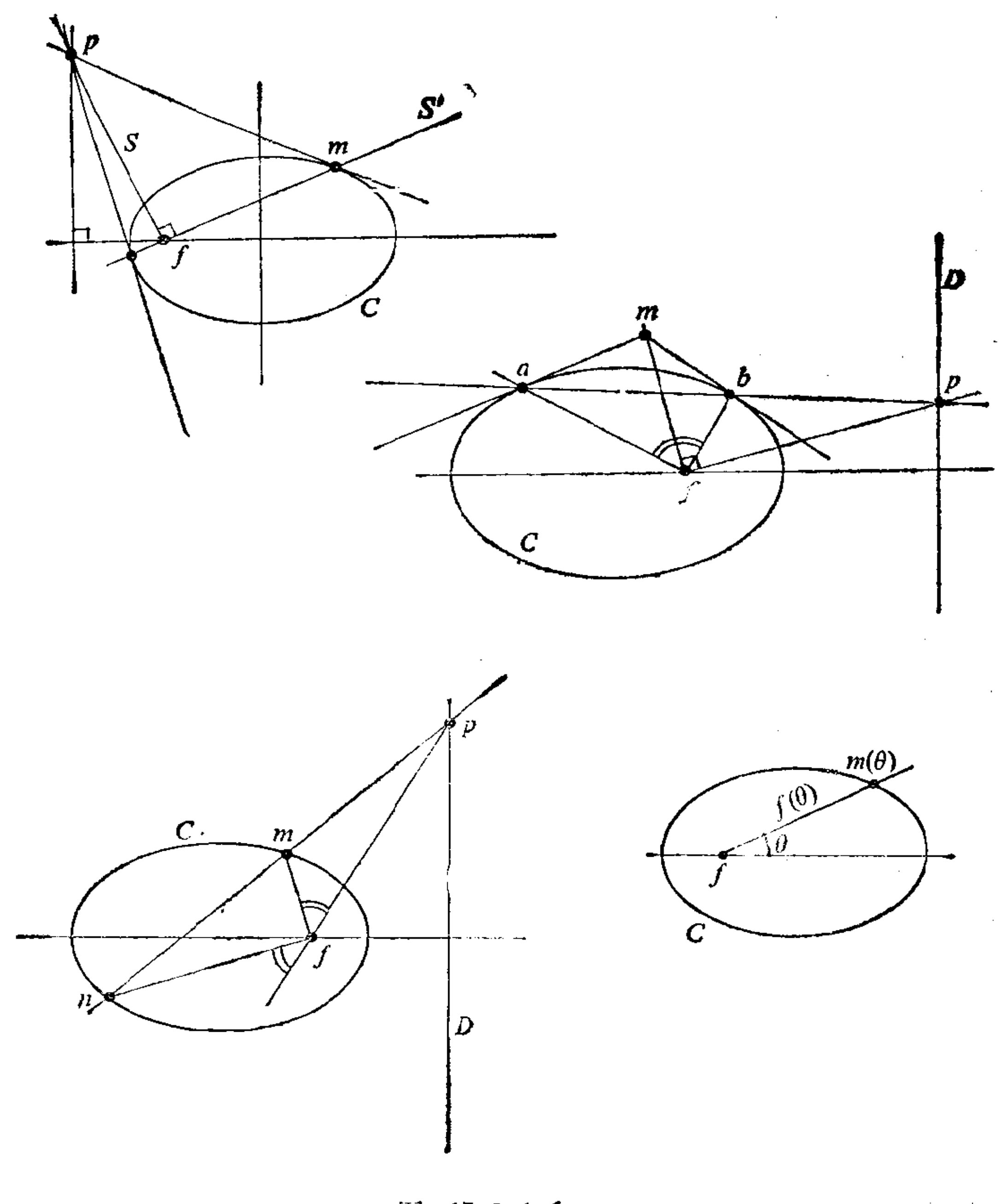


图 17.2.1.6.

17.2.1.7 行星的运行. 根据万有引力定律和 Binet 公式,行星画出的轨道在极坐标系 $\rho = f(\theta)$ 下满足下面的方程

$$f^{-1} + \frac{d^2(f^{-1})}{d\theta^2} = \text{常数},$$

例如可参见 [BE], 第 54 页. 于是有 $f^{-1} = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta + \gamma$, 或改换极轴后得到: $f(\theta) = \dfrac{1}{\alpha\cos\theta + \gamma}$; 回到仿射坐标就是:

$x^2+y^2=k(x+h)^2$，这是以坐标系的极点为焦点的圆锥曲线的方程．这就是为什么行星、彗星、小行星…在首次近似的意义下都画出以太阳为一个焦点的圆锥曲线的轨道．

17.2.2 双焦性质

17.2.2.1 设 f, f' 和 D, D' 是一条不是抛物线或圆的圆锥曲线 C 的两个焦点和相应的两条准线．根据 17.1.4，对任一 $m\in C$ 有：若 C 是椭圆，则 $d(m, D)+d(m, D')=d(D, D')$，若 C 是双曲线，则 $|d(m, D)-d(m, D')|=d(D, D')$．由此，据 17.2.1.1 就有：$mf+mf'=2a$（相应地，$|mf-mf'|=2a$）$\forall m\in C$．这就使下述命题得以成立：

17.2.2.2 命题． 在 X 中正常圆锥曲线的非空、不是抛物线的象集全体与 X 的形如 $\{m\in X: mf+mf'=2a\}$（相应地，$\{m\in X: |mf-mf'|=2a\}$）的子集之间，在 f, f' 取遍 X 中点对而 $2a>ff'$（相应地，$2a<ff'$）时存在一个恒同关系．

特别要注意的是，我们并未完全证明第一个集合含于第二个集合，而且上述计算并不是非常显然的．圆的情形对应于 $f=f'$，是毋庸多议的．我们来对椭圆进行证明，双曲线的情形留给读者．

取轴使 $f=(c, 0), f'=(-c, 0)$；对 $m=(x, y)$，就有 $(mf)^2+(mf')^2=2(x^2+y^2+c^2)$，$(mf')^2-(mf)^2=4cx$（这两个式子也可从 9.7.6 推得）．置 $mf+mf'=2\alpha>0$，就有 $mf'-mf=2cx/\alpha$，从而 $mf'=\alpha+cx/\alpha$，$mf=\alpha-cx/\alpha$．由此总有

$$\left(\alpha+\frac{cx}{\alpha}\right)^2+\left(\alpha-\frac{cx}{\alpha}\right)^2=2(x^2+y^2+c^2),$$

即

$$(\alpha^2-c^2)\left(\frac{x^2}{\alpha^2}-1\right)+y^2=0;$$

若 $\alpha=a$，得出的正是椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2-1=0$，这里 $b^2=a^2-c^2$．反过来，从 $(a^2-c^2)\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)+y^2=0$ 推得

$$(c^2x^2-a^2\alpha^2)(a^2-\alpha^2)=0,$$

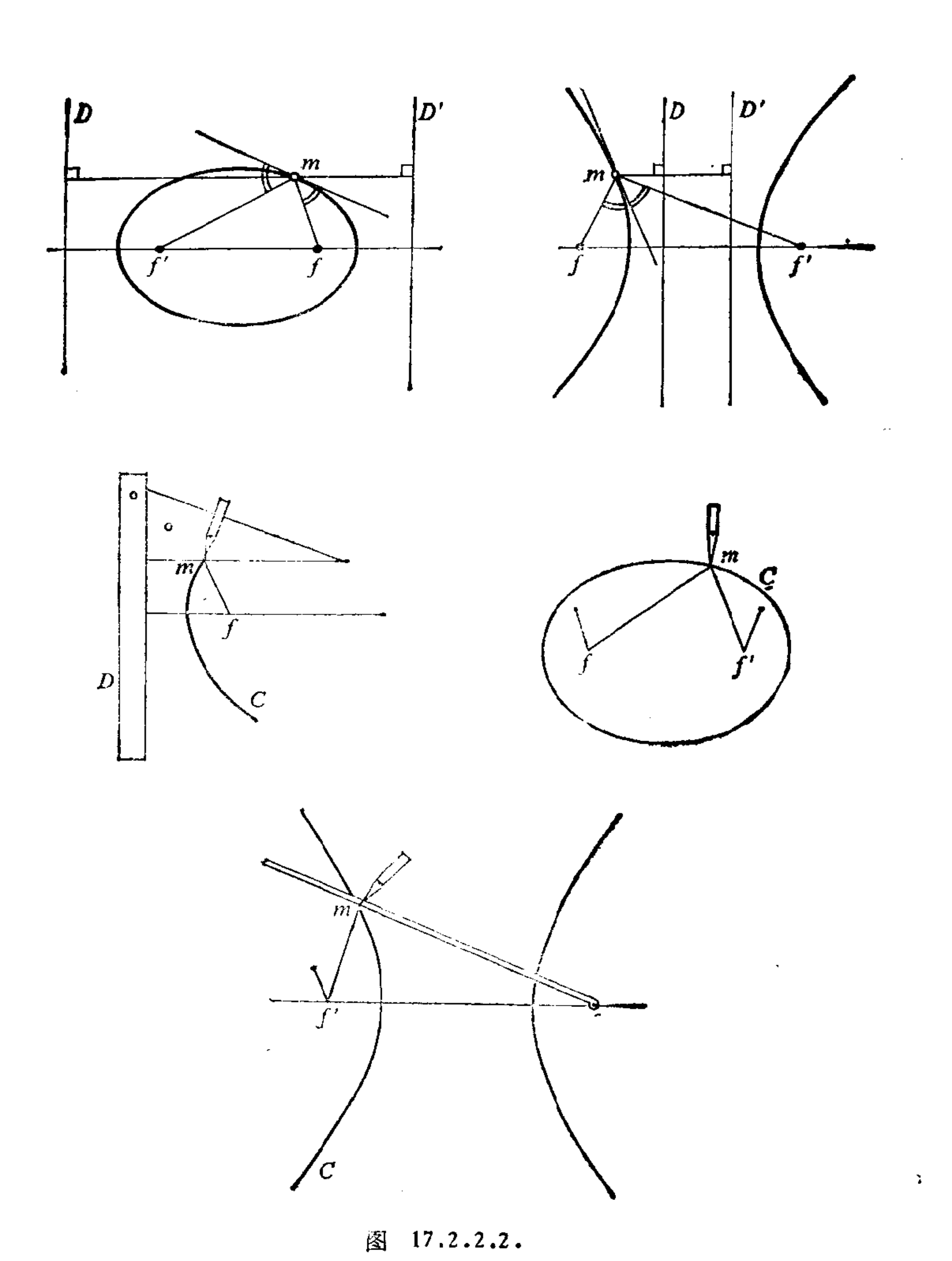


图 17.2.2.2.

因为 $a \neq \alpha$ 的情况是排除在外的，否则会得出 $x = a\alpha/c$，从而得出矛盾：

$$mf' - mf = 2a > ff'.$$

17.2.2.3 对应的凸区域（参见 17.1.4）分别对应于椭圆情形下的 $\{m; mf + mf' \leqslant 2a\}$ 和另两个区域 $\{m; mf' - mf \geqslant 2a\}$,

$\{m: mf - mf' \geqslant 2a\}$.

17.2.2.4 切线. 由 9.10 和 17.1.4 可知，C 在 m 处的切线，在双曲线的情形是 $\overrightarrow{mf}$，$\overrightarrow{mf'}$ 的内平分线，在椭圆的情形下是外平分线. 反过来，9.10 表明其切线具有以上性质的任何曲线，其象集必是一条以 f，f' 为焦点的圆锥曲线的象集；这又一次说明 17.2.2.2 是合理的. 也可参见 17.6.3.5.

17.2.2.5 用细线作图. 图 17.2.2.5 表明怎样用细线画出一个椭圆(花匠的椭圆)或一条双曲线；参见 17.7.1 中椭圆的另一种机械作图法. 对于三维空间中的二次曲面，在图 17.2.2.5 中可以看到一种用细线作图的方法，详见 [H-C] 的第 26 页或 15.7.16. 也可参见 17.6.4 中给出的参考书.

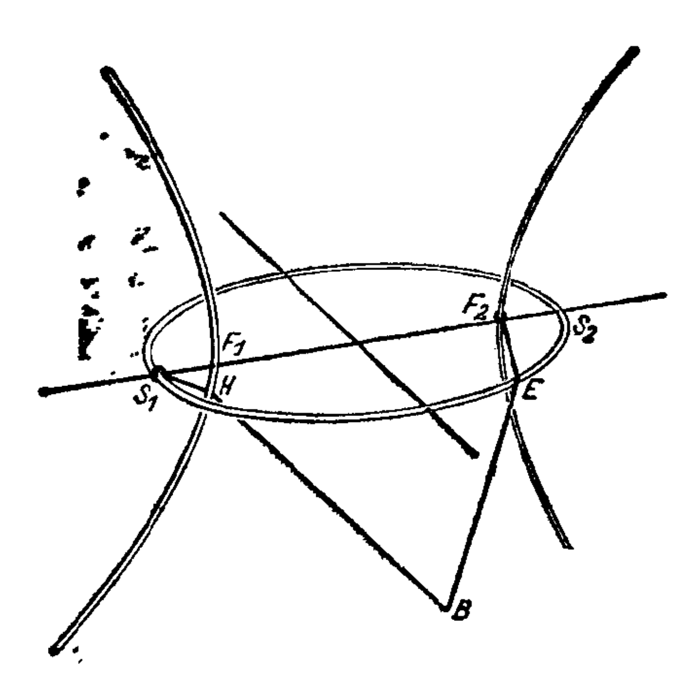


图 17.2.2.5.

17.2.2.6 焦点的极线. 由 17.2.2.4 和 17.2.2.2，再考虑到 $m' = \sigma_T m$ 与 f 关于 C 在 m 处切线 T 的对称性，我们知道 C 关于 f 的极线 (参见 9.6.8) 是与圆锥曲线 C 同心且与 C 双切于焦轴上的点的圆(称为**主圆**)；以上假定了 C 不是抛物线. 在抛物线的情形，利用 17.2.1.1 和 17.2.1.6 可证得 C 在 m 处的切线 T 是 mf 和过 m 平行于轴的直线的平分线；极线是与 C 切于顶点的直线.

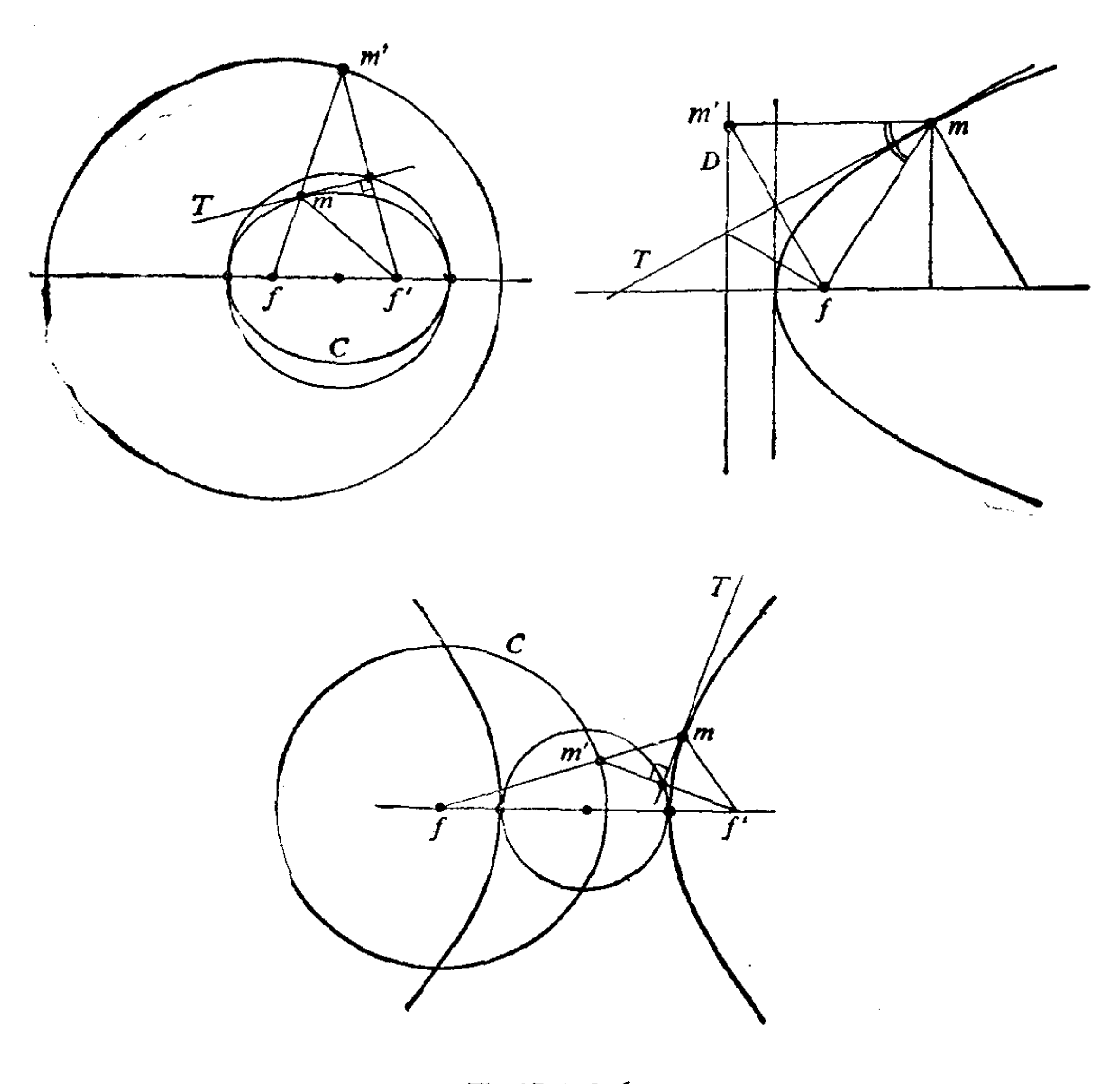


图 17.2.2.6.

17.3 度量性质：比利时人的陈述

很自然地，我们会想来证明，Apollonius 作为旋转圆锥面的截线所定义的圆锥曲线跟由单焦或双焦性质定义的圆锥曲线是可以等同起来的，其中后一种定义的方法是很初等的(我们是在略去所有的代数运算的意义上说的)。这正是比利时人 Dandelin 和 Quételet 根据下列图形所做的工作。

17.3.1 图 17.3.1 相应于双焦性质，图 17.3.2 相应于单焦性质。证明图 17.3.2 的关键的想法是：(i) 从同一点向一个球面所作的两

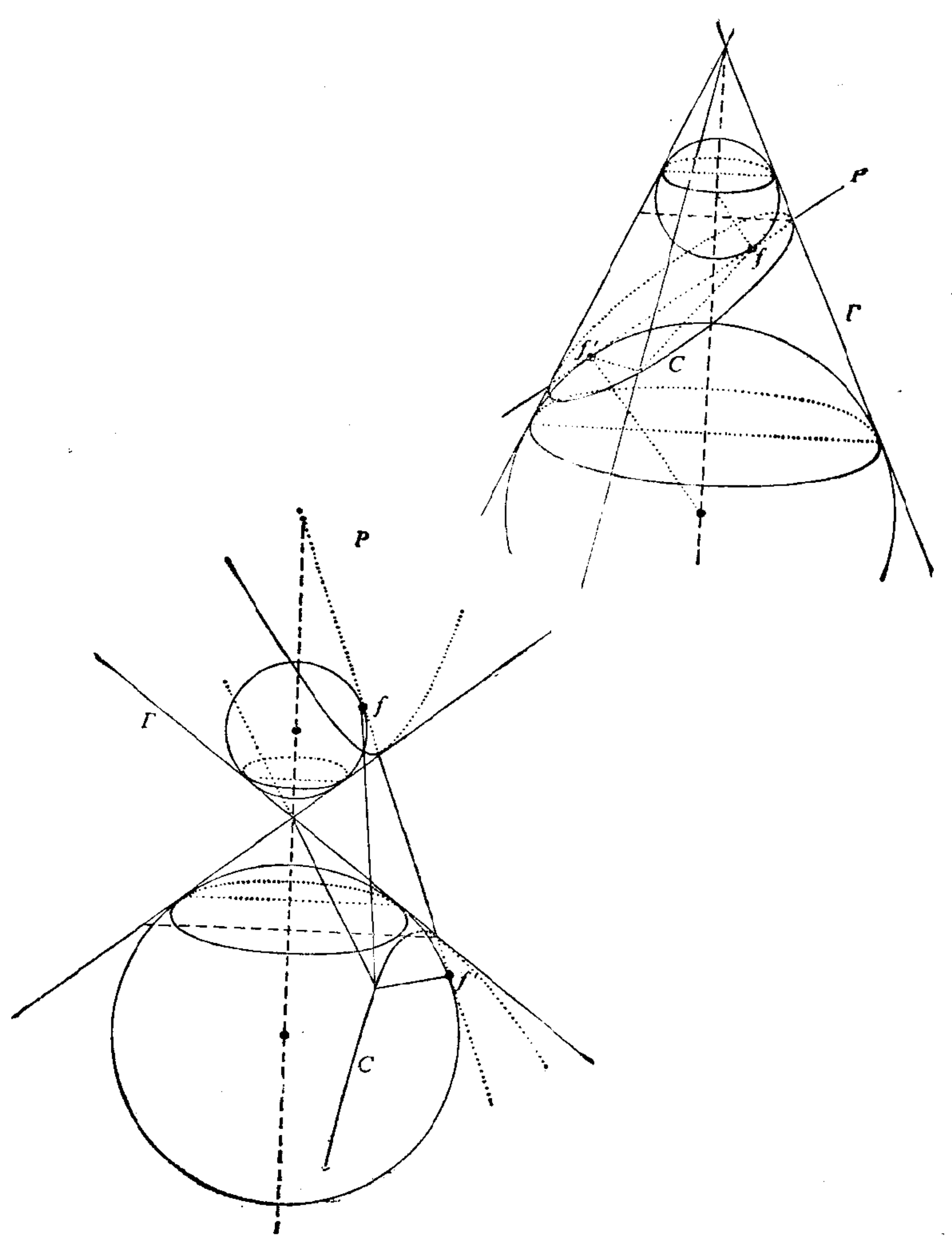


图 17.3.1.

个切线段长度相等；(ii) 至少存在一个球面 Σ 内接于给定的那个圆锥面 Γ 且与截面 P 相切；(iii)若记含有 Σ 与 Γ 的切圆的平面为 Q，则圆锥面的点以 $\dfrac{d(m,Q)}{d(m,\Sigma)}=$ 某个常数为特征；(iv) 若

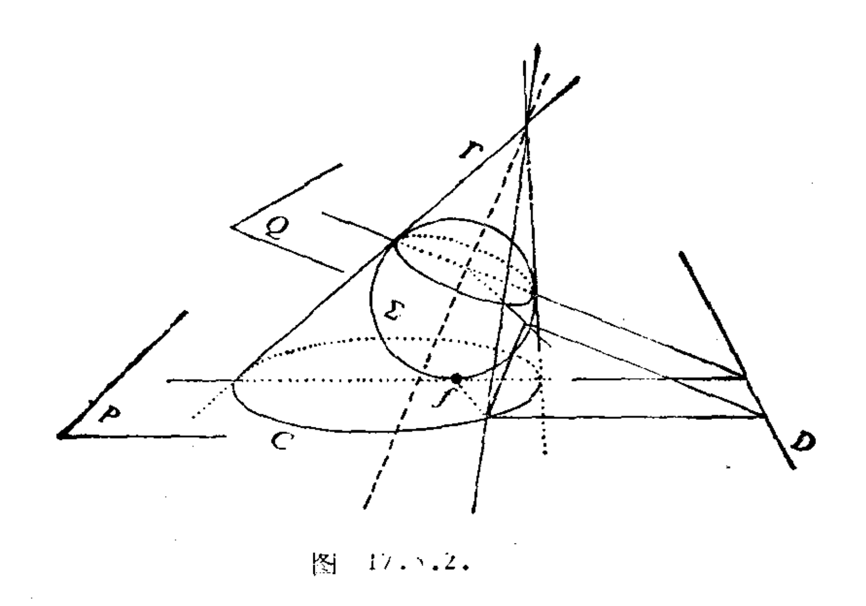


图 17.3.2.

$D = P \cap Q$，则 P 的点满足 $\dfrac{d(m, Q)}{d(m, D)}$ = 常数. 我们应注意 (iii) 的特征,否则我们就仅仅知道 $C = P \cap \Gamma$ 含于一条以 D 为对应于焦点 f (即 Σ 与 P 的切点)的准线的圆锥曲线之内. 读者在做练习时会推出所有这些结论，包括双焦的情形在内，或者可参见 [D-C1]，第 VIII 章. 在那里也会再次遇到切线的性质 17.2.1.6 和 17.2.2.4；也可参见 17.6.3.4.

17.4 度量性质：Plücker 的射影说法

17.4.1 从 8.8.7 和 9.5.5.2，我们知道可以用射影的方式来解释 X 的欧氏性质；但为此就须引进 X 的射影完备化空间 $\tilde{X}$，以及 $\tilde{X}$ 的复化空间 $\tilde{X}^C$. 最后,就有 X 的循环点 I，J.

根据 7.3，7.6，16.7 和 16.1.4，对任何一条有非空象集的正常圆锥曲线 α (或者说对任何一条这样的圆锥曲线的象集 C)，对应着唯一的一条 $\tilde{X}^C$ 中的射影圆锥曲线，记为 $\bar{\alpha}$，以及 $\tilde{X}^C$ 的一个子集,记为 $\bar{C}$，即 $\bar{\alpha}$ 的象集. 我们将在 $\tilde{X}^C$ 中系统地进行讨论，从而进一步研究欧氏圆锥曲线;虽然这样做似乎显得不太自然,而且不管怎么说似乎代价太大,但是我们会从中发现两个优点,正如在数学上把讨论范围拓广时常会遇到的情形一样：第一，对圆和圆锥

曲线的性质可作出深刻而统一的解释．第二，可以得出一些新的结论，其中有些是很难用初等的方法证明的．

17.4.2 作为圆锥曲线的圆

17.4.2.1 准则． 设 C 是一条正常圆锥曲线的非空象集；则 C 是圆的充要条件是 $I, J \in \overline{C}$（其实只要 $I \in \overline{C}$ 就够了，因为对 $\tilde{X}^C$ 的对合 σ（参见 7.5.1, 8.8.6.1），有 $\sigma(\overline{C}) = \overline{C}$, $\sigma(I) = J$）．更一般地，对 X 的圆锥曲线 α（不必正常或象集非空），$I \in \overline{\operatorname{im}(\alpha)}$ 等价于 α 的任一方程 q 能使 $\vec{\alpha} = k\|\cdot\|^2$，其中用到的是 $\vec{X}$ 的欧氏范数．这就是广义圆，我们在 20.1 中还会碰到．

17.4.2.2 可容已知角的弧． 上述讨论首先解释了 10.9.4，也即：若 a, b 是圆 C 的两点，则两条直线的有向角 $\widehat{xa, xb}$ 对 $x \in C$ 来说是常数，反之亦然．事实上，在 $\tilde{X}^C$ 中的 $\overline{C}$ 上，交比 $[xa, xb, xI, xJ]$ 是常数，从而根据 Laguerre 公式 8.8.7.4 即可得证．至于 $2\widehat{xa, xb} = \widehat{\overrightarrow{\omega a}, \overrightarrow{\omega b}}$，其中 ω 是 C 的中心，可由 16.8.6 推出．

17.4.2.3 应用：切距圆． 我们来讨论向圆锥曲线 C 所引的两条切线 ma, mb 相互正交的点 m 的集合．由 8.8.7.4 可知这等价于在 $\tilde{X}^C$ 中有

$$[ma, mb, mI, mJ] = -1;$$

根据 14.5.2.6 这又等价于 $mI \perp mJ$（在 $\tilde{X}^C$ 中对 $\overline{C}$ 而言）．再根据 16.2.7.1 这就等价于 m 属于 $\tilde{X}^C$ 中某一条过 I 和 J 的圆锥曲线 $\overline{S}$．这条圆锥曲线正常的充要条件是 IJ 不自共轭，也就是说 C 不是一条抛物线．回到 X 中，我们看到 m 应属于广义圆 $\overline{S} \cap X$，或当 C 是抛物线时它属于一条直线．得到的并不一定是整个圆，因为从 m 向 C 作的两条切线可能并不存在．完整的讨论是容易的；对椭圆，得到的是整个圆，半径为 $a^2 + b^2$，对抛物线，得到整条准线．对双曲线，当渐近线成钝角时得到空集，对等角双曲线得到一个点（中心），当渐近线成锐角时得到少去四点的一个圆．读者可以用初等的方法证明上述结论，例如可借助于 14.5.3 或完全几何地进行证明．

注意，对于退化为两个不同的点 a，b 的切圆锥曲线（参见 14.6.3.2），切距圆就是以 ab 为直径的圆.

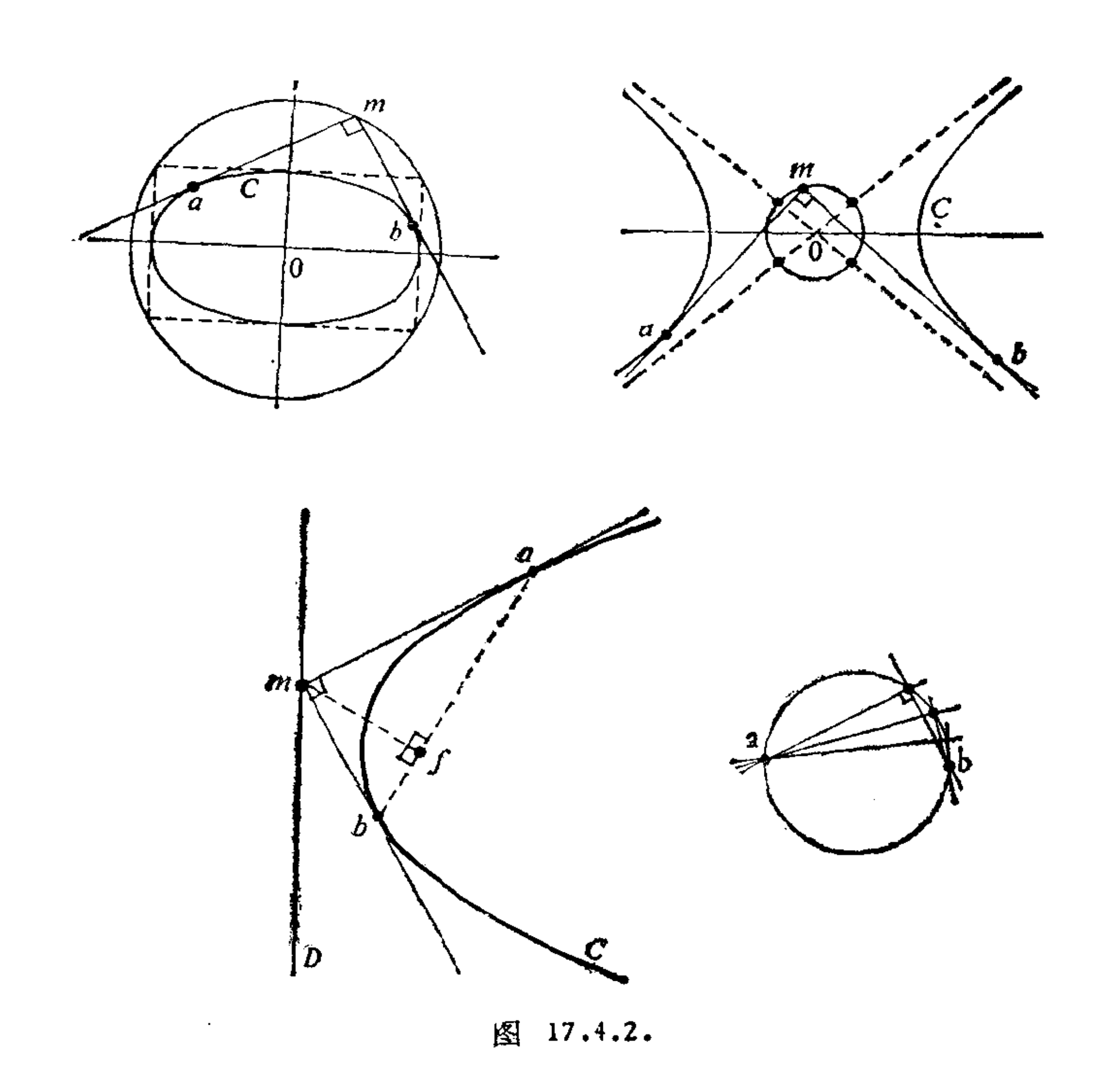


图 17.4.2.

17.4.3 圆锥曲线的焦点与循环点

17.4.3.1 我们在 17.2.1.6 中已经注意到，过 C 的一个焦点且关于 C 共轭的直线的对合是正交直线的对合；这对直线一方面根据与 14.5.2.6 对偶的结论是从 f 向 C 引的两条切线，另一方面根据 Laguerre 公式又是 fI 和 fJ（在 $\tilde{X}^C$ 中），因此实际上 fI，fJ 是与 C 相切的.

17.4.3.2 反过来，我们不管上述的那些结论，把 X 的一条圆锥曲线 C 的焦点就定义为使直线 fI 和 fJ 与 $\bar{C}$ 相切的点 f. 由于 $\sigma(I)=J$ 和 $\sigma(\bar{C})=\bar{C}$（参见 17.4.2.1），有三种可能性：$\bar{C}\ni I$，J 而 f 是唯一的，就是中心，或者 C 是抛物线而 f 也唯一，或者有

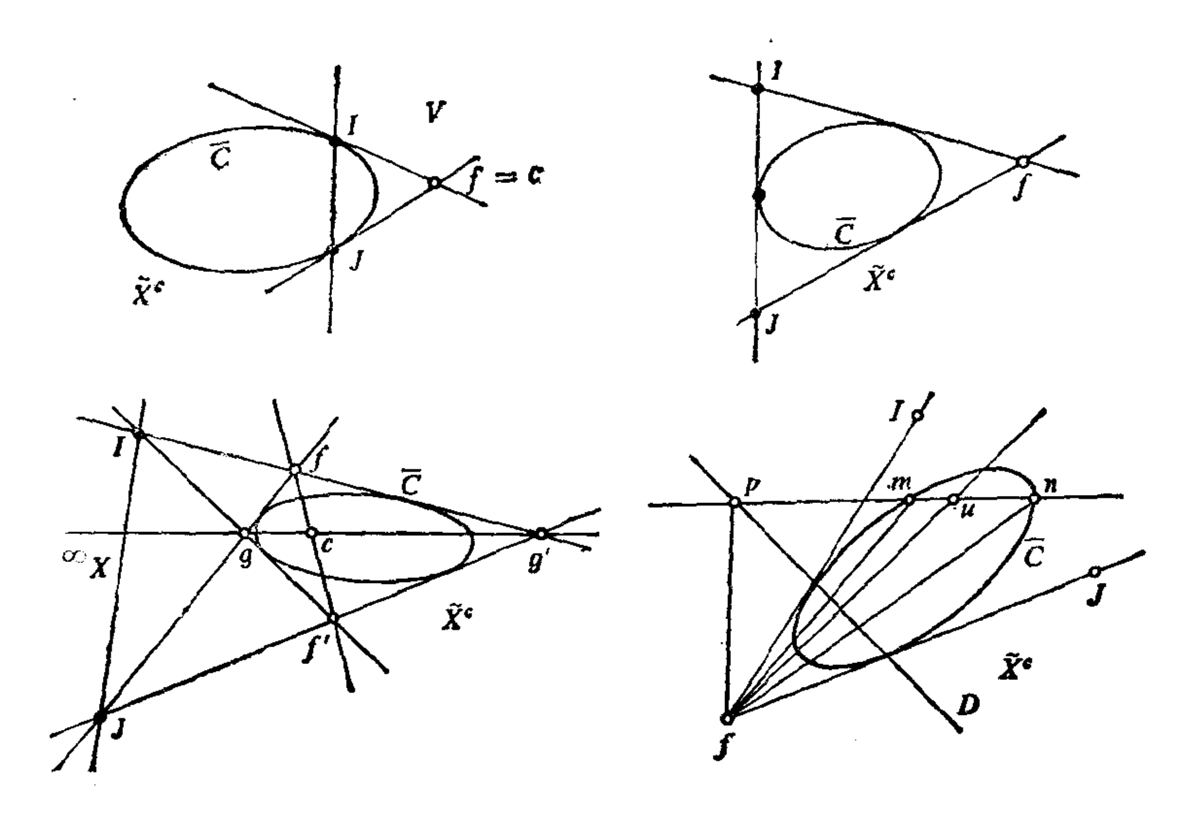


图 17.4.3.2.

四条从 I 和 J 向 $\bar{C}$ 引的切线，交于不同的四点；但这些切线的集合在对合 σ 下是稳定的，从而这些点中的两点，譬如说 f, f'，必满足 $\sigma(f)=f$，$\sigma(f')=f'$，因此 $f, f'\in X$，而另两点 g, g' 满足 $\sigma(g)=g'$，因此 $g, g'\notin X$ 但 $gg'\subset X$. 最后作配极变换即可表明，由于 $[I, J, ff'\cap IJ, gg'\cap IJ]=-1$，所以 ff'，gg' 是正交的，而且 $ff'\cap gg'$ 是 ∞_X 的极点，因而就是 C 的中心. 于是 ff'，gg' 是 C 的两条轴，这样我们就跟 17.2.1.4 中一致了.

17.4.3.3 不过，剩下还得说明 C 对一个焦点 f 及其极线 $D=f^{\perp}$ 满足 17.2.1.1 的度量定义. 若设 $m, n\in C$，$p=mn\cap D$（在 $\tilde{X}$ 中）；则因在 $\tilde{X}^C$ 中从 f 向 $\bar{C}$ 引的切线为 fI，fJ，由配极变换可知，若 u 是 p 关于 m 和 n 的调和共轭点，则 $[fI, fJ, fp, fu]=-1$. 因此（参见 8.8.7），在 X 中直线 fp 与 fu 是正交的，且 fp 是 fm，fn 的平分线；17.2.1.6 的讨论就表明了 $\dfrac{fm}{fn}=\dfrac{d(m, D)}{d(n, D)}$. 由于 m, n 是任取的，证得结论.

17.4.3.4 双焦性质 17.2.2.2 将在 17.6.3.5 中解释。

17.4.3.5 应用：Simson 直线和抛物线. 要说明的结论是：若一个三角形 $\{a, b, c\}$ 的三边都与一条抛物线相切，则这条抛物线的焦点 f 在 $\{a, b, c\}$ 的外接圆上． 对 $\tilde{X}^C$ 中六点 a, b, c, f, I, J 应用 16.5.5.3，17.4.2.1 和 17.4.3.2，即可直接推出这个结论．

现在根据 17.2.2.6，f 在三边 ab，bc，ca 上的投影是过 C 的顶点的切线上的三点，因而是共线的．反过来，如果这样三个点是共线的，我们就可以用焦点和顶点处的切线来决定一条抛物线．因此，上述结论和前一段的内容表明了，一点在 $\{a, b, c\}$ 的各边上

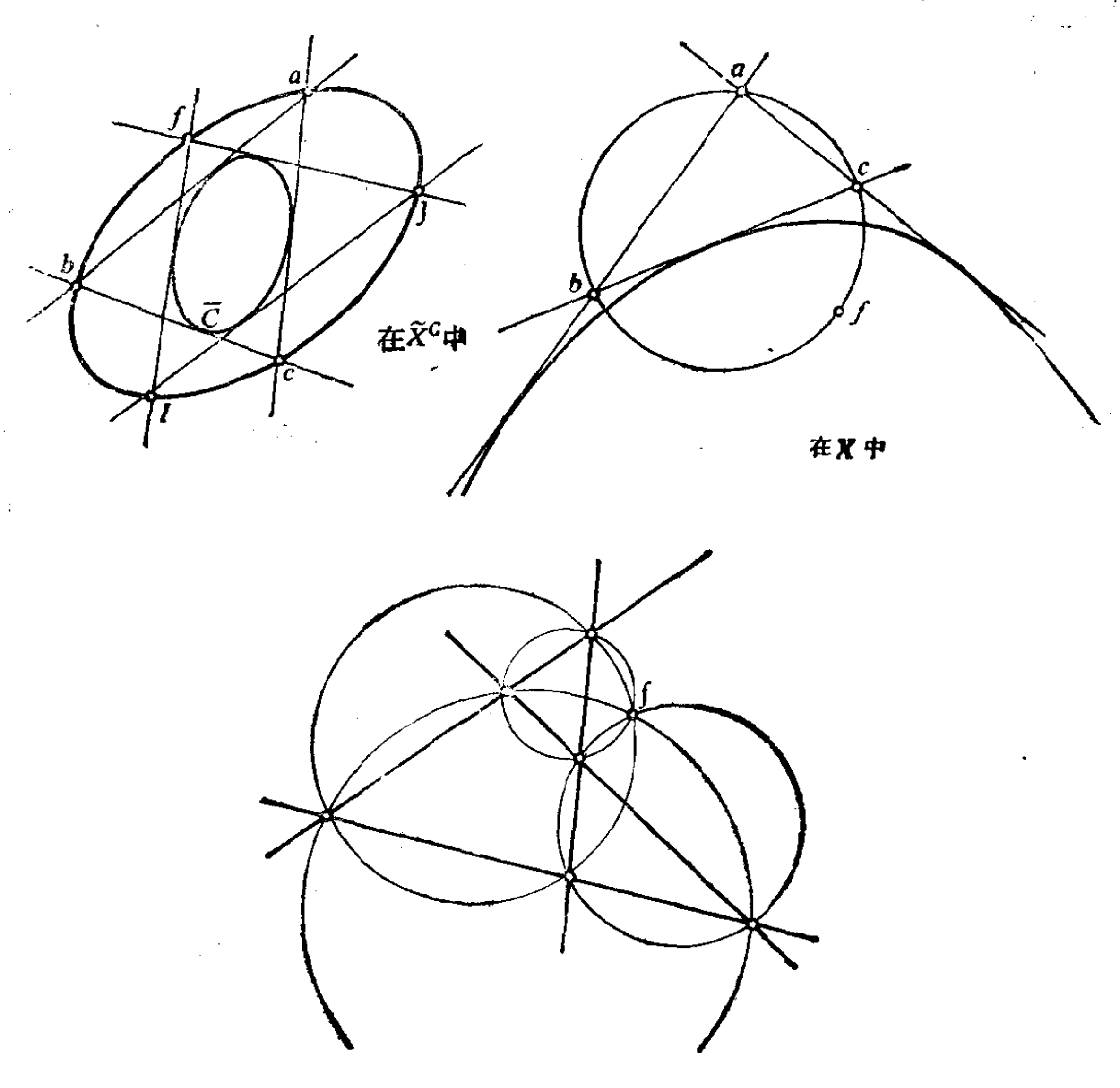


图 17.4.3.5.

的三个投影共线的充要条件是这三点在 $\{a, b, c\}$ 的外接圆上：这就是 10.4.5.4.

由此，根据 16.7.4 可得到一个推论：设平面上有四条直线；则其中每三条构成的三角形的外接圆是四圆共点的，交点是与这四条直线相切的抛物线的焦点.

17.4.3.6 焦点的实用找法. 见 17.9.24.

17.5 欧氏圆锥曲线束与循环点

17.5.1 我们把 $\tilde{X}$ 的非退化圆锥曲线束称为 X 的圆锥曲线束(参见 14.2.7.5)．我们要研究 X 的圆锥曲线的无穷远点，即束 $\mathscr{F}$ 在 ∞_X 上的迹；这里要用到 $\tilde{X}^C$ 的在 ∞_{X^C} 上的复化束 $\mathscr{F}^C$ (参见 16.5.2) 以便应用循环点．下面的内容，当仅涉及 $\alpha\in\mathscr{F}$ 的无穷远点时，可以用初等的方法从斜率和 16.7.1 的写法推出，读者不妨试一下．下面，一对正交直线也称为等轴双曲线.

17.5.2 假设 ∞_X 关于 $\mathscr{F}$ 是良好的(参见 16.5.4)，我们来看 $\mathscr{F}^C$ 在 ∞_{X^C} 上关于循环点 I, J 的对合 f 的情形：别忘记 $\sigma(I)=J$, $\sigma(J)=I$，还有，这些对合的偶关于 7.5 的对合 σ 来说应是稳定的(σ 不是 ∞_{X^C} 的对合！)．因此，只有三种可能情形：

情形 I: $f(I)=I, f(J)=J$;

情形 II: $f(I)=J$, $f(J)=I$;

情形 III: $\{f(I), f(J)\}\cap\{I, J\}=\phi$.

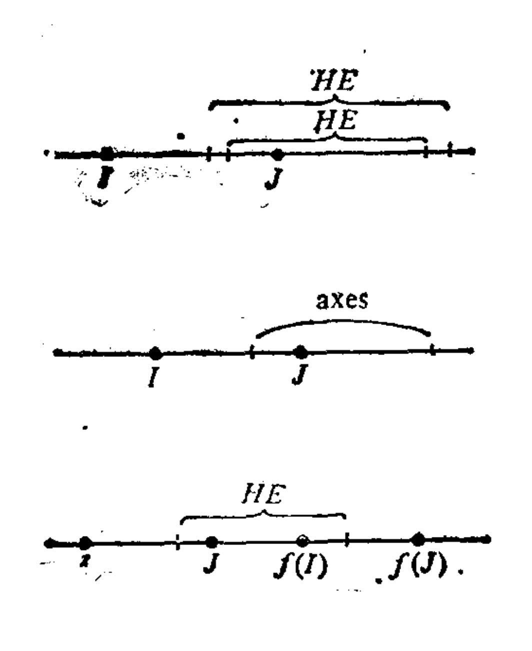
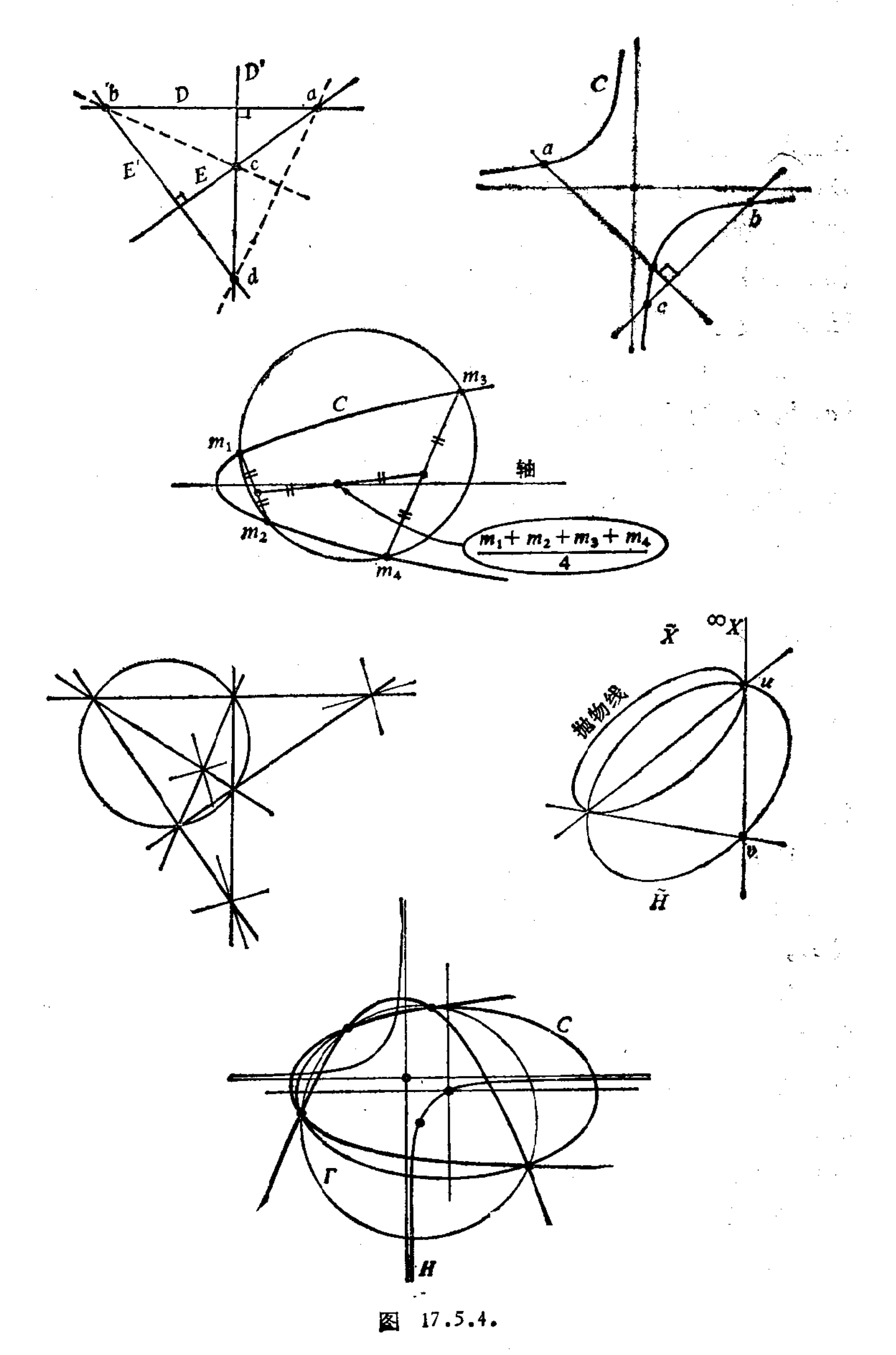


图 17.5.3.

回忆一下 6.7.2, 8.8.7, 8.7.7.5, 17.4.2 和 17.1.3，就可看到：

17.5.3 命题. 设 $\mathscr{F}$ 使 ∞_X 关于 $\mathscr{F}$ 是良好的．一般，束 $\mathscr{F}$ 只含一条等轴双曲线(情形 III)；若含有两条，则它们就是束 $\mathscr{F}$ (情



b
D
D'
a
E'
E
c
d
C
a
b
c
m_3
C
m_1
轴
m_2
m_4
$\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{4}$
$\tilde{X}$
∞X
u
抛物线
v
$\tilde{H}$
C
Γ
H

图 17.5.4.

形 I). $\mathscr{F}$ 含有一个广义圆的充要条件是 $\mathscr{F}$ 中两条圆锥曲线有相同的轴向(这时所有的圆锥曲线都有相同的轴向,情形 II).

17.5.4 在情形 I 的应用. 设有四条直线 D, D', E, E', $D\perp D'$, $E\perp E'$ (在欧氏基下); 则它们定义一个圆锥曲线束, 底的点为 $D\cap E=a$, $D\cap E'=b$, $D'\cap E=c$, $D'\cap E'=d$, 而其中所有的圆锥曲线都是等轴双曲线. 特别是, 由 17.5.3 可知直线对 $\{ad, bc\}$ 是由两条正交直线构成的; 我们这样就证明了三角形的三条高交于一点(参见 10.2.5).

相似的论证表明, 对等轴双曲线 C 上任意三点 $a, b, c\in C$, $\{a, b, c\}$ 的垂心也是 C 上一点.

如果对三角形 $\{a, b, c\}$ 及其垂心 d 应用 16.5.5.1, 就正好得到九点圆的结果(参见 10.11.3); 这个圆是包含 a, b, c, d 的等轴双曲线的中心的轨迹. 由 16.7.5 可知这个圆的中心如 10.11.3 所示.

17.5.5 在情形 II 的应用

17.5.5.1 设 $\{D, D'\}$ 和 $\{E, E'\}$ 是两对直线; 四点 $D\cap E$, $D\cap E'$, $D'\cap E$, $D'\cap E'$ 是上循环点的充要条件是 $\{D, D'\}$, $\{E, E'\}$ 有相同的平分线方向. 这时, 第三对直线也有相同的平分线方向.

17.5.5.2 设 $\mathscr{F}$ 是 X 的圆锥曲线束, ∞_X 关于 $\mathscr{F}$ 是良好的, 且包含一个圆; 则 $\mathscr{F}$ 中圆锥曲线的中心的轨迹是一条等轴双曲线 H, 其渐近线为 $\mathscr{F}$ 中两条抛物线的轴.

除了关于渐近线这一点外, 它们都可由 16.5.5.1 推出; 为此, 将 ∞_X 上对应于公共轴向的两点记为 u, v. 于是, 根据 16.5.3.3 的构造可知, 当 $m\in H$ 时, 直线 um, vm 是关于 $\mathscr{F}$ 中以 m 为中心的圆锥曲线共轭的; 当 m 在 v 上时, 这就是说 H 在 u 的切线是与 ∞_X 在 u 相切的抛物线的轴.

17.5.5.3 X 的两条抛物线 C, C' 构成一个满束 $\mathscr{F}$ 时 (参见 16.5.1), 它们的轴相互垂直的充要条件是 $\mathscr{F}$ 含有一个圆; 另外, 这两条抛物线的轴经过重心

$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k}\omega_i m_i$，这里 $C\square C' = \{(m_i, \omega_i)_{i=1,\cdots,k}\}$。

这可由 17.5.5.2 和 16.7.5 推出；由此立即可导出经过四个不同的上循环点的抛物线的构造。

重心的性质也可以用初等方法来证明，或者是根据 17.5.5.1

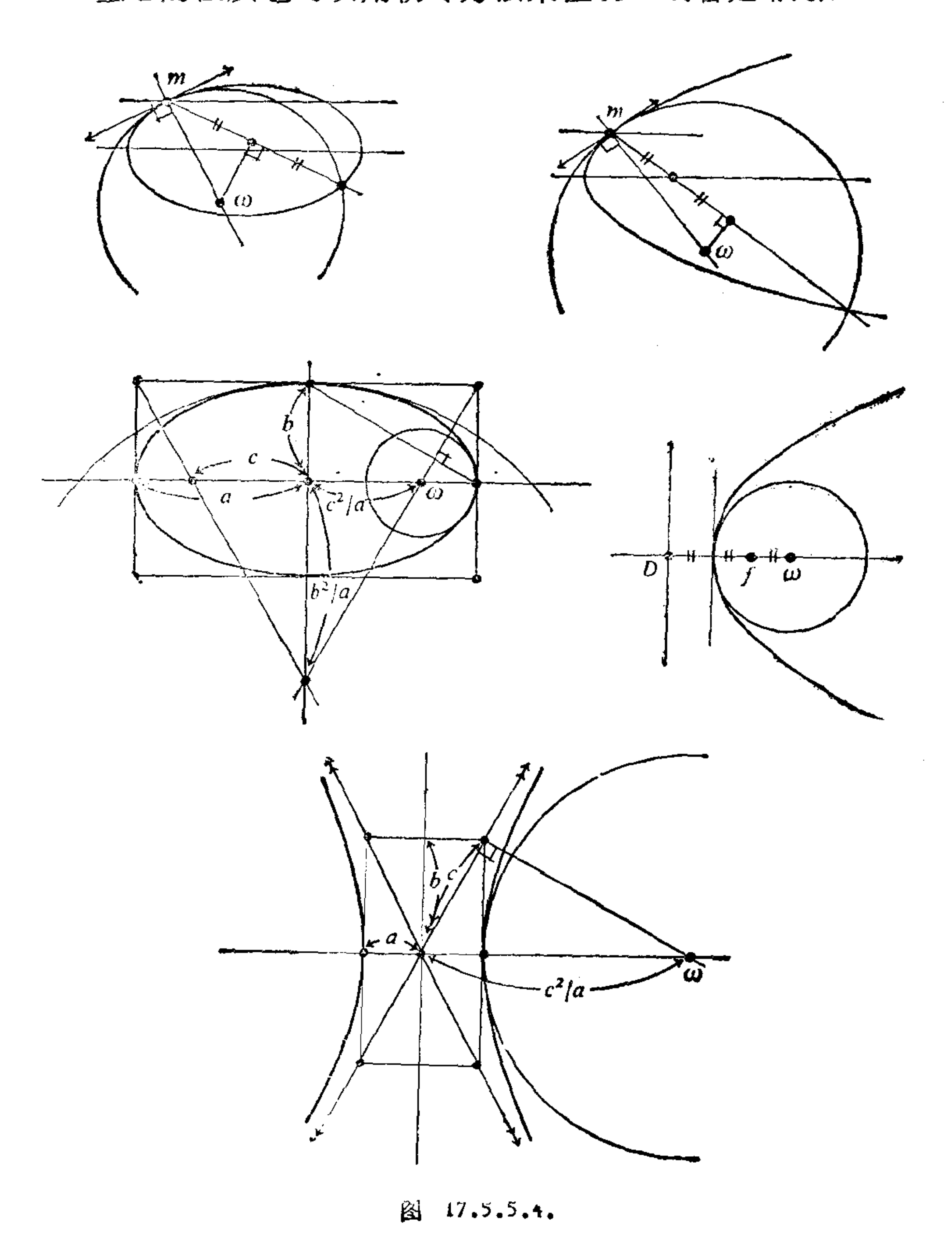


图 17.5.5.4.

对直径进行讨论，或者是在坐标系下讨论抛物线 $y^2=2px$，并利用一个四次方程的诸根之和公式。

17.5.5.4 密切圆. 设 C 是一条正常圆锥曲线的非空象集，$m\in C$，则唯一存在一个圆，记为 $\Gamma_m C$，在 16.4.5 的意义下与 C 密切于 m 处。它也是微分几何意义下的密切圆（参见 [B-G]，8.4.15）。称之为 C 在 m 处的密切圆. 若 m 不是顶点，$\Gamma_m C$ 的特征是：与 C 相切于 m 而且经过另一点 m'，而且过 m 点、与 C 在 m 处的切线 $T_m C$ 所夹角的平分线平行于轴的直线 D，就在 m' 处与 C 相交；或者是：与 C 在 m 处相切而且在 m 的邻域里局部地穿过 C。若 m 是一个顶点，则 $\Gamma_m C$ 自然地与 C 在 m 处超切且 $C\cap\Gamma_m C=\{m\}$.

这可由 17.5.3 和 16.4.10 推出，说明超切时要用到对称性，说明穿过时要用到连续性.

当 m 不是顶点时，上述特征已可从几何上确定圆 $\Gamma_m C$；在抛物线的情形下，17.5.5.3 表明轴上有一点 $\dfrac{3m+m'}{4}$，这样甚至不用求出 m' 就可立即作出 $\Gamma_m C$. 但在 m 是顶点的情形，必须利用 16.4.7.3 的准则，说明

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}-1+k(x-a)^2$$

是一个圆的方程，由它可得出与 C 在 $(a,0)$ 超切的圆；这样我们就得到了图中作出的那些圆. 在 17.7.4 中还会给出 C 上一点处曲率中心 ω 的另一种作法.

17.5.5.5 一个力学的例子. 考虑在一个固定的竖直平面上运动的挂在软绳上的单摆，或者某圆内部的一个运动质点——两种情形的结论是一样的；我们在圆的最低点将该质点抛出，问：应用多大的初速度抛出，才能使它在到达最高点之前脱离圆周，而且自由下落的轨线正好通过出发点.

解决这个问题，要注意到自由下落的轨线是轴线竖直的抛物线，而且在质点脱离圆周的那一点处，这条抛物线与圆是密切

的，这是因为速度和加速度都应该是相等的．而 17.5.5.4 表明抛物线与圆的另一个交点是容易找出的．详细地说是这样：设 ω 是圆 Γ 的中心，a 是最低点，m 是脱离点，m' 是在 m 与 Γ 密切且轴竖直的这条抛物线与 Γ 的另一交点．由 17.5.5.4 和 8.7.2.4 推得 $\widehat{\overrightarrow{\omega a},\overrightarrow{\omega m'}}=-3\widehat{\overrightarrow{\omega a},\overrightarrow{\omega m}}$．轨线经过 a 的条件就是 $m'=a$，即 $3(\widehat{\overrightarrow{\omega a},\overrightarrow{\omega m}})=0$，由此即得 $\widehat{\overrightarrow{\omega a},\overrightarrow{\omega m}}=0$ 或 $2\pi/3$ 或 $4\pi/3$.

参见 17.9.2 中其它相仿的问题．

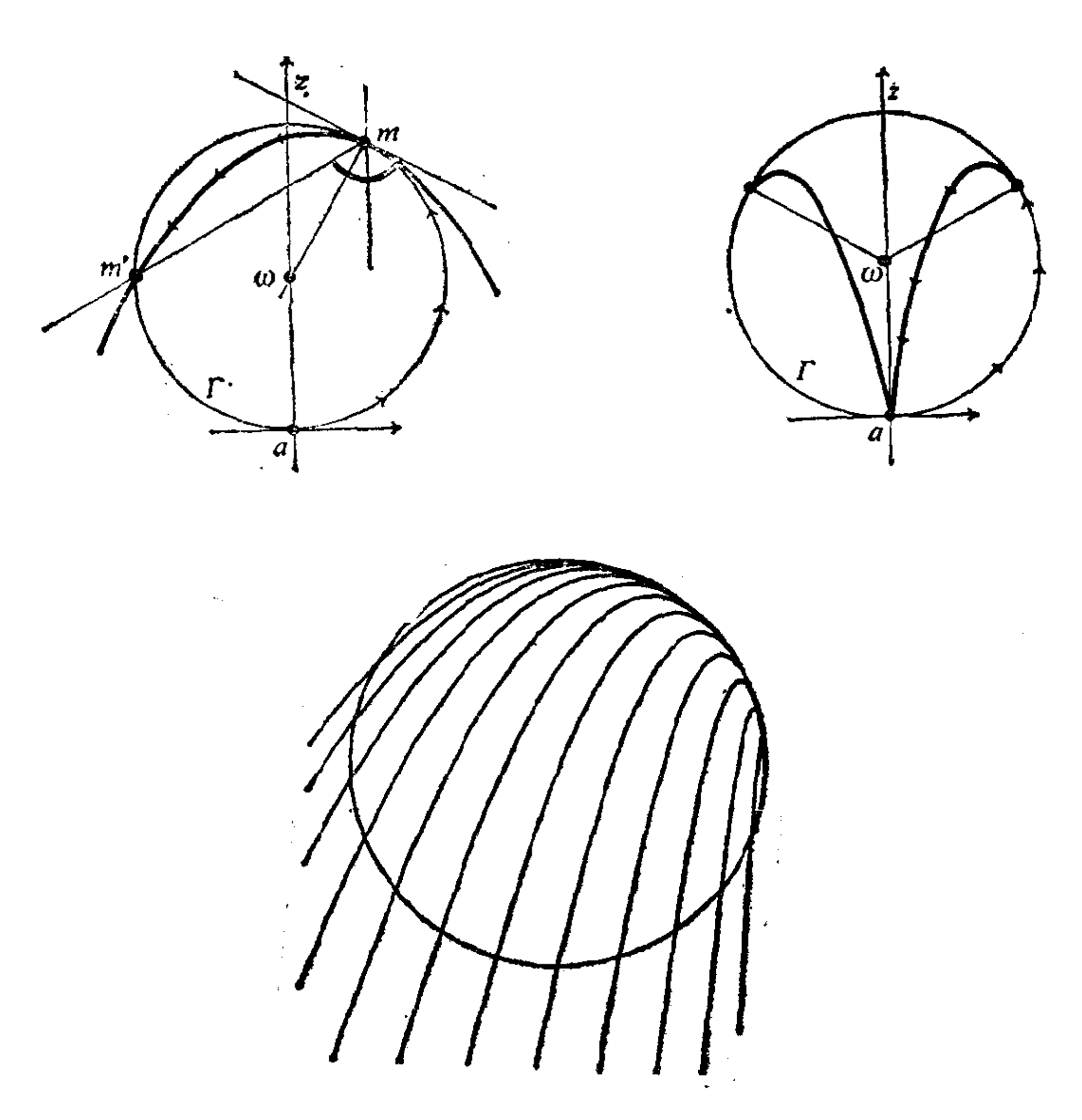


图 17.5.5.5.

17.5.5.6 由一点向圆锥曲线作的法线，Apollonius 双曲线． 设 C 是一条非空正常曲线，$a\in X$，则存在一至四条经过

a 的 C 的法线．这些法线的垂足就是 $C\cap A_aC$ 的点，这里 A_aC 是由 a 和 C 确定的一条等轴双曲线，称为 C 相对于 a 的 Apollonius 双曲线． 双曲线 A_aC 是由下列性质几何地确定的：其渐近线平行于 C 的轴，它在 C 不是抛物线时含有 C 的中心 a（在抛物线的情形，它的一条渐近线是 C 的轴），它的中心是 $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k}\omega_i m_i$，其中取了 Γ 是任一与 C 交于 $C\square\Gamma=\{(m_i,\omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}$ 的以 a 为中心的圆，最后它包含 a 关于 C 的极线 $a^{\perp}$ 上的两点 u, v 并使 au, av 正交（因而，若 a 在 C 的外部，则直线 au, av 是由 a 向 C 作的切线的平分线）．

首先我们注意到，由 C 和一个以 a 为中心的广义圆 Γ 所定义的束 $\mathscr{F}$ 中的圆锥曲线的中心的轨迹只与 a 和 C 有关；事实上 16.5.3.3 表明，m 是 $\mathscr{F}$ 中一条圆锥曲线的中心的充要条件是它关于 C 和 Γ 的极线平行． 但一点 m 关于以 a 为中心的圆 Γ 的极线，其方向是跟 am 正交的，而 am 的方向是与 Γ 无关而仅与 a 有

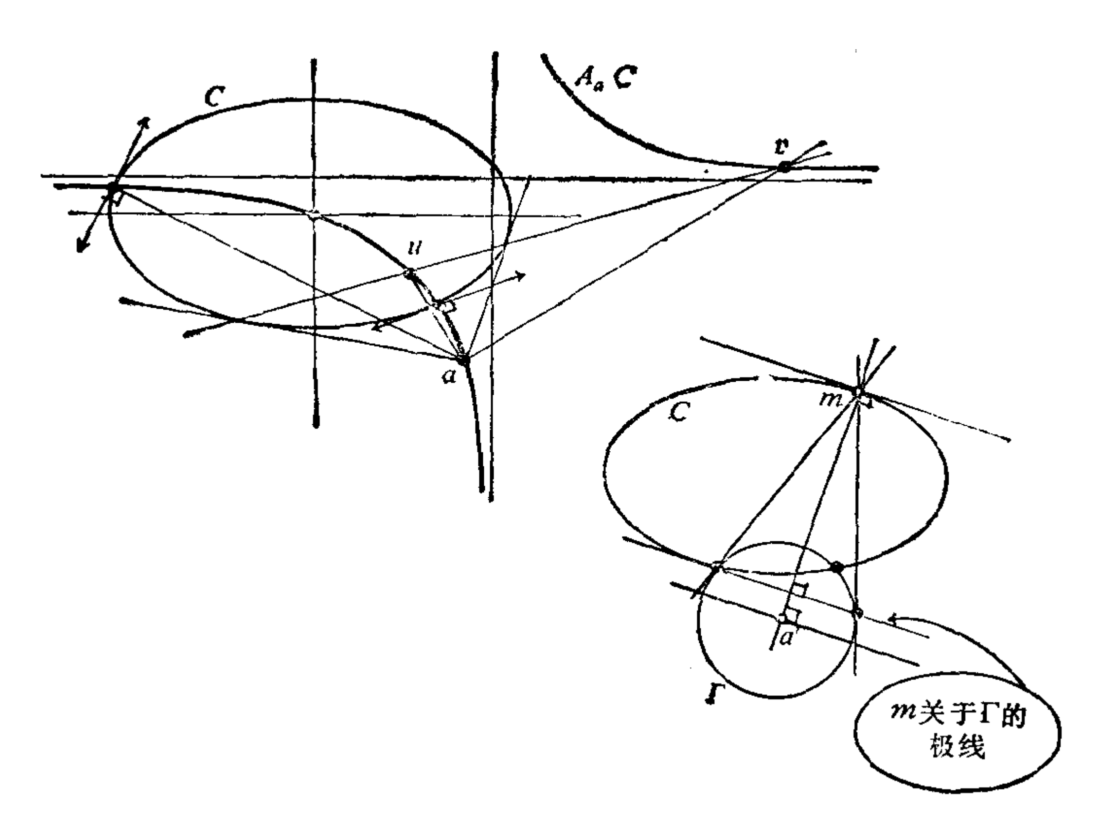


图 17.5.5.6.

关的。

现在我们对以 a 为中心的任一圆锥曲线 Γ，例如象集化为 a，方程为 $d^2(\cdot, a)=0$ 的退化圆锥曲线，来应用 17.5.5.2 和 17.5.5.3 作出一条双曲线 A_aC，即 $\mathscr{F}$ 中圆锥曲线的中心的轨迹；剩下要说明的是对一点 $m\in C$，直线 am 垂直于 C 在 m 的切线 T_mC 的充要条件是 $m\in A_aC$。为此，只要用到前一段的结论就可以了：C 在 m 处的切线是 m 关于 C 的极线，它平行于 m 关于 Γ 的极线的充要条件是在欧氏空间意义下 $am\perp T_mC$！

建议读者就各种不同的 a, C 作出 Apollonius 双曲线；也可参见 17.9，18.2. 注意一个很有趣的结论：一个中心固定的变圆与一条固定圆锥曲线 C 交于四个不同的点时，这四点的重心是不变的。关于法线条数与 a 的位置的关系，我们还没进行讨论；那是 17.7.4 的内容。

17.6 圆锥曲线的切束，共焦圆锥曲线

我们要系统地应用 16.5.6.3，现在其中的 $\mathscr{F}^*$ 是一个 X 的切束，根据定义也就是一个 $\tilde{X}$ 的切束。我们也引进 $\mathscr{F}^{*C}$，即切束 $\mathscr{F}^*$ 在 $\tilde{X}^C$ 中的复化束，以便利用 X 的循环点 I, J。

17.6.1 切束的切距圆. 设 $\mathscr{F}^*$ 是一个切束，我们将它复化为 $\mathscr{F}^{*C}$；设两条圆锥曲线 $\alpha^*, \beta^*\in\mathscr{F}^*$ 的切距圆为 Γ, Σ，则 $\bar{\Gamma}, \bar{\Sigma}$ 是 $\tilde{X}^C$ 中两条圆锥曲线；设 $m\in\Gamma\cap\Sigma$；从 m 向 $\mathscr{F}^{*C}$ 中圆锥曲线作的切线构成 m^* 的一个对合(参见16.5.6.3)，它与 $\bar{\Gamma}, \bar{\Sigma}$ 相应的两条直线是关于 $\{mI, mJ\}$ 调和共轭的。因此 $\mathscr{F}^*$ 中圆锥曲线的切距圆 Θ 是使 $m\in\bar{\Theta}$ 的；Θ 全体构成 $\tilde{X}^C$ 的一个圆锥曲线束，因此 Θ 全体构成 10.10 意义下的 X 的一个圆束.

17.6.2 应用

17.6.2.1 若 a, b, c, d, e, f 是完全四边形中三对相对的顶点，则以 $\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}$ 为直径的三个圆属于同一个圆

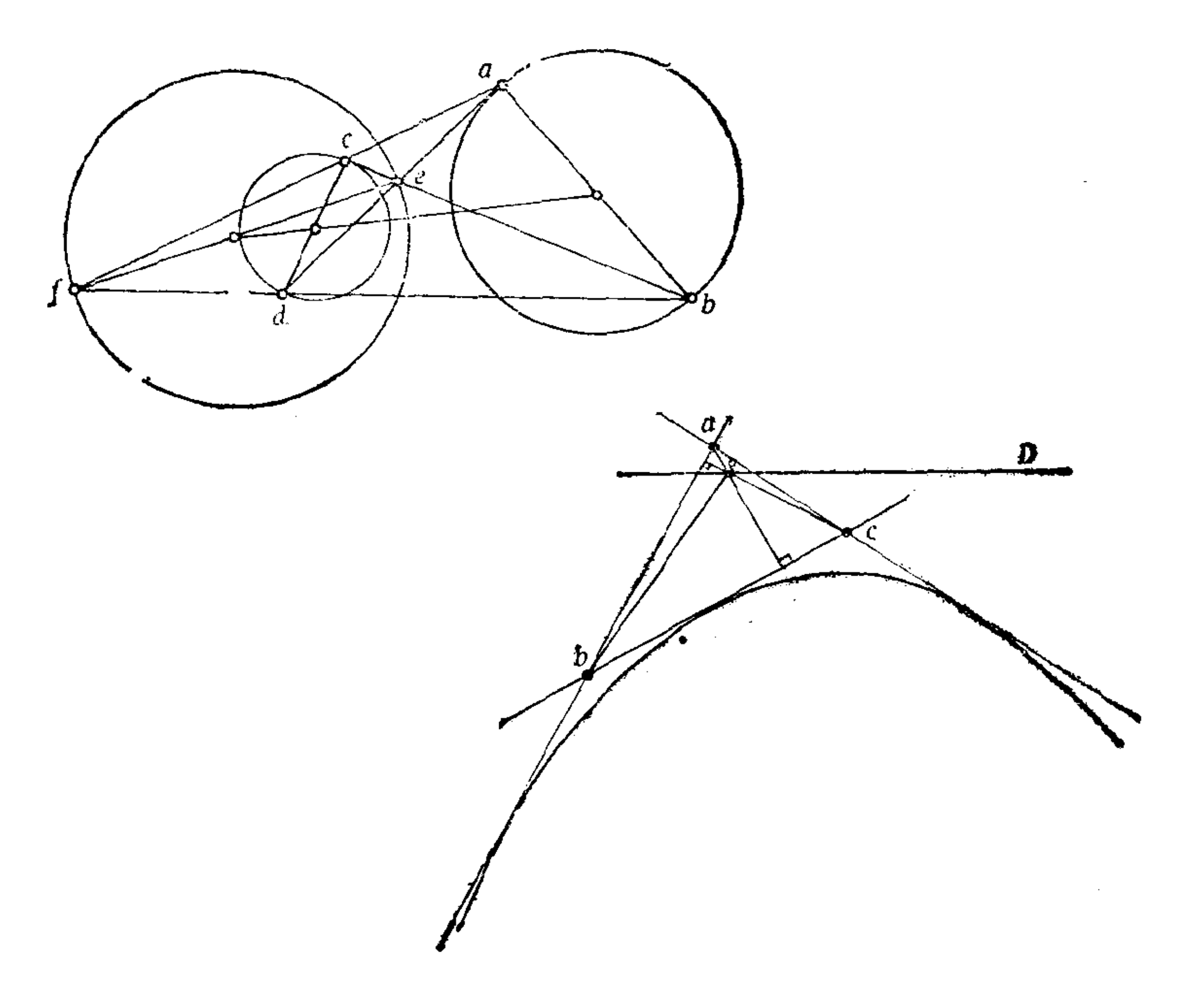


图 17.6.2.

束．特别，$\frac{a+b}{2}$，$\frac{c+d}{2}$，$\frac{e+f}{2}$共线．

对跟四条直线 ac，cb，bd，da 相切的圆锥曲线的切束应用 17.6.1 和 17.4.2.3，即可得证．

17.6.2.2 我们对X中与给定的三角形的三边 ab，bc，ca 以及无穷远直线 ∞_X 相切的圆锥曲线——它们都是抛物线——的切束应用 17.6.1．圆锥曲线的切距圆在这儿都是直线，即这些抛物线的准线，但对退化为点 a 与 $bc\cap\infty_X$ 的圆锥曲线，这是过 a 点正交于 bc 的直线．这样就又证明了 $\{a, b, c\}$ 的三条高是共点的，但我们看到，任一跟 $\{a, b, c\}$ 的三边相切的抛物线的准线经过 $\{a, b, c\}$ 的垂心．一个推论是：给定四条直线中每三条所构成的三角形的垂心是四点共线的(位于跟这四条直线相切的抛物线的准线上，参见 16.7.4 和 17.4.3.5)．另一个推论是：若 f 是

$\{a, b, c\}$ 的外接圆上一点，f 关于 $\{a, b, c\}$ 三边的对称点是共线的，位于过 $\{a, b, c\}$ 的垂心的一条直线(称为象点直线，参见 10.13.16) 上.

17.6.3 共焦圆锥曲线

17.6.3.1 具有相同的两个焦点的两条圆锥曲线，称为共焦圆锥曲线；当 f, f' 是 X 上给定的两个不同的点时，以 f 和 f' 为焦点的圆锥曲线全体构成一个切束 $\mathscr{F}^*$. 为说明这一点，我们在 $\tilde{X}^C$ 中进行考察；由 17.4.3 可知，圆锥曲线 $C \in \mathscr{F}^*$ 的充要条件是 $\bar{C}$ 属于 $\tilde{X}^C$ 中跟四条直线 $fI, fJ, f'I, f'J$ 相切的圆锥曲线的切束，而且 $\mathscr{F}^*$ 作为这个切束在 X 上的限制，也是一个切束.

17.6.3.2 可以用初等方法通过计算来证明：若 $f=(c, 0)$，$f'=(-c, 0)$，则所考虑的圆锥曲线方程为：

17.6.3.3

$$\frac{x^2}{c^2+\lambda}+\frac{y^2}{\lambda}-1=0,\ \lambda \in]-c^2, 0[\cup]0, +\infty[.$$

切线方程可通过下列矩阵得出：

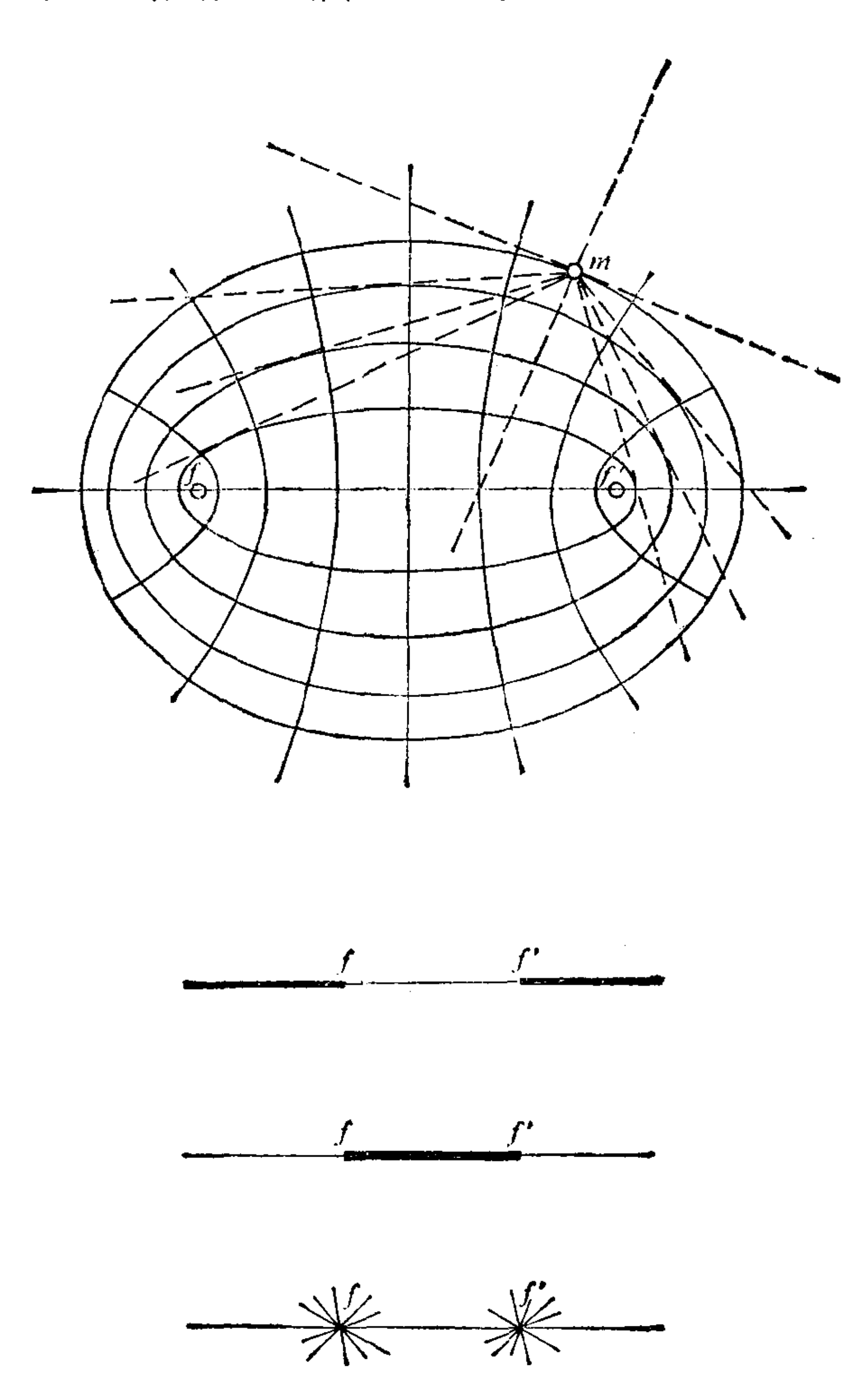
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c^2+\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c^2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

它关于 λ 是线性的(参见 14.6.1 和 15.1.6). 我们注意到，当 λ 趋于零时，$\lambda^+ \to 0$ 和 $\lambda^- \to 0$ 的极限曲线是不同的，从而切线的极限是退化为两点 f, f' 的圆锥曲线(参见 14.6.3). 但是在 16.5.6.2 的意义下，$\lambda \to 0$ 的公共极限是二重直线 $y=0$，即横坐标轴.

17.6.3.4 **切线.** 设 $\mathscr{F}^*$ 是以 f, f' 为焦点的共焦圆锥曲线束，$m \in X$，$m \notin ff'$. 由 16.5.6.3 可知，从 m 向 $\mathscr{F}^*$ 的圆锥曲线所作的切线构成 m^* 的一个对合，它的二重射线是 $\mathscr{F}^*$ 中经过 m 的圆锥曲线在 m 的切线；而这个对合含有偶 $\{mf, mf'\}$，因而在 $\tilde{X}^C$ 中含有偶 $\{mI, mJ\}$. 因此在 X 中存在二重射线，就是直线 mf 和 mf' 的平分线(应用 8.7.7.5，8.8.7 和 6.7.4). 结果，总存在

$\mathscr{F}^*$中两条过m的圆锥曲线，其中一条与$\{\overrightarrow{mf},\ \overrightarrow{mf'}\}$的内平分线相切(这是一条双曲线)，另一条与外平分线相切(是一个椭圆).

17.6.3.5 必须注意，我们在这儿没有用到 17.2.2.4；相反地，从 17.4.3 以及一条射影圆锥曲线出发，上面的讨论表明了，以f，f'



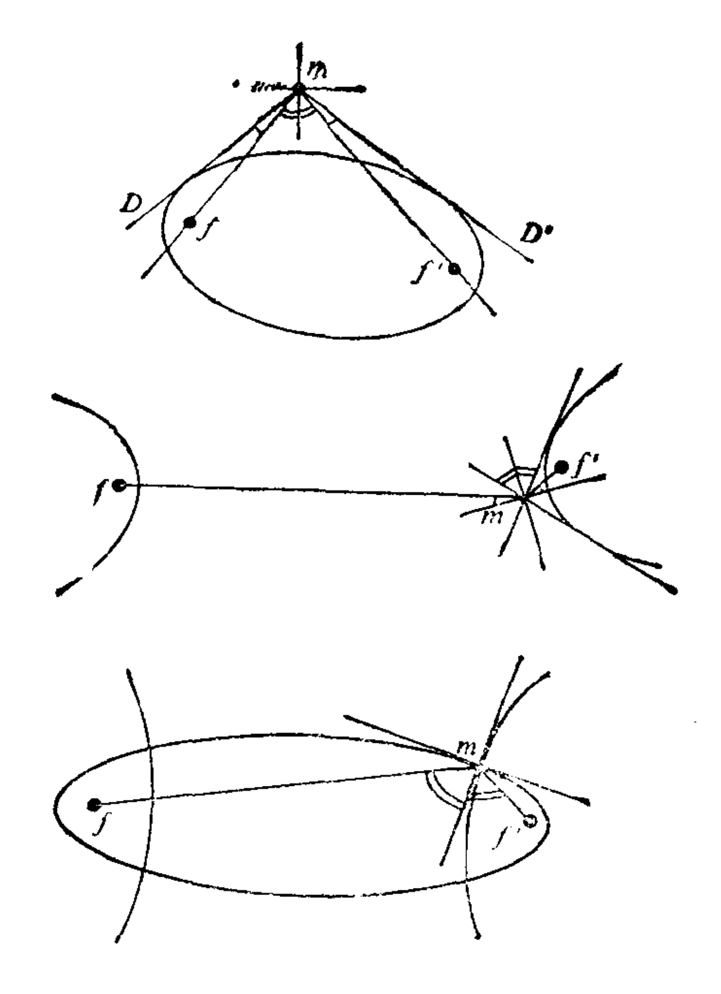


图 17.6.3.3.

为焦点的圆锥曲线的切线是 $\{mf, mf'\}$ 的平分线.应用15.4.5和9.10.1，我们就可得出 17.2.2.2 的一个射影的证明.

17.6.3.6 Poncelet 定理. 上述的 m^*的对合也表明，若 D, D' 是从 m 向焦点为 f, f' 的圆锥曲线 C 作的两条切线，则 $\{mf, mf'\}$和$\{D, D'\}$有相同的平分线;而且,这些平分线就是 $\mathscr{F}^*$ 中过 m 的圆锥曲线的切线．这个结论称为“Poncelet 第二小定理”(参见 17.2.1.6).

17.6.4 Graves 改进园丁的方法. 这是指 Graves 的一个工作，他把 17.2.2.5 的内容深化如下：设给定一个椭圆 C 和一条长度严格大于 C 的长度的封闭细线，则一个将细线沿 C 绷紧的浮针的轨迹是一个跟 C 共焦的椭圆 C'.

设 m 是浮针的一个位置，C' 是过 m 的跟 C 共焦的椭圆（参见

17.6.3.4)；则由 9.10.4 和 17.6.3 可知 C' 上每点都是浮针的位置．剩下只要说明，除了 C' 以外，浮针不会有其它的位置；但在 C 的每条切线上，恰有两点处浮针是能绷紧细线的（例如可由连续性来说明）；而 T 与 C' 交于两点（参见 14.1.3.4）．这种做法可推广到二次曲面，参见［GE］，［SD1］和［SD2］．

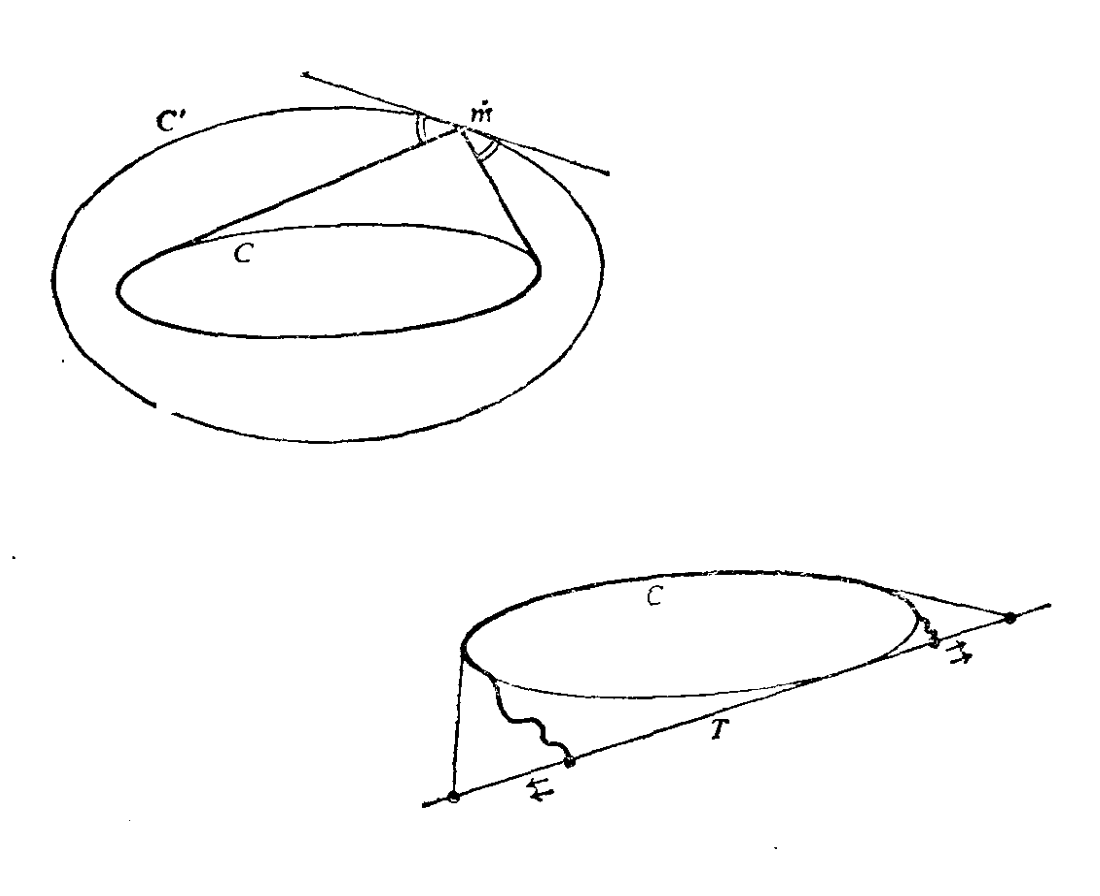


图 17.6.4.

17.6.5 Chasles 对 Poncelet 定理所作的解释：椭圆的极大周长内接多边形． 这是指 Chasles 关于 16.6.11 的共焦椭圆所作的另一种阐述；但它仅仅是 16.6.11 的一种解释，即使在这种特殊情形下也算不得一种证明．

17.6.6 定理． 设 C 是椭圆，n 是任一大于或等于 3 的整数．在具有不同的 n 个顶点、内接于 C 的凸多边形中，有一些是具有极大周长的；事实上这样的多边形有无穷多个，也就是说一个这种极大周长多边形（简称为 PPM）有一个顶点可以是 C 上任意一点．而且，所有这些 PPM 的边都跟同一个和 C 共焦的椭圆 C'_n 相切．

17.6.6.1 首先我们注意到，凸性和顶点不同的要求都是必要的；譬如说 n 是偶数时，以 C 在长轴上的一个顶点作为 $n/2$ 个顶点、以长轴上另一顶点为另 $n/2$ 个顶点所构成的退化多边形的极大周长等于 $2na\left(\text{假定 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\right)$. 一个顶点各不相同，但都在上述顶点的邻近的多边形，其周长是充分接近于 $2na$ 的；但 PPM 的周长要小得多，例如 $n=4$ 时是 $4\sqrt{a^2+b^2}$ (图 17.6.6，参见 17.9.6)。

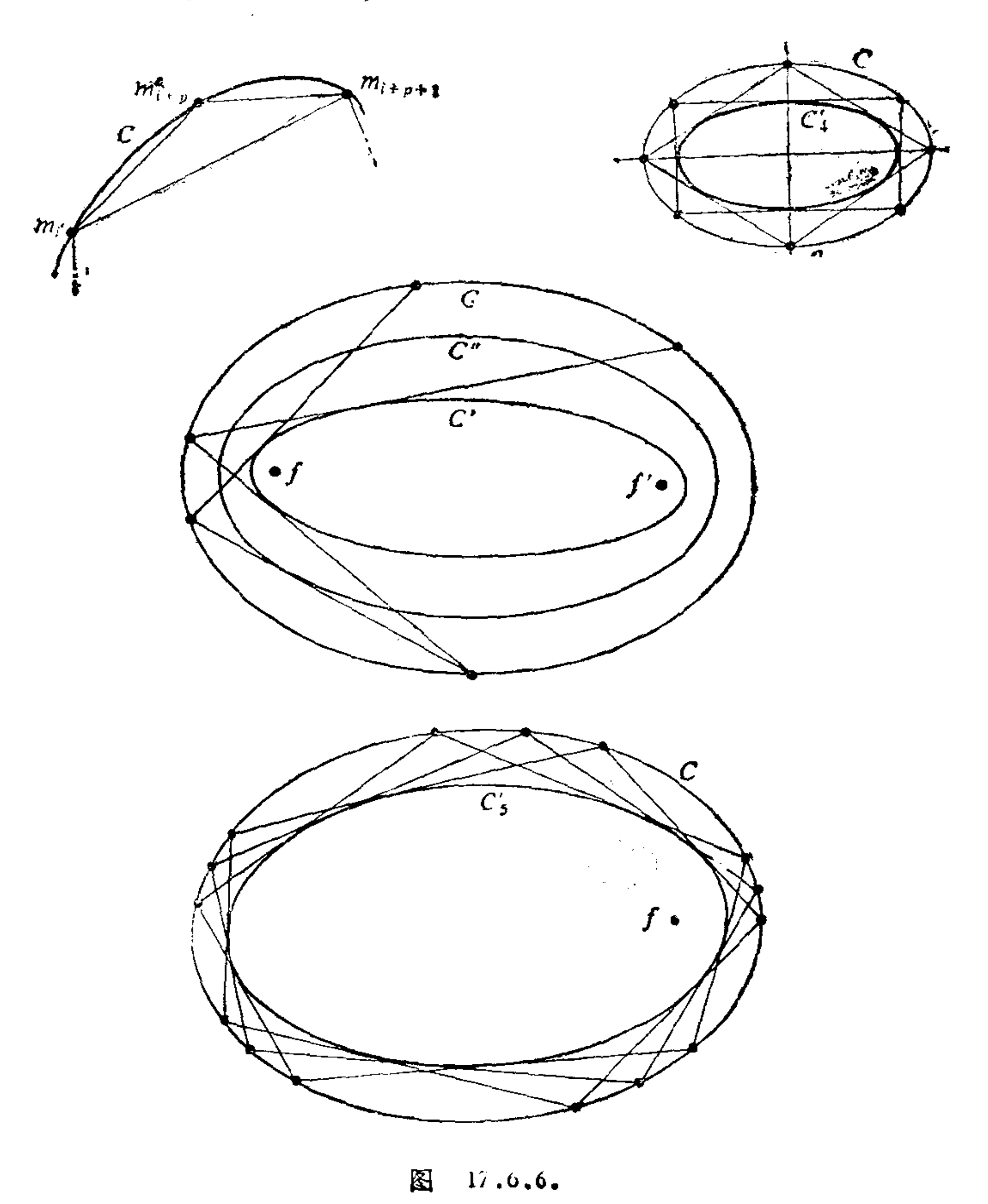


图 17.6.6.

17.6.6.2 具有 n 个不同顶点、内接于 C 的凸多边形构成 C^n 的一个子集 $\mathscr{P}$；设 P 是属于 $\mathscr{P}$ 在 C^n 中闭包 $\bar{\mathscr{P}}$（参见 9.4.2.2）的一个极大周长多边形. 我们要证明 $P\in\mathscr{P}$，而且，若 P 的顶点相继为 $(m_i)_{i=1,\cdots,n}$，则 C 在 m_i 的切线 $T_{m_i}C$ 是 $\{\overrightarrow{m_im_{i-1}},\overrightarrow{m_im_{i+1}}\}$ 的外平分线. 首先设 $m_i=m_{i+1}=\cdots=m_{i+p}, m_{i+p+1}\neq m_i$；在 C 上插进一点 m'_{i+p}，使它严格地介于 m_i 和 m_{i+p+1} 之间，就得到一个 $P'\in\bar{\mathscr{P}}$，其周长严格地大于 P 的周长（参见 9.1.1.1）. 既然所有的顶点都不同，由 9.10.5 即可推得平分线的性质.

17.6.6.3 由于 PPM 有平分线性质，17.6.3.6 就表明了，一个 PPM 可由各边切于同一个与 C 共焦的椭圆 C' 来确定. 由 16.6.11 可知，从这个 PPM 可以导出内接于 C、外切于同一个共焦椭圆 C'，而且一个顶点可以在 C 上任取的多边形；但对这些多边形的每个顶点应用 9.10.1 可知，它们跟这个导出它们的 PPM 有相同周长. 剩下要说明的是任一 PPM 必定是上述多边形中的一个；设 $m\in C$ 是它的一个顶点，C'' 是它的各边与之相切的椭圆；则存在两个共有顶点 m 的内接于 C 的 n 边形，其中一个的各边与 C' 相切，另一个与 C'' 相切. 若 $C''\neq C'$，就可假定，譬如说 C'' 含于 C 和 C' 之间；由图可知这是不可能的.

17.6.7 评注. 17.6.6 保证了当 $n\geqslant 3$ 时具有 n 个顶点、内接于 C、外切于圆锥曲线 C'_n 的多边形的存在性.

Cayley 公式（参见 16.6.12.4）则具体给出了 λ，使对给定的 n 和以 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ 为方程的 C，C'_n 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1=0$（参见 17.6.3.3）. 读者可就 $n=3$ 和 $n=4$ 的情形试一下（也可参见 17.9.6）.

17.7 椭圆的特殊性质

17.7.1 椭圆，圆的正投影. 空间中某一平面上的一个圆在另一平面上的正投影是一个椭圆；在同一平面上，从圆 $x^2+y^2=a^2$ 出

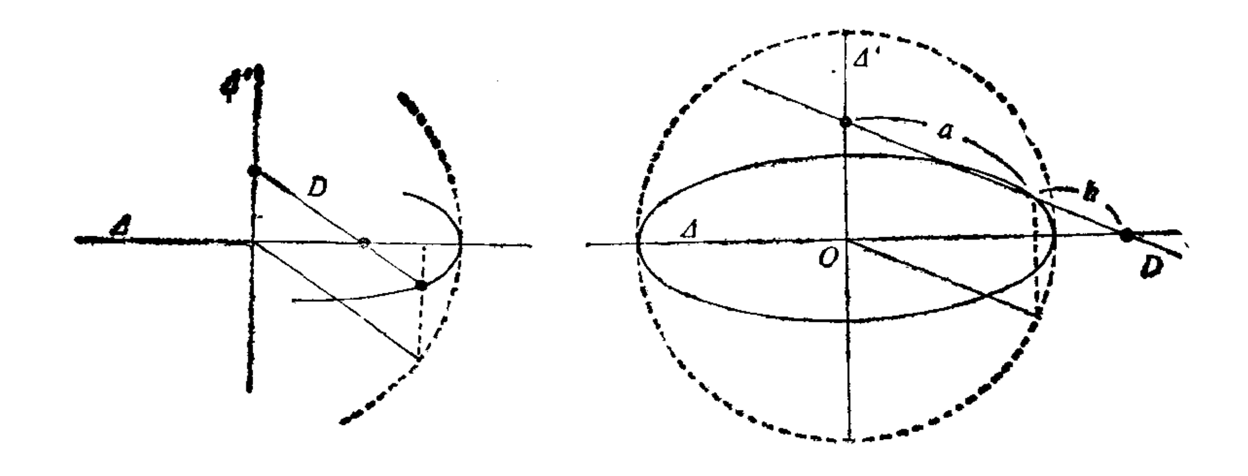


图 17.7.1.

发,经仿射变换 $(x, y) \longmapsto \left(x, \frac{b}{a} y\right)$ 后得到椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

由此可得出椭圆的一个机械作图法，称为“纸带作图法”：若一条直线上的两点被强制地画出两条正交的直线 Δ, Δ'，则D上任一固定点画出一个以 Δ, Δ' 为轴的椭圆(也可参见 17.9.14)．图 16.7.2 的作法也是由这个仿射变换导出的．

17.7.2 参数化． 17.7.1 启发我们对椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ 应用周期参数表示 $t \longmapsto (a\cos t, b\sin t)$；这在 16.2.9 的意义下并不是一个“良好参数化映射”．我们借助于

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\theta:\ \theta \longmapsto \left(a\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}, \frac{2b\theta}{1+\theta^2}\right)$$

从上述参数表示导出一个“良好”的来，它在齐次坐标系下可写为 $\theta \longmapsto (a(1-\theta^2), 2b\theta, 1+\theta^2)$.

17.7.3 例． 在上述参数化映射下，具有参数 $t_i(i=1,2,3,4)$ 的点 m_i 成为上循环点的充要条件是

$$t_1+t_2+t_3+t_4\equiv 0(\bmod.\ 2\pi);$$

它们是从同一点所作的四条法线的垂足的充要条件是

$$t_1+t_2+t_3+t_4\equiv \pi(\bmod.\ 2\pi) \text{ 以及}$$

$$t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4\equiv 0(\mathrm{mod.}\ 2\pi).$$

17.7.4 包络. 在椭圆上一点m处，曲率中心跟法线与法线族的包络（称为C的包络）的交点重合；若 $m=(a\cos t, b\sin t)$，我们就看到这个曲率中心是$\left[\frac{c^2}{a}\cos^3 t, -\frac{c^2}{b}\sin^3 t\right]$这一点. 包络的方程是$(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=c^{4/3}$；它是由一条星形线（参见 9.14.33.3.F）经仿射变换得到的.

从 $m\in X$ 向C所作的法线的条数，与m跟这个包络的相对位置有关；如图 17.7.4 所示，在内部有 4 条，在外部以及四个尖点都有 2 条，在边界上其它点都有 3 条.

与 17.5.5.4 不同的一种在m处曲率中心的作图法，如图 17.7.4 所示.

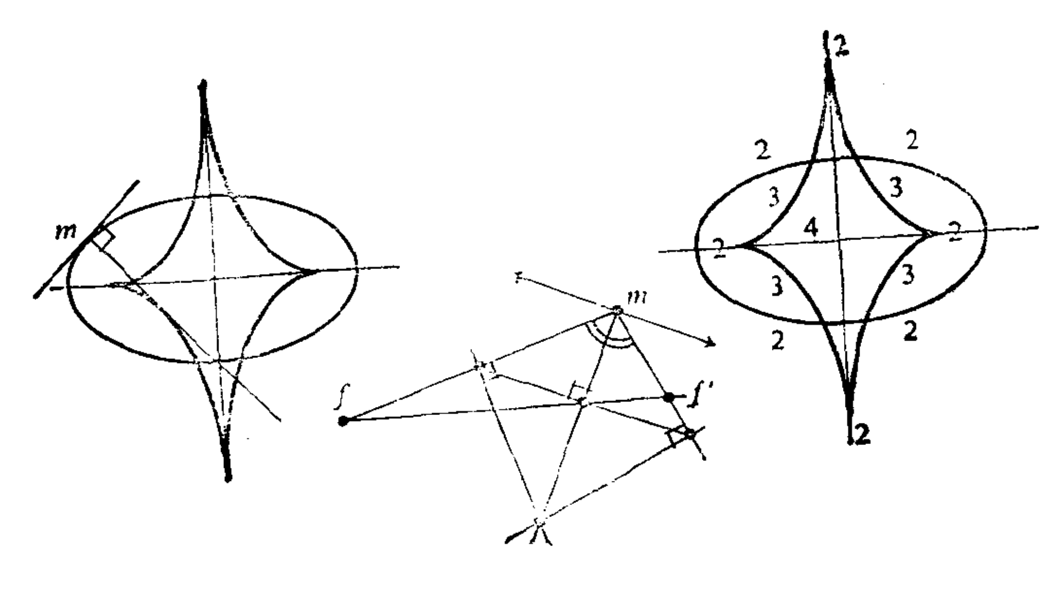


图 17.7.4.

17.7.5 面积与长度. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ 的面积是 πab（参见 11.8.9.4）. 而长度是

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt,$$

并不能用简单的常数来表示；这里遇到的是所谓椭圆函数，这类函数也正是由此得名的.

17.7.6 椭圆的其它一些性质，可见 17.9.6，17.9.11 至 17.9.15，

17.9.22.

17.8 双曲线的特殊性质

双曲线总是跟它的渐近线一起作出的；这样做有好多理由可说，其中之一是：这样就不会画出一条居然跟一条直线交于不同四点的双曲线来了：图 17.8.1 和 14.1.3.4.

17.8.1 举例来说，若直线 D 与双曲线 C 交于 m, m'，与渐近线交于 u, u'，则有 $\dfrac{m+m'}{2}=\dfrac{u+u'}{2}$；特别当 D 是 C 在 m 处的切线时，$m=\dfrac{u+u'}{2}$. 这样，只要知道双曲线的两条渐近线和一点，就可以很快地逐点描出这条双曲线来。图 16.7.3 就是根据截线的这种性质作出的.

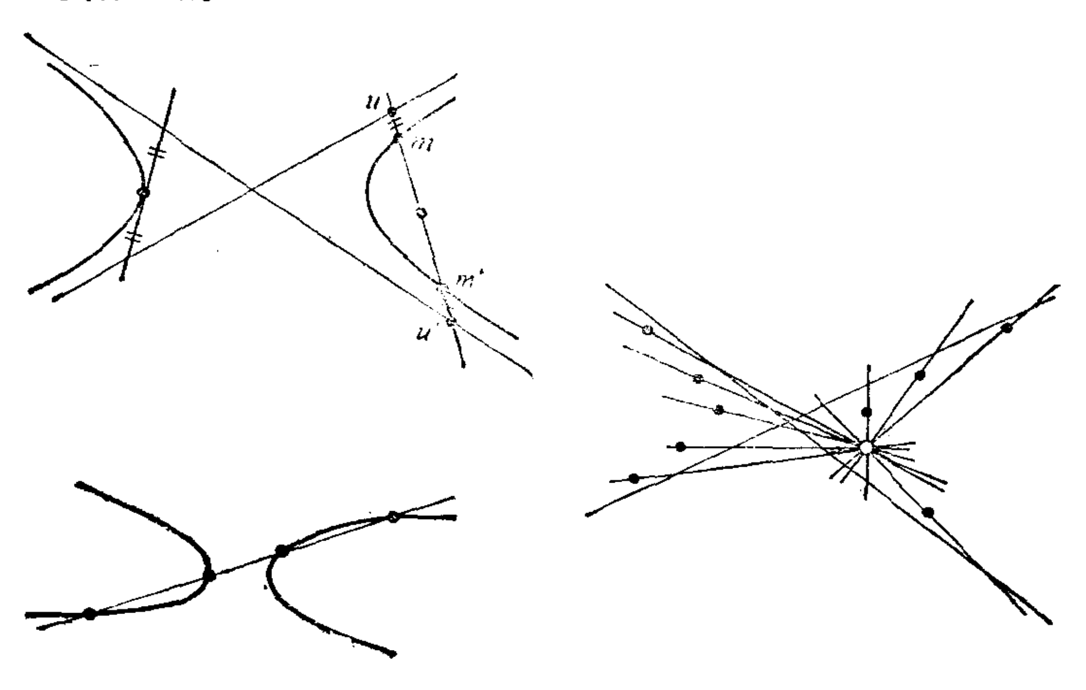


图 17.8.1.

17.8.2 **参数化.** 关于 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$，我们对右侧连通分支作参数变换 $t\longmapsto(a\operatorname{ch}t, b\operatorname{sh}t)$，对左侧连通分支作

$$t\longmapsto(-a\operatorname{ch}t, b\operatorname{sh}t).$$

读者可以考虑在双曲线的情形下，17.7.3 和 17.7.4 会变成怎样.

17.8.3 等轴双曲线（HE）

17.8.3.1 在 17.5.4 中我们已经碰到过这种双曲线的一些性质；特别是，经过三点 a, b, c 的 HE 全体构成一个束，它们的中心的轨迹是三角形 $\mathscr{C}=\{a, b, c\}$ 的九点圆.

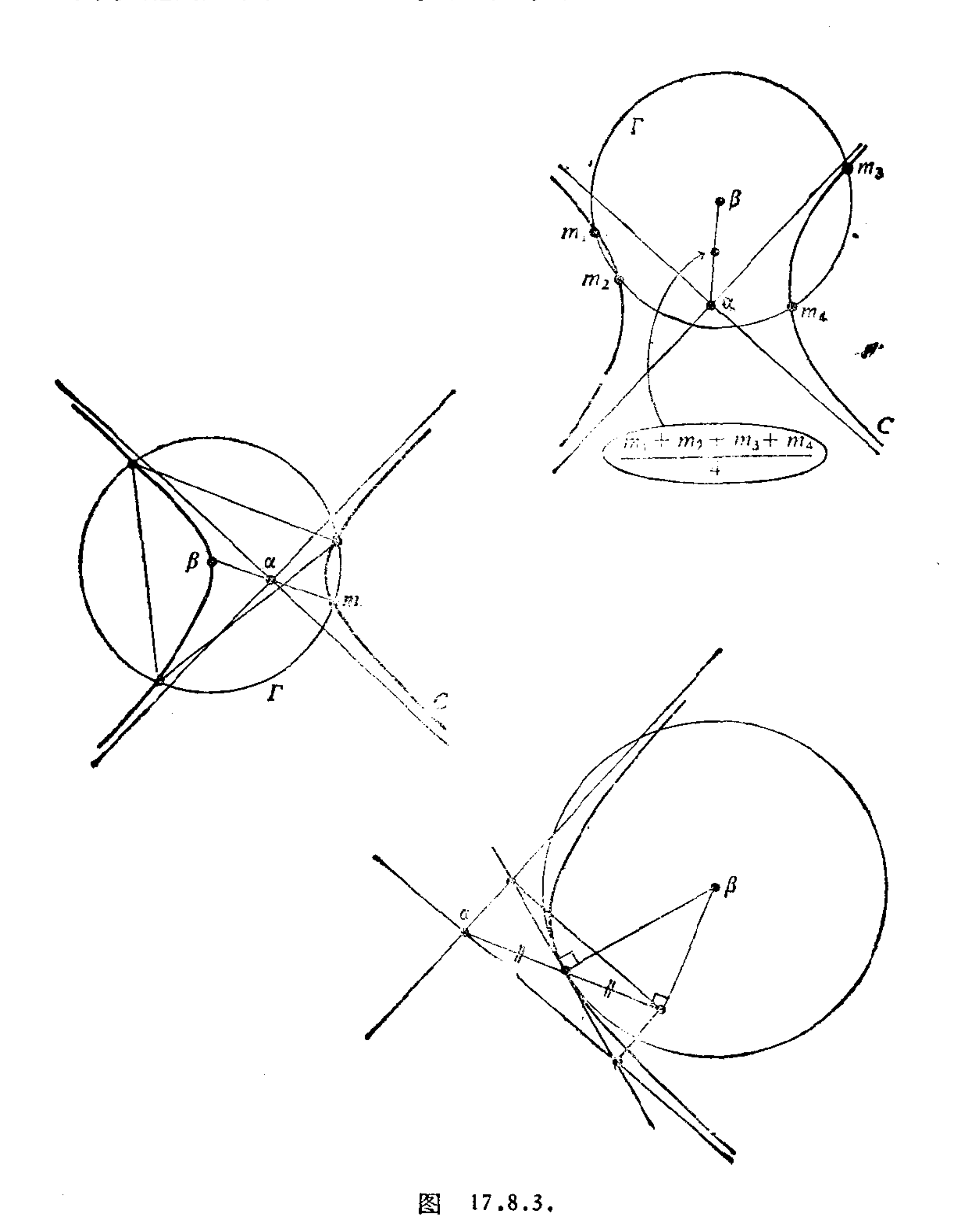


图 17.8.3.

17.8.3.2 对这个三角形 $\mathscr{C}$，一条经过 a, b, c 的 HE 的任何一条渐近线必是 $\mathscr{C}$ 的外接圆上某一点的 Simson 直线（参见 17.4.3.5 或 10.4.5.4）；反之亦然。于是由 9.14.33.3.D 可知，外接于 $\mathscr{C}$ 的 HE 的渐近线集合的包络是一条有三个尖点的内摆线。

17.8.3.3 上循环点. 若圆 Γ 与等轴双曲线 C 交于 $C\square\Gamma = \{(m_i, \omega_i)\}_{i=1,\cdots,k}$（参见 16.5.1），若 β 是 Γ 的中心，α 是 C 的中心，则有

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k}\omega_i m_i = \frac{\beta+\alpha}{2}.$$

由此得出两个推论：第一，若 Γ 的中心 β 位于 C 上，Γ 经过 m 点且使 $\alpha = \dfrac{m+\beta}{2}$，则 Γ 与 C 交于另外三点，它们构成一个等边三角形。第二，曲率中心的作法如图 17.8.3 所示。

C 上的点 $(m_i)_{i=1,\cdots,4}$ 是上循环点的充要条件是

$$\prod_i d(m_i, A) = \frac{a^4}{4},$$

其中 A 是 C 的一条渐近线，$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 是 C 的一个方程。

17.8.4 注. HE 的其它性质，可见 [LM2]。

17.9 练 习

17.9.1 焦圆. 对于以 q 为方程的非空正常圆锥曲线 C，称任何一个其方程可写成 $q + k\varphi^2$ 的圆为 C 的焦圆，其中 φ 是一个仿射形式。试讨论 φ 的可能性。对三类圆锥曲线，画出不同的焦圆族。超切面是焦圆吗？

证明对于任何焦圆 Γ，存在一条直线 D（相应的准线）使

$$C = \{m \in X: m\text{关于 }\Gamma\text{ 的方幂} = e(d(m, D))^2\}.$$

反之亦然。是否可以用“比利时人的说法”来证明这一性质？

若 Γ, Γ' 是两个焦圆，证明在某种情形下

$$C = \{m \in X: (m\text{关于 }\Gamma\text{ 的方幂})^{1/2}$$

+(m 关于 Γ' 的方幂$)^{1/2}$=常数}.

可以用"比利时人的说法"来证明这一性质吗?

讨论焦圆与双切于 C 的圆之间的关系.

17.9.2 **竖放的圆形弹子盘.** 一颗重量必须考虑的钢球在竖放的圆盘内部运动;它在圆盘最低处所施加的初速度的作用下,作完全的弹性碰撞. 试给出钢球作周期运动的例子.

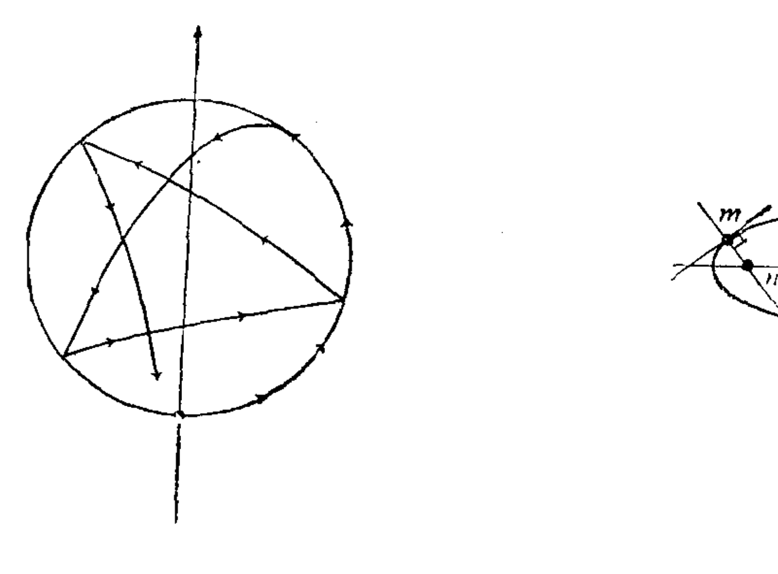


图 17.9.2.

图 17.9.9.

17.9.3 通过计算证明 17.5.5.6.

17.9.4 用初等的方法证明 17.5.5.1.

17.9.5 证明: 圆 Γ 调和外切于圆锥曲线 C 的充要条件是 Γ 正交于 C 的切距圆(或直线)(若这个切距圆不存在, 则正交性可如第20章中的意义理解). 考虑等轴双曲线以及抛物线的情形.

17.9.6 证明存在无穷多个矩形外切于椭圆 C、内接于 C 的切距圆 Γ. 根据关于 C 的对偶性,不用 16.6.11, 由上述结论在 $n=4$ 的情形下推出 17.6.6.

17.9.7 若一个凸多边形有 n 个不同顶点, 内接于 C, 且是 PPM (从而外切于 C'_n),则该多边形在所有外切于 C'_n 的多边形中是具有极小周长的.

17.9.8 讨论所有内接于(相应地,外切于)一个给定的椭圆的多边形中具有最大(相应地,最小)面积的多边形.

17.9.9 设C是一条有心圆锥曲线，点 $m\in C$，p，n是C在m处法线与C的两条轴的交点；证明比值 mp/mn 是常数并算出这个常数．证明其逆命题．由此求出在C的顶点处的曲率半径的值．

17.9.10 Joachimsthal 定理． 考虑一条有心圆锥曲线的四条共点的法线的垂足，经过其中三点的圆必定经过第四点的中心对称点．也可参见 17.7.3．

17.9.11 Chasles 圆． 两点 m，m' 以相等的角速度沿不同方向画出两个同心圆．它们的中点 $\frac{m+m'}{2}$ 画出的轨迹是什么？考虑与纸带作图法之间的联系(参见 17.7.1)．

17.9.12 设 m，n 是以ω为中心的椭圆C的两点，且使 ωm，ωn 成直角；证明 $\frac{1}{(\omega m)^2}+\frac{1}{(\omega n)^2}$ 是常数；直线 mn 的包络是什么？

设a是严格地位于以ω为中心的椭圆C内部的一点，D是过a点的直线，与C交于m，n；$p\in C$ 且 ωp平行于D．证明比值 $\frac{am\cdot an}{(\omega p)^2}$ 是常数．

设D，D'是欧氏结构中两条正交直线，都经过a，分别交C于m，n和m'，n'；证明 $\frac{1}{am\cdot an}+\frac{1}{am'\cdot an'}$ 是常数．直线 mm' 的包络是什么？参见 15.7.9．

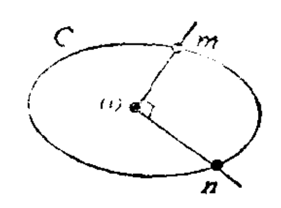


图 17.9.12．

17.9.13 给定椭圆 C，$m\notin C$，讨论x沿C变动时函数 $x\longmapsto xm$ 的变化情形．

17.9.14 Lahire 定理． 直线D上两个定点沿任意两条固定直线Δ，Δ' 滑动；证明固定在D上的任何一点画出一个椭圆．

17.9.15 设 $m_i(i=1,2,3,4)$ 是椭圆C的四个上循环点，n_i是

C 在 m_i 处的密切圆与 C 的异于 m_i 的交点；证明 n_i 也是上循环点．这一结论对双曲线或抛物线也成立吗？

17.9.16 证明：对一条以 ω 为中心的等轴双曲线来说，若一条以 ω 为极的对数螺线跟它相切，则该螺线是它的固有反极线（参见14.6.4）．

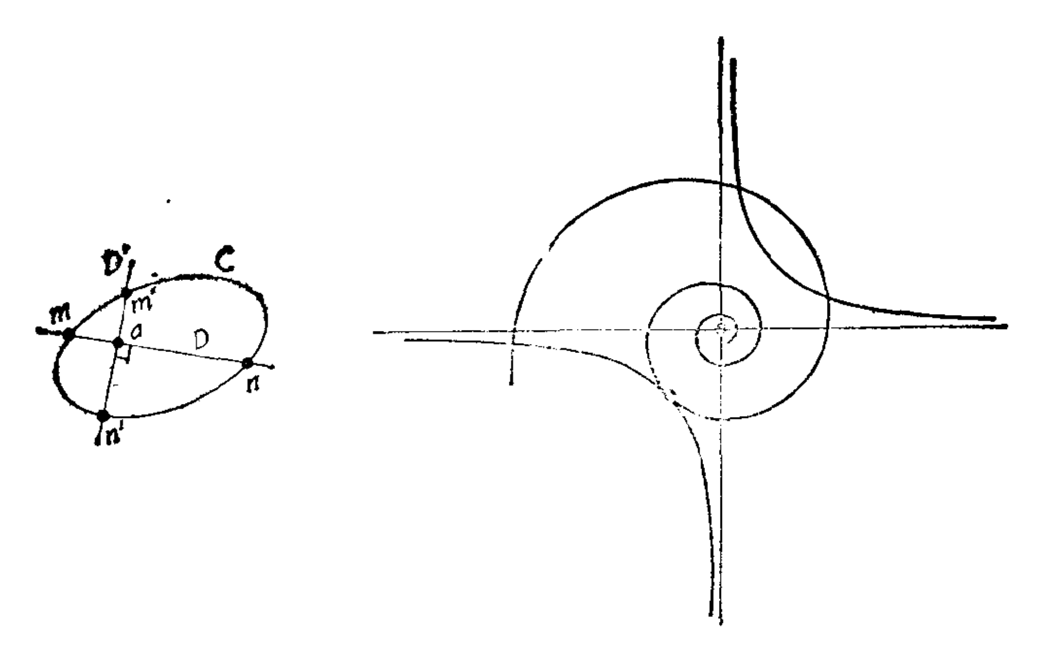


图 17.9.16.

17.9.17 设已给定两条同心的等轴双曲线 H 和 H'．存在内接于 H、外切于 H' 的三角形的充要条件是 H 的焦点在 H' 的准线上．

17.9.18 抛物线的性质

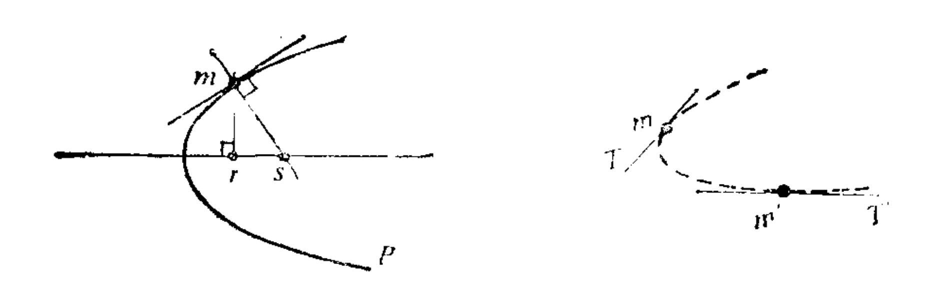


图 17.9.18.

17.9.18.1 次法距． 设 P 是一条抛物线，$m \in P$；P 在 m 处的法线交 P 的轴于 s，m 在轴上的投影是 r．证明距离 rs 是常数．并据此说明，已知抛物线上两点 m, m' 以及在这两点处的切

线 T, T' 后,怎样几何地作出抛物线的轴?

17.9.18.2 由一点出发的法线(参见17.5.5.4和17.9.10).证明抛物线P在三点 m, m', m'' 的法线共点的充要条件是重心

$$\frac{m+m'+m''}{3}$$

位于P的轴上,或者是经过 m, m', m'' 的圆含有P的顶点.

17.9.18.3 内接于一个圆、外切于一条抛物线的四边形的对角线的交点位于这条抛物线的准线上.

17.9.19 考虑两个旋转二次曲面,它们的旋转轴相交;它们的公切面必与轴在上述两条轴所在平面上的第三个旋转二次曲面相切.六个焦点构成一个完全四边形.

17.9.20 从一条圆锥曲线上的一点引与该圆锥曲线成定角的弦,求它们的包络;考虑直角的情形.

17.9.21 跟一个椭圆的任一对共轭直径相切、中心在该椭圆上的圆的半径是固定的.

17.9.22 由两条共轭半直径决定一个椭圆. 设 Oa, Ob 是椭圆C

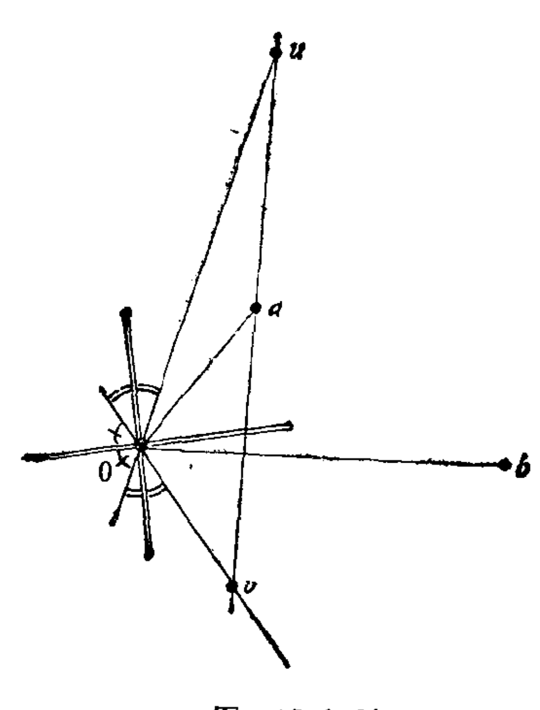


图 17.9.22.

的两条共轭的半直径．证明可如下作出C的轴来：过a作直线垂直于Ob，从a向该直线两侧截取Ob的长度；这样就得到两点u，v，而Ou，Ov的两条平分线就是所求的两条轴．

17.9.23 在X中给定一个圆C和C上两点a，b．考虑经过a，b而且中心与ab的中点重合的、与C相切的椭圆E．证明所有这些椭圆都有相同的离心率．

17.9.24 焦点的实用求法． 在标准正交仿射标架下给出X中圆锥曲线C的方程为$f(x, y)=0$．证明C的焦点的坐标(α, β)可由$F(\varepsilon i, -1, \beta-\varepsilon i\alpha)=0$求得，其中$\varepsilon=\pm1$，$i=\sqrt{-1}$，$F(u, v, w)=0$是在与上述标架自然相应的射影标架下$C$的切线方程．

参考书目

[A-A] ARNOLD (V. I.) et AVEZ (A.). *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars.

[A-B] ANNEQUIN et BOUTIGNY. *Cours de Physique, Optique*, Vuibert.

[A-B-S] ATIYAH (M. F.), BOTT (R.) et SHAPIRO (A.). *Clifford Modules*, Topology, 3, 1964-1965, supplément, p 3-38.

[AE] *Astronomie*, Encyclopédie de la Pléiade, Gallimard

[AN] ARTIN (Emil). *Geometric Algebra*, Interscience.

[AR] ARNOLD (V.). *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou.

[AS] ARNAUDIÈS (J.-M.), *Les cinq polyèdres de* $\mathbf{R}^3$ *et leurs groupes*, C.D.U.-S.E.D.E.S., Paris.

[AV] ALEXANDROW (A. D.). *Konvexe Polyeder*, Akademie Verlag, Berlin.

[AW] ALEXANDROW (A.D.). *Die innere Geometrie der konvexe Fläche*, Akademie Verlag, Berlin.

[BA] BIANCHI (L.). *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle transformazioni asintotiche delle curve el delle superficie*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 25, 1908, p. 291-325.

[BAN] BANCHOFF (Thomas). *Non-rigidity Theorems for Tight Polyhedra*, Archiv der Mathematik, 21, 1970, p. 416-423.

[BA-WH] BANCHOFF (Thomas) et WHITE (James). *The behavior of the total twist and self-linking number of a closed space curve under inversions*, Mathematica Scandinavica 36, 1975, p. 254-262.

[B-B] BECKENBACH (Edwin F.) et BELLMAN (Richard). *Inequalities*, Springer.

[BE] BROUSSE (Pierre). *Mécanique*, Armand Colin.

[BER] BERGER (M.). *Lectures Notes on Geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute, Bombay.

[BES] BESSE (Arthur). *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik, Band 93, Springer.

[B-F] BONNESEN (O.) et FENCHEL (W.). *Theorie der konvexe Körper*, Chelsea.

[B-G] BERGER (Marcel) et GOSTIAUX (Bernard). *Géométrie différentielle*, Armand Colin.

[B-H] BOREL (A.) et HIRZEBRUCH (F.). *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces*, American Journal of Math., 80, 1958, p. 458-538.

[B-H-H] BLACK (W. L.), HOWLAND (H. C.) et HOWLAND (B.). *A Theorem about Zigzags between two Circles*, American Math. Monthly, 81, 1974, p. 754-757.

[BI 0] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Théorie des Ensembles, Hermann, 1970.

[BI 1] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Topologie Générale, chapitres 5 à 10, Hermann, 1974.

[BI 2] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre II, chapitre 9, Hermann.

[BI 3] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre V, chapitres 1, 2, 2e édition, Hermann.

[BI 4] BOURBAKI (Nicolas). *Groupes et algèbre de Lie*, chapitre 4, 5, 6, Hermann.

[BI 5] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Algèbre, chapitres 1 à 3, Hermann, 1970.

[B-K] BUSEMANN (Herbert) et KELLY (Paul J.). *Projective Geometry and Projective Metrics*, Academic Press.

[BL] BLUMENTHAL (Leonard M.). *Theory and Applications of Distance Geometry*, Chelsea.

[BLA 1] BLASCHKE (Wilhelm). *Kreis und Kugel*, Chelsea.

[BLA 2] BLASCHKE (Wilhem). *Vorlesungen über Differential Geometrie, II : Affine Differential Geometry*, Springer.

[BLA 3] BLASCHKE (Wilhelm). *Vorlesungen über Differential Geometrie, III : Differential Geometrie der Kreise und Kugel*, Springer.

[BL-BO] BLASCHKE (W.) et BOL (G.). *Geometrie der Gewebe*, Springer, 1938.

[B-M] BLUMENTHAL (Leonard M.) et MENGER (Karl). *Studies in Geometry*, W. H. Freeman.

[BN] BOURGIN (D. G.). *Modern Algebraic Topology*, Mac Millan.

[BO 1] BOREL (Armand). *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes*, American Journal of Math., 76, 1954, p. 273-342.

[BO 2] BOREL (Armand). *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Annals of Math., 57, 1953, p. 115-207.

[BP] BAUDOIN (Paul). *Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal*, Vuibert.

[BR] BAER (R.). *Linear Algebra and Projective Geometry*, Academic Press.

[B-S] BOREVICH (Z. I.) et SHAFAREVICH (I. R.). *Number Theory*, Academic Press.

[B-T] BRUHAT (F.) et TITS (J.). *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées*, Public. Math. I.H.E.S., nº 41.

[BU 1] BUSEMANN (Herbert). *Convex Surfaces*, Interscience.

[BU 2] BUSEMANN (Herbert). *Recent Synthetic Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik, nº 54, Springer.

[BUR] BURCKHARDT (J. J.). *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*, Birkhaüser.

[BV] BONNEVAL (H.). *Photogrammétrie générale* (4 volumes), Eyrolles.

[BZ] BENZ (Walter). *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer.

[CA] CAIRNS (Stewart Scott). *Introductory Topology*, Ronald Press.

[CAL] CALLAHAN (Francis P.). *Morley polygons*, American Math. Monthly 84, 1977, p. 325-337.

[C-B] COUDERC (P.) et BALLICIONI (A.). *Premier livre du tétraèdre*, Gauthier-Villars.

[CD] CARATHEODORY (C.). *The most general transformation which transform circles into circles*, Bull. Amer. Math. Soc., 43, 1937, p. 573-579.

[C-D-L] COHEN-TANNOUDJI (C.), DIU (B.) et LALOE (F.). *Mécanique quantique, vol. 1*, Hermann.

[CE 1] CARTAN (Elie). *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes*, Oeuvres complètes, tome I, volume 2, p. 1227-1246.

[CE 2] CARTAN (Elie). *The Theory of Spinors*, Hermann ou The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

[C-G] CHEEGER (Jeff) et GROMOLL (Detlef). *On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature*, Ann. of Math., 96, 1972, p. 413-443.

[CH 1] CARTAN (Henri). *Calcul différentiel*, Hermann.

[CH 2] CARTAN (Henri). *Théorie élémentaire des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

[CH-GR] CHERN (S. S.) et GRIFFITHS (P.). *Abel's theorem and webs*, Jahrbericht d. Deutsche Math.-Verein., 80, 1978, p. 13-110.

[CL 1] CONNELLY (Robert). *A counter example to the rigidity conjecture for polyhedra*, Public. Math. I.H.E.S., 47, 1978, p. 333-338.

[CL 2] CONNELLY (Robert). *A flexible sphere*, Math. Intelligencer, 1, 1978, p. 130-131.

[C-M] COXETER (H. S. M.) et MOSER (W. O. J.). *Generators and Relations for Discrete Groups*, 2e édition, Springer.

[CN] CUENIN (R.). *Cartographie générale* (2 volumes), Eyrolles.

[CO] CONNELLY (Robert). *An attack on rigidity I, II*. Preprints, Cornell University.

[CR 1] COXETER (H. S. M.). *Introduction to Geometry*, John Wiley.

[CR 2] COXETER (H. S. M.). *Regular Polytopes*, Methuen.

[CR 3] COXETER (H. S. M.). *Non-euclidean Geometry*, The University of Toronto Press.

[CR 4] COXETER (H. S. M.). *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press.

[CR 5] COXETER (H. S. M.). *The Problem of Apollonius*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 5-15.

[CS] CASSELS (J. W. S.). *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer.

[CT] CHOQUET (Gustave). *Cours d'Analyse, tome II : Topologie*, Masson.

[CY] CHEVALLEY (Claude). *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press.

[CZ] CONZE (Jean-Pierre). *Le théorème d'isomorphisme d'Ornstein et la classification des systèmes dynamiques en théorie ergodique*, Séminaire Bourbaki, novembre 1972.

[D-C 1] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Géométrie*, J. B. Baillière.

[D-C 2] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Compléments de géométrie*, J. B. Baillière.

[DE 1] DIEUDONNÉ (Jean). *La géométrie des groupes classiques*, *2e édition*, Springer.

[DE 2] DIEUDONNÉ (Jean). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, *3e édition*, Hermann.

[DE 3] DIEUDONNÉ (Jean). *Calcul infinitésimal*, Hermann.

[DE 4] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome II*, Gauthier-Villars.

[DE 5] DIEUDONNÉ (Jean), *Eléments d'Analyse, tome III*, Gauthier-Villars.

[DE 6] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome IV*, Gauthier-Villars.

[DE 7] DIEUDONNÉ (Jean). *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press.

[DE 8] DIEUDONNÉ (Jean). *Cours de Géométrie Algébrique* (*tomes* 1 *et* 2), Presses Universitaires de France.

[D-G-K] DANZER (L.), GRÜNBAUM (B.) et KLEE (V.). *Helly's Theorem and its Relatives*, A.M.S. Symposium on Convexity, Proc. Symp. Pure Math., volume 7, 1963.

[DI] DEMBOWSKI (P.). *Finite Geometries*, Ergebnisse der Mathematik, n° 44, Springer.

[DI-CA] DIEUDONNÉ (Jean) et CARRELL (James B.). *Invariant Theory, Old and New*, Academic Press.

[DN] DANJON (André). *Astronomie générale*, J. et R. Sennac.

[DO] DORRIE (Heinrich). 100 *Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover.

[DQ] DUPORCQ (Ernest). *Premiers principes de géométrie moderne*, *3e édition*, Gauthier-Villars.

[DR] DIXMIER (Jacques). *Cours de mathematiques du premier cycle, deuxième année*, Gauthier-Villars.

[DV] DVORETSKY (Aryeh). *Some results on convex bodies and Banach spaces*, p. 123-160 dans Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1961.

[DX] DARBOUX (Gaston). *Principes de Géométrie Analytique*, Gauthier-Villars.

[DY] DOUADY (Adrien). *Le shaddock à six becs*, Bulletin A.P.M.E.P., 281, 1971, p. 699.

[EE] *Encyklopädie der Mathematischen Wissenchaften, Geometrie*, III.2.1, Teubner.

[E-K] EELLS (James) et KUIPER (Nicolas O.). *Manifolds which are like Projective Planes*, Public. Math. I.H.E.S., nº 14, p. 5-46.

[EL] ELLISON (W. J.). *Waring's problem*, American Math. Monthly, 78, 1971.

[EN] EGGLESTON (H. G.). *Convexity*, Cambridge University Press.

[ER] ESCHER (M. C.). *L'œuvre graphique*, Solin, Paris.

[E-S] EELLS (J.) et SAMPSON (J. H.). *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, American Journal of Math., 86, 1964, p. 109-160.

[FA] FALCONER (K. J.). *A characterisation of plane curves of constant width*, J. London Math. Soc., 16, 1977, p. 536-538.

[FI] FILLMORE (Jay P.). *Symmetries of surfaces of constant width*, J. of Diff. Geometry, 3, 1969, p. 103-110.

[FL] FRENKEL (Jean). *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann.

[FN] FULTON (William). *Algebraic Curves*, Benjamin.

[FR] FEDERER (Herbert). *Geometric Measure Theory*, Springer.

[FT 1] FEJES-TOTH (L.). *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer.

[FT 2] FEJES-TOTH (L.). *Regular Figures*, Pergamon.

[GA] GARDNER (Martin). *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, Scientific American, January 1977.

[GE] GONSETH (F.). *Un théorème relatif à deux ellipsoides confocaux*, Bulletin des Sciences Math., 42, 1918, p. 177-180 et 193-194.

[GG] GREENBERG (Marvin J.). *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin.

[G-G-V] GELFAND (I. M.), GRAEV (M. I.) et VILENKIN (N. Ya). *Generalized Functions, volume 5, Integral Geometry and Representation Theory*, Academic Press.

[GIS] GRIFFITHS (Phillip A.). *Variations on a Theorem of Abel*, Inventiones Math., 35, 1976, p. 321-390.

[GI-WE] GIBBONS (J. C.) et WEBB (C.). *Circle preserving maps of spheres*, preprint, Illinois Institute of Technology, Chicago.

[GK] *Grundzüge der Mathematik, Band IV : Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik,* Vandenhoeck and Ruprecht.

[G-K-M] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.) et MEYER (W.). *Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Mathematics,* n° 55, Springer.

[GL] GLUCK (Herman). *Almost All Simply Connected Closed Surfaces are Rigid,* preprint, University of Pennsylvania.

[GM] GRAMAIN (André). *Topologie des surfaces,* Presses Universitaires de France.

[GN] GÉRARDIN (Paul). *Mathématiques Elémentaires Approfondies,* cours polycopié, Université Paris VII, U.E.R. de Mathématiques.

[G-O] GELBAUM (Bernard D.) et OLMSTED (John M. H.). *Counterexamples in Analysis,* Holden-Day.

[GR] GUGGENHEIMER (Heinrich W.). *Plane Geometry and its Groups,* Holden-Day.

[GR-HA] GRIFFITHS (P.) et HARRIS (S.). *On Cayley's Explicit Solution to Poncelet's Porism,* L'Enseignement Mathématique, 24, 1978, p. 31-40.

[GR-SH1] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The eighty-one types of isohedral tilings in the plane,* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 82, 1977, p. 177-196.

[GR-SH2] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The 91 types of isogonal tiling in the plane,* Trans. A.M.S., 242, 1978, p. 335-354.

[GS] *Geometric Inequalities* (BOTTEMA *et alia*), Wolters-Noordhoof.

[GT] GUICHARDET (A.). *Calcul intégral,* Armand Colin.

[GX] GODEAUX (Lucien). *Les géométries,* Armand Colin.

[HA] HALL (M.). *The Theory of Groups,* Mac Millan.

[HA-WR] HARDY (G. H.) et WRIGHT (E. M.). *An Introduction to the Theory of Numbers,* Oxford University Press.

[H-C] HILBERT (D.) et COHN-VOSSEN (S.). *Geometry and the Imagination,* Chelsea.

[HD 1] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome I, 10e édition,* Armand Colin.

[HD 2] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome II, 7e édition,* Armand Colin.

[H-K] HAUPT (O.) et KÜNNETH (H.). *Geometrische Ordnungen,* Springer.

[H-L-P] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) et POLYA (G.). *Inequalities,* Cambridge University Press.

[HM] HARTMAN (P.). *On Isometries and a Theorem of Liouville,* Mathematische Zeitschrift, 69, 1958, p. 202-210.

[HN] HELGASON (Sigurdur). *Differential Geometry and Symmetric Spaces,* Academic Press.

[HOL] d'HOLLANDER (Raymond). *Topologie Générale, tome I : Généralités, Mesure des angles et des distances*, Eyrolles.

[HO-PE] HODGE (W. V. D.) et PEDOE (D.). *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge University Press.

[H-P] HUGHES (Daniel R.) et PIPER (Fred C.). *Projective Planes*, Springer.

[HR] HADWIGER (H.). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer.

[HS] HERSCH (Joseph). *Quatre propriétés des membranes sphériques homogènes*, C.R.A.S., 270, 1970, p. 1714-1716.

[HU] HUSEMOLLER (Dale). *Fibre Bundles*, McGraw Hill.

[H-W] HILTON (P. J.) et WYLIE (S.). *Homology Theory*, Cambridge University Press.

[H-Y] HOCKING (John G.) et YOUNG (Gail S.). *Topology*, Addison-Wesley.

[HZ] HURWITZ (M. A.). *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales Ecole Norm., 19, 1902, p. 357-408.

[I-R] ILLIOVICI (G.) et ROBERT (P.). *Géométrie*, Eyrolles.

[JE] JOEDICKE (Jürgen). *Les structures en voiles et coques*, Vincent, Fréal et Cie.

[KE] KRÉE (P.). *Introduction aux mathématiques et à leurs applications fondamentales, M.P. 2*, Dunod.

[KF] KAZARINOFF (Nicholas D.). *Geometric Inequalities*, Random House.

[KG 1] KLINGENBERG (Wilhelm). *Eine Vorlesung über Differential Geometrie*, Springer.

[KG 2] KLINGENBERG (Wilhelm). *Paare symmetrischen und alternierenden Formen zweiten Grades*, Abhandl. Math. Sem. Hamburg, 19, 1955, p. 78-93.

[KH] KUROSH (A. G.). *Lectures in General Algebra*, Pergamon.

[KM] KLOTZ-MILNOR (Tilla). *Efimov's Theorem about Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature*, Advances in Math., 8, 1972, p. 474-543.

[KN 1] KLEIN (Félix). *Lectures on the Icosahedron*, Dover.

[KN 2] KLEIN (Félix). *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer.

[KO-NO 1] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume I*, Interscience.

[KO-NO 2] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume II*, Interscience.

[LB 1] LEBESGUE (Henri). *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars.

[LB 2] LEBESGUE (Henri). *Les coniques*, Gauthier-Villars.

[LB 3] LEBESGUE (Henri). *Octaèdres articulés de Bricard*, l'Enseignement mathématique, 13, 1967, p. 175-185.

[LE] LEKERKERKER (C. G.). *Geometry of numbers*, Walters-Noordhoff.

[LF 1] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Géométrie différentielle*, Masson.

[LF 2] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes*, Mémoires Acad. Royale Belg., Cl. Sci. Mém. Coll. in-8°, 1971, fascicule 5.

[LF 3] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes*, J. of Diff. Geometry, 8, 1973, p. 487-510.

[LF-AR] LELONG-FERRAND (J.) et ARNAUDIÈS (J.-M.). *Cours de mathématiques, tome 3*, Dunod.

[LG 1] LANG (Serge). *Elliptic Functions*, Addison-Wesley.

[LG 2] LANG (Serge). *Analysis II*, Addison-Wesley.

[LM 1] LEMAIRE (J.). *Hypocycloïdes et Epicycloïdes*, Vuibert.

[LM 2] LEMAIRE (J.). *L'hyperbole équilatère*, Vuibert.

[LP] *Le libre du problème, volume 4 : la convexité*, CEDIC.

[LR 1] LEHNER (Joseph). *A Short Course in Automorphic Functions*. Holt, Rinehart and Winston.

[LR 2] LEHNER (Joseph). *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, Math. Surveys, number VIII, American Math. Society.

[LS] LEVALLOIS (Jean-Jacques). *Géodésie Générale, tome II : Géodésie classique bidimensionnelle*, Eyrolles.

[LU] LUSTERNIK (Lazar A.). *Convex Figures and Polyhedra*, Heath.

[LY] LEVY (Harry). *Projective and Related Geometry*, Mac Millan.

[LZ] LAZUTKIN (V. F.). *The Existence of Caustics for a Billiard Problem in a Convex Domain*, Math. USSR Izvestia, 7, 1973, p. 185-214.

[MA] MALLIAVIN (Paul). *Géométrie différentielle intrinsèque*, Hermann.

[MD] MARCHAUD (A.). *Les surfaces du second ordre en géométrie finie*, J. Math. pures et appl., 9-15, 1936, p. 293-300.

[MI] MILNOR (John). *A problem in cartography*, American Math. Monthly, 76, 1969, p. 1101-1102.

[MJ] MANDELBROJT (Benoît). *Les Objets fractals*, Flammarion.

[ML] MICHEL (Charles). *Compléments de géométrie moderne*, Vuibert.

[M-P] MODENOV (P. S.) et PARKHOMENKO (A. S.). *Geometric Transformations, volume I*, Academic Press.

[MR] MATHER (J.). *The nice dimensions, Proceedings of Liverpool Singularities, Symposium I*, Lecture Notes in Mathematics n° 192, Springer.

[M-T] MARTINEAU (André) et TREVES (François). *Eléments de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions, fascicule I,* C.D.U.

[MW 1] MOSTOW (G. D.). *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces,* Annals of Mathematical Studies, n° 78, Princeton University Press.

[MW 2] MOSTOW (G. D.). *Discrete Subgroups of Lie Groups,* Advances in Mathematics, 15, 1975, p. 112-123.

[NA] NEVANLINNA (Rolf). *On Differentiable Mappings, Analytic Functions,* p. 3-9, Princeton University Press.

[OA] OBATA (M.). *The Conjecture on Conformal Transformations of Riemannian Manifolds,* J. of Differential Geometry, 6, 1972, p. 247-258.

[OM] O'MEARA (O. T.). *Introduction to Quadratic Forms,* Springer.

[OS 1] OSSERMAN (Robert). *Bonnesen-style Isoperimetric Inequalities,* American Math. Monthly, 86, 1979, p. 1-29.

[OS 2] OSSERMAN (Robert). *The isoperimetric inequality,* Bull. Amer. Math. Soc., 84, 1978, p. 1182-1238.

[PA] PALAIS (Richard). *The Classification of G-Spaces,* Memoirs of the A.M.S., n° 36.

[PC] PASCAL (Blaise). *Pensées,* édition Brunschwig.

[PE] PEDOE (D.). *A Course of Geometry,* Cambridge University Press.

[PL] POHL (William F.). *A Theorem of Géométrie finie,* Journal of Differential Geometry, 10, 1975, p. 435-466.

[PN] PAYNE (L. E.). *Isomerimetric Inequalities and their Applications,* SIAM Review, 9, 1967, p. 453-488.

[PO] PORTEOUS (I. R.). *Topological Geometry,* Van Nostrand-Reinhold.

[PR] PORTER (T. I.). *A History of the Classical Isoperimetric Problem, Contributions to the Calculus of Variations,* University of Chicago Press, 1933.

[P-S] POLYA (G.) et SZEGÖ (G.). *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics,* Princeton University Press ou Kraus Reprint Corporation.

[PT] PICKERT (G.). *Projektive Ebenen,* Springer.

[PV 1] POGORELOV (A. V.). *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces,* Israël Programm for Scientific Translation, Jerusalem.

[PV 2] POGORELOV (A. D.). *Complete Solution of Hilbert's Fourth Problem,* Soviet Math. Doklady, 14, 1973, p. 46-49.

[RA] RADEMACHER (Hans). *Topics in Analytic Number Theory,* Grundlehren n° 169, Springer.

[R-C 1] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie*, 1[re] *partie*, Gauthier-Villars.

[R-C 2] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie*, 2[e] *partie*, Gauthier-Villars.

[RE] ROUSSARIE (Robert). *Sur les feuilletages de variétés de dimension* 3, Annales de l'Institut Fourier, 21(3), 1971, p. 13-81.

[RM] DE RHAM (Georges). *Sur les polygones générateurs des groupes fuchsiens*, l'Enseignement mathématique, 17, 1971, p. 49-61.

[RN 1] ROBINSON (Raphael M.). *Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane*, Inventiones Math., 12, 1971, p. 177-209.

[RN 2] ROBINSON (Raphael M.). *Undecidable Tiling Problems in the Hyperbolic Plane*, Inventiones Math., 44, 1978, p. 259-264.

[RN 3] ROBINSON (Raphael M.). *Comments on the Penrose Tiles*, preprint, University of California, Berkeley.

[RO] ROMANOV (V. G.). *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations*, Springer.

[RS] ROGERS (C. A.). *Packing and Covering*, Cambridge University Press.

[R-V] ROBERTS (A. Wayne) et VARBERG (Dale E.). *Convex Functions*, Academic Press.

[SA] SHIMURA (G.). *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami Shoten et Princeton University Press.

[SB] STERNBERG (Shlomo). *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall.

[SC 1] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *The plane symmetry groups : their recognition and notation*, American Math. Monthly, 85, 1978, p. 439-450.

[SC 2] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *Tiling the plane with congruent pentagons*, Mathematics Magazine, 51 (1978), p. 29-44.

[SD 1] STAUDE (Otto). *Fadenconstructionen des Ellipsoides*, Math. Annalen, 20, 1882, p. 147-184.

[SD 2] STAUDE (Otto). *Die Fokaleigenschaften der Flächen Zweiter Ordnung*, Leipzig, 1896.

[SE 1] SERRE (Jean-Pierre). *Corps locaux*, Hermann.

[SE 2] SERRE (Jean-Pierre). *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France.

[SE 3] SERRE (Jean-Pierre). *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W. A. Benjamin.

[SE-TH] SEIFERT (H.) et THRELFALL (W.). *Lehrbuch der Topologie*, Chelsea.

[SF 1] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants of a class of transformation groups*, Aequationes Math., 14, 1976, p. 105-110.

[SF 2] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants à cinq points dans le plan projectif*, C.R.A.S., 285, 1977, p. 127-128.

[SG] SEIDENBERG (A.). *Lectures in Projective Geometry*, Van Nostrand.

[SGR] *Séminaire de Géométrie Riemannienne de l'Université Paris VII*, 1970-1971.

[SK] SPIVAK (Michael). *Differential Geometry, volume II*, Michael Spivak.

[SL 1] SALLEE (G. T.). *Maximal areas of Reuleaux polygons*, Canadian Math. Bull., 13, 1970, p. 175-179.

[SL 2] SALLEE (G. T.). *Reuleaux polytopes*, Mathematika, 17, 1970, p. 315-323.

[SN] STEIN (S. K.). *Tiling Space by Congruent Polyhedra*, Bulletin of the A.M.S., 80, 1974, p. 819-820.

[SO] SANTALO (L. A.). *Introduction to Integral Geometry*, Hermann.

[SR] SPANIER (E.). *Algebraic Topology*, McGraw Hill.

[S-T] SNAPPER (Ernst) et TROYER (Robert J.). *Metric Affine Geometry*, Academic Press.

[STE] STEFFEN (Klaus). *A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices*, preprint, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette.

[ST-RA] STEINITZ (E.) et RADEMACHER (H.). *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Springer.

[SU] SAMUEL (Pierre). *Unique Factorization*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 945-952.

[SW] STEWART (Ian). *Galois Theory*, Chapman and Hall.

[TG] *Seminar on Transformation Groups*, by Armand BOREL, Annals of Mathematical Studies, nº 46, Princeton.

[TM] THOM (René). *Sur la théorie des enveloppes*, J. de Math. pures et appl., 16, 1962, p. 177-192.

[TS] TITS (Jacques). *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer Lecture Notes in Mathematics, nº 386.

[VE] VALENTINE (Frederik A.). *Convex Sets*, McGraw Hill.

[VG 1] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math Ver., 46, 1936, p. 229-231.

[VG 2] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1937, p. 159-160.

[VL] DU VAL (Patrick). *Homographies, Quaternions and Rotations*, Oxford University Press.

[VN] VALIRON (Georges). *Equations fonctionnelles. Applications*, Masson.

[V-Y] VEBLEN (O.) et YOUNG (J. W.). *Projective Geometry*, deux volumes, Ginn and Co.

[WF] WOLF (Joseph A.). *Spaces of Constant Curvature*, [illegible] Wolf.

[WK] WALKER (R. J.). *Algebraic Curves*, Dover.

[WL] WEYL (Hermann). *Symmetry*, Princeton University Press.

[WN] WENNINGER (Magnus J.). *Polyhedron Models*, Cambridge University Press.

[WO] WONG (Yung-Chow). *Isoclinic n-Planes in Euclidean 2n-Space, Clifford Parallels in Elliptic (2n − 1)-Space and the Hurwitz Matrix Equations*, Memoirs of the A.M.S., nº 41.

[WR] WARNER (Frank). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott-Foresman.

[Y-B] YAGLOM (I. M.) et BOLTYANSKII (V. G.). *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston.

[ZN] ZISMAN (Michel). *Topologie algébrique élémentaire*, Armand Colin.

[ZR] ZWIKKER (C.). *The advanced Geometry of Plane Curves and their Applications*, Dover.

目 录

第18章 球　　面

除子空间以外，球面是欧氏仿射空间中最简单的图形，因此在数学上和实际应用(如航海学、天文学和机械学)中，很自然到处都要遇到球面. 在这一章中，我们要给出有关球面性质的多种多样的例子. 我们多次用到了越出本书的初等范围的概念：积分、微分几何等等，以期由此激发起读者的兴趣，去了解这些理论的进一步阐述. 本章中的结果，有些是初等的，有些比较复杂，但在我看来除了 18.8 和 18.10 两节的结果以外，所有的结果都是自然的、直观的，而那两节的结果则能帮助读者有效地将视野扩展到维数 1，2，3 以外. 与第 10 章不同的是，所有的结果都只与球面本身有关，而与外围空间无关.

18.1 节讨论了一些实际问题，如球径计和图；数学家则会遇到球极投影，它在后面将起主要作用. 18.2 节自由地运用代数拓扑的概念，在球面上不加证明地得出了一些很细致的结果，我认为如若不用这些简洁而精巧的概念，要讨论球面是很困难的.

在18.3 节中，我们将球面看作微分流形，这一结构使我们能很容易地构造出球面的规范测度，对 S^2 而言这就是地球上的测度. 一个关键的公式是 Girard 公式，即球面三角形的面积等于内角之和减去 π. 18.4 节定义了球面 S^d 上的内蕴距离，它定义为两点间最短道路的长度，而不是没有实际意义的 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的诱导距离；我们在球面 S^d 上研究一点到另一点的最短道路，有时这是一个实际问题. 为了能利用内蕴距离进行计算，或者说为了在天文学中计算角度，我们需要球面三角形的有关公式. 在18.6 节中给出了相当完备的公式表，并讨论了这些公式的实际应用.

这一章的最后部分，又回到了数学味更浓的讨论. 先是在18.7 节中，我们证明了 Cauchy 的一个精巧的引理，它是12.8 节中

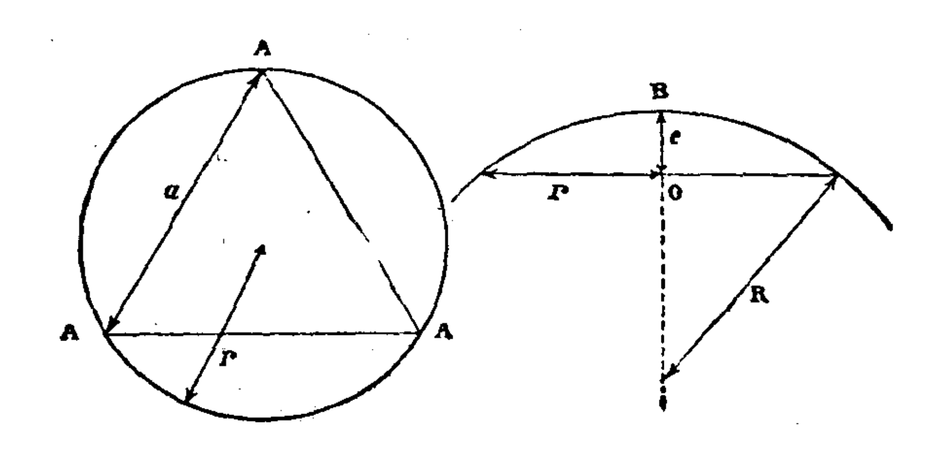
凸多面体刚性定理的证明的关键．随后，18.8 节是对 S^3 的几何学的很细致的讨论．这种细致的讨论，对于了解 S^3 球面和 Hopf 纤维化的直观形象是很有裨益的．事实上，S^3 的这一构造是一种更一般构造的最简单的情况，在几何和微分拓扑中我们随处会遇见这种构造，在代数拓扑中也是如此．通过球极投影，我们可从 S^3 的性质推出 $\mathbf{R}^3$ 的旋转环面的一些证明并不显豁但很直观的性质．

18.10 节引入的 Möbius 群，可能会使读者感到很突兀，觉得不自然．实际上，这个群是第 19 章讨论双曲几何的一半篇幅以及整个第 20 章的基础．在18.10 节中，我们研究了这个群在 S^d 上的自然作用，这个作用除了其固有的几何上的趣味之外，还是很多新近结果的基本工具．

> 在整个这一章中，$S=S^d$ 表示欧氏空间 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的单位球面．

18.1 定义，特殊维数，图和射影

18.1.1 初注；球径计． 具有相同维数的欧氏空间中的所有球面都是彼此相似的，这就是为什么在这一章中我们仅仅研究标准欧氏空间 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的标准球面 $S=S^d$ 的缘故．要将本章的结果和公式推广到任意给定半径的球面上去是很容易的．



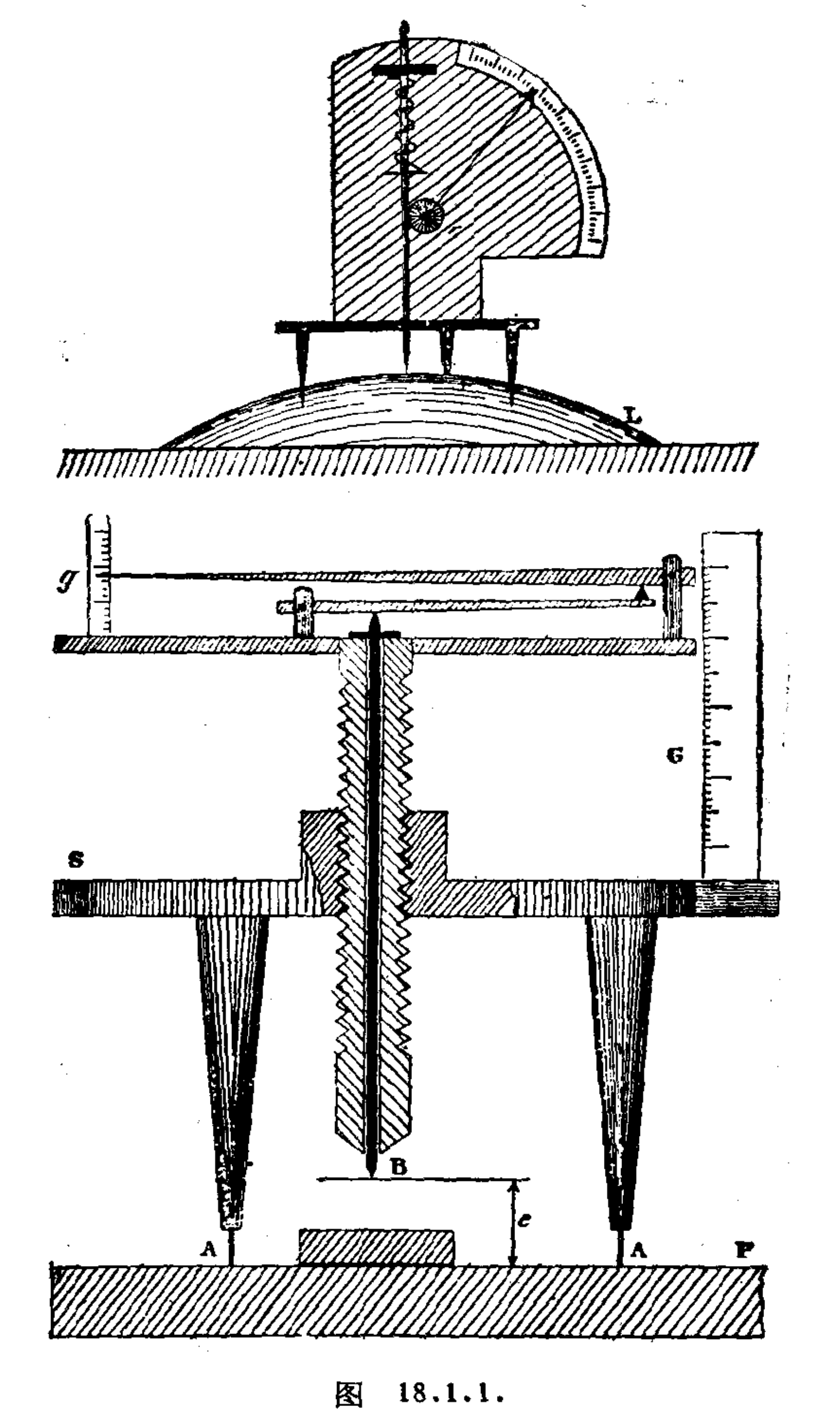
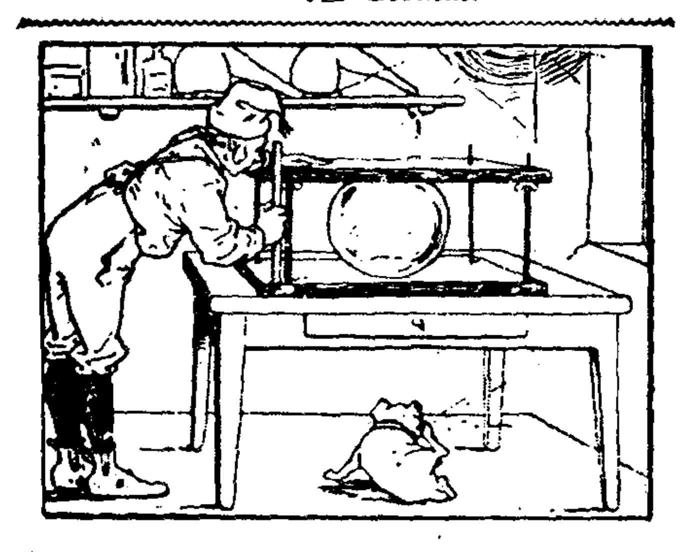


图 18.1.1.

H. Bouasse, «测量仪器», Delagrave, 1917.

我们先来谈一个实际问题，即要求出一个“实心”球(例如钢球或光学透镜的曲面)的半径，为此我们利用**球径计**(图 18.1.1)．如果底面的等边三角形具有相等公共长度 a 的边，且浮针到底部平面的距离为 e，则所求半径等于 $R = (a^2 + 3e^2)/6e$． 球径计的另一模型如图 18.1.2 所示．

巧匠 Cosinus.



Cosinus 测量球体的直径精确到 3 至 4 厘米. 他量得的直径等于 0.30 米. 只有在他觉得无兴趣操作时，才量得精确度不很高的扁球体.

图 18.1.2.

Christophe, «巧匠 Cosinus 的执着想法», Armand Colin.

18.1.2 定义

18.1.2.1 S 与 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的 $k+1$ 维向量子空间的交称为 S 的**子球面**(**k 维子球面**). 若 $k=1$, 往往就称为**大圆**. 若 x, $y\in S$, 且 $y\neq\pm x$, 则存在包含 x 和 y 的唯一大圆.

18.1.2.2 S 与 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的 $k+1$ 维仿射子空间的交称为 S 的**小球面**(**k 维小球面**). 对 S^2, 我们称之为 S 的**圆**(或小圆).

18.1.2.3 S 的**北极**是点 $n=(0,\cdots,0,1)$, **南极**是点 $s=(0,\cdots,0,-1)$, **赤道**是 S^d 与 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的超平面 $x_{d+1}=0$ 交成的 $d-1$ 维子球面.

18.1.2.4 S^d 在 x 处的**切超平面**, 或者是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的向量子空间 $x^{\perp}$, 或者是通过 x 且沿方向 $x^{\perp}$ 的仿射超平面, 我们将它记为 T_xS (参看 10.7.4 和 18.3.2). 它的元素称为 S 在 x 处的**切向量**. 同一点 x 处的两个非零切向量的**夹角**定义为 8.6.3 的角, 这个角属于 $[0,\pi]$.

18.1.2.5 S 的**自然拓扑**是由 $\mathbf{R}^{d+1}$ 诱导的拓扑, 我们不考虑

其他的拓扑。

18.1.3 特殊维数

18.1.3.1 维数 1. 关于圆 S^1，我们已经看到它可解释为模是 1 的复数全体所成的乘法群，或 $\mathbf{R}^2$ 的旋转群（参看 8.3）。但它也可以看作 1 维的实射影空间（参看 4.3.6，图 8.7.7.6 和 18.1.4.5）。S^1 赋有一个固有的度量，参看 9.9.8 和 18.4。

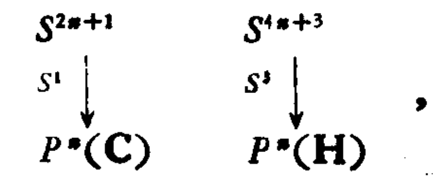
18.1.3.2 维数 2. 从物理上来说，这就是我们所在的行星。就数学上而言，它的基本性质之一是它是一个 Riemann 球面，代表添加了∞点的复数域 $\mathbf{C}$：$S^2 \cong \mathbf{C} \cup \infty$，其中不仅涉及 $\mathbf{C}$ 中的 Alexandrov 紧化，而且涉及一种将全纯函数、亚纯函数等概念推广的做法；见 [CH 2] p. 90。由于我们将在 18.10 中对所有 d 详细地讨论 S^d 的共形变换群，我们将不再更多地强调 S^2 从 $\mathbf{C}$ 所继承的结构。等同关系 $S^2 \cong \mathbf{C} \cup \infty$ 可从 18.1.4.5 得到，这也是 S^2 与一维复射影空间之间的同构，参看 4.3.6。

18.1.3.3 维数 3. 球面 S^3 曾被解释为模等于 1 的四元数全体所成的乘法群，关于这一点可见 8.9.1 的附注。我们将在 18.8 中详细地研究 S^3。

18.1.3.4 维数 4. 球面 S^4 与四元数体上的一维射影空间是恒同的，参看 4.9.7。

18.1.3.5 维数 6, 7, 15. 由于 Cayley 八元数代数的存在性，这些维数具有一些特殊性质（参看 [PO], p. 278 和 [BES]，第 3 章）。S^7 几乎是一个群，它与模为 1 的八元数全体等同，而 S_6 则与模为 1 的纯八元数全体等同。八元数射影平面可导致纤维为 S^7 的纤维化 $S^{15} \to S^8$，它是纤维为 S^1 的 Hopf 纤维化 $S^3 \to S^2$ 的推广，参看下一小节和 18.8.7。

18.1.3.6 Hopf 纤维化. Hopf 纤维化是对除 S^{15} 以外的球面 S^{2n+1} 和 S^{4n+3} 所定义的；所谓**纤维化**就是指映射



$$S^{2n+1} \xrightarrow{S^1} P^n(\mathbf{C}) \qquad S^{4n+3} \xrightarrow{S^3} P^n(\mathbf{H}),$$

它的像是复射影空间 $P^n(\mathbf{C})$ 或四元数射影空间 $P^n(\mathbf{H})$ (参看 4.8). 置于竖直箭头旁边的 $S^1(S^3)$ 意指像集每一点的逆像是同胚于 $S^1(S^3)$ 的;这些映射并不是很奥妙的,对 $\mathbf{C}$ 的情形而言,它只不过是 4.3.3.2 中用到的映射 $p: S \to P(E)$,见 18.11.30.

18.1.4 球极投影

18.1.4.1 S^d 在 $\mathbf{R}^d$ 上的北极球极投影定义如下: 我们按通常习惯将 $\mathbf{R}^{d+1}$ 与 $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ 等同,并将每个 $m \in S^d \setminus n$ 映到 $\mathbf{R}^d$ 的点 $f(m)$ 使得 $m, n, f(m)$ 共线. 下面的计算表明 f 是双射,且逆映射 f^{-1} 作为映射 $\mathbf{R}^d \to S^d$ 是 C^∞ 类的. 我们将 $m \in \mathbf{R}^{d+1}$ 看作为一个对 (z, t), $z \in \mathbf{R}^d$, $t \in \mathbf{R}$; 于是可选取 $\lambda \in \mathbf{R}$ 使 $f(m) = \lambda n + (1 - \lambda)m$, 且 $f(m) \in \mathbf{R}^d$, 其中 $\lambda = t/(t - 1)$, 且

18.1.4.2

$$f: m = (z, t) \longmapsto \frac{1}{1 - t} z,$$

$$f^{-1}: z \longmapsto \left(\frac{2z}{\|z\|^2 + 1}, \frac{\|z\|^2 - 1}{\|z\|^2 + 1}\right).$$

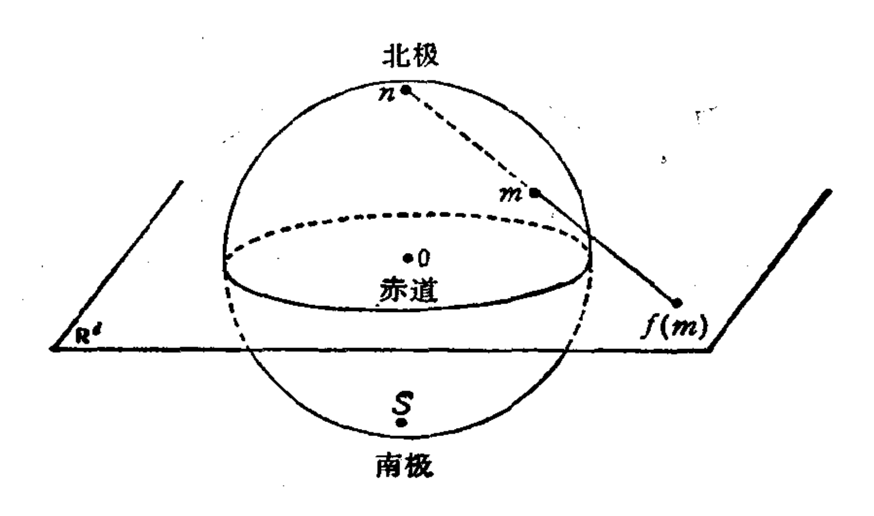


图 18.1.4.1.

18.1.4.3 更一般地我们把每一个映射 $f: S \setminus m \to H$ 都称为 S 的**球极投影**,其中 m 是 S 的点,H 是平行于 S 在 m 处切超平面且异于它的一个超平面. 根据 10.8.2 可知,上述映射 f 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的关于极点 m 的反演变换在 S 上的限制,特别是所有的球极投影都保

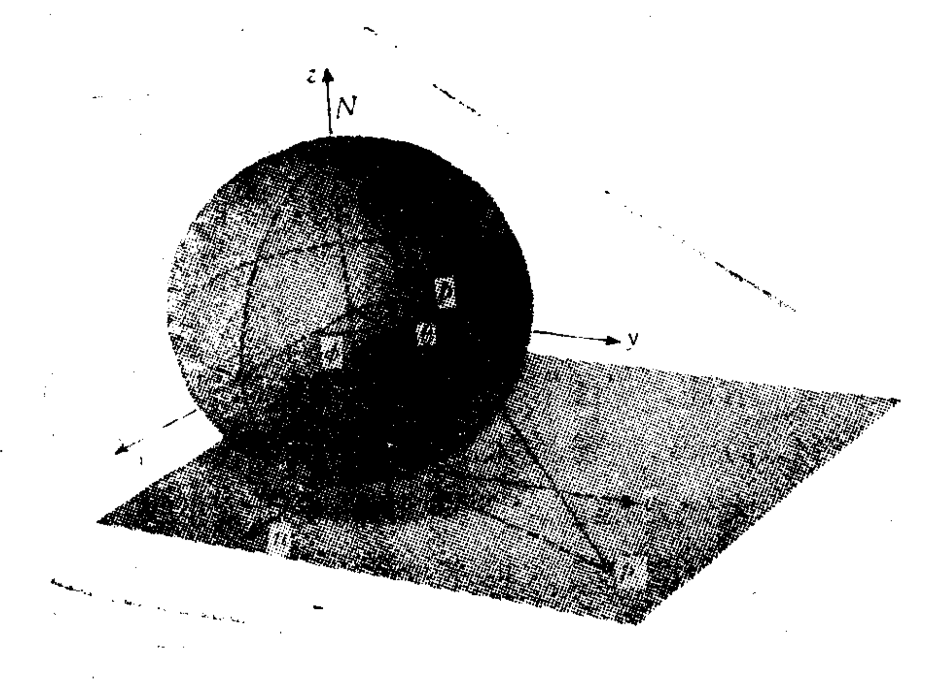


图 18.1.4.2.

持角度（见 18.1.2.4 中明确的定义或 18.10.3 和 18.11.22），且将 $S\backslash m$ 的 $d-1$ 维小球面变换成 H 的球面，参看 10.8.2.

18.1.4.4 如果 f（或 g）是 S^d 到 $\mathbf{R}^d$ 上关于北极（或南极）的球极投影，则 $g\circ f^{-1}:\mathbf{R}^d\backslash 0\to\mathbf{R}^d$ 正好是 $\mathbf{R}^d$ 关于极点 0 的幂为 1 的反演变换.

18.1.4.5 球极投影表明

$$S^1\cong\mathbf{R}\cup\infty=\tilde{\mathbf{R}}\cong P^1(\mathbf{R})$$

和

$$S^2\cong\mathbf{R}^2\cup\infty\cong\mathbf{C}\cup\infty=\mathbf{C}\cong P^1(\mathbf{C})，参看 4.3.8.$$

地 图 的 绘 制

在 18.1 节所有余下部分中我们假设 $d=2$，且置 $S=S^2$.

18.1.5 图

18.1.5.1 我们把 S 的一个子集 A 和一个单射 $f:A\to\mathbf{R}^2$ 所组成的 (A, f) 偶称为 S 的图. f 往往还是 A 到 $f(A)$ 上的一个同

胚．例如，球极投影 18.1.4.3 总是图，其中 $A = S\backslash m$．但我们可以看出不存在整个 S 的图，即不存在同胚 $f:S \to f(S) \subset \mathbf{R}^2$．为看出此结果，设 x 属于 S，则根据假设和 18.2.6.5，可知对所有 $x \in S$ 而言 $f(S\backslash x) = f(S)\backslash f(x)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的开集，然而这与下面的事实矛盾：$f(S)$ 作为内部非空的紧集肯定不再有边界点（如有需要可参见 11.2.9）．

18.1.5.2 附注．“图”这个词有许多意思，其中最理论化的是上述的 (A, f) 偶，而最具体的则是一纸黑白或彩色的图片．

18.1.5.3 大地水准面． 现在我们要研究的 S 不是别的球面，而是地球！更确切地说是大地水准面，即在其每点处都垂直于重力线（且通过一个参照点）的一个曲面．当然，这个大地水准面是同胚于 S 的．往后我们只用到它是双射，但要求图能保持 S 的度量和角度性质；而对 18.4 中所定义的 S 的规范度量而言，大地水准面是不等距于 S 的（甚至在不计相差一个数量时也不等距）．实际上唯一可考虑的合理的近似是将其作为一个旋转椭球面，它的长半轴 $a = 6378388$ 米，短半轴 $b = 6356912$ 米，因此扁度 $\frac{a-b}{a} = 1/297$．然而，今后我们研究的只是 S，而不是大地水准面；当然，在实用时应该对下面的结果作某些修改．因此读者也可领略一点实际计算的复杂性，Mercator 横向射影（参看 18.1.8.4）中纬线和经线的方程以及大地水准面的相应计算就是一例；这种计算是 Gauss 就已经会做的．

18.1.5.4 有关地图绘制术的参考文献是：[CN] 包括相当一般的结果，但欠详细，[HOL] 中第 II 章已更数学化，[LS] 中第 IV 章包含许多关于 Lambert 射影、通用 Mercator 横向射影的数学内容以及大地水准面的有关内容，最后可参见 John Milnor, A problem in cartography, American Mathematical Monthly, **76**(1969)，第 1101—1102 页．

18.1.6 地球坐标图

18.1.6.1 对点 $m \in S$，称实数

$$\theta(m)=\frac{\pi}{2}-\widehat{(\overrightarrow{0n},\ \overrightarrow{0m})}$$

为纬度；赤道上的点是纬度为 0 的点，北极和南极的纬度分别是 $\pi/2$ 和 $-\pi/2$。如果 $m\in S\backslash\{n, s\}$，称定向直线所夹的定向角 $\widehat{\overrightarrow{0a},\ \overrightarrow{0m'}}$ 的测度（取值于 $-\pi$ 和 π 之间）为 m 的经度，其中 $a=(1, 0, 0)$，m' 是 m 在 x, y 平面上的射影. 除非 m 属于以 n, s 为端点且通过 $(-1, 0, 0)$ 的半大圆 Γ，m 点的经度 $\varphi(m)$ 是唯一确定的；n, s 的经度是在 $[-\pi, \pi]$ 中完全不定的，而对 Γ（半大圆 Γ 是"国际日期线"）的其他点，其经度可取值为 π 或 $-\pi$。

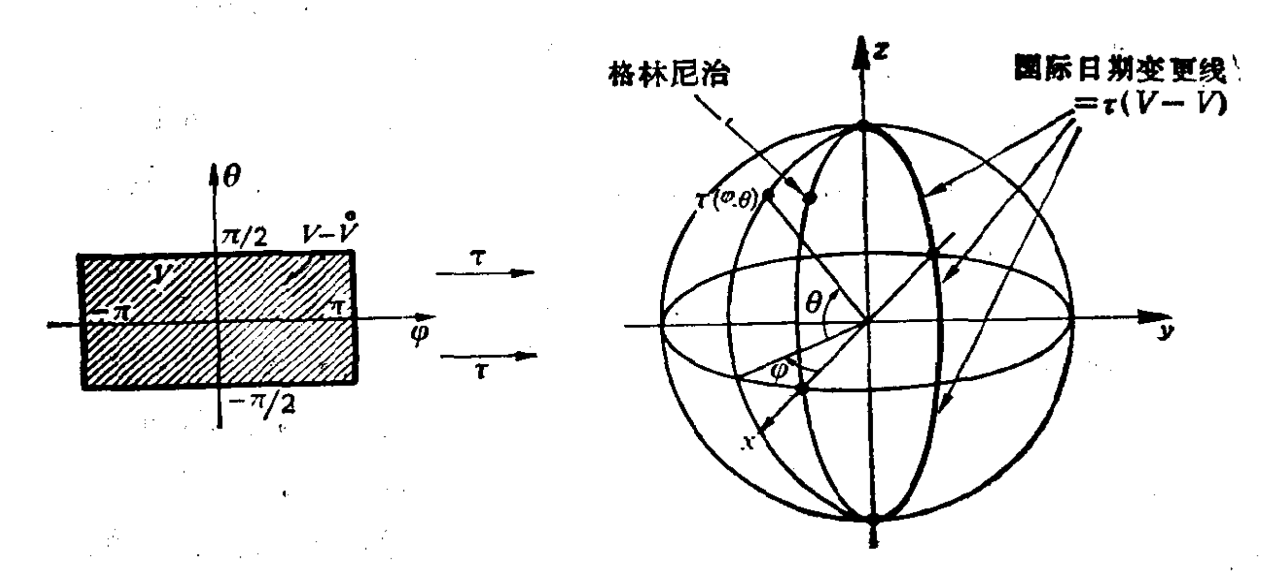


图 18.1.6.1.

Berger, Gostiaux,《微分几何》, Armand Colin 出版社,大学丛书

我们称 $(S\backslash\Gamma, f_0)$ 偶为地球坐标图，其中 $f_0(m)=(\varphi(m), \theta(m))\in\mathbf{R}^2$；它的像是矩形

$$\left]-\pi, \pi\right[\times\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

映射 $\tau=f_0^{-1}$ 由下式定义：

18.1.6.2 $\tau(\varphi, \theta)=(\cos\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\cos\theta,\ \sin\theta)\in\mathbf{R}^3$.

记住，S 的经线和纬线分别是经度和纬度等于常数的曲线。

18.1.6.3 对大地水准面我们也可以（而且应该）定义地球坐标；对于经度，那是没有什么问题的，对于纬度则可取法线与赤道

平面所成的角，这也就是说纬度是通过重力线给出的。

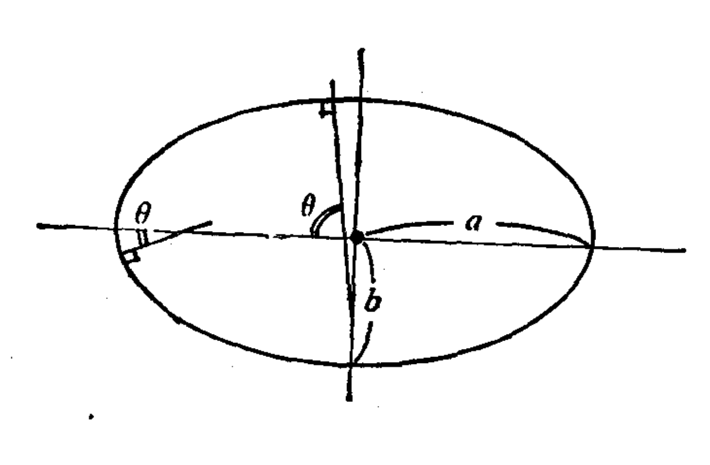


图 18.1.6.3.

18.1.6.4 实际上，S(或地球)的几乎所有的图 f，都不是通过映射 f 本身，而是通过映射

$$g = f \circ \tau = f \circ f^{-1}$$

(参看 18.1.6.2)给出的，这个映射具有如下形式：

$$x = u(\varphi, \theta),$$
$$y = v(\varphi, \theta).$$

18.1.6.5 对于大地水准面，应该选择一个原点，以便知道什么地方经度为 0；实际上这就是格林尼治经线(见图 18.1.6.1)，它的一个好处是让国际日期变更线落在太平洋中间，从而避免了太过份的笑话。

18.1.7 对图的要求

18.1.7.1 不仅集合论学者，而且每个步行者，每个在陆地经商或是航海的人，都必须在图中计算距离(对度量的，见 18.4)、面积(对规范测度的，见 18.3.7) 和角度(参看 18.1.2.4)。看来距离是最重要的(考虑到腿的疲劳，煤油的价格等等)，因此我们希望 S 在 A 上的诱导度量和 $\mathbf{R}^2$ 在 $f(A)$上的诱导度量之间有一些(不计数量差别的)等距图。然而遗憾的是，我们在 18.4.4 中会看到不论 S 的开集 A 有多小，都不存在任何一个这样的图。

18.1.7.2 但是，却存在一些共形图，也就是保持角度的图(若有需要可参看 18.10.3 中的明确定义)：例如球极投影，参看 18.1.4.3。因为利用 $\mathbf{R}^2$ 的一个局部共形映射，例如 $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ 的任一全纯函数，总可构成一个球极投影，所以共形图是很多的，见 9.5.4.3。

18.1.7.3 这些共形图——我们所用的大多数是这种图——并不是出于不得已而选用的。理由如下：在 $m \in A$ 处，共形图 (A, f) 将一个仅与 m 有关而与 m 处的切方向无关的系数 $k(m)$ 乘

到无穷小的长度上．由于实际上我们经常是在 S 的很小的区域 A 内研究问题，故若这图不是太不正规的话，在 A 的一个小区域内系数 k 的变化是很小的，于是我们可以通过修正的方法充分近似地计算出长度和面积．

显然也存在不改变面积的图，称为等面图，18.11.27 中给出了一个例子．

18.1.8 几种不同类型的图

18.1.8.1 附注． 其实所有的图都可称为射影，其原因在于最初的图实际上就是由从 $\mathbf{R}^3$ 的一点出发，S 在 $\mathbf{R}^3$ 中到一平面上的射影来定义的，例如就象球面投影的情形那样．正如 18.11.27 中的"柱面射影"那样，上述意义可以推广到在一个柱面上的射影，然后我们可将这柱面展开成平面．

现在我们沿用"射影"这个词，但从下面的 Mercator 图开始就已经不是空间射影的问题，更不必说实际上我们研究的还是大地水准面了（参看 18.1.6.3）．

18.1.8.2 古典 Mercator 射影． 它定义为（当然不计数量因子的差别）在 18.1.6.4 的意义下具有形式 $(\varphi,\theta)\longmapsto(\varphi,V(\theta))$ 的共形图；由此可唯一地决定函数 V．这个图 f 的反函数 F 应形如

$$F:(u,v)\longmapsto\tau(u,W(v)),$$

其中 τ 是映射 18.1.6.2，而 $W=V^{-1}$．我们看到偏导向量 $\partial F/\partial u$，$\partial F/\partial v$ 满足

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}\middle|\frac{\partial F}{\partial v}\right)=0,\ \left\|\frac{\partial F}{\partial u}\right\|=|\cos W|,\ \left\|\frac{\partial F}{\partial v}\right\|=|W'|.$$

图为共形的充要条件是 $W'=\cos W'$，它的解是原函数 $t\longmapsto1/\cos t$ 的反函数，于是

$$V(\theta)=\log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

换句话说，Mercator 射影是将纬线和经线表示为互相垂直的直线，且沿赤道等距的唯一的共形图．对 18.1.7.3 中的 k 变化不太

大的航行而言，不论在航海或航空中这都是一张至关重要、非常有用的图。实际上经线和纬线就是正交的坐标直线；由于还是共形的，可知按不变航向行驶的轮船或飞机的轨线是图上的**直线**，因此可以用直尺画出这轨迹，而它们就是轮船或飞机在某一段时间内航行的轨迹：驾驶员让罗盘指着船长或机长指定的方向。

在球面上，这些轨迹（也就是与所有经线交成固定角的曲线）称为**斜驶线**；它们关于 (φ, θ) 的方程就是

$$\varphi = \alpha \log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \beta \quad (\alpha, \beta \in R).$$

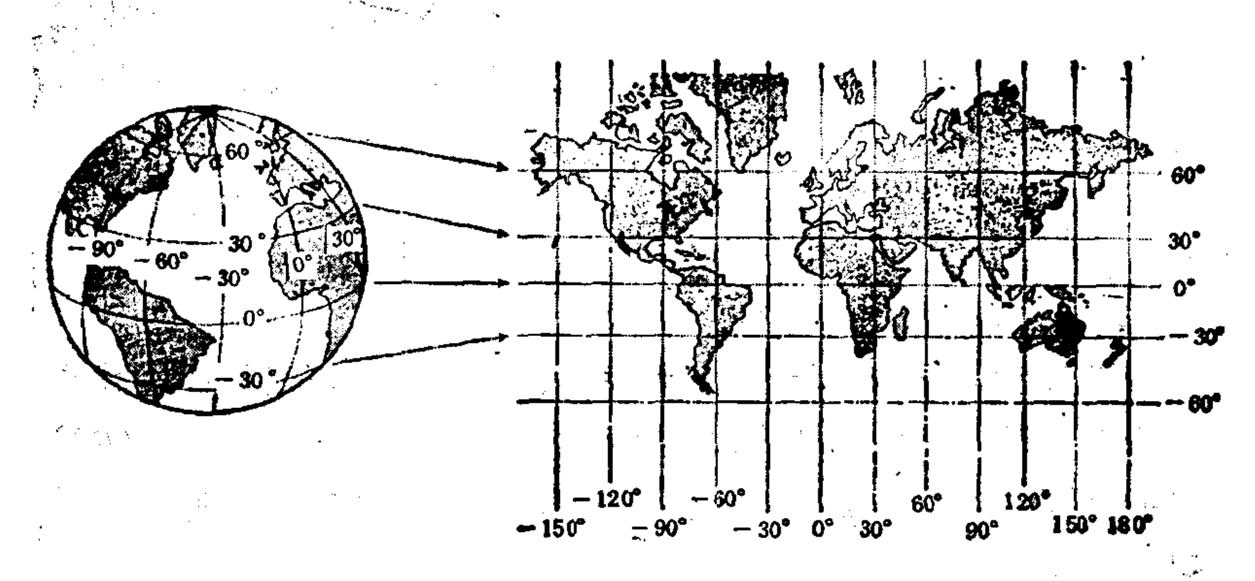


图 18.1.8.2. Mercator 射影

18.1.8.3 横向或斜向的 Mercator 共形射影. 古典 Mercator 图在接近极点时对系数 k 而言是十分糟糕的，因为在那里 k 趋向无限大因而变化很大，因此，距离和面积的问题实际上是没法在保证精确度的前提下得到解决的；相反地，我们注意到古典 Mercator 图在赤道附近是极好的，因为在那里系数 k 有一极小值且变化很小（"一个函数在极值点邻近变化甚微"）。

如果我们想要在 S 的任意一点处实现这一点，也并无任何困难：我们可以通过一个旋转（因而是等距变换）将点转到赤道上；显然纬线和经线在图上从理论上说是很不好看的曲线，而实际上在一个小区域里却几乎是一些直线。如果说我们可以从直观上这

样来看古典 Mercator 图：沿着赤道作外切于 S 的圆柱面，将球面射影到它上面，但与此同时改变纬度以保证图是共形的，最后展开这圆柱面，那么斜向 Mercator 射影（横向 Mercator 射影是它的一个特例）就可以看作沿有待绘制地图的球带内的任一大圆进行类似的程序．我们有时也用通过交球面于两个小圆的圆柱面所得到的图，这时沿着两个小圆就有一个等距．所有这些情形给出的都是共形图．

目前在世界上用得最多的射影是横向 Mercator 射影，即对沿经线与球面外切的圆柱面所作的射影．有时也称之为 Gauss 映射，现在用缩写 MTU (Mercator transverse universal, 即通用横向 Mercator 射影）表示，例如，瑞士联邦地图测绘局目前采用的就是这种系统．利用格林尼治经线作为相切的经线（见 18.1.6.5），则相应于此图的公式 18.1.6.4 是

18.1.8.4

$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos\theta\sin\varphi}{1-\cos\theta\sin\varphi}\right), \quad y = \mathrm{Arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\sin\varphi}\right).$$

与 MTU 有关的数学计算，可见 [HOL] 第 II 章，其中讨论了球面的情形；对大地水准面的情形，计算更为复杂，但在数学上也更有兴趣，可参看 [LS] 的第四章．

18.1.8.5 Lambert 共形射影． 其想法是改造古典 Mercator 射影，但要使经线和纬线仍然是 $\mathbf{R}^2$ 中的简单曲线．除了一族平行直线和它们的正交直线以外，最简单的系统就是取同心圆以及过这些圆的中心的直线，我们完全可以这么说：我们是在 $\mathbf{R}^2$ 的极坐标 r 和 α 中研究问题．关于 Lambert 射影，类似于 18.1.6.4 的公式形如：

$$(\varphi,\theta)\longmapsto(r(\varphi,\theta)=\Xi(\theta),\ \alpha(\varphi,\theta)=\varphi\sin\theta_0),$$

其中 θ_0 是所讨论处的纬线的纬度，待定的函数 Ξ 应使图是共形的．沿着所考虑的纬线是等距的；利用 18.1.8.3 的直观语言，我们可以说：将 S 投影到沿有关纬线与 S 相外切的圆锥面上，再将这圆锥面展开到平面上，然后通过一个函数适当调整极径而使投影

是共形的。 因此，经线成为直线，而纬线成为正交圆。 如同对 Mercator 射影那样，我们也可以考虑与球面交于两条纬线的圆锥

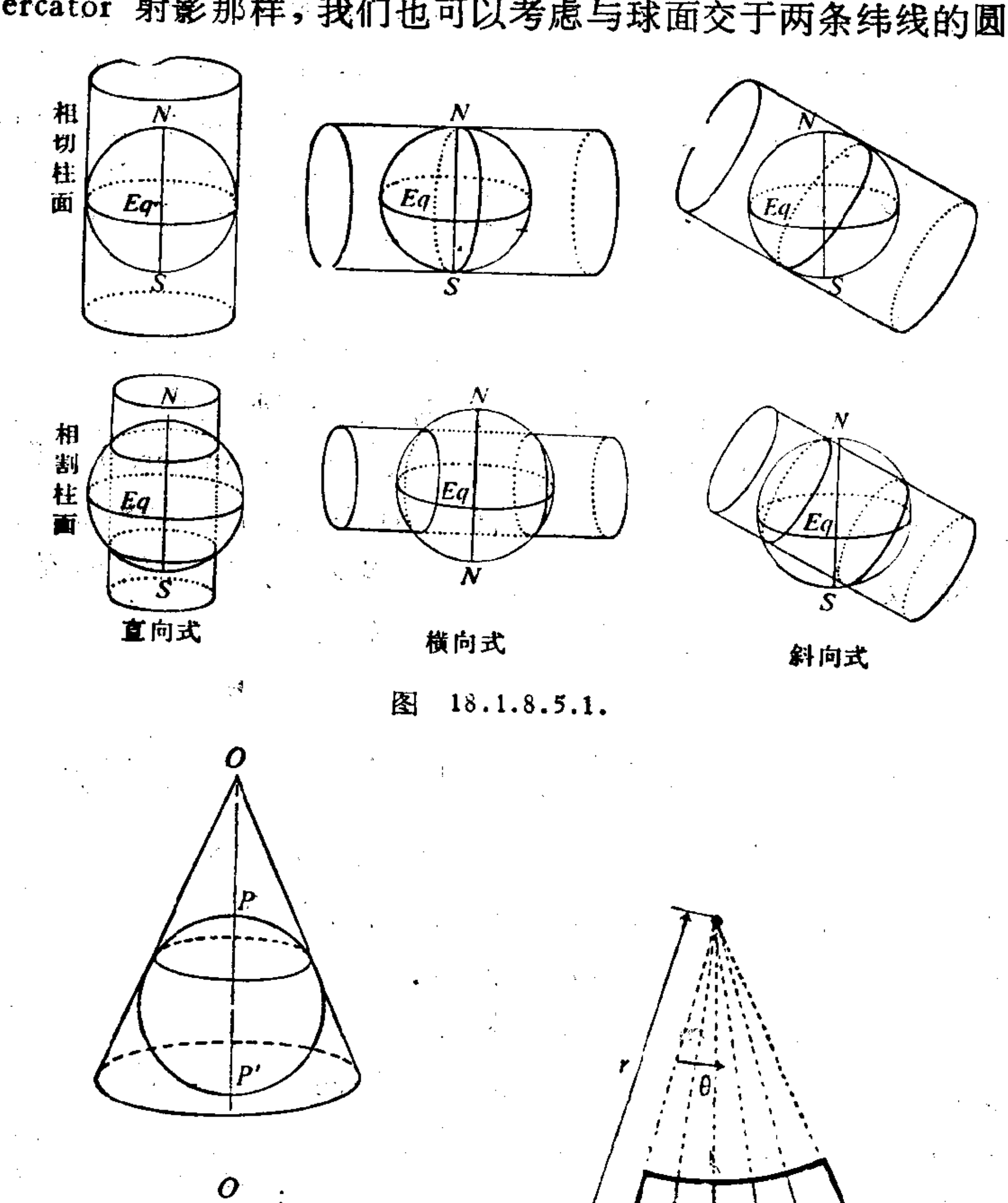


图 18.1.8.5.1.

图 18.1.8.5.2.

面。

法国现行的地图绘制采用 Lambert 射影;全法国由三个射影覆盖,其中每个盖住三度的球带,18.1.7.3 中系数 k 的最大值和最小值之比小于 1.10^{-3}。如果读者有疑问,可以凭目测或借助于直尺验证在 I. G. N. 的图上纬线不是直线。

有关 Lambert 射影的数学计算可参看 18.1.8.4 末尾所列的参考文献。

18.1.8.6 球极射影. 球极射影不仅仅对数学工作者有用(例如见 18.10.2),在适当地绘制两极附近区域即穹顶区域的图时也要用到它(从极点作的球极射影)。球极射影是共形图;经线映成相交于极点的直线,且根据 18.1.4.3 球面的所有大圆都映成圆。

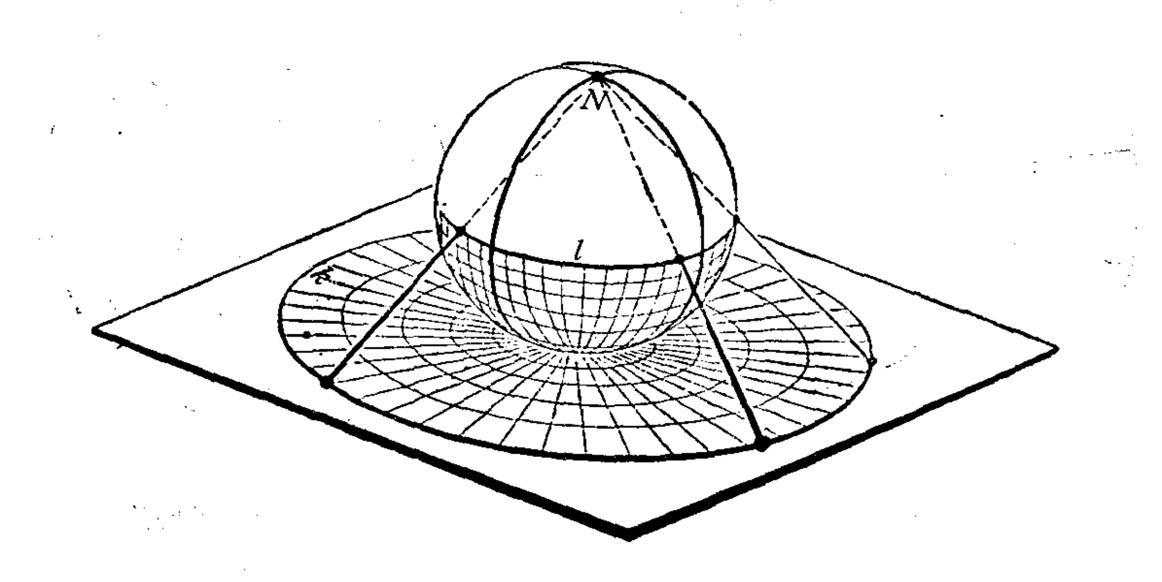
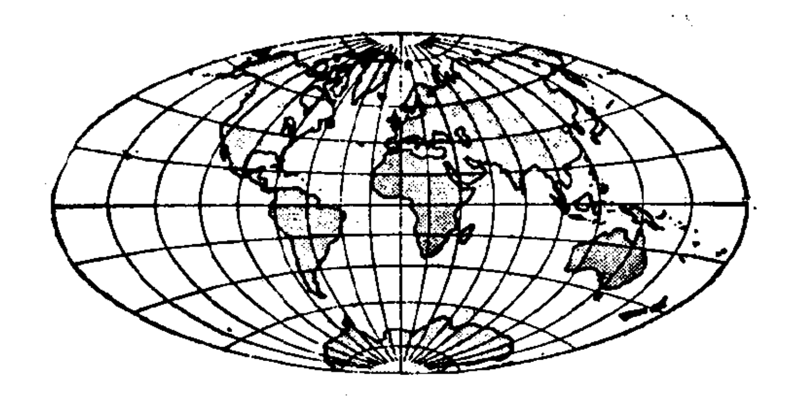


图 18.1.8.6.

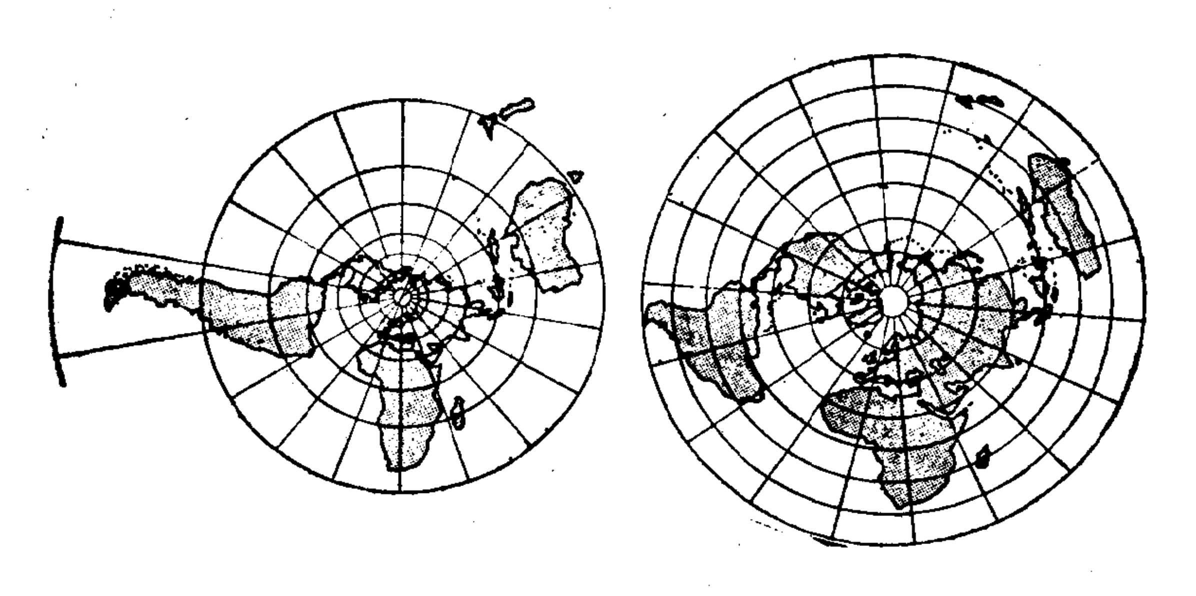
Hilbert. Cohn-Vossen,«直观几何», Chelsea.

绘制地图所用测度的精确性,以及对地图提出的越来越高的精确度要求,使覆盖法国的三组 Lambert 射影的衔接误差越来越显得不可容许了,怎样用单独一个(从新西兰作的!)球极射影来覆盖法国,这是一个问题。

18.1.8.7 其他系统. 上述讨论表明,任何整个地球的图总是在某些部位有缺陷的;然而这个问题却引发了大量富有创见的想法,下面的图给出其中的一些例子。

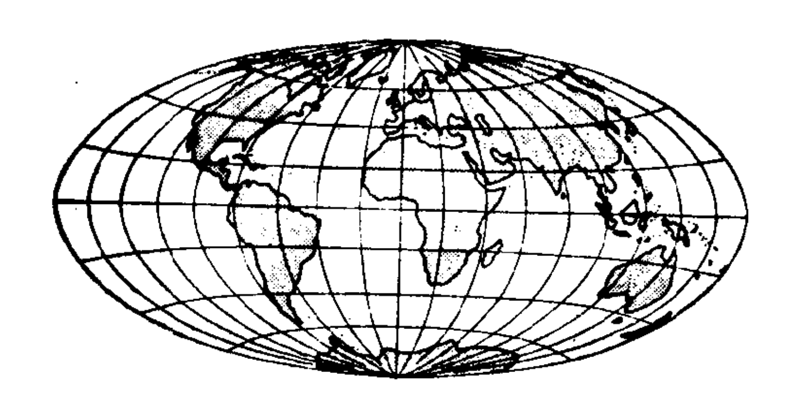


360°展开的横向 Lorgna 射影
(Hammer-Aitoff 变换)

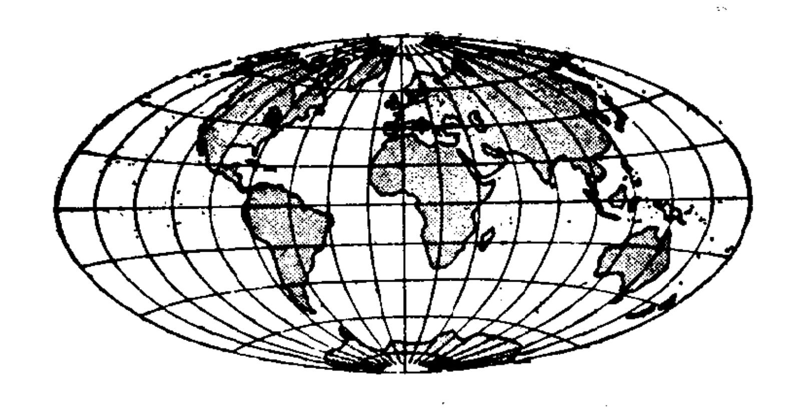


球极射影外推法
(直向式)

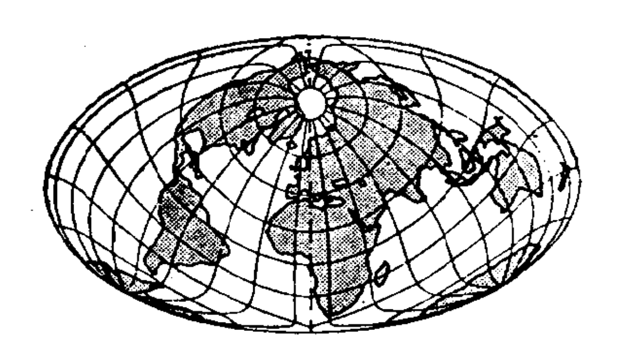
G. Postel 射影外推法
(直向式)



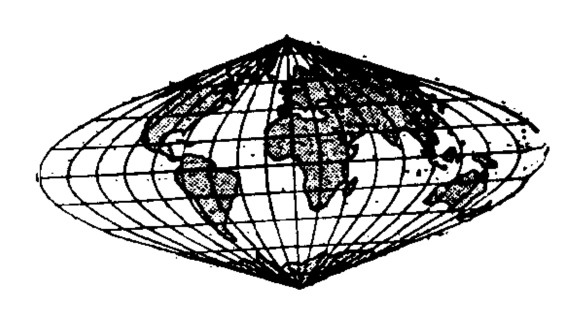
360°展开的横向球极射影图



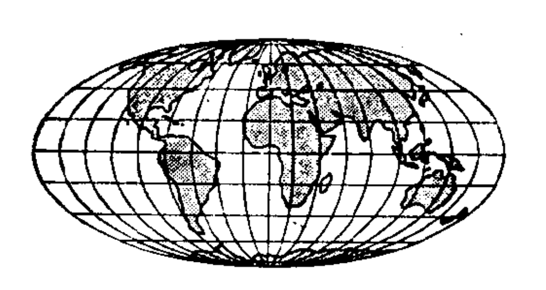
360° 展开的横向 G. Postel 射影
(Aïtoff 变换)



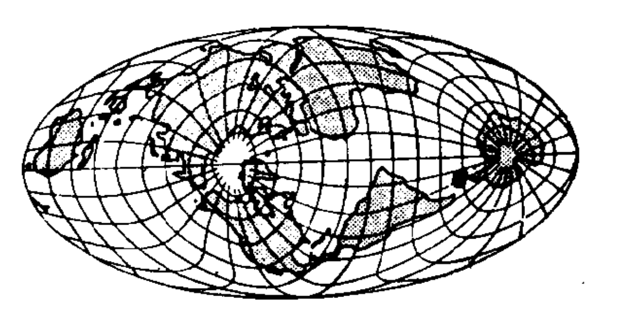
Briesemaister 射影



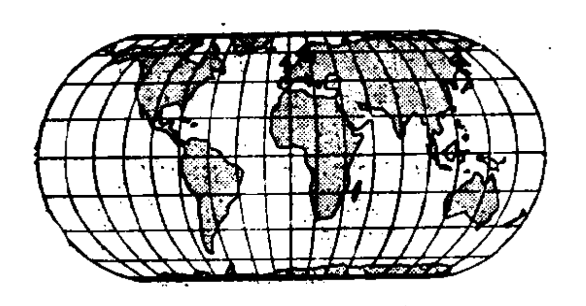
Sanson-Flamsteed 射影



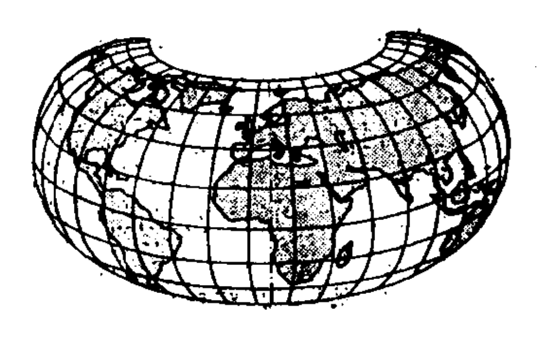
Mollweide 射影



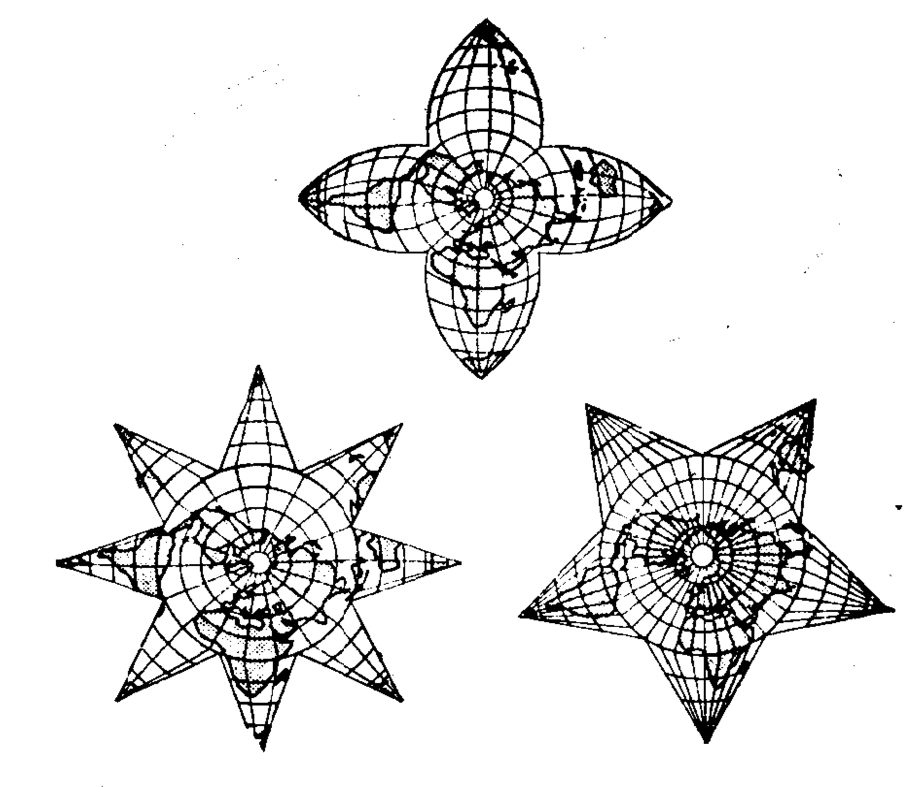
Bartholomew 的"Atlantis"射影



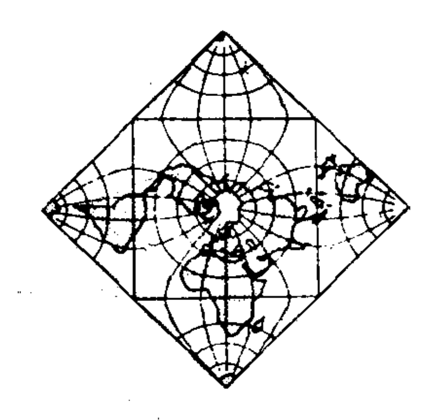
Eckert IV 射影



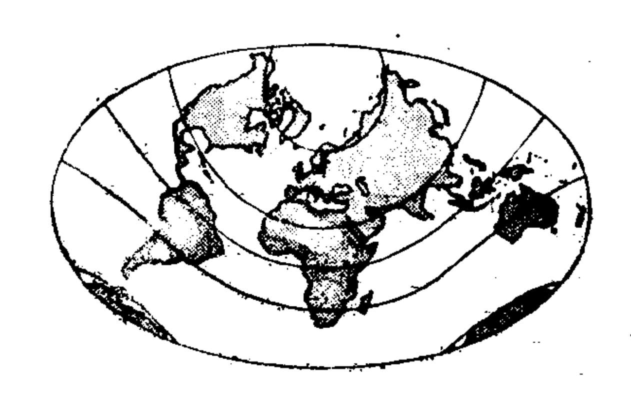
Raisz 的"amardillo"射影



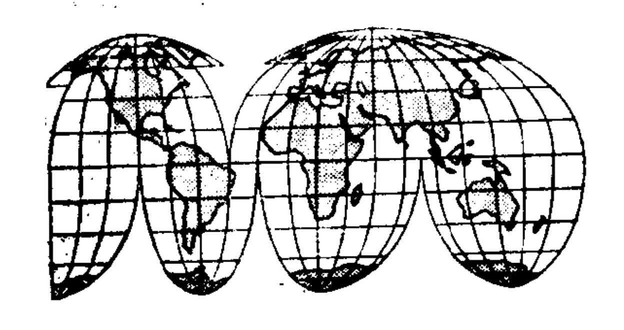
星形射影



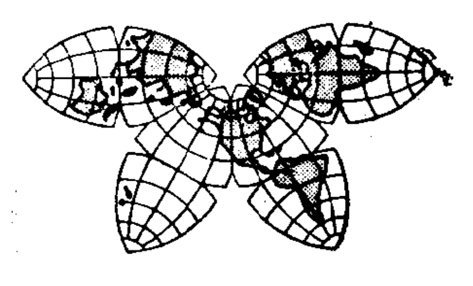
Peirce 周期性射影



Bertin 补偿射影



Goode 不连续射影



Cahill 不连续射影

R. Cuénin, «一般地图绘制»,第一卷, Eyrolles.

18.2 拓扑和代数拓扑

18.2.1 命题. S^d 在每一点处局部同胚于 $\mathbf{R}^d$,因而是局部连通的; S^d 是紧致的. 若 $d \geqslant 1$, S^d 是弧连通的.

由图的存在性,例如球极射影(参看 18.1.4)的存在性,即得第一个断言. S^d 作为 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的有界闭集, 必是紧致的. 为了证明 S^d 是弧连通的,由于 S^d 的任意二点至少属于 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的一个二维向量子空间,因而只需知道 S^1 是连通的就够了,参看 8.3.8.

讨论连通性(一般拓扑)以后,还要讨论单连通性(代数拓扑),也就是要讨论基本群 $\pi_1(S^n)$ (对这一概念,可见 [ZN], 第 2 章),对此我们有

18.2.2 命题. $\pi_1(S^1)$ 同构于 $\mathbf{Z}$, 对所有的 $d \geqslant 2$ 有 $\pi_1(S^d) = 0$ (即对 $d \geqslant 2$, S^d 是单连通的).

18.2.3 对 $d = 1$ 的情形及应用,可见 [B-G] 第 289 页和第 9 章, 以及 [CH 2] 第 62 页. 现在假定 $d \geqslant 2$, $U_0 = S \backslash n$, $U_1 = S \backslash s$, 其中 $S = S^d$, n 和 s 是 S 的北极和南极 (参看 18.1.2.3). 我们可假设回路 $f \in C^0([0, 1]; S)$ 对起点 s 有: $f(0) = f(1) = s$, 现要证明 f 同伦于零. 因为 U_0 和 U_1 是 S 的开集, 且 $U_0 \cup U_1 = S$, 故对任何的 $t \in [0, 1]$, 总存在 $V_t \in O_t(\mathbf{R})$ 使 $f(V_t) \subset U_0$ 或 $f(V_t) \subset U_1$. 由于 $[0, 1]$ 的紧致性,我们不妨取有限个这样的 V_t: V_{t_i} $(i = 1, \cdots, m)$, 并去掉那些多余的点, 也就是说, 设有 $f(V_{t_i}) \subset U_0$ (相应地, U_1), 则 $f(V_{t_{i+1}}) \subset U_1$ (相应地, U_0). 由此,最后就得到一个序列 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < 1$, 使对所有 i 成立 $f([t_i, t_{i+1}]) \subset U_0$ 或 U_1. 如果 $f([t_i, t_{i+1}]) \subset U_0$, 我们不去改动它;如果 $f([t_i, t_{i+1}]) \subset U_1$, 且 $n \notin f([t_i, t_{i+1}])$, 同样也不予变动. 相反, 若 $n \in f([t_i, t_{i+1}])$, 则用下面构造的新映射 f'_i: $[t_i, t_{i+1}] \to S$ 来代替 $f|_{[t_i, t_{i+1}]}$. 对南极的球极射影 f_s 而言, $q = f_s \circ f: [t_i, t_{i+1}] \to \mathbf{R}^d$ 是存在的,这是因为 $f([t_i, t_{i+1}]) \subset U_1$. 我们任取不同于 $q(t_i)$, $q(t_{i+1})$, O 的 $w \in \mathbf{R}^d$, 并将 $q([t_i, t_{i+1}])$ 射影

到由 w 和 $q(t_i)$、$q(t_{i+1})$ 所确定的两条半直线上，这样就将 q 连续地变成 q'：$[t_i, t_{i+1}] \to \mathbf{R}^d$ 而使 $O \notin q'([t_i, t_{i+1}])$. 将它与 f_s^{-1} 合成，就得到 f_i':$[t_i, t_{i+1}] \to S$, 使 f_i' 是 $f|_{[t_i, t_{i+1}]}$ 的连续变形，保持端点 $f(t_i)$ 和 $f(t_{i+1})$ 固定，且 $n \notin f_i'([t_i, t_{i+1}])$. 将这些变形的全体粘连起来，就得到 f 的连续变形 f': $[0, 1] \to S$, 使 $f'(0) = f'(1) = s$, 且 $n \notin f'([0, 1])$. 于是我们可考虑 $\mathbf{R}^d$ 中的回路像 $f_n \circ f'$:$[0, 1] \to \mathbf{R}^d$, 由于 $\mathbf{R}^d$ 是平凡单连通的，因此，通过 f_n^{-1} 回到 S 上，就可看出 f' 可连续成一点，从而 f 也同样如此，这就是说 S 是单连通的。

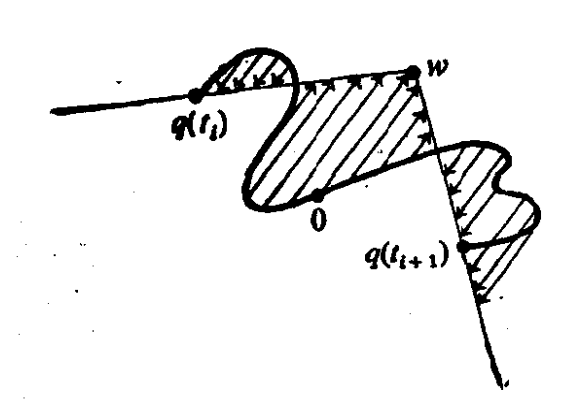


图 18.2.3.

18.2.4 注

18.2.4.1 读者会注意到，18.2.2 不可能证明得更加简单了，因为 $f \in C^0([0, 1], S)$ 的像 $f([0, 1])$ 可能刚好是整 S（试比较 Peano 曲线）. 为了通过球极射影将问题归结为仿射空间的情形，关键是设法使 S 上有一点不在 $f([0, 1])$ 中. 如果 f 是可微的，则 $f([0, 1]) \neq S$, 因为实际上 $f([0, 1])$ 这时是零测度的；18.2.2 的另一证明方法是通过可微的 f 去逼近连续的 f:例如可参看 [GM] 第 17 页.

18.2.4.2 事实上证明 18.2.3 包含了 Van Kampen 的更一般结果的证明的基本思想：参看 [GM] 第 II 章或 [ZN] 第 45 页.

下面的概要论述是从文化背景的角度给出的，有兴趣的读者请参考所提到的著作.

18.2.5 同调，映射度

18.2.5.1 在某些适当的拓扑空间中，我们附加上同调群，这种附加的群是连续映射的函子. 对 S^d 而言，除了 $H_0(S^d)$ 和 $H_d(S^d)$ 都同构于 $\mathbf{Z}$ 以外 $(d \geqslant 1)$，其他所有的同调群 $H_i(S^d)$ 都为零.

$H_0(S^d) \cong \mathbf{Z}$ 这一事实并没有多大意义，它仅仅反映了 S^d 的连通性。相反，$H_d(S^d) \cong \mathbf{Z}$ 跟它在 $d=1$ 时的结论 $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ 一样,有广泛的应用。

18.2.5.2 实际上若设 $f \in C^0(S^d, S^d)$，则由函子性质可以从 f 诱导一个群同态 $f_* \in \mathrm{Hom}(H_d(S^d), H_d(S^d))$。因为 $H_d(S^d)$ 规范地同构于 $\mathbf{Z}$，所以我们可写 $f_*(m) = km$，$k, m \in \mathbf{Z}$，这一整数 k 完全依附于 $f \in C^0(S^d, S^d)$，称为 f 的度并记为 $\deg(f)$。

容易看出映射度具有下列性质：

$$\deg(\mathrm{Id}_{S^d}) = 1,\ \deg(-\mathrm{Id}_{S^d}) = (-1)^{d+1},$$

若 f 是常映射,则 $\deg(f) = 0$，若 f 和 g 是相互可以连续变形的(即是同伦的),则 $\deg(f) = \deg(g)$，若 f 是非满射,则 $\deg(f) = 0$，最后，$\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$。

18.2.5.3 推论. d 为偶数时,在 S^d 上的任何连续向量场ξ: $x \longmapsto \xi(x) \in T_x S^d$ 至少在一点处为零。

利用反证法：若 $\forall x \in S^d$ 有 $\xi(x) \neq 0$，则可将 ξ 单位化：

$$\eta = \frac{\xi}{\|\xi\|}: x \longmapsto \eta(x) = \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|},$$

η 仍是连续向量场,于是可以通过单参数映射族

$$f_t: x \longmapsto \cos t \cdot x + \sin t \cdot \eta(x),\ t \in [0, \pi]$$

将 Id_{S^d} 变形成 $-\mathrm{Id}_{S^d}$。所以

$$\deg(\mathrm{Id}_{S^d}) = \deg(-\mathrm{Id}_{S^d}), \text{与 } \deg(\mathrm{Id}_{S^d}) = 1,$$

$$\deg(-\mathrm{Id}_{S^d}) = (-1)^{d+1}$$

矛盾。

18.2.5.4 例如在地球上总存在一点，在那里风速为零。再如：要将球面 S^2 上的头发梳得一丝不乱是不可能的。

18.2.5.5 对任何奇数 d，在 S^d 上处处不为零的向量场总是存在的：例如在 $d = 2n - 1$ 时可取

$$\xi(x_1, \cdots, x_n) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \cdots, -x_{2n}, x_{2n-1}).$$

对 $n = 2$，这样得到的向量场正是 § 1.2.9 中所描述的作用的轨道的速度向量场,也可参看 18.8.1。

18.2.5.6 推论. 设 $f\in C^0(S^{2n}, S^{2n})$. 若 $\deg(f)\neq -1$, 则 f 至少有一个不动点,即 $\exists x\in S^{2n}\mid f(x)=x$. 特别当 f 同伦于恒等映射时,结论成立(试与 18.2.5.3 比较).

用反证法: 假定 $\forall x\in S^{2n}$ 有 $f(x)\neq x$. 则 $f'=(-\mathrm{Id}_{S^{2n}})\circ f$ 使 $\forall x\in S^{2n}$, $f(x)\neq -x$. 但这时将 x 与 $f'(x)$ 连续地连接起来,因为存在从 x 到 $f'(x)$ 的唯一的大圆弧,这就给出了 f' 和 $\mathrm{Id}_{S^{2n}}$ 之间的一个连续变形,因此

$$\deg(f')=\deg(\mathrm{Id}_{S^{2n}}),$$

与 $\deg(f')=\deg(f)\deg(\mathrm{Id}_{S^{2n}})$ 矛盾.

18.2.5.7 18.2.5.6 的结果还可以利用 Lefschetz 关于映射不动点的一个更一般的结果得出: 例如见 [GG] 第 224 页.

18.2.5.8 在可微映射范围内, 18.2.5 可以处理得更为简单,例如可见 [B-G] 第 273 页.

18.2.6 Jordan-Brouwer 分离定理

在这一节中 $d\geqslant 1$. 仍从同调群 $H_d(S^d)\cong\mathbf{Z}$ 出发,经过一些细致的步骤即可证得(例如可参看 [GG] 第 81 页):

18.2.6.1 定理. 设 V 是 S^d 的同胚于 S^{d-1} 的子集,则 $S^d\setminus V$ 恰好有两个具有公共边界 V 的连通分支.

利用球极射影可得:

18.2.6.2 推论. 设 V 是 $\mathbf{R}^d$ 的同胚于 S^{d-1} 的子集,则 $\mathbf{R}^d\setminus V$ 恰好有两个具有公共边界 V 的连通分支,其中一个分支是相对紧致的,称为 V 的内部,另一个分支是无界的,称为 V 的外部.

18.2.6.3 对 $d=2$, 根据定义 V 就是 $\mathbf{R}^2$ 的简单闭曲线,而 18.2.6.2 就是 Jordan 定理. 对 $d=2$ 这种最简单的情形,可参看 [B-G] 第 339 页或 [DE 7] 第 251 页的初等证明.

18.2.6.4 从 18.2.6.2 容易得到下面的基本结果:

18.2.6.5 定理(区域不变性定理). 设 $U\subset\mathbf{R}^d$ 是连通开集, $f:U\to\mathbf{R}^d$ 是连续单射,则 $f(U)$ 是开集,且 f 是同胚.

18.2.6.6 推论. $\mathbf{R}^d$ 和 $\mathbf{R}^{d'}$ 仅当 $d=d'$ 时才可能局部同胚.

18.2.6.7 注. 结论减弱后证明是初等的：例如 $\mathbf{R}^d$ 和 $\mathbf{R}^{d'}$ 仅当 $d=d'$ 时才可能局部微分同胚(例如参看 [B-G] 第 21 页)，又例如 $d=1$ 或 $d=2$ 的情形，因为若 U 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集，且 $x\in U$，则 $U\backslash x$ 在 $d=1$ 时是不连通的，在 $d\geqslant 2$ 时是连通的，而 $U\backslash x$ 在 $d=2$ 时不是单连通的，在 $d\geqslant 3$ 时则是单连通的.

18.2.7 Borsuk-Ulam 定理. 对任何连续映射 $f:S^d\to\mathbf{R}^d$，至少存在一点 $x\in S^d$ 使 $f(x)=f(-x)$.

其证明可见 [BN] 第 337 页.

18.3 球面作为微分流形；规范测度

18.3.1 在 9.12.7 中我们曾经指出当 $2\leqslant k\leqslant n$ 时对 n 维欧氏空间的"k 维"子集定义测度所存在的困难；凸集（见 12.10）的情形是例外，但也颇为棘手. 我们之所以要利用积分理论和微分子流形理论的一些结果来定义 S 的规范测度，原因就在于此；事实上所有严密的理论都不是一蹴而就的. 另外，S 的规范测度在本书其他章节中仅在 12.7.3.1 中证明 12.7.3 时用到，而对此我们已在 12.7.3.2 中明确地给出过一个初等证明；这就是下面的阐述比较简单的缘故.

18.3.2 球面是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的一个 C^∞ 微分子流形；事实上，球面由方程 $f=\|.\|-1$ 定义，求导即得 $f'(x)=2(x|.)$，该导函数在 S 上恒不为零；因此，S 在 x 处的切空间为 $(f(x))^{-1}(0)=x^\perp$，与 18.1.2.4 一致(参看 [B-G] 第 56 页和第 86 页).

18.3.3 我们记得，T_xS 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 中 S 上的 C^1 类曲线的速率向量集合；关于 S 上曲线的几何学，例如可见：18.1.8.2 中提到过的斜驶线，9.14.34.3 E 中的球面螺线以及 [B-G]，8.7.12 和 9.9.6.

18.3.4 定向. 考虑 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的规范定向，则球面 S 作为球体 $B(0,1)\subset\mathbf{R}^{d+1}$ 的边界容有一个规范定向（参看 [B-G] 第 182 页）. 给出 S 定向的另一方法是利用微分形式；$\mathbf{R}^{d+1}$ 的 d 次微分形式

$$\sigma = \sum_{i=1}^{d+1}(-1)^{i-1}x_i dx_1\wedge\cdots\wedge \hat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_{d+1}$$

在 S 上的限制称为 S 的**规范体积形式**;这个形式 σ 不是别的,正是 S 的单位法向量和 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的规范体积形式

$$\omega = dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{d+1}$$

的内积。对 S^2, 有 $\sigma = xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy$ (上述内容可参看 [B-G] 第 173 页). 例如地球坐标图 18.1.6.1 是正定的(参看 [B-G] 第 174 页),因为我们有

18.3.5 $\tau^*\sigma = \cos\theta d\varphi\wedge d\theta\left(\theta\in\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

18.3.6 形式 σ 完全由 S 确定,所以是规范的;由此可知,它在 $O(d+1)=\mathrm{Is}(S)$ 下是不变的(参看 18.5). 此外,S 上所有次数大于零且在 $\mathrm{Is}(S)$ 下不变的微分形式都与 σ 成比例.

18.3.7 规范测度

18.3.7.1 一个很有启发性的想法是: S 在每点处的切空间都是定向欧氏空间,因而具有规范测度;所以就能在一个适当的意义上对它积分. 例如,如果 $h: U\to\mathbf{R}^d$ 是 S 的一个图,f 是 S 上支集在 U 中的函数,我们可以定义 f 在 S 上的积分为

$$\int_U (f\circ h^{-1})\sqrt{\mathrm{Gram}\left(\frac{\partial h}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}\right)}du_1\cdots du_d,$$

这是在 $(u_1,\cdots,u_d)\in R^d$ 的 Lebesque 测度下的积分;事实上根据 8.11.6,平方根表示切空间中的"无穷小体积". 我们可通过坐标图的变换来验证这个量的不变性;由于 S 要用好几个坐标图才能覆盖,要建立一个完整的理论就必须利用单位分解.

18.3.7.2 一种实质上等价的方法,是利用定向流形上的积分理论,这时,若仍将 S 的规范测度记作 σ, 则 S 上任一函数 f 的积分定义为 $\int_S f\sigma$, 其中积分是微分形式 $f\sigma$ 在 S 上的积分(参看 [B-G]第 205, 234 页). 因为地球坐标图在不计零测度集差别时覆盖 S, 故按 18.3.5 (和 [B-G] 第 209—211 页)对任何函数 f 有:

18.3.7.3

$$\int_S f\sigma = \int_{]0,2\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[} f(\cos\theta\cdot\cos\varphi,\ \cos\theta\cdot\sin\varphi,\sin\theta)\cos\theta\cdot d\varphi\cdot d\theta.$$

18.3.7.4 附注. S 的测度在 $\mathrm{Is}(S)$ 下是不变的,因为它是从其结构本身得出的;在不计数量因子的差别的条件下,它是 S 上在 $\mathrm{Is}(S)$ 下不变的唯一测度. 这一点可以利用 2.7.4.4 中给出的办法来说明; 修改后的测度也仍是在 x 处连续的,因为群 $\mathrm{Is}(S)$ 沿生成切空间 T_xS 的所有方向容有连续子群; 而以上结论对所有的 $x\in S$ 均成立.

18.3.8 体积

18.3.8.1 闭集 $D\subset S$ 的体积 ($d=2$ 时称为面积) 定义为 $\int_S \chi_D\sigma$, 其中 χ_D 是 D 的特征函数. 在 9.12.4.8 中可以看到, S^d 的全体积为 $\alpha(d+1)$.

18.3.8.2 若 S^2 的具有相同端点 $\pm m$ 的两个半大圆在 m 处的单位切向量夹成 α 角(参看 18.1.2.4),则称含于这两半大圆之间的子集 D 为 S^2 的 α 角球面弓形,于是有:

18.3.8.3 D 的面积 $=2\alpha$.

事实上, 取以 $\pm m$ 为北极和南极的球面坐标, 则根据 18.3.7.3:

$$D\text{的面积}=\int_0^\alpha\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\cdot d\varphi\cdot d\theta=\int_0^\alpha 2d\varphi=2\alpha.$$

18.3.8.4 Girard 公式 (1625 年). 若 S^2 的球面三角形的三个角为 α,β,γ, 则该三角形面积等于 $\alpha+\beta+\gamma-\pi$.

关于球面三角形的定义, 可见 18.6. 把这个三角形的顶点记为 x,y,z, 相应的角记为 α,β,γ; 设 D 是以通过 y,z 的大圆为边界且将 x 含于其内部的半球面,在不计零测度集的条件下, D 可分成四个集合 T,A,B,C, 其中 T 是所考虑的三角形,而 $T\cup B$ 和 $T\cup C$ 分别是 β 角和 γ 角的球面弓形, $T\cup A$ 与 $A\cup(-T)$ 具有相同的面积,而后者是 α 角的弓形. 因而, 三次应用 18.3.8.3 就

有:

$$2\pi - D\text{ 的面积} = T\text{ 的面积} + A\text{ 的面积} + B\text{ 的面积} + C\text{ 的面积}$$
$$= T\text{ 的面积} + [2\alpha - T\text{ 的面积}]$$
$$+ [2\beta - T\text{ 的面积}] + [2\gamma - T\text{ 的面积}].$$

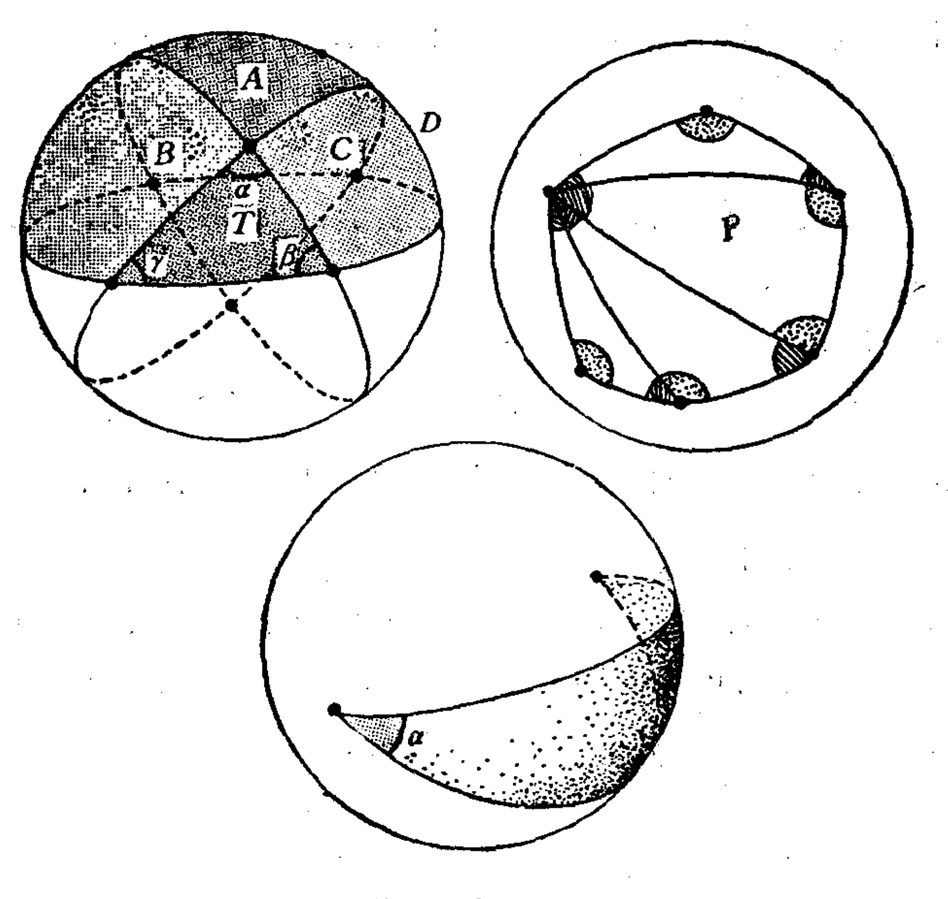


图 18.3.8.

18.3.8.5 推论. 若 P 是有 n 个顶点、内角为 $\alpha_i (i = 1, \cdots, n)$ 的球面凸多边形，则有

$$P\text{ 的面积} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi.$$

证明与 10.5.2 相同.

18.3.8.6 附注. 公式 18.3.8.4 无非是对任何二维黎曼流形都成立的一般 Gauss-Bonnet 公式的一个特殊情形. Gauss-Bonnet 公式是说，对三边都为测地线、内角为 α, β, γ 的三角形 T，有 $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \int_T K \cdot \sigma$，其中 K 表示流形的曲率，σ 是规范测度；

在此，S 的曲率恒等于 1. 在双曲几何中(参看 19.5.4)，我们还将看到内角为 α, β, γ 的三角形的面积为 $\pi-\alpha-\beta-\gamma$；这个结论对应于双曲平面的曲率为常数 -1 的事实. 对曲率为零的欧氏平面，我们很简单地有 10.2.4. 请参阅 12.7.5.2 中的参考文献. Girard 公式特别表明：若三角形 T 的三个角都属于 π 的有理数倍数所成的集合 $\pi\mathbf{Q}$，则 T 的面积也属于 $\pi\mathbf{Q}$. 对于球面 $S^d(d \geqslant 3)$ 的单形剖分，要把每个单形的体积用二面角(这是球面三角形的内角的自然推广)的函数来表示，是一个非常困难的问题；Cheeger 和 Simons 新近提出一个猜想：对 $d \geqslant 3$，存在 S^d 上的单形剖分，其中的单形二面角都属于 $\pi\mathbf{Q}$，但体积不属于 $\pi\mathbf{Q}$.

在 12.11.4.3 中我们曾经提到等周不等式 12.11.1 在 S^d 中推广的问题.

18.4 S 的内蕴度量

18.4.1 在此我们沿用 9.9 中所使用的符号. 在 9.9.4.3 中我们已经看到，由 $\mathbf{R}^{d+1}$ 在 S 上所诱导的距离并不是很好的，实际上它既不是优异的也不是内蕴的(参看 9.9.4.4). 9.9.8 启发我们应这样处理：对 $x, y \in S$，置 $\overline{xy} = \operatorname{Arc}\cos[(x|y)]$，从而：

18.4.2 定理. 映射 $\overline{\cdot\cdot}: S \times S \to [0, \pi]$ 是 S 上的度量；这一度量是优异的，因而是内蕴的. 这度量与 $\mathbf{R}^{d+1}$ 在 S 上诱导出相同的自然拓扑. 设 $x, y \in S$：若 $y \neq -x$，则存在唯一的从 x 到 y 的最短通路；若 $y = -x$，则所有的端点为 x 和 $-x$ 的半大圆都是从 x 到 y 的最短通路. 度量 $\overline{\cdot\cdot}$ 称为 S 的**内蕴度量**，我们以后不再考虑其他度量.

显然有 $\overline{xy} = 0 \Rightarrow x = y$ 和 $\overline{xy} = \overline{yx}$. x, y, z 不共面时，三角形不等式可从 18.6.10 推出；三点共面时可从 9.9.8.1 推出. 从 18.6.10 和 9.9.8 我们可以推出 $\overline{\cdot\cdot}$ 是优异的，并能得到一些关于最短道路的论断.

请参阅 18.11.13 中关于三角形不等式的另一证明.

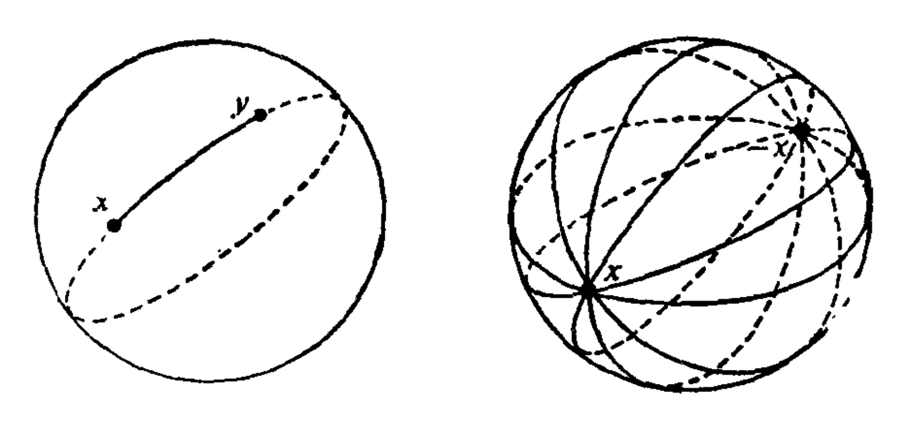


图 18.4.2.

18.4.3 附注. S 的内蕴度量恰好是按照 9.9.7.1 由 $\mathbf{R}^{d+1}$ 诱导的度量所推得的 $\bar{d}$；我们将证明留给读者：见 18.11.26.

18.4.4 命题（等距图的不可能性）. 设 U 是 S 的任一开集，必不存在等距映射 $f:U \to \mathbf{R}^d$，即 f 不可能使 $d(f(x), f(y)) = \overline{xy}$，$\forall x, y \in U$.

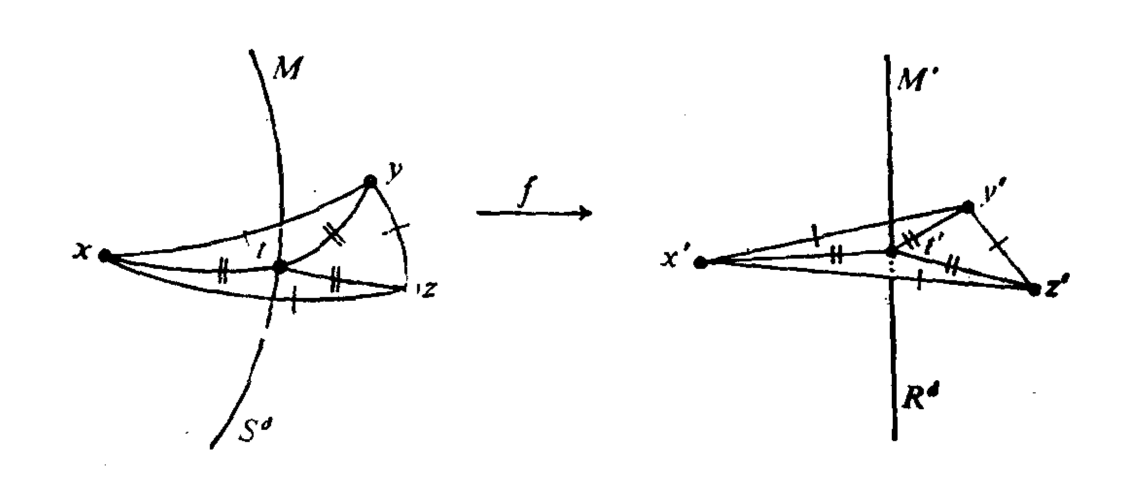


图 18.4.4.

首先注意到，若 $x, y, z \in S$ 是线性无关的，则集合

$$M = \{m \in S: \overline{mx} = \overline{my} = \overline{mz}\}$$

是 S 的 $d-2$ 维子大球面，且垂直于 S 的包含 x, y, z 的 2 维子球面 N. 设 t 是 $M \cap N$ 中一点，且属于 x, y, z 所决定的半球面，于是有(例如参看 18.6.8 和 18.11.6)

18.4.4.1 $$\overline{xt} = \inf\{\overline{xm} : m \in M\}.$$

现在设 U 是 S 的一个开集；根据 18.6.10，存在线性无关的 x, y,

$z \in S$ 使 $\overline{xy} = \overline{yz} = \overline{zt}$. 利用 18.6.13 的球面三角公式就能把 $\beta = \overline{xt} = \overline{yt} = \overline{zt}$ 明显地表示成 $\overline{xy} = \overline{yz} = \overline{zt} = \alpha$ 的函数，且可以看出 $\alpha < \sqrt{3}\beta$. 现在用 x', y', z', t', m', M' 表示 x, y, z, t, m, M 在 f 下的像，因为 f 是等距，于是首先可知 $x'y'z'$ 是 $\mathbf{R}^d$ 中的等边三角形，继而有

$$M' = \{v \in \mathbf{R}^d : d(v, x') = d(v, y') = d(v, z')\}.$$

根据 t 的极小性质，由于 f 是等距变换，故 t' 必然使 $d(x', t') = \inf\{d(x', v) : v \in M'\}$. 这时，在 $\mathbf{R}^d$ 中利用初等方法即可知 t' 必是 $\{x', y', z'\}$ 的中心，在此情形下 $d(x', y') = \sqrt{3}\, d(x', t')$; 然而 $d(x', t') = \overline{xt} = \beta$, 于是有 $\alpha = \sqrt{3}\beta$, 得出矛盾.

18.4.5 注. 上面的这个命题尤其可从 18.4.7 得出. 另一方面这命题也可与 18.11.7 的讨论相仿地证明；而且，前面的证明是建立在距离极小问题的基础上的.

关于具有比等距弱一点的各种性质的图，见 18.1.5.

18.4.6 垂直平分性. 根据 8.3.11 和 9.7.5，对 $x, y \in S, x \neq y$, 集合 $\{z \in S : \overline{zx} = \overline{zy}\}$ 是 S 的 $d-1$ 维大球面，与 k 个线性无关的点等距的点的轨迹，是一个 $d+1-k$ 维子球面.

18.4.7 球面由度量所表示的特征. 这里涉及的是 $(S^d, \overline{\cdot\cdot})$ 上的类似于 9.7.4 中对欧氏空间讨论的问题，回答是肯定的; [BL] 第 VII 章中对此有详细的讨论. 在练习 18.11.14 中可找到其主要部分；显然它给出了 18.4.4 的又一证明.

18.5 S 的等距变换群

18.5.1 有了 S 上的一个好的度量后，最紧迫的任务是考虑它的变换群 $\mathrm{Is}(S)$. 事实上原本有两个群要考虑: $\mathrm{Is}(S, \overline{\cdot\cdot})$ 和 $\mathrm{Is}(S, d)$. 然而根据 8.3.11，这两个群是一致的；因而我们可以将它们都写成 $\mathrm{Is}(S)$ 而不致引起歧义. 另一方面，由于 9.8.2，$\mathrm{Is}(S)$ 与

$$\mathrm{Is}_{S^d}(\mathbf{R}^{d+1}) = \{f \in \mathrm{Is}(\mathbf{R}^{d+1}) : f(S) = S\}$$

是一致的。最后，正交群 $O(d+1)$ 是含于 $\mathrm{Is}_{S^d}(\mathbf{R}^{d+1})$ 内的：

$$O(d+1)\subset \mathrm{Is}_{S^d}(\mathbf{R}^{d+1}).$$

事实上，这里涉及一个等同关系：

18.5.2 命题. 通过在 S^d 上的限制运算，$O(d+1)$ 自然同构于 $\mathrm{Is}(S^d)$。

设 $f\in \mathrm{Is}(\mathbf{R}^{d+1})$：证明 $f(0)=0$ 即足够了（参看 9.1.3）。而我们的想法是 $d(x, y)=2$，$x, y\in S^d$ 表示了对径点 $y=-x$ 的特征。设任一 $x\in S^d$：$d(f(x), f(-x))=d(x, -x)=2$，于是 $f(-x)=-f(x)$，而且由于 f 是仿射变换（参看 3.5.1），就有：

$$f(0)=f\left(\frac{x+(-x)}{2}\right)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=0.$$

18.5.3 记号. 令 $\mathrm{Is}^+(S^d)=O^+(d+1)$ 在 S 上的限制，$\mathrm{Is}^-(S^d)=O^-(d+1)$ 在 S 上的限制（参看 8.2.1）。

18.5.4 注. 若在某种适当的意义下给定 S 上的一个定向，则 $\mathrm{Is}^+(S)$ 是保持这一定向的等距变换群（参看 18.3.4）。

群 $\mathrm{Is}(S)$（同样 $\mathrm{Is}^+(S)$）是在二点可迁意义下"最大"的群：

18.5.5 命题（二点可迁性）. 设 S 的任意四点满足 $\overline{xy}=\overline{x'y'}$，则存在 $f\in \mathrm{Is}(S)$ 使 $f(x)=x'$ 和 $f(y)=y'$.

关于这个问题，可见 9.1.7.

18.5.5 的无穷小说法是：

18.5.6 命题. 任设 $x, x'\in S$，$\xi\in T_xS$，$\xi'\in T_{x'}S$，且 $\|\xi\|=\|\xi'\|$，则存在 $f\in \mathrm{Is}(S)$ 使 $f(x)=x'$ 和 $f'(\xi)=\xi'$，其中 f' 表示 f: $\mathbf{R}^{d+1}$的切映射（或导映射）。换句话说，$\mathrm{Is}(S)$ 在 S 的单位切向量集合上是可迁的。

对 $d=1$ 或 2 可确切地表述为：

18.5.7 命题. 如果$d=1$，设任意四点 $x, y, x', y'\in S^1$ 使 $0<\overline{xy}=\overline{x'y'}<\pi$，则在 $\mathrm{Is}(S^1)$ 中唯一存在 f 使 $f(x)=x'$ 和 $f(y)=y'$. 如果 $d=2$，设任意四点 $x, y, x', y'\in S^2$ 使 $\overline{xy}=\overline{x'y'}<\pi$，则在 $\mathrm{Is}^+(S^2)$ 中唯一存在 f 使 $f(x)=x'$ 和 $f(y)=y'$.

最后，下面的结果表明了 S 在群 $\mathrm{Is}(S)$ 下的不变度量的唯一

性:

18.5.8 命题. 设 δ 是 S^d 在 $\mathrm{Is}(S^d)=O(d+1)$ 下的不变度量，则存在一个内射 $\varphi:[0,\pi]\to\mathbf{R}$, 使 $\forall x, y\in S$ 有 $\delta(x,y)=\varphi(\overline{xy})$. 若 δ 又是内蕴的，则存在 $k\in\mathbf{R}_+^*$ 使 $\forall x, y\in S$ 有 $\delta(x, y)=k\overline{xy}$.

18.5.5，18.5.6 和 18.5.7 等结论很容易从 8.1.4 和 8.2.7 得出. 为证明 18.5.8 的第一部分，我们固定 $x\in S$, 并对所有的 $r\in[0,\pi]$ 选择 $y\in S$ 使 $\overline{xy}=r$. 令 $\varphi(r)=\delta(x,y)$, 则 $\forall u, v\in S$ 有 $\delta(u,v)=\varphi(\overline{uv})$; 因为若 $\overline{uv}=r=\overline{xy}$, 则存在 $f\in\mathrm{Is}(S)$（参看 18.5.5）使 $f(x)=u$ 和 $f(y)=v$, 由此得出

$$\delta(u,v)=\delta(f(x),f(y))=\delta(x,y)=\varphi(r)=\varphi(\overline{uv}).$$

18.5.8 的第二部分比较难一些，下面我们将它分成几步来证明.

18.5.8.1 对所有满足下列条件的 $r, s, t\in[0,\pi/2]$: $r+s\in[0,\pi]$, $r>s$ 和 $t\in[r-s, r+s]$, 我们有 $\varphi(t)\leqslant\varphi(r)+\varphi(s)$. 事实上，根据 18.6.10 存在 $x, y, z\in S$ 使 $\overline{xy}=r$, $\overline{xz}=s$ 和 $\overline{yz}=t$, 因此

$$\varphi(t)=\varphi(\overline{yz})=\delta(y,z)\leqslant\delta(x,y)+\delta(y,z)$$
$$=\varphi(r)+\varphi(s).$$

18.5.8.2 函数 φ 是连续的. 18.5.8.1 的关系式表明，只需知道 φ 在 0 处连续就够了. 然而因为 δ 是内蕴的，故至少存在一条关于 δ 的可求长曲线 f, 因此，由 f 的长度的定义（参看 9.9.1）就可知，存在 $x, y\in S$ 使 $\delta(x,y)$ 达到我们所要求的那样小，因而 $\varphi(t)$ 也可达到所要求的那样小. 而 18.5.8.1 导致（取 $r=s$）$\forall u\in[0,2t]$ 有 $\varphi(u)\leqslant 2\varphi(t)$; 这就证明了 φ 在 0 处的连续性.

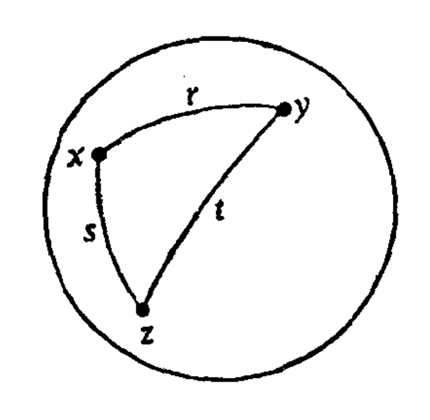


图 18.5.8.1.

18.5.8.3

$$\forall x\in[0,\pi]\ \exists\lambda(x)\in]0,1[\ |\varphi(tx)-t\varphi(x)\ \forall t\in[0,\lambda(x)].$$

用反证法： 倘若对所有的 $n\in \mathbf{N}^*$ 总存在 $s\in]0,1[$ 使 $\varphi(sx)<s\varphi(x)$，则首先通过反复使用 18.5.8.1 可知，对 $\mathbf{N}$ 中所有不太大的 k，均有 $\varphi(ksx)\leqslant ks\varphi(x)$。此式对所有 n 和所有 k 都成立，φ 又是连续的，故对所有 $t\in[0,1]$ 有 $\varphi(tx)\leqslant t\varphi(x)$（$\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 中的稠密性）. 于是，设 $u\in]0,x[$ 使 $\varphi(u)<\dfrac{u}{x}\varphi(x)$；则由 18.5.8.1 可得出矛盾：

$$\varphi(x)=\varphi(u+(x-u))\leqslant\varphi(u)+\varphi(x-u)$$
$$<\frac{u}{x}\varphi(x)+\frac{x-u}{x}\varphi(x)=\varphi(x).$$

18.5.8.4 当 x 趋向于 0 时，$\dfrac{\varphi(x)}{x}$ 具有有限极限 k.

根据 18.5.8.3，或者 $\dfrac{\varphi(x)}{x}\xrightarrow[x\to 0]{} k, k\in\mathbf{R}$，或者 $\dfrac{\varphi(x)}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}\infty$. 这后一种情形是不可能产生的；事实上设 f 是关于 δ 的可求长曲线，则（参看 9.9.1）对任何 $N>0$ 有 f 在 δ 下的长度 $\geqslant f$ 在 $\overline{\cdot\cdot}$ 下的长度与 N 的乘积，而这是不可能的，因为 f 在 $\overline{\cdot\cdot}$ 下的长度是大于 0 的. 现在，定义 9.9.4.4 和 18.4.3 的证明技巧表明，关于 δ 和 $\overline{\cdot\cdot}$ 的可求长曲线是相同的，且 f 在 δ 下的长度 $=f$ 在 $\overline{\cdot\cdot}$ 下的长度的 k 倍. 由于 δ 是内蕴的，这就是说 $\delta(x,y)=k\overline{xy}\ \forall x,y\in S$（参看 9.9.4.4）.

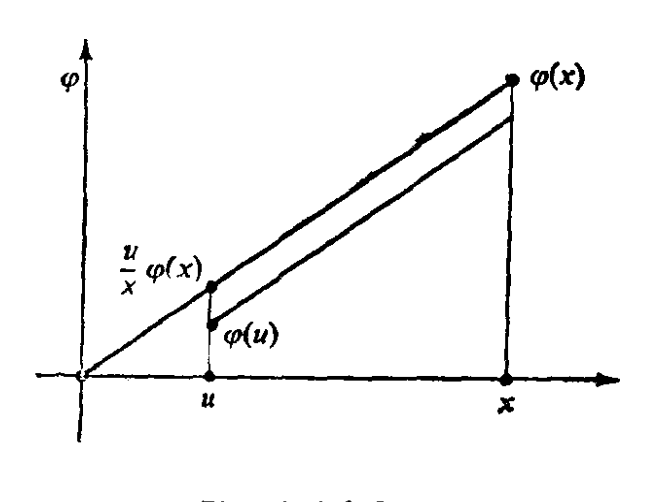


图 18.5.8.3.

18.5.8.5 注. 18.5.8 表明 $\overline{\cdot\cdot}$ 是 S 上良好的度量（不计数量因子的差别）. 另外，我们要指出，如果仅仅在 S 上寻找 $\mathrm{Is}(S)$ 下不变的黎曼度量，则唯一性的证明是显然的，因为 18.5.6 表明 $O(d+1)$ 在 S 的单位向量集合上是可迁的，从而这些黎曼结构

都是成比例的.

18.5.9 关于 $\mathrm{Is}(S)$ 的迷向群(参看 1.5)，有 $\mathrm{Is}_x(S^d)=O_x(\mathbf{R}^{d+1})$，因而 $\mathrm{Is}_x(S)$ 和 $O(d)$ 之间是同构的.

18.5.10 对 $\mathrm{Is}(S^1)$ 或 $\mathrm{Is}(S^2)$ 的有限子群的研究，可见 1.8.2. $\mathrm{Is}(S^d)$ 的有限子群的分类是另一个内容丰富的研究领域，建议读者参阅 [WF] 的整个第 III 部分.

18.6 球面三角形

18.6.1 本节的目的研究 S^2 上的球面三角形，也就是说，研究 3 维欧氏空间的三面体（由同一点出发的三条半直线所构造的图形）. 特别是，球面三角研究三面体的三个面角和三个二面角这六个数之间的关系. 这一些关系在天文学，航行学(航空和航海)和机械学中都是很基本的. 我们将指出导致这样一些应用的途径. 更一般地，我们可以首先研究球面 S^d $(d\geqslant 3)$ 的三个点，然而我们通过考虑由这三个点所生成的 2 维子球面，实际上又回到 $d=2$ 的情形. 相反，对由 S^d 的 $d+1$ 个点所成图形是很重要的；但我们会看到对 $d\geqslant 3$ 的研究要比对 $d=2$ 的研究困难得多：对此可见 [CR3] 第 247 页和其中提到的参考文献，18.3.8.6 中那个没有解决的问题则是表明 $d=2$ 的情形与 $d\geq 3$ 的情形之间难度不同的一个例子.

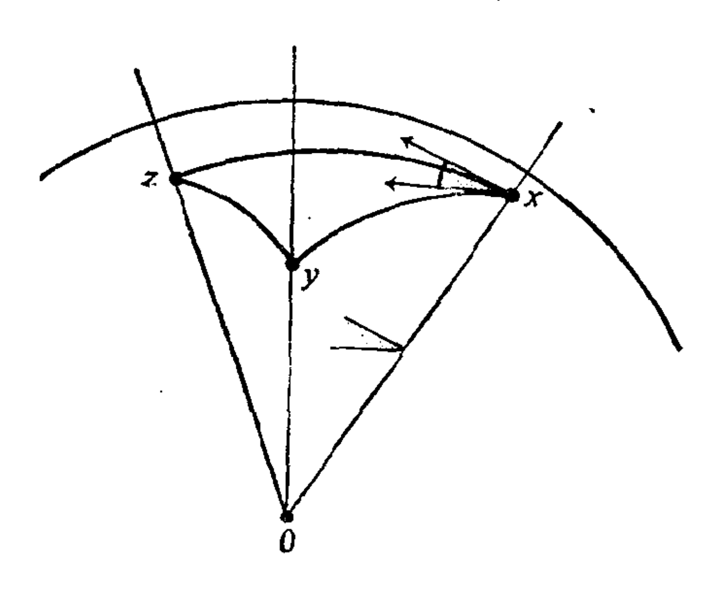


图 18.6.2.

18.6.2 定义. S^2 的三个点所成的三元组 (x, y, z)，若作为 $\mathbf{R}^3$ 的向量时是线性无关的，则称为 $S=S^2$ 的**三角形**(或**球面三角形**). 我们将这三角形记为 $\langle x, y, z\rangle$.

18.6.3 我们不妨将 $\langle x, y, z\rangle$ 跟与它自然地联系在一起的那个有晕影的部分(见 18.3.8.4) 混同起来，并把后者也称为以 x, y, z 为顶点的球面三角形.

18.6.4 从图 18.6.2 可看出，三面体 $\{Ox, Oy, Oz\}$ 的二面角等于在 $\langle x, y, z\rangle$ 的顶点处的、与 x, y, z 所确定的大圆相切的单位向量间的夹角. 因此，引进下面的概念和记号就是很自然的: 若 x, y 是 S^2 (更一般地，任何一个欧氏空间) 的两个线性无关向量，我们令

18.6.5
$$x_y = \frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \quad \lambda = y - (x|y)x,$$

这就是说 x_y 是在对 $\{x, y\}$ 实行 Schmidt 标准正交化(参看 8.1.4)后继 x 所得的第二个向量.

而且 x_y 是由起点 x 和终点 y 所决定的大圆弧在 x 处的单位切向量. 我们可以很方便地将这一 $x_y \in T_xS$ 看作系于 x 处的一个向量.

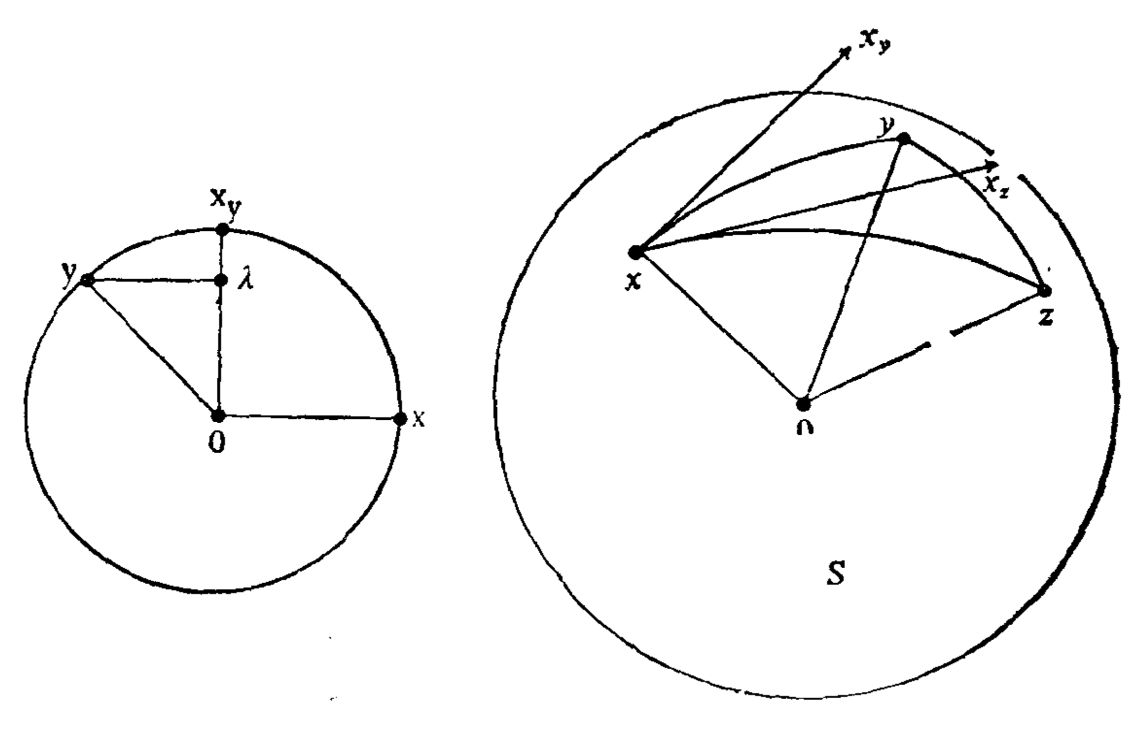


图 18.6.5.

18.6.6 **定义和记号**. 设 $\langle x, y, z\rangle$ 为球面三角形. 点 x, y, z 称为 $\langle x, y, z\rangle$ 的顶点. $\langle x, y, z\rangle$ 的边或者是指由 (x,y), (y,z),

(z, x) 决定的大圆弧. 或者是指这三边的长度，即三个实数：$a = \overline{yz}$，$b = \overline{zx}$，$c = \overline{xy}$. $\langle x, y, z \rangle$ 的角就是向量的（非有向）夹角（因而是实数 $\in]0, \pi[$）：

$$\alpha = \overline{x_y x_z} = \operatorname{Arc} \cos ((x_y | x_z)), \ \beta = \overline{y_z y_x} = \operatorname{Arc} \cos ((y_z | y_x)),$$
$$\gamma = \overline{z_x z_y} = \operatorname{Arc} \cos ((z_x | z_y)).$$

18.6.7 与欧氏平面三角形的情形相类似，大体上我们希望，6 个数 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ 可表示为其中仅仅 3 个数的函数. 一个富有启发性的理由（18.6.13.10 中将对它作合乎格式的讨论）是，若给出 α, b, c，则在不计等距差别的情况下，y 和 z 是确定的：事实上若给出 x，$x_y = u$，$x_z = v$ 满足条件 $u, v \in T_x S$ 和 $\overline{uv} = \alpha$，则在以 x 为始点分别与 u 和 v 相切的大圆上取定长度 $b = \overline{xz}$，$c = \overline{xy}$ 后，y 和 z 就完全确定了. 然而若我们在 x' 处重新这样做，使 $u', v' \in T_{x'} S$ 和 $\overline{u'v'} = \overline{uv} = \alpha$，则存在一个等距变换，它将 x 映到 x'，将 u, v 映到 u', v'；因而它将 y, z 映到 y', z'，由此即得 $\overline{yz} = \overline{y'z'}$. $a = \overline{yz}$ 确实可以表示为 α, b, c 的函数这一事实，可从 18.6.8 的计算过程看出. 整个球面三角的关键仅有两处：一是公式 18.6.8，另一是配极三角形彼此对偶的概念，即 18.6.12.

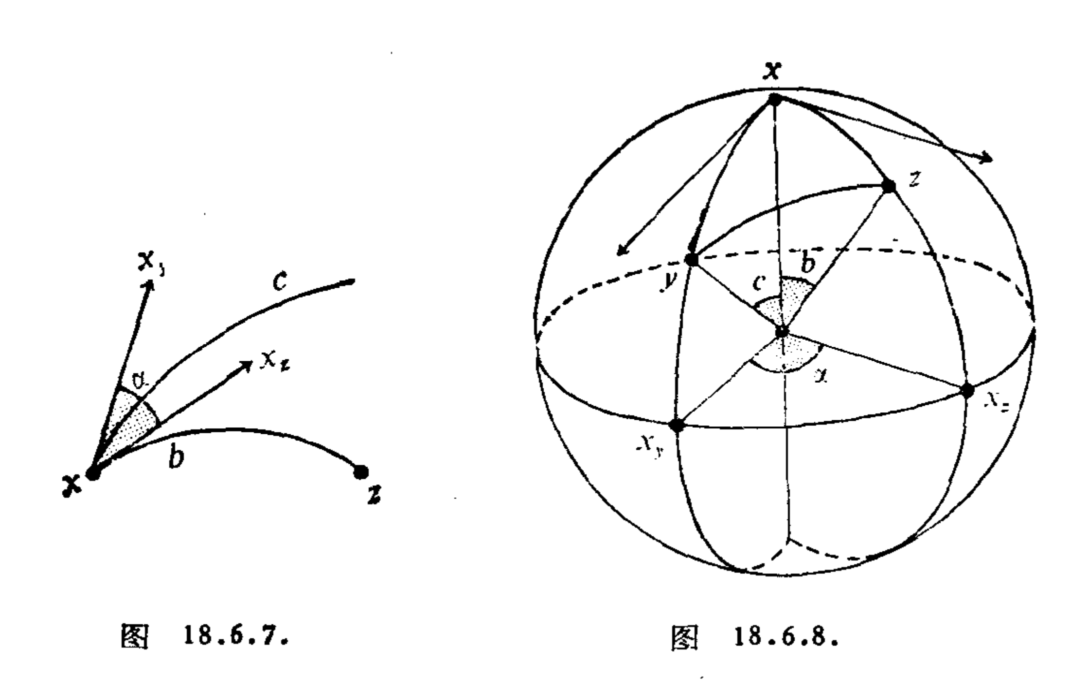


图 18.6.7.　　　　图 18.6.8.

18.6.8 命题（球面三角基本公式）. 对任何球面三角形总有

$$\boxed{\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha}$$

令 $u = x_y$ 和 $v = x_z$，由此得出

$$y = \cos c \cdot x + \sin c \cdot u, \quad z = \cos b \cdot x + \sin b \cdot v;$$

因为由 α 的定义知 $(u|v) = \cos\alpha$，又 $(x|u) = (x|v) = 0$，故由 a 的定义我们可求得

$$\cos a = (y|z) = (\cos c \cdot x + \sin c \cdot u | \cos b \cdot x + \sin b \cdot v)$$
$$= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha.$$

18.6.9 推论. 在边长 b, c 固定的球面三角形中，边长 a 是 α 的严格增函数。

应该注意到，这一函数的变化区间并不总是$[|b-c|, b+c]$，因为没有任何理由说必定有 $b+c \in]0,\pi[$，例如若 $b=c>\pi/2$，则这一变化区间将是 $]0, 2\pi-2b[$. 下面的推论明确地说明了这一点.

18.6.10 推论. 对任何球面三角形有

$$|b-c| < a < b+c \text{ 和 } a+b+c < 2\pi.$$

反之，若 $]0,\pi[$ 中的三个实数 a, b, c 满足$|b-c| < a < b+c$ 和 $a+b+c<2\pi$，则存在一个边长等于 a, b, c 的球面三角形；在不计等距差别的情况下这个三角形是唯一的.

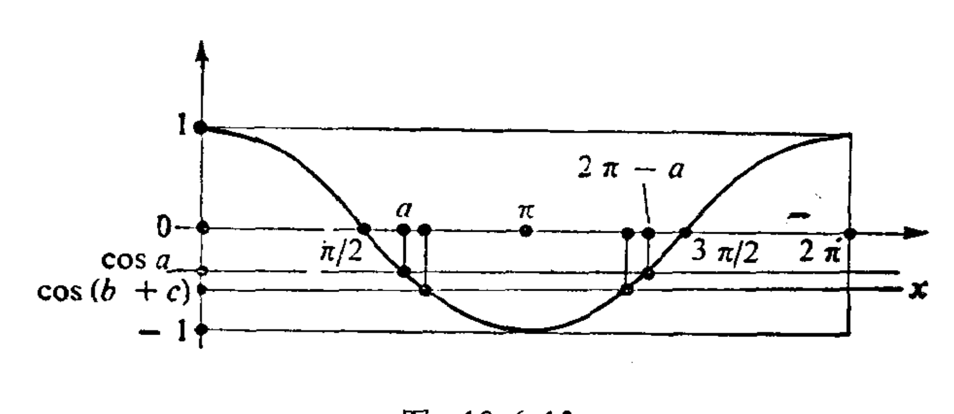


图 18.6.10.

根据 18.6.8，且由于余弦的绝对值 <1（按照定义 18.6.2，0 和 π 的情形是不予考虑的），因而有

$$\left|\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}\right| < 1,$$

它等价于

$$\cos(b+c) < \cos a < \cos(b-c).$$

对 $a, b, c \in]0, \pi[$，此式导致 $a < b + c < 2\pi - a$。由此首先得出 $a + b + c < 2\pi$；然后通过置换有 $b < c + a$ 和 $c < a + b$，由此最后得 $|b - c| < a$。反之，若 a, b, c 满足推论中的两个条件，则有 $\left|\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}\right| < 1$，因而存在 $\alpha \in]0, \pi[$ 使 $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$。任取（图 18.6.7）$x \in S$，$u, v \in T_x S$ 使 $\|u\| = \|v\| = 1$ 和 $\overline{uv} = \alpha$，则对 18.6.7 中得出的 y, z，按 18.6.8 有 $\overline{yz} = a$。唯一性可从 18.6.13.10 得出。

18.6.11 实际应用. 公式 18.6.8 有许多实际应用；在天文学中的应用，需要用到下面的大部分公式，参看 [DN]。关于航空学上的"标高线"的应用，例如可见 [AE] 第 379—386 页。有关公式说明了最初型号的 2 马力雪铁龙汽车拐弯时的运动状态，见 18.11.16. 最后，作为纯几何的应用，近来球面三角已被用于黎曼几何的不少研究之中，例如可见 [G-K-M] 的 § 6，而推论 18.6.9 将在 Cauchy 引理的证明中起基本的作用：见 18.7。

18.6.12 配极三角极. 若 $\langle x, y, z\rangle$ 是球面三角形，则我们可确定一点 $x' \in S$，它同时是 y, z 所确定的大圆的极点和顶点仍为 x 的同一条边——即在同一半球面内——的极点。实际上我们有三个条件：

$$(x'|y) = (x'|z) = 0 \text{ 和 } (x'|x) > 0$$

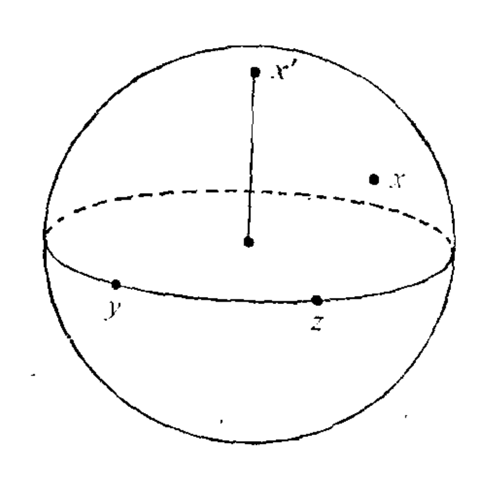
（根据定义 18.6.12，$(x'|x) = 0$ 的情形不予考虑）。由此可得

18.6.12.1 命题和定义. 设 $\langle x, y, z\rangle$ 是球面三角形，则由条件

$$\text{POL}\begin{cases}(x'|y) = (x'|z) = 0, & (x'|x) > 0,\\ (y'|z) = (y'|x) = 0, & (y'|y) > 0,\\ (z'|x) = (z'|y) = 0, & (z'|z) > 0\end{cases}$$

所确定的三元组 (x', y', z') 是一个球面三角形 $\langle x', y', z'\rangle$，记为 $\langle x, y, z\rangle'$，称为 $\langle x, y, z\rangle$ 的**配极三角形**.

事实上，倘若 x', y', z' 是线性相关的，那么，比如说就有 $z \in \mathbf{R}\cdot x' + \mathbf{R}\cdot y'$，这就导出 $(z|z) = 0$.



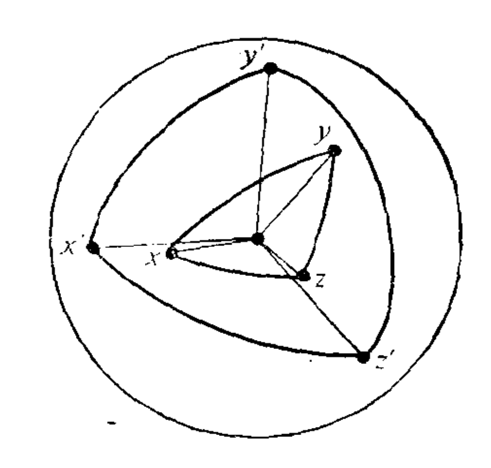


图 18.6.12.1.

18.6.12.2 命题. 对任何球面三角形 $\langle x, y, z\rangle$，有 $\langle x', y', z'\rangle' = \langle x, y, z\rangle$，也就是说 $\langle x, y, z\rangle$ 的配极三角形的配极三角形仍是 $\langle x, y, z\rangle$. 若 $\langle x, y, z\rangle'$ 的六个元素记为 $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$，则有

$$a + \alpha' = b + \beta' = c + \gamma' = a' + \alpha = b' + \beta$$
$$= c' + \gamma = \pi.$$

这种对合的对偶性可由公理系 POL 的对称性看出. 所要证明的六个关系式，其中三个可以通过对偶性由另外三个推出. 因此仅需证明，比如说，$a' + \alpha = \pi$. 在垂直于 x 的平面内作一图，画上四个向量 $y', x, x_y = u, x_z = v$(也画有 y, z 在这平面上的射影，并在字母外加了圈: ⓨ, ⓩ, 以及 ⓧ $= 0$). 于是有条件

$$(z'|u) = 0, \ (y'|v) = 0, \ (v|z') > 0, \ (y'|u) > 0,$$

由此容易得出(例如可见 8.7.5.3)

$$\overline{y'z'} + \overline{uv} = \pi.$$

18.6.12.3 推论. 对任何球面三角形总有:

$$\alpha+\beta+\gamma>\pi,\ \alpha+\pi>\beta+\gamma,$$
$$\beta+\pi>\gamma+\alpha,\ \gamma+\pi>\alpha+\beta.$$

18.6.12.4 注. 这样，我们就看出球面几何与欧氏平面几何是根本不同的，因为在欧氏几何中三角形三内角之和恒等于 π！我们已在18.3.8.4中看到，角盈 $\sigma=\alpha+\beta+\gamma-\pi$ 恰好是 $\langle x, y, z\rangle$ 的面积。关于三内角之和小于 π 的几何学，可见19.5.4。

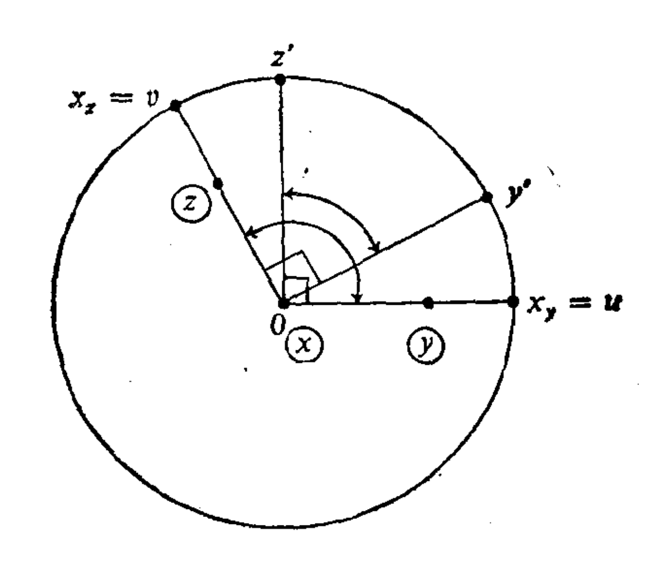


图 18.6.12.2.

18.6.13 球面三角公式. 在下面的公式的汇编中，那些可从其中一个公式通过 (a, b, c)，(α, β, γ) 的置换而得到的公式通常就不再列入。而且，我们令（对类似的情形可参看10.3和18.11.9）：

18.6.13.1

$$\begin{cases} p=\dfrac{a+b+c}{2},\ P=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2},\ \delta=\dfrac{1}{2}|\det(x, y, z)|, \\ \Delta=\dfrac{1}{2}|\det(x', y', z')|, \sigma=\alpha+\beta+\gamma-\pi=2P-\pi. \end{cases}$$

于是，对任何球面三角形有：

18.6.13.2 $\delta=\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}$,

$\Delta=\sqrt{\sin P\sin(P-\alpha)\sin(P-\beta)\sin(P-\gamma)}$

18.6.13.3 $\operatorname{tg}\dfrac{\sigma}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{p}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-b}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-c}{2}}$

18.6.13.4 $\dfrac{\sin a}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin b}{\sin\beta}=\dfrac{\sin c}{\sin\gamma}=\dfrac{\delta}{\Delta}$

18.6.13.5 $\delta=\dfrac{1}{2}\sin b\sin c\sin\alpha$, $\Delta=\dfrac{1}{2}\sin\beta\sin\gamma\sin a$

18.6.13.6 $$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}$$

18.6.13.7 $$\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}$$

证明 18.6.13.7 的第一个公式就是 18.6.8；第三个公式可借助

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\alpha+1}{2},\quad \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

和三角学中弧的加法公式的传统做法推出。为证明 18.6.13.5 (其第二式要用到第一式和 18.6.12.2)，我们取 $\mathbf{R}^3$ 的正交标架 $\{e_1, e_2, e_3\}$，使 $e_1=x$，$e_2=x_y$，$e_3=e_1\wedge e_2$。在这一标架中，x, y, z 的坐标是容易求出的(参看 18.6.8 的证明)，且有

$$\det(x, y, z)=\begin{vmatrix}1 & \cos c & \cos b\\ 0 & \sin c & \cos\alpha\sin b\\ 0 & 0 & \sin\alpha\sin b\end{vmatrix}=\sin\alpha\ \sin b\ \sin c.$$

18.6.13.2 的第一式只需利用 Gram 行列式的技巧(参看 8.11.5)：

$$4\delta^2=\begin{vmatrix}(x|x) & (x|y) & (x|z)\\ (y|x) & (y|y) & (y|z)\\ (z|x) & (z|y) & (z|z)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \cos c & \cos b\\ \cos c & 1 & \cos a\\ \cos b & \cos a & 1\end{vmatrix};$$

展开这一行列式并利用弧的加法公式，即可求得 18.6.13.2，其第二式则可通过配极三角形得到(参看 18.6.12.2)。

有了 18.6.13.5 以后，公式 18.6.13.4 是很显然的，公式

18.6.13.6 和 18.6.13.3 可利用 18.6.13.7 得出；18.6.13.3 的证明比较长，但仅需用到常用的三角公式。

18.6.13.8 附注. 公式 18.6.13.2 至 18.6.13.7 在位置天文学中是经常用到的，详见 [DN] 或 [AE] 第 367 页及以后几页. 需要特别留意的是，$\sin\alpha$ 并不能决定 α，这与 $\cos\alpha$ 或 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\sin\frac{\alpha}{2}$ 是不同的，其原因在于 $\alpha\in\,]0,\pi[$. 写成 $\frac{\cdot}{2}$ 的公式的最大优点就在于此(在天文学中称之为“二级”公式，而写成 $\frac{\cdot}{4}$ 的公式，例如 18.6.13.3，则称为“三级”公式). 公式 18.6.13.3 也不比 18.6.13.2 差，它使我们想起把欧氏三角形面积表示成三边的函数的公式 10.3.3. 关于这一点，18.11.9 是一个很有意义的练习.

18.6.13.7 的第一个公式是 Gauss 首先得到的，公式 18.6.13.6 称为“Néper 同类式”，而公式 18.6.13.3 则是由 Simon Lhuillier 得出的.

18.6.13.9 推论. $b=c$ 的充分必要条件是 $\beta=\gamma$ (试与 10.2.2 比较).

对其证明需注意：用 18.6.13.7 而不要用 18.6.13.4！例如一个球面三角形是等边的 (即 $a=b=c$)，当且仅当它的三个角是相等的 ($\alpha=\beta=\gamma$). 但与平面的情形不同，这三个角的公共值可以在整个 $]\pi/3,\pi[$ 中变动：详细讨论可见 18.11.11，应用可见 18.4.4.

18.6.13.10 推论 (球面三角形的全等). 设 $\langle x,y,z\rangle$，$\langle\bar{x},\bar{y},\bar{z}\rangle$ 是两个球面三角形，它们的元素分别为 $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ 和 $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$，则下面五个条件是等价的：

(i) $\exists f\in \mathrm{Is}(S)\,|\,f(x)=\bar{x},\ f(y)=\bar{y},\ f(z)=\bar{z}$;

(ii) $a=\bar{a},\ b=\bar{b},\ c=\bar{c}$;

(iii) $\alpha=\bar{\alpha},\ b=\bar{b},\ c=\bar{c}$;

(iv) $a=\bar{a},\ \beta=\bar{\beta},\ \gamma=\bar{\gamma}$;

(v) $\alpha=\bar{\alpha},\ \beta=\bar{\beta},\ \gamma=\bar{\gamma}$.

显然由（i）可推出其他四个条件。引进配极三角形（参看 18.6.12.1 和 18.6.12.2）就可证明(ii)同(v)以及(iii)同(iv)的等价性。因而仅需证明例如（iii）⇒（i），而这又只需利用 18.6.7 的想法：若令

$$u = x_y, \quad v = x_z, \quad \bar{u} = \bar{x}_{\bar{y}}, \quad \bar{v} = \bar{x}_{\bar{z}},$$

则从 18.6.7 可知，存在 $f \in \mathrm{Is}(S)$ 使

$$f(x) = \bar{x}, \quad f'(u) = \bar{u}, \quad f'(v) = \bar{v},$$

这是因为由假设条件 $\alpha = \bar{\alpha}$ 有 $uv = \bar{u}\bar{v}$. 然而由于

$$f \in \mathrm{Is}(S), \quad \overline{xy} = \overline{\bar{x}\bar{y}}, \quad \overline{xz} = \overline{\bar{x}\bar{z}},$$

故有 $f(y) = \bar{y}$ 和 $f(z) = \bar{z}$.

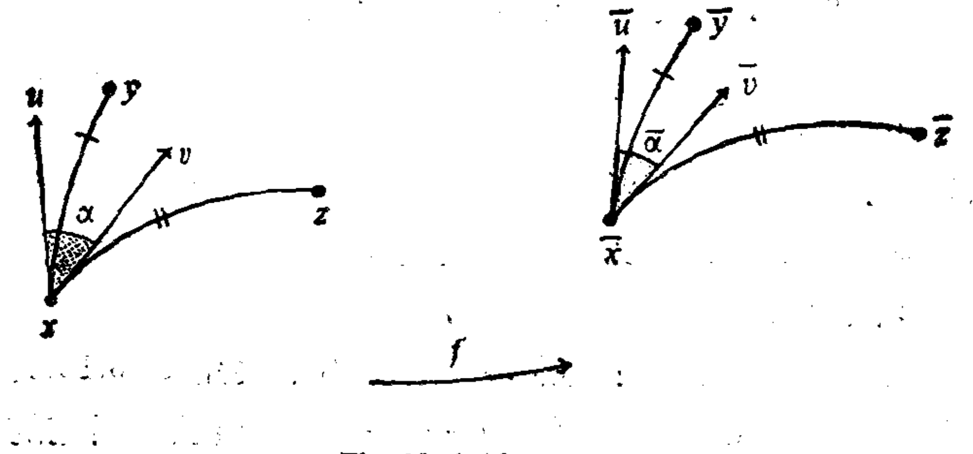


图 18.6.13.

18.6.13.11 注

(i) 情形 (v) 同欧氏平面几何是完全不同的，在欧氏几何中三个角对应相等的两个三角形仅仅是相似的。

(ii) 如同 10.2.6 中那样，作为一个练习，可以讨论下列条件下球面三角形的存在性和唯一性：给定 (a, b, γ) 或 (a, b, α) 或 (α, β, γ)。

(iii) 对直角球面三角形或直边球面三角形(即其中有一条边等于 $\pi/2$) 的讨论可见 18.11.11。

(iv) 在 18.11.10 中可以看到欧氏平面几何中所谓“容有已知角的弧”定理(10.9.3)的一个推广。

(v) 在 [DX] 第 203 页及以后几页中，可以看到将 $\mathbf{R}^3$ 在 $\mathbf{C}^3$ 中复化而得到的球面三角学的研究。

18.6.14 练习题目. 一个总题目是"任取第 10 章中的一段讨论，看看类似的问题能否言之成理地在 S^2 上提出；如果能行，试解决这个问题，并将所得的结果与平面上的结果相比较"。

在 18.4.4 中我们已经遇到过这类问题。在此读者可试将 10.3.10，10.4.1，10.4.3，10.4.5 等结果推广到 S^2 上；也可参看 18.11.5。

18.6.15 附注. 在 19.3.4 中可以看到双曲几何中与 18.6.13 相对应的结果。

18.6.16 注. 在 S^2 上也可以讨论一些性质很不相同的问题，例如可见 [FT1] 的第 IV 章和 [BL] 的第 VIII 章；球面上给定的若干点的最佳排列问题尚在探索之中，例如可见 [FT1] 第 171 页，也可看 C. A. Rogers, Packing and Covering, Cambridge University Press。

18.7 凸球面多边形；Cauchy 引理

这一节是为 Cauchy 引理而安排的，这个引理是关于 $\mathbf{R}^3$ 的凸多面体刚性的 Cauchy 定理 12.8.1 的两个关键之一。在整个这节中我们设 $S=S^2\subset\mathbf{R}^3$。Cauchy 引理的证明很精巧，它实质上是在命题 18.7.7 的基础上进行的。

18.7.0 我们称 S 的这样一个子集为半球面，它是 S 和一个跟过原点的平面相联系的半空间的交。

18.7.1 定义. 我们称 S 的这样一个子集 P 为凸球面多边形(简称为多边形)，它是 S 的半球面的有限交，且使 $\mathring{P}\neq\emptyset$ 和 $P\cap(-P)=\emptyset$(即 P 决不含有两个对径点)。

例如，一个球面三角形自然地就是这样的多边形，参看18.6.3。为了能定义 P 的边和顶点，我们要利用关于凸多面体的一些结果。

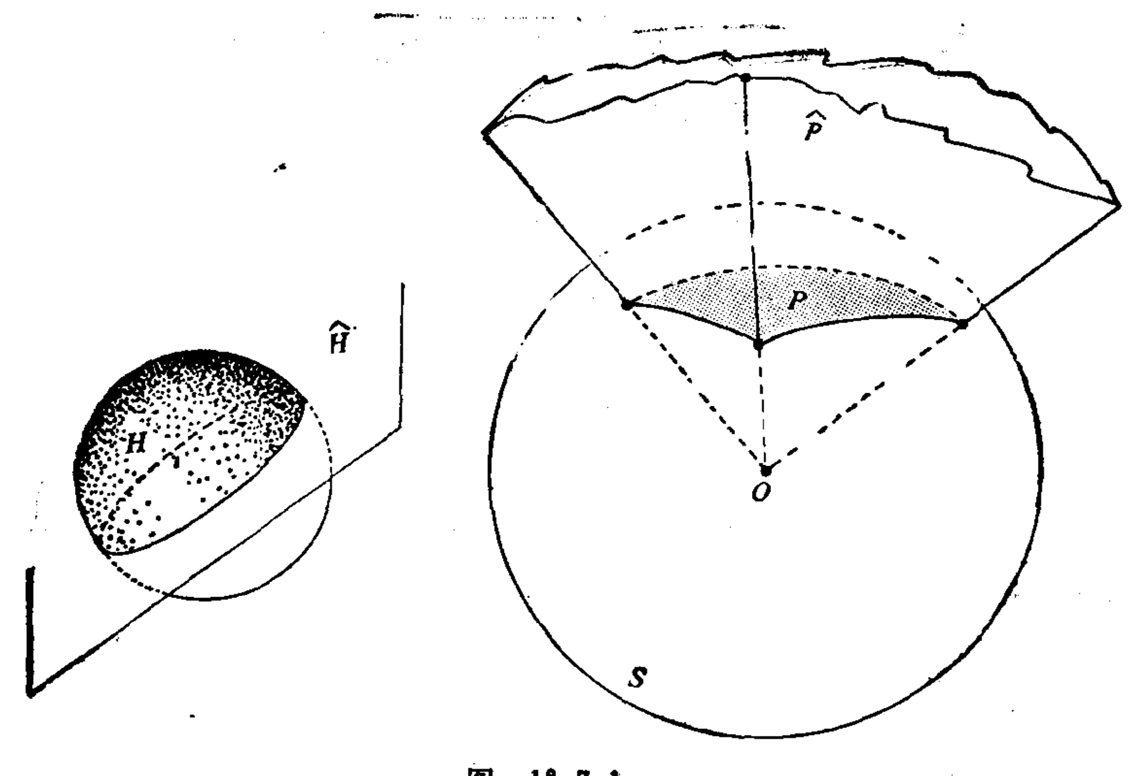


图 18.7.1.

18.7.2 对 S 的任一半球面 H，记 H 所生成的 $\mathbf{R}^3$ 的半空间为 $\hat{H}$；若 $P=\bigcap_i H_i$，则令 $\hat{P}=\bigcap_i \hat{H}_i$，于是 $\hat{P}$ 是凸多面体，实际上它是以 O 为顶点的凸锥. 既然 $\mathring{P}\neq\varnothing$，故同样有 $\mathring{\hat{P}}\neq\varnothing$，因而我们可应用 12.1.5 和 12.1.8：$\hat{P}$ 具有完全确定的面和棱. 因为 $P\cap(-P)=\varnothing$，故这些棱和面分别是过 O 点的平面内从 O 出发的半直线和扇形.

18.7.3 定义. P 的顶点是 S 与 $\hat{P}$ 的棱之交，P 的边是 S 与 $\hat{P}$ 的面之交。若多边形有三个顶点，则称为三角形.

根据 12.1.12，我们可以看到，P 的每一条边恰好含有两个顶点，且每一个顶点恰好属于两条边. 因而我们可对 P 的顶点加以编号，设为 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$，使得连号的两个顶点在同一条边上. 在下文中我们总假设采用这样的写法，在这种写法下，P 完全由其顶点决定. 顶点数与边数是相等的. 对 S 的多边形，我们可像球面三角形那样，利用自然的记法引入角和边长：

18.7.4 定义和记号. 凸球面多边形 $P=(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 的边长是实数 $a_i=\overline{x_ix_{i+1}}$，$i=1,\cdots,n$，并约定 $x_{n+1}=x_1$，即 $a_n=\overline{x_nx_1}$，

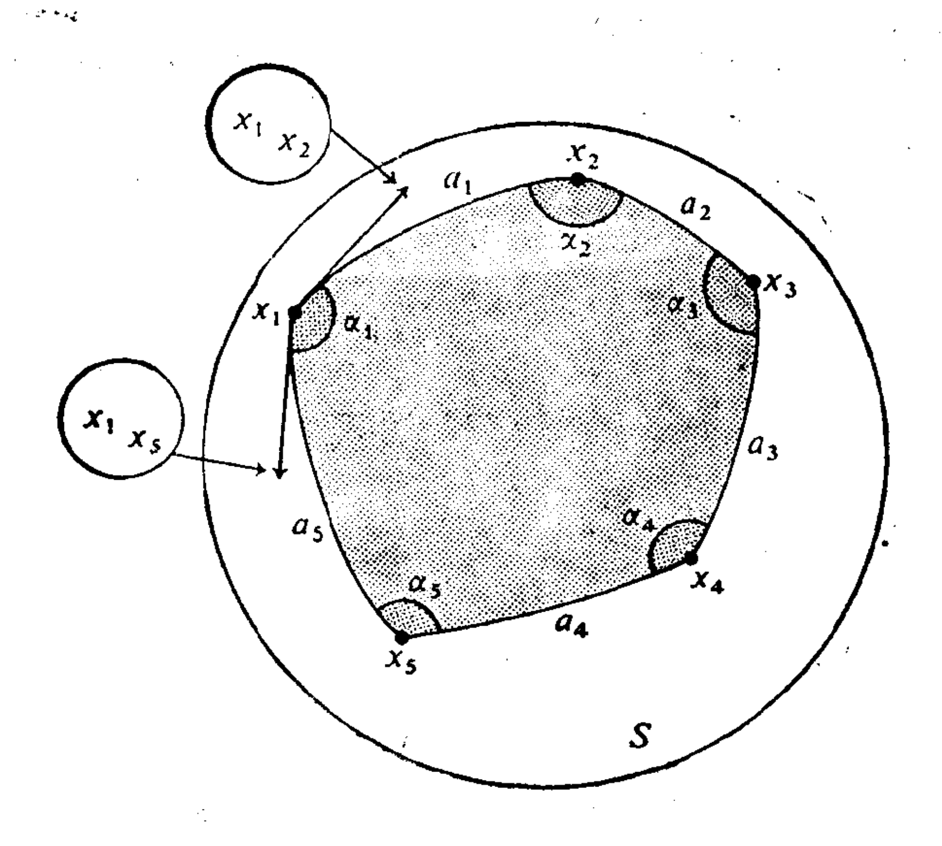


图 18.7.3.

P 的角是

$$\alpha_i = \overline{x_{i_{x_{i-1}}} x_{i_{x_{i+1}}}} (i = 1, \cdots, n, x_{n+1} = x_1, x_0 = x_n).$$

18.7.5 命题. 设 x, y 是 P 的不属于同一条边的两个顶点，γ 是连结它们的大圆弧（这弧是唯一的，因为根据18.7.1有 $y \neq -x$），则 γ 包含在 P 内且 $P = P' \cup P''$，其中 P', P'' 是两个以 γ 为公共边且 $P' \cap P'' = \gamma$ 的多边形.

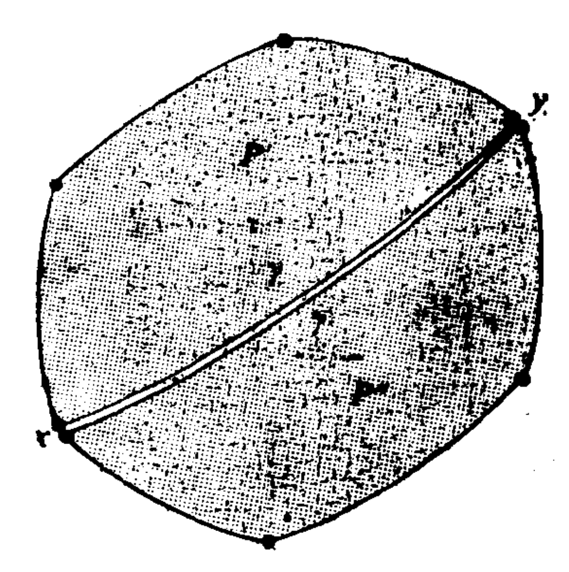


图 18.7.5.

显然 $\gamma \subset P$，因为，若 $x, y \in$ 半球面 H，又由 $y \neq -x$，可知 $\gamma \subset H$. 至于 P' 和 P''，它们定义为 $P \cap H'$ 和 $P \cap H''$，其中 H' 和 H'' 是 γ 所决定的二个半球面.

18.7.6 现在设 $P, \bar{P}$ 是顶点分别为 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 和 $(\bar{x}_i)_{i=1,\cdots,n}$ 的两个多边形（在这个已知条件中，我们人为地规定了顶点的编号次序，或者说我们规定了 P 和 $\bar{P}$ 的顶点间的一个双射，而这双射保留两个顶点属于同一条边的性态）。P 和 $\bar{P}$ 的边和角当然就分别记为 $a_i, \bar{a}_i, \alpha_i, \bar{\alpha}_i$ $(i=1, \cdots, n)$。Cauchy 引理 18.7.16 是下述命题的简单推论。

18.7.7 命题. 如果 $\forall i=1, \cdots, n-1$ 有 $a_i=\bar{a}_i$，且 $\forall i=2, \cdots, n-1$ 有 $\alpha_i \leqslant \bar{\alpha}_i$，则 $a_n \leqslant \bar{a}_n$；而且，若存在 $i \in \{2, \cdots, n-1\}$ 使 $\alpha_i<\bar{\alpha}_i$，则 $a_n<\bar{a}_n$。

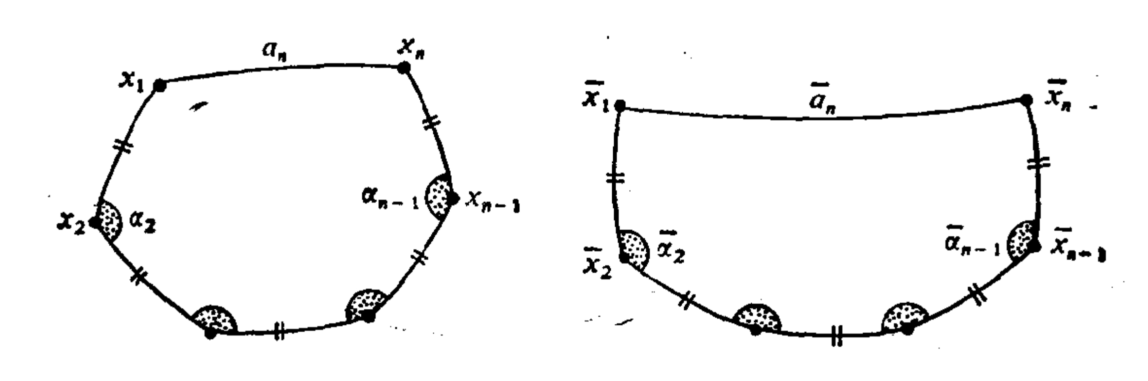


图 18.7.7.

18.7.8 这个结论是相当直观的：如果我们将一个多边形的角都增大，而使它的边除一条以外都保持长度不变，那么最末那条边势必要增长。然而，即使是对欧氏平面的四边形，读者也会看到这个结论的证明并不是那么显然的。

18.7.9 引理. $n=3$ 时命题 18.7.7 成立.

事实上，这时它就是推论 18.6.9。而且，在下述特殊情形下从 $n-1$ 到 n 的递推是容易的：

18.7.10 引理. 如果 $n-1$ 时命题 18.7.7 成立，那么命题对任何满足下述条件的 n 边形偶 $P, \bar{P}$ 也成立：存在 $i \in \{2, \cdots, n-1\}$ 使 $\alpha_i=\bar{\alpha}_i$。

事实上，将 18.7.5 应用于端点分别为 x_{i-1}, x_{i+1} 和 $\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}$ 的大圆弧 $\gamma_i, \bar{\gamma}_i$，就得到两个 $n-1$ 边形 $P', \bar{P}'$ 和两个三角形 $P'', \bar{P}''$。根据 18.6.13.10，这两个三角形是"全等的"，特别有 $\overline{x_{i-1}x_{i+1}}=$

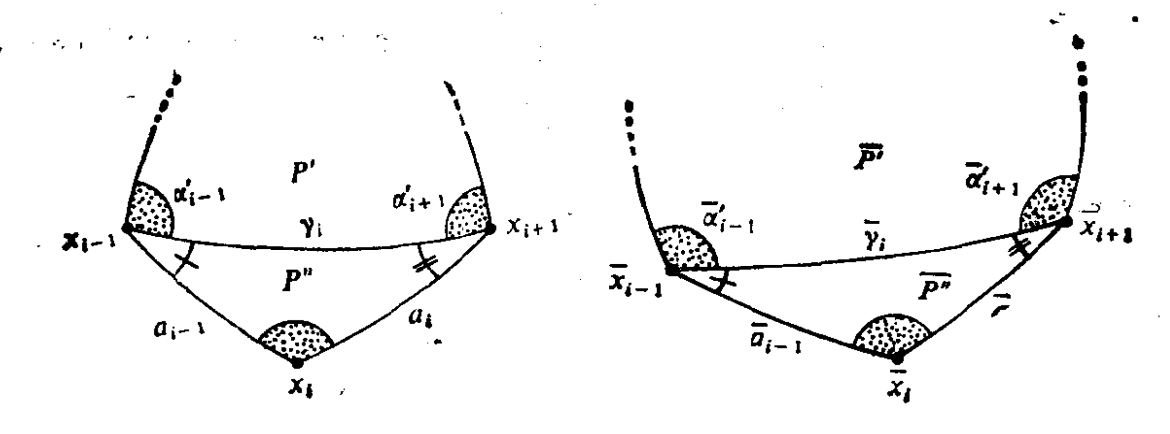


图 18.7.10.

$\overline{\bar{x}_{i-1}\bar{x}_{i+1}}$，而且它们在 x_{i-1}，x_{i+1}，$\bar{x}_{i-1}$，$\bar{x}_{i+1}$ 处的角分别相等. 由此对 P' 和 $\bar{P}'$ 在顶点 x_{i-1}，x_{i+1}，$\bar{x}_{i-1}$，$\bar{x}_{i+1}$ 处的角 α'_{i-1}，α'_{i+1}，$\bar{\alpha}'_{i-1}$，$\bar{\alpha}'_{i+1}$ 得出不等式 $\alpha'_{i-1} \leqslant \bar{\alpha}'_{i-1}$ 和 $\alpha'_{i+1} \leqslant \bar{\alpha}'_{i+1}$. 因而 P'，$\bar{P}'$ 满足 18.7.7 的假设，由此引理得证.

现在用归纳法来证明 18.7.7，其中仅有一处应特别注意不要走入歧途.

18.7.11　18.7.7 的证明. 证明的思想是将 P 在 x_{n-1} 处的角 α_{n-1} 增大到等于 a_{n-1}，而保持边长不变；这样我们就得到一个新的多边形 P'，其顶点为 x_1，$\cdots$，x_{n-1}，x'_n 边长为 a_1，$\cdots$，a_{n-1}，$a'_n = \overline{x'_n x_1}$，在 $x_2, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}$ 处的角分别等于 $\alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha'_{n-1}$. 但遗憾的是我们没有任何理由可说这新的多边形 P' 一定是凸的，正如图 18.7.11 所表明的那样. 因此下面分两种情形考虑.

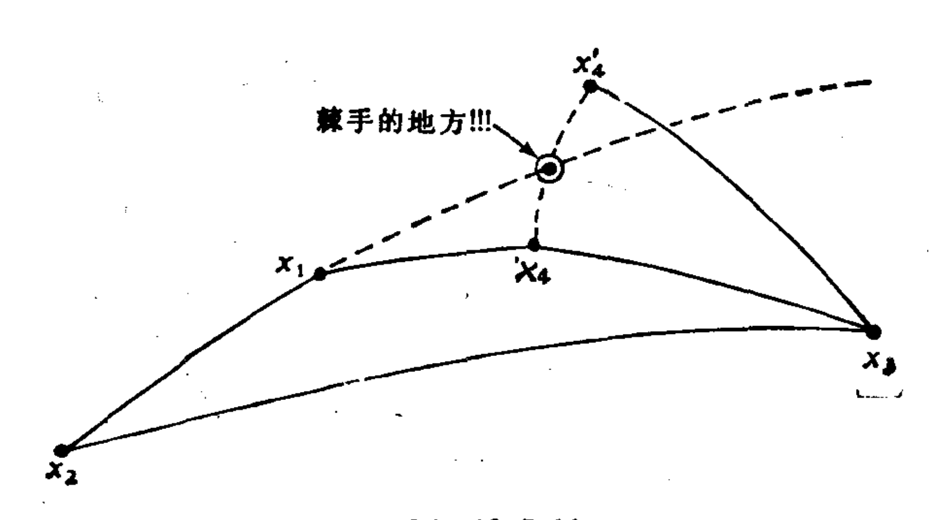
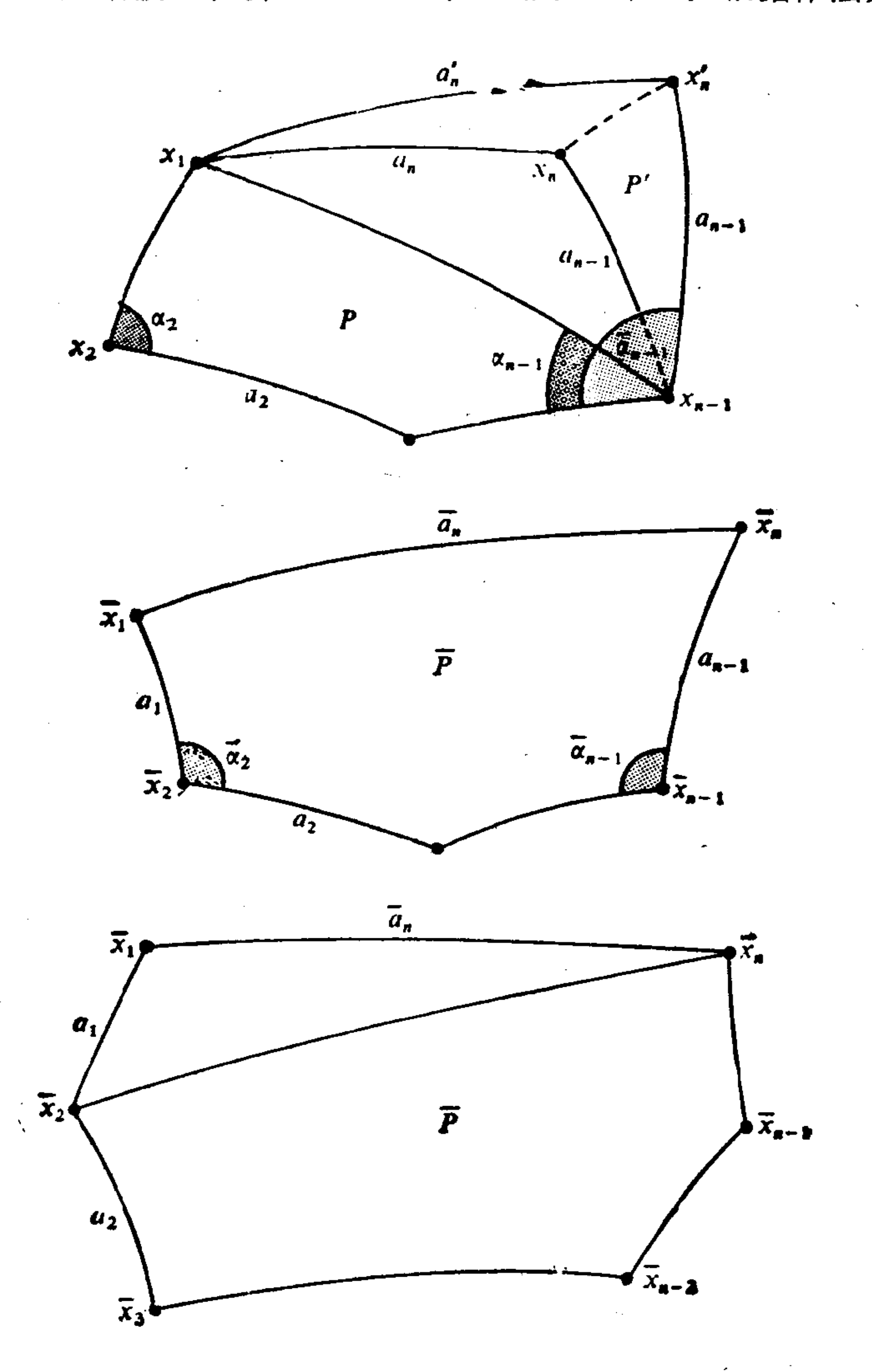


图 18.7.11.

18.7.12　第一种情形：P′ 是凸的： 由于 18.7.5，我们可将 18.7.9 应用于两个三角形 x_1, x_{n-1}, x_n 和 x_1, x_{n-1}, x_n'，由此得出

$$a_n = x_1x_n \leqslant x_1x_n', \text{ 且若 } \alpha_{n-1} < \bar{\alpha}_{n-1}, \text{ 则 } x_1x_n < x_1x_n'.$$

然后应用归纳假设和引理 18.7.10 于多边形 P' 和 $\bar{P}$，根据作法，P'



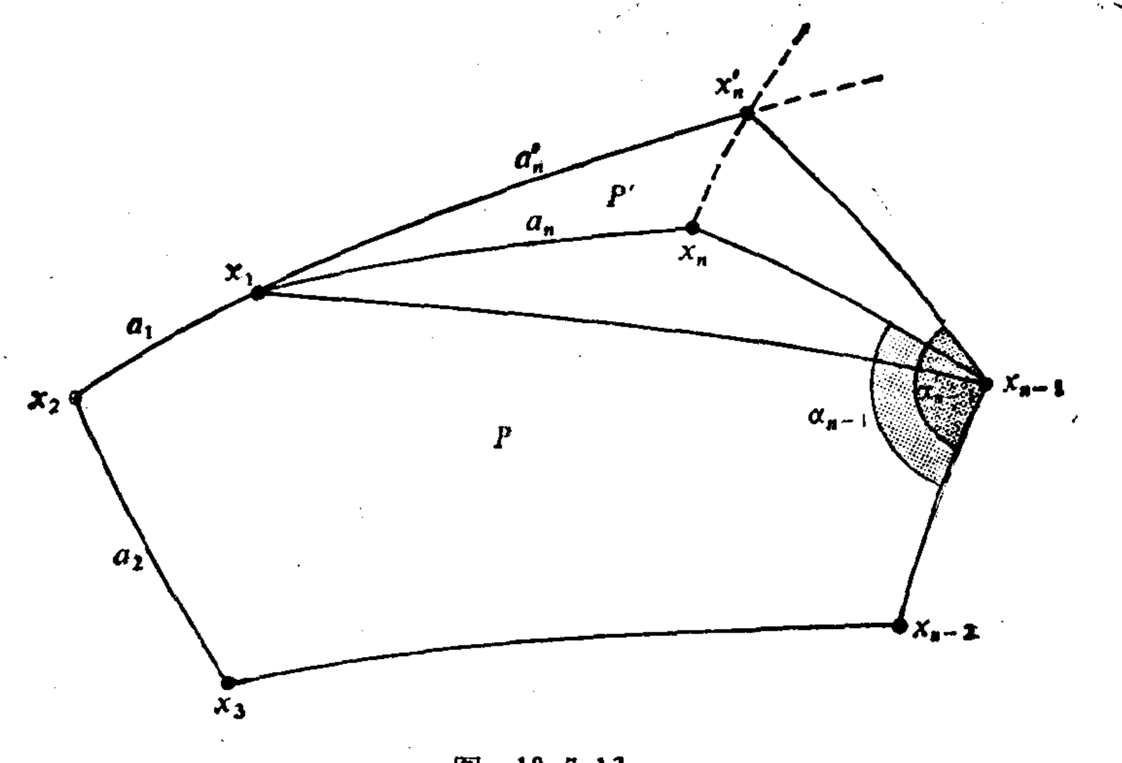


图 18.7.13.

和 $\bar{P}$ 在 x_{n-1}, $\bar{x}_{n-1}$ 处有相等的角，由此得出

$$x_1x_n' \leqslant \bar{x}_1\bar{x}_n = \bar{a}_n.$$

这就完成了第一种情形的证明.

18.7.13 第二种情形：P' 不是凸的. 在此情形下，当我们为将 α_{n-1} 增大到 $\bar{\alpha}_{n-1}$ 而将圆弧 $x_{n-1}x_n$ 绕 x_{n-1} 旋转时，存在一个 α_{n-1} 的值 α_{n-1}'，它最先使 P' 不再是凸多边形. 因而有 $\alpha_{n-1} < \alpha_{n-1}' < \bar{\alpha}_{n-1}$.

设 x_n' 是这样得到的极限点，则按作法的假设，点 x_n' 属于 x_2 和 x_1 所确定的大圆. 于是有

$$\overline{x_1x_n'} = \overline{x_2x_n'} - \overline{x_1x_2}.$$

利用 18.6.10 和 18.7.5，即可求得

$$\bar{a}_n = \overline{\bar{x}_1\bar{x}_n} \geqslant \overline{\bar{x}_2\bar{x}_n} - \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2} = \overline{\bar{x}_2\bar{x}_n} - \overline{x_1x_2}.$$

然后经由 18.7.5 将归纳假设应用于凸多边形 $(x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ 和 $(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \cdots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n)$，就得出

$$\overline{\bar{x}_2\bar{x}_n} \geqslant \overline{x_2x_n'}.$$

最后，由于有 18.7.5，可将 18.7.9 用于三角形 (x_1, x_n, x_{n-1}) 和

(x_1, x'_n, x_{n-1})，从而得到

$$\overline{x_1x'_n} > \overline{x_1x_n}.$$

将所得到的等式和不等式依次排列即得

$$\bar{a}_n \geqslant \overline{\bar{x}_2\bar{x}_n} - \overline{x_1x_2} \geqslant \overline{x_2x'_n} - \overline{x_1x_2} \geqslant \overline{x_1x'_n} > \overline{x_1x_n} = a_n.$$

18.7.14 我们总假设两个多边形 P, $\bar{P}$ 是如 18.7.6 中所述的，也就是说它们具有相同的边数，且顶点之间有一个约定的双射，所用记号也与 18.7.6 一样。

18.7.15 记号和定义. 对 $i = 1, \cdots, n$, 令

$$\operatorname{signe}(i) = \begin{cases} + & 若\ \alpha_i > \bar{\alpha}_i, \\ 0 & 若\ \alpha_i = \bar{\alpha}_i, \\ - & 若\ \alpha_i < \bar{\alpha}_i. \end{cases}$$

使 $\operatorname{signe}(i)\operatorname{signe}(i+1) = -1$ 的 $i \in \{1, \cdots, n\}$ 的基数称为 $(P, \bar{P})$ 的严格变号数（约定 $\operatorname{signe}(n+1) = \operatorname{signe}(1)$)。

18.7.16 定理（"Cauchy 引理"）. 若 P, $\bar{P}$ 使 $a_i = \bar{a}_i\ \forall i = 1, \cdots, n$, 则或者对 $i = 1, \cdots, n$ 成立 $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$，或者严格变号数 $\geqslant 4$。

由于严格变号数是偶数，所以我们只需排除它等于 2 的情形

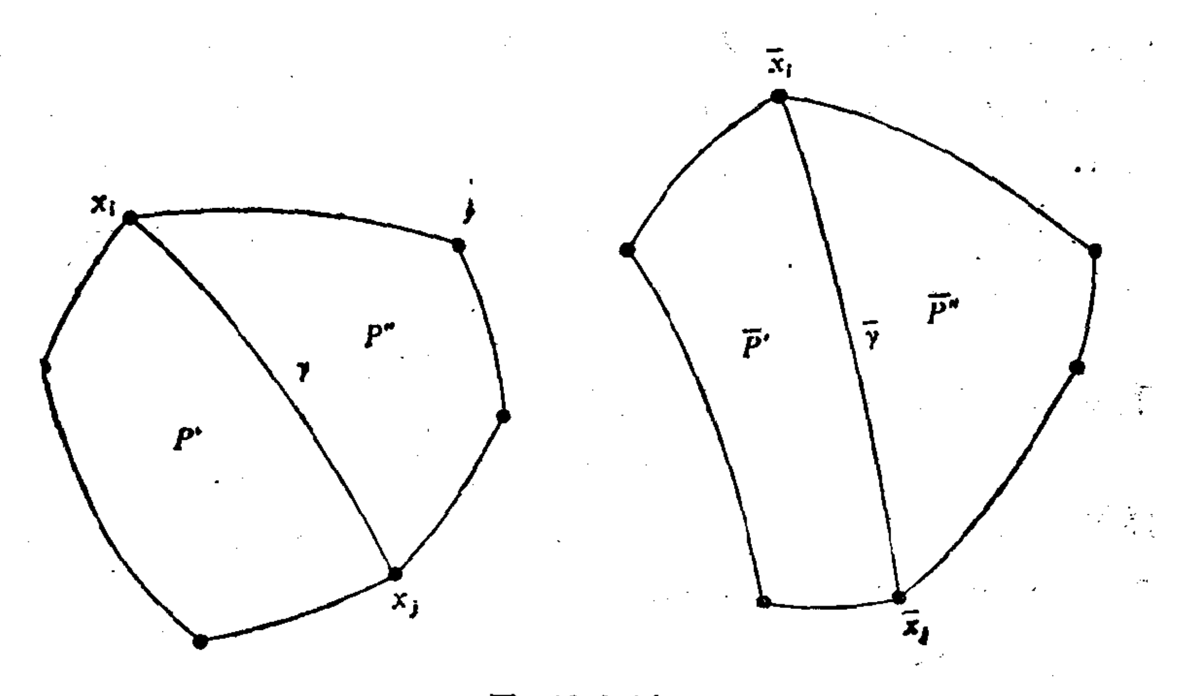


图 18.7.16.

即可，为此我们仍用反证法．根据假设，存在一些不相邻的 $i, j \in \{1, \cdots, n\}$，使得比如说对 $k \in \{i+1, \cdots, j-1\}$ 有 $\alpha_k \geq \bar{\alpha}_k$，且至少有一个这样的 k 使 $\alpha_k > \bar{\alpha}_k$，而对 $h \in \{j+1, \cdots, n\} \cup \{1, \cdots, i-1\}$ 有 $\alpha_h \leq \bar{\alpha}_h$，且至少有一个这样的 h 使 $\alpha_h < \bar{\alpha}_h$．分别作联结 x_i，x_j 和 $\bar{x}_i$，$\bar{x}_j$ 的大圆弧 γ 和 $\bar{\gamma}$，根据 18.7.5，它们分别将 P 和 $\bar{P}$ 分成两个多边形 P'，P'' 和 $\bar{P}'$，$\bar{P}''$．如果将命题 18.7.7 一面应用于 $(P', \bar{P}')$，一面又用于 $(P'', \bar{P}'')$，那么由假设即得出矛盾 $\overline{x_ix_j} > \overline{\bar{x}_i\bar{x}_j}$ 和 $\overline{x_ix_j} < \overline{\bar{x}_i\bar{x}_j}$。

18.8 球面 S^3: Clifford 平行性，在球面上的表述

在整个这一节中，$d = 3$，即 $S = S^3$

18.8.1 引言． 为了揭示我们所要得到的现象，我们将 $\mathbf{R}^4$ 等同于 $\mathbf{C}^2$，并回忆起 $\mathbf{R}$ 在 S^3 上的作用，它在 1.2.9 中定义为 $\mathbf{R} \ni t \longmapsto \{(z, z') \longmapsto (e^{it}z, e^{it}z')\} \in \mathfrak{S}_{S^3}$（也可参看 4.3.3.2 和 4.3.6.2)．考虑这一作用的二条轨道 C，C'，它们都是 S^3 的大圆，因为 $(e^{it}z, e^{it}z')$ 属于由 (z, z') 所生成的 $\mathbf{C}^2$ 的 1 维复向量子空间，即实平面．而 $\mathbf{R}$ 的下述作用是由 S 的等距变换所构成的；于是，由于根据定义 $\mathbf{R}$ 在轨道上是可迁的，就有

18.8.1.1 $\qquad d(m, C') = d(n, C') \; \forall \; m, n \in C$。

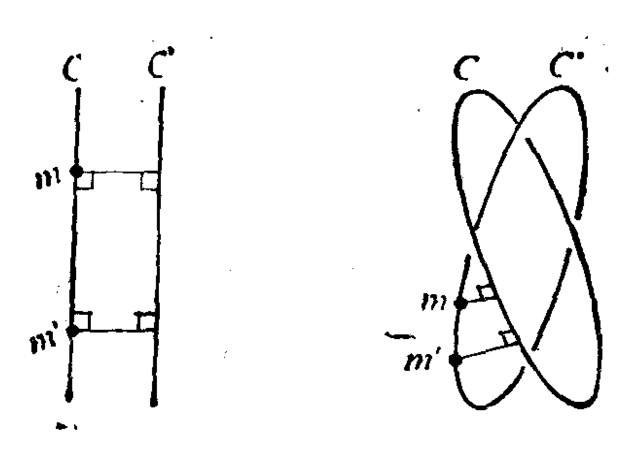


图 18.8.1.

这一性质使我们想起欧氏平面上两条平行直线 D, D' 的性质，事实上由它还可以推出 18.8.1.1 的公共值是 $d(C, C')$，且若 $m \in C$，$m' \in C'$ 满足 $\overline{mm'} = d(C, C')$，则通过 m 和 m' 的大圆与 C 和 C' 相交于直角（参看 18.11.6）. 由此可引入下面的定义.

18.8.1.2 定义. 设 C, C' 是 S 的两个大圆，若 $d(m, C')$ 与 $m \in C$ 无关，则称 C 和 C' 是 Clifford 平行的，记为 $C /\!/ C'$.

这一节的目的是研究 S 的大圆间的关系 $C /\!/ C'$，我们会看到（参看 18.8.2.5）它并不是一个等价关系，这与平面内平行线的情形不同，然而它可分成二个等价关系，它们分别称为第一类和第二类 Clifford 平行，这就是 Clifford 平行的奇特现象. 其证明需综合用到 18.8.2 中度量的讨论和 $\mathbf{R}$ 的适当作用的轨道的讨论，这些作用本质上是引言中用到的特殊作用的一般化，也可见 19.1.4.

18.8.2 几何轨迹的研究

18.8.2.1 对任一大圆 C，我们用 $\bar{C}$ 表示 $\mathbf{R}^4$ 的这样一个平面，它是由下列条件确定的：$C = \bar{C} \cap S$，且 $C^\perp$ 是使 $\bar{C}^\perp = (\bar{C})^\perp$ 的大圆，即 $C^\perp = S \cap (\bar{C})^\perp$ 和 $\mathbf{R}^4 = \bar{C} \oplus (\bar{C})^\perp$；我们可以注意到，这里实质上用到了 $d = 3$ 这一事实. 另外，对任一大圆 C 和任何 $\alpha \in [0, \pi]$，令

18.8.2.2 $$C_\alpha = \{n \in S : d(n, C) = \alpha\}.$$

我们有 $C_0 = C$，$C_{\pi/2} = C^\perp$，$C_{\pi-\alpha} = C_\alpha$（因为 C 含有两个对径点）和 $C_{\pi/2-\alpha} = C^\perp_\alpha$；于是我们只需对 $\alpha \in]0, \pi/2[$ 讨论 C_α. 为此，我们引入标准正交坐标，它的前二个基向量在 C 内，后二个在 $C^\perp$ 内，设为 (x, y, z, t)，令 $u = x + iy$，$v = z + it$. 则

18.8.2.3 对 $m = (x, y, z, t)$：

$$d(m, C) = \alpha \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = |u|^2 = \cos^2\alpha.$$

其实，当数量积 $((u, v)|(w, 0))$ 极大时，距离 $\overline{(u, v)(w, 0)}$ 达到极小值，在 $w = u/|u|$ 的情形也如此，于是

$$\cos\alpha = \left((u, v)\,\middle|\left(\frac{u}{|u|}, 0\right)\right) = \frac{|u|^2}{|u|} = |u|.$$

注意，由此还可得到 $|v|^2 = z^2 + t^2 = \sin^2\alpha$，因为 $(u, v) \in S$，

$|u|^2+|v|^2=1$. 事实上有

18.8.2.4 引理. 设 Q_α 是 $\mathbf{R}^4$ 的锥面,在上述坐标下由方程

$$\sin^2\alpha(x^2+y^2)-\cos^2\alpha(z^2+t^2)=0$$

所定义,则有 $C_\alpha=S\cap Q_\alpha$.

左端集合包含于右端集合,这一点刚才已证明;反过来,若

$$\sin^2\alpha\cdot|u|^2=\cos^2\alpha\cdot|v|^2,$$

则因为 $|u|^2+|v|^2=1$, 这就必然得出 $|u|^2=\cos^2\alpha$, 根据 18.8.2.3 就得出所需结论.

现在我们注意到了一个关键问题, 即锥面的方程是一个中性二次型 (参看 13.1.4.3). 因而我们可以对它用 13.7.11, 从而得到下述命题.

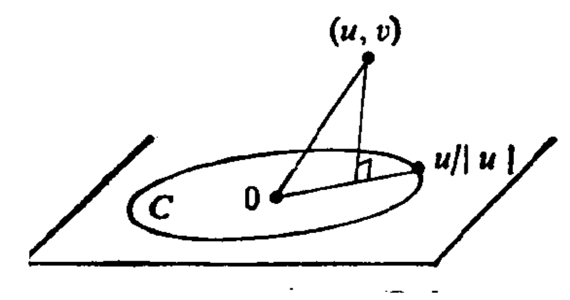


图 18.8.2.

18.8.2.5 命题. 对任何 $\alpha\in]0,\pi/2[$, 任何大圆 C 和任何 $m\in C_\alpha$, 恰好存在两个过 m 且 Clifford 平行于 C 的大圆.

这就表明了 $\cdot/\!\!/\cdot$ 不是等价关系, 因为若 C', C'' 是命题中的两个大圆, 则 $C/\!\!/C'$, $C/\!\!/C''$, 但 C', C'' 并不是 Clifford 平行的,因为 $d(C',C'')=0$ 且 $C'\neq C''$.

18.8.3 与一个大圆相伴的群的作用

18.8.3.1 我们要对每个大圆 C 以内蕴的方式定义群在 S^3 上的作用,使它成为 18.8.1 的推广. 为此,首先固定 $\overline{C}$ 的定向, 然后取 $\overline{C}^\perp$ 的定向使在 $\overline{C}\oplus\overline{C}^\perp$ 上诱导的定向是 $\mathbf{R}^4$ 的规范定向; 设 $f\in\mathrm{Isom}^+(\overline{C};\overline{C}^\perp)$ 是两个欧氏空间 $\overline{C}$, $\overline{C}^\perp$ 之间的、保持定向的等距映射, 则可看到 $\forall\rho\in O^+(\overline{C})$ 和 $\forall f\in\mathrm{Isom}^+(\overline{C};\overline{C}^\perp)$ 有 $f\rho f^{-1}\in O^+(\overline{C}^\perp)$,且 $f\rho f^{-1}$ 仅与 ρ 有关而与 f 无关,因为 $O^+(\overline{C})$是交换群. 最后,若将 $\overline{C}$ 上所考虑的定向改变为相反的定向, 则 $\overline{C}^\perp$ 的定向也变成与原先相反;所有这一切,都表明我们所得到的对象是在下述定义的意义上内蕴的:

18.8.3.2 定义. 对 S 的任大圆 C, 都可伴以两个 $\mathrm{Is}^+(S)$ 的

子群:

$$G_C^+ = \{(\rho, f\rho f^{-1}) \in O^+(\bar{C}) \times O^+(\bar{C}^\perp) \subset O^+(\mathbf{R}^4) = \mathrm{Is}^+(S): \rho \in O^+(\bar{C}),\ f \in \mathrm{Isom}^+(\bar{C}, \bar{C}^\perp)\},$$

$$G_C^- = \{(\rho, f\rho f^{-1}) \in \mathrm{Is}^+(S): \rho \in O^+(\bar{C}),\ f \in \mathrm{Isom}^-(\bar{C}, \bar{C}^\perp)\}.$$

如果 C, C' 是 S 的两个大圆，且 C' 是 G_C^+（或 G_C^-）的轨道，则称 C' 与 C 是第一类(或第二类)平行的,并记为 $C^+ /\!/ C'$（或 $C^- /\!/ C'$）.

18.8.4 定理

(i) 关系 $\cdot^+ /\!/ \cdot$ 和 $\cdot^- /\!/ \cdot$ 都是等价关系.

(ii) 条件 $C /\!/ C'$ 等价于 $C^+ /\!/ C'$ 或 $C^- /\!/ C'$; 特别是,经过任一 $m \in S$,有给定的 C 的两个 Clifford 平行圆,一个是第一类的,另一个是第二类的(且若 $m \notin C \cup C^\perp$, 则 $C' \neq C''$).

(iii) C 的经过 $m \in S \setminus (C \cup C^\perp)$ 的两个 Clifford 平行圆以下列几何条件为特征: 设 $m_0 \in C$ 使 $d(m_0, m) = d(m, C) = \alpha$, $P = \langle m \cup C \rangle$ 是含 m 和 C 的 2 维子球面, D 是经过 m 和 m_0 的大圆, 则 C' 和 C'' 均垂直于 D, 且均与 P 夹成 α 角;特别是, C' 与 C'' 的夹角等于 2α.

(iv) 设 C, C', C'' 是三个大圆,满足条件 $C'^+ /\!/ C$, $C''^- /\!/ C$ 和 $d(C', C) = d(C'', C)$, 则 $C' \cap C'' \neq \emptyset$.

(v) (Clifford 平行四边形)设 C, C' 是两个大圆,且 $C^+ /\!/ C'$, $m, n \in C$, $m' \in C'$, 又设 D 是含 m 和 m' 的大圆,而 D' 是使 $n \in D'$ 和 $D'^- /\!/ D$ 的大圆,则 $D' \cap C'$ 是一个点 n', 且 $\{m, n, m', n'\}$ 是下述意义下的 Clifford 平行四边形: $\overline{mm'} = \overline{nn'}$, $\overline{mn} = \overline{m'n'}$, 且在 m, m', n, n' 处的四个角相等.

(vi) (唯一性): 设 C, C', D, D' 是四个大圆, 且 $C /\!/ C'$, $D /\!/ D'$, $d(C, C') = d(D, D')$, 则存在 $f \in \mathrm{Is}(S)$ 使 $f(C) = D$ 和 $f(C') = D'$. 若还满足 $C^+ /\!/ C'$, $D^+ /\!/ D'$, 则可在 $\mathrm{Is}^+(S)$ 中选此 f.

(i) 首先注意到 $C^+ /\!/ C'$ 等价于 $G_C^+ = G_{C'}^+$, 这一点,例如可通过将 G_C^+ 在附于 C 和 $C^\perp$ 的坐标下写成 18.8.1 的形式而得证,因而 $\cdot^+ /\!/ \cdot$ 是一个等价关系. 同理可知 $\cdot^- /\!/ \cdot$ 也是等

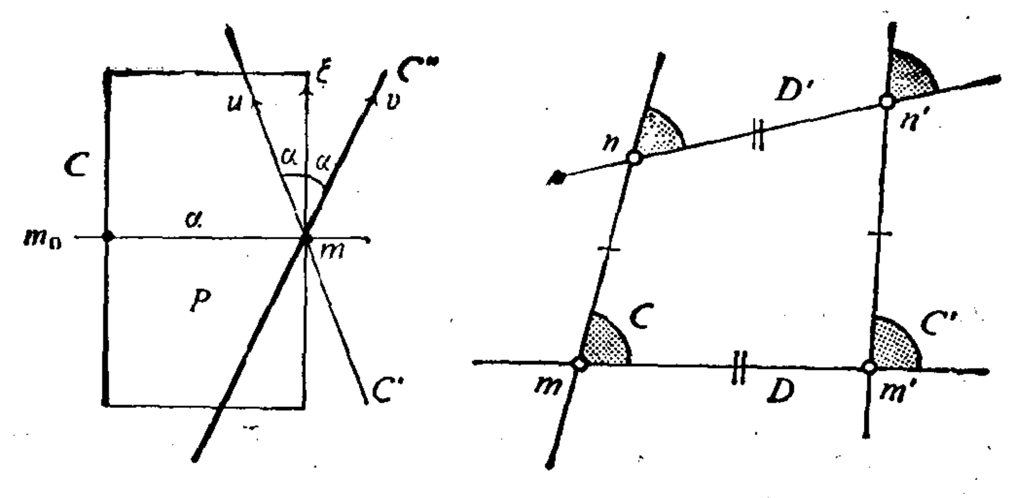


图 18.8.4.1.

价关系。

(ii) 若 $C^+/\!/C'$ 或 $C^-/\!/C'$，则根据定义 18.8.1.2，且由于 C，C' 是 $\mathrm{Is}(S)$ 的一个子群的两条轨道，就有 $C/\!/C'$；G_C^+ 和 G_C^- 均有一轨道通过点 $m\in S\backslash(C\cup C^\perp)$，这两条轨道都 Clifford 平行于 C，因而从 18.8.2.5 即可得所需结论。

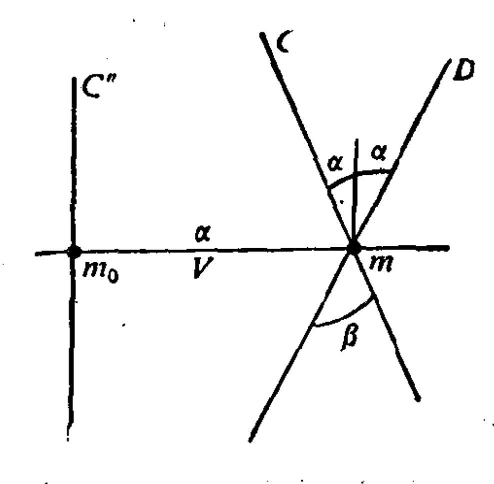


图 18.8.4.2

(iii) 正交于 D 的结论可由 $d(m_0, m)=d(C, C')=d(C, C'')$ 推出；至于夹角，我们将具体地计算 C' 和 C'' 在 m 处的切向量 u, v 同一个垂直于 D 且与 P 在 m 相切的向量 ξ. 采用适当的坐标，若 $m=(z, z')$，则轨道 C' 和 C'' 由 $t\longmapsto(e^{it}z, e^{it}z')$ 和 $t\longmapsto(e^{it}z, e^{-it}z')$ 所定义，因此我们可将这些映射关于 t 在 0 处的导数取作 u, v, 即 $u=(iz, iz')$, $v=(iz, -iz')$. 向量 $\xi=\dfrac{u+v}{2}=(iz, 0)$ 则切于 P 且垂直于 D. 于是

$$(u|\xi)=(v|\xi)=(iz|iz)=|z|^2=\cos^2\alpha,$$

从而

$$\frac{(u|\xi)}{\|\xi\|}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha\ (参看\ 18.8.2.3)。$$

(iv) 可从 18.8.2.4 和 13.7.11 得出。

(v) 证明的思想是找出一个大圆 C''，使对适当的 α，整个图形 $C\cup C'\cup D$ 位于 C''_α 内(参看 18.8.2.2)。而 (iii) 已为我们指明了做法；若 β 是 C 和 D 在 m 处所夹的锐角，令 $\alpha=\beta/2$，作大圆 V，使它在 m 处垂直于 C 和 D 所生成的 2 维子球面 Q。在 V 上取一点 m_0 使 $\overline{m_0m}=\alpha=\beta/2$，再过 m_0 作一大圆 C''，使 $C''^{+}/\!/C$ (参看 (ii))；根据这样的构造以及 (iii)，(i) 和 (ii)，我们有 $C\subset C''_\alpha$，$C'\subset C''_\alpha$ 和 $D\subset C''_\alpha$。于是同样还有 $D'\subset C''_\alpha$，且按照 13.7.11，$C'\cap D'$ 是一个点 n'。根据 $\cdot^{-}/\!/\cdot$ 的定义，存在 $g\in G_{\bar{C}''}$ 使 $g(m)=m'$；然而这时有 $g(D)=D$，$g(D')=D'$，且因为 $g(C)$ 是在 C''_α 内所作的含 m' 的大圆，故同样也有 $g(C)=C'$。特别有 $g(n)=n'$，从而 $\overline{mn}=\overline{m'n'}$，因为 $g\in \mathrm{Is}(S)$。同样可得出 $\overline{mm'}=\overline{nn'}$。为证明四个角是相等的，我们可利用上面的 g 来证明这些角分别在 m，m' 以及 n，n' 处相等，或者也可利用 (iii)：这些角的公共值是 $2\alpha=\beta$！

(vi) 首先，根据 8.2.7 我们可以假设 $C=D$；于是可利用 18.8.2.5，如果 $C'=D'$，证明即已完成，如若不然，则(iii) 表明关于含 $C=D$ 且通过点 $C'\cap D'$ 的 2 维子球面的对称将 C' 变换到 D'。

18.8.5 附注. 我们知道，$S=S^3$ 在 18.8.1 的作用下的商空间恒同于 $P^1(\mathbf{C})\cong S^2$；这一点可见 18.1.3.6，也请参阅 4.3.6.2。

我们可将 (iii) 的一部分用另一种说法表示为：给定 C 和 C' 使 $C/\!/C'$ 后，当过 C 的 2 维子球面 P 变化时，P 始终与 C' 相交于固定角(且等于 $2d(C,C')$)。

(v) 完全对应于欧氏平面中平行四边形的性质。关于这种类似性，可见 18.11.17。

18.8.6 C_α 上的回路. 对任何的 C 和 α，子集 C_α 不仅在 G_C^+ 和 $G_{\bar{C}}$ 下是稳定的，且根据 18.8.2.2，它在 $O^+(\bar{C}) \times O^+(\bar{C}^\perp)$ 下也是稳定的. 我们说 C_α 在 $O^+(\bar{C}) \times \mathrm{Id}_{\bar{C}^\perp}$ 下是稳定的，这就是说 C_α 是以 $C^\perp$ 为轴的旋转；同样，C_α 是以 C 为轴的旋转. 因而 C_α 是*双重旋转*.

从拓扑的观点，$C_\alpha \cong \{(u,v) \in \mathbf{C}^2 : |u| = \cos\alpha,\ |v| = \sin\alpha\}$（参看 18.8.2.3），因而它同胚于 $S^1 \times S^1$.

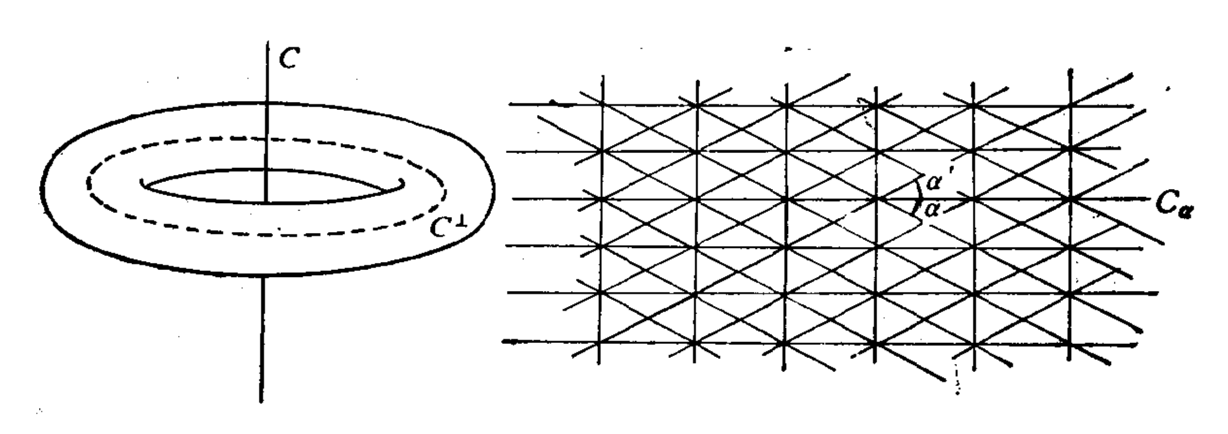


图 18.8.6.

$O^+(\bar{C}) \times \mathrm{Id}_{\bar{C}^\perp}$ 在 C_α 上的轨道是 S 上的小圆，即过 $C^\perp$ 的 2 维子球面在 C_α 上的截线；对于 $\mathrm{Id}_C \times O^+(\bar{C}^\perp)$，情况是相同的. 这两族轨道是 C_α 的经线，它们相交成直角. 在 C_α 内关于 C（或 $C^\perp$）的 Clifford 平行圆也构成两族曲线，且由于 18.8.4 (iii)，与上面的"经纬线"相交成它们的角平分线，夹角为定角 α. 不过要注意，C_α 的两条同一类 Clifford 平行圆是交错的，然而两条同一类的经线是不交错的. 而且 Clifford 平行圆也根本不是在旋转曲面意义下的 C_α 的"纬线".

18.8.7 球面 S^3. 如果我们取定一个 α，例如 $\alpha = \frac{\pi}{4}$，又取定一个 C，那么可看出，我们可将球面 S^3 考虑为两个"实心"环面的并集，第一个是 $\Xi = \bigcup_{\alpha \in [0,\pi/4]} C_\alpha$，第二个是 $\Xi' = \bigcup_{\alpha \in [\pi/4,\pi/2]} C_\alpha$，沿它们的公共边界 $C_{\pi/4}$ 粘合起来. 在代数拓扑中考虑 S^3 时，有时这是一种很有用的方法；例如著名的 Reeb 千层酥就是这样得到的：[RE] 第 19，25 页.

18.8.8 四元数的应用. 18.8.4 可部分地利用四元数来证明；与此同时甚至可以得出某些更精细的结果(例如参看 [DE2] 第 205—207 页)．但是，在我们看来这种做法比之上面给出的做法是内在性不足而人为性有余．

18.9 Clifford 平行性在 3 维欧氏空间的应用：Villarceau 圆，挠平行性

18.9.1 在此我们要兑现 10.12 中的许诺：从几何上说明 10.12.1，10.12.2 和 10.12.3 中所提出的那些奇特的现象．为此，我们只需作从 S^3 的北极 n 出发的 S^3 到 $\mathbf{R}^3$ 上的球极射影 f（参看 18.1.4.1)；同时取定过 n 的一个大圆．我们实质上利用了反演的性质，参看 10.8 和 18.1.4.3；在 $\mathbf{R}^3$ 的规范坐标(x,y,z)下，如果适当选取 C，则 $f(C\backslash n)$ 就是 z 轴，$f(C^{\perp})$ 是 xy 平面的单位圆．

18.9.2 对 $\alpha\in]0,\pi/2[$，$f(C_\alpha)$ 是什么呢？首先注意，18.8.6 表明 $f(C_\alpha)$ 是通常意义下以 Oz 为轴的旋转曲面；因此只需知道 $f(C_\alpha)$ 的一条经线即可．然而这是 C_α 在 18.8.6 意义下一条经线的像，在 18.8.6 中我们已经知道它们是 S 的小圆，而且（参看 18.1.4.3) 经线就是 $\mathbf{R}^3$ 的（普通的）圆．因而得出结论：$f(C_\alpha)$ 是通常意义下 $\mathbf{R}^3$ 中以 Oz 为轴的环面．其次注意，对适当的 α，在不计相差一个相似的条件下，$\mathbf{R}^3$ 的任一环面都可作为一个 $f(C_\alpha)$ 而得到．

18.9.3 现在 18.8.6 表明环面 $\Theta=f(C_\alpha)$ 包含四族圆：通常的经线和纬线（由此看出为了得知这两族圆相交于直角可不需要 18.8.6)，以及另外两族圆，即 C 在 C_α 内的 Clifford 平行圆在 f 下的像；后两族圆就是 10.12.1 中的 Villarceau 圆，它们根据 18.8.4 (iv) 而满足 10.12.2 中的相交或不相交性质． 18.8.6 也表明它们就是倾角 α 的环面螺线（因为反演保持角度)．至于 10.12.3 末尾的挠平行性，就是由 18.8.5 通过 f 导出的性质．

18.9.4 附注

18.9.4.1 在 20.5.4 和 20.7 中，我们将给出这些现象的代数证明；而且甚至还可发现一些曲面，它们是类似于环面的连通的四次曲面，然而它们具有六族圆。

18.9.4.2 当 α 从 0 到 $\pi/2$ 变化时，如同 18.8.7 中所指出的那样，我们得到 S^3 的一个相当好的直观形象，它可以确切地说如下：在每个 C_α 上我们仅考虑第一类平行圆．从 $C=C_0$ 起直至 $C_{\pi/2}=C^\perp$，我们可用两个两个无公共点的圆（C 的第一类平行圆）填满 S^3；如果在 $\mathbf{R}^3$ 中直观地看，两个实心环 $\mathcal{B}$，$\mathcal{B}'$ 是沿它们

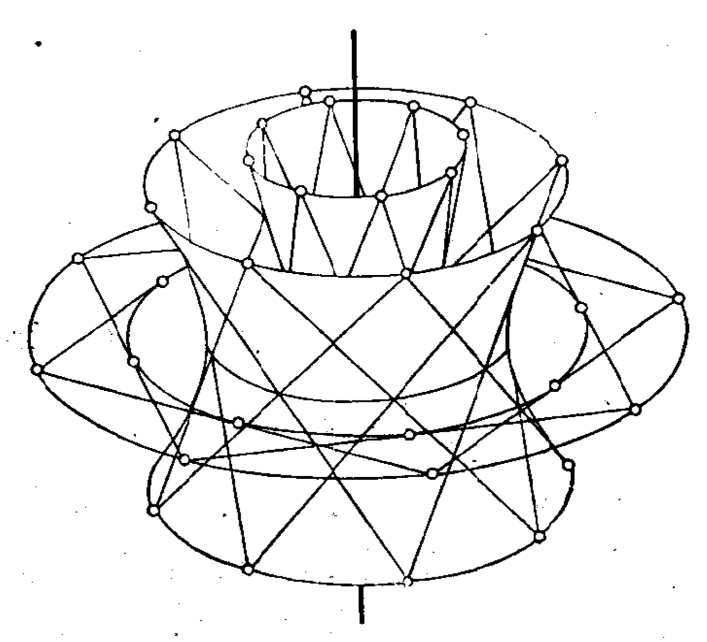


图 18.9.4.2

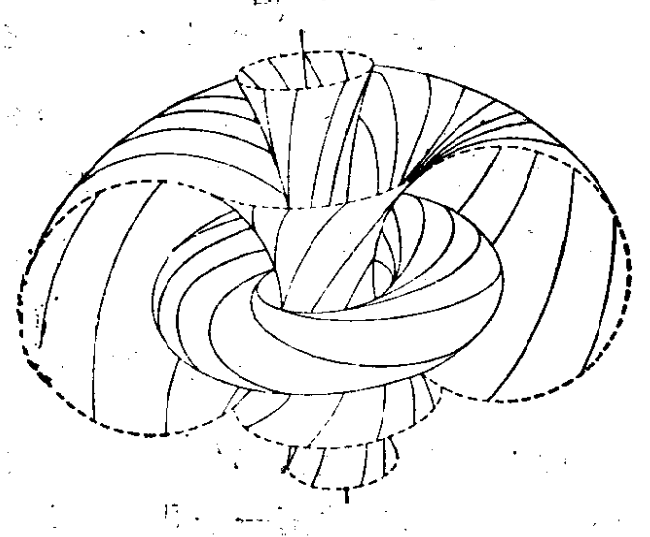


图 18.9.4.3.

Penrose，«宇宙中的几何学»，

«今日数学»丛书，Springer，1978.

的 Villarceau 圆粘合起来的，而当从 $\mathbf{R}^3$ 的观点来看从 Ξ 到 Ξ' 的过渡时，我们可以说经线变成了纬线(指旋转曲面的纬线，而不是 Clifford 平行圆)。当然，S^3 这种按圆的分解就是 Hopf 纤维化 4.3.7。

18.9.4.3 注意，在含有 Ox 的固定平面内，$f(C_\alpha)$ 的经线构成圆束，它们的极限点是这平面同 $f(C^\perp)$ 的两个交点。图18.9.4.2 表示一个线性模型，其中环面是以旋转双曲面代替的，而 Villarceau 圆则变为直母线。

18.9.4.4 读者想必会猜到存在 Clifford 平行性的推广，对此，建议参阅 [WO]。

18.10 S^d 的共形变换群或 Möbius 群

18.10.1 作为射影二次曲面的球面. 在 14.3.3 中我们已经看到，$P^n(\mathbf{R})$ 中方程为 $q=-\sum_{i=1}^{n} x_i^2+x_{n+1}^2$ 的二次超曲面 α 的像 $C(1,n)$ 是同胚于球面 S^{n-1} 的拓扑空间。稍加修改，我们就可在本节中利用 14.3.3 的证明中的这种等同性，并在下文中取定球面 S^d 和 $P^{d+1}(\mathbf{R})$ 的射影二次超曲面的像之间的一个双射。

18.10.1.1 记号. 令 $q=-\sum_{i=1}^{d+1} x_i^2+x_{d+2}^2$，它是 $\mathbf{R}^{d+2}$ 的二次形式；将 $\xi\in\mathbf{R}^{d+2}$ 写成 $\xi=(z,t)$，$z\in\mathbf{R}^{d+1}$，$t\in\mathbf{R}$ 的形式，从而将 $\mathbf{R}^{d+2}$ 等同于 $\mathbf{R}^{d+1}\times\mathbf{R}$。特别有 $q(\xi)=-\|z\|^2+t^2$。因而可定义 $P^{d+1}(\mathbf{R})$ 中方程为 q 的二次超曲面 α 的像 $\operatorname{im}(\alpha)$ 到 S^d 的双射 Σ 为：

18.10.1.2 $\Sigma:\operatorname{im}(\alpha)\to S^d:\Sigma(p(z,t))=\dfrac{z}{t}$.

18.10.1.3 18.10.1.4 将会表明，S^d 与 α 的像之间的等同关系是极好的，它是 α 的群 $PO(\alpha)$ 的第一个几何实现(参看 14.7)；至于其他的实现可见第 19 和 20 章。为了在几何上直观地了解 Σ，更方便的做法往往是通过映射 $z\longmapsto(z,1)$，把 S^d 与 $\mathbf{R}^{d+2}$ 中超

平面上的单位球面 $H=\{(z,t):t=1\}$ 等同起来；这时，Σ 表示 $\mathbf{R}^{d+2}$ 中的点或直线，它们属于 q 的迷向锥面，穿过 H（对此我们在 5.0 已有所了解，在 19.2 还将碰到）。

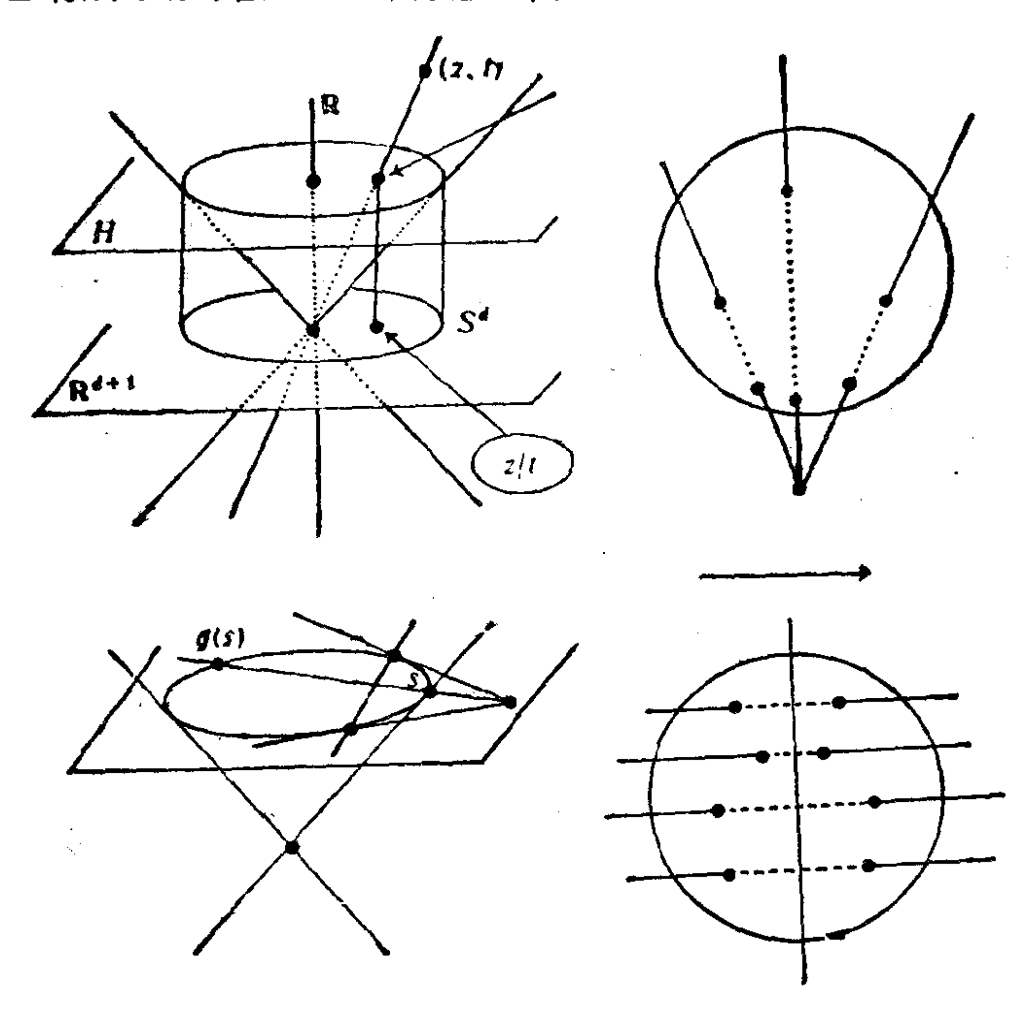


图 18.10.1.

18.10.1.4 定义. $\mathbf{R}^{d+1}$ 的整体保持 S^d 的反演或 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的超平面向量对称在 S^d 上的限制都称为 S^d 的**反演**. S^d 的 Möbius **群**是 S^d 的双射所成群中由反演生成的子群，记为 $\mathrm{M\ddot{o}b}(d)$.

18.10.1.5 命题. $\mathrm{M\ddot{o}b}(d)=\{\Sigma\circ(f|\mathrm{im}(\alpha))\circ\Sigma^{-1}:f\in PO(\alpha)\}$，这就是说，经由 Σ，S^d 的 Möbius 群正好是群 $PO(\alpha)$ 在 $\mathrm{im}(\alpha)$ 上的限制.

根据 13.7.12，我们只需证明：若 $f\in PO(\alpha)$ 来自 q 连带的超平面对称，则 $\Sigma\circ(f|\mathrm{im}(\alpha))\circ\Sigma^{-1}$ 是 S^d 的一个反演. 然而这恰好就是 14.7.4 所说的，因为 S^d 的反演 g 的特征就是直线 $\langle s,g(s)\rangle$ 通

过 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的一个固定点或平行于一个固定方向.

18.10.1.6 注. 在 $\mathrm{im}(\alpha)$ 上的限制定义了一个映射 $PO(\alpha)\to$ Möb(d), 它是群同构;实际上,在 $\mathbf{R}^{d+2}$ 中它就是线性映射; 而锥面 $q^{-1}(0)$ 生成向量空间 $\mathbf{R}^{d+2}$.

根据 8.2.12, 群 Möb(d) 包含 $\mathrm{Is}(S^d)$.

18.10.2 Möb(d) 和球极射影

18.10.2.1 设 n 是 S^d 的北极, $g: S^d\backslash n\to\mathbf{R}^d$ 是球极射影; 再设 f 是 S^d 的一个反演,且 $n'=f(n)$ 是 n 在 f 下的像, 则: 如果 $n'=n$, 那么映射 $g\circ f\circ g^{-1}$ (事实上其中 f 是限制在 $S^d\backslash n$ 上的) 是 $\mathbf{R}^d$ 的超平面对称;如果 $n'\neq n$, 那末映射 $g\circ f\circ g^{-1}$ (事实上其中 f 是限制在 $S^d\backslash\{n,n'\}$ 上的)是 $\mathbf{R}^d$ 中以 $g(n')$ 为极点的反演. 我们将这一证明留给读者,这是熟悉反演的一个很好方法.

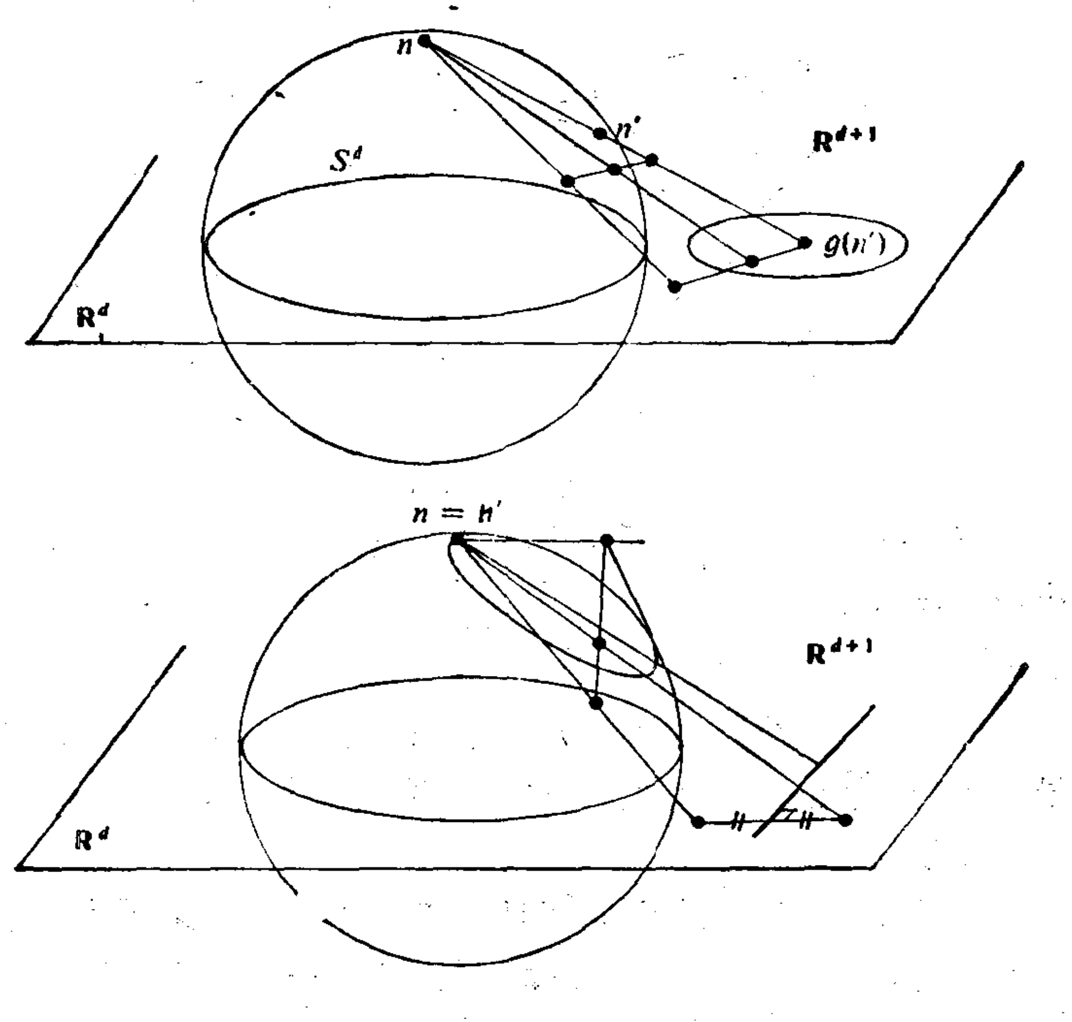


图 18.10.2.

18.10.2.2 推论. 对任何相似变换 $h \in \mathrm{Sim}(\mathbf{R}^d)$，由 $f(n)=n$ 和 $S^d\backslash n$ 上 $f=g^{-1}\circ h\circ g$ 所定义的映射 $f \in S^d \to S^d$ 是属于 Möb(d) 的. 实际上，前面已指明，若 f 是反演或超平面对称，则 $g^{-1}\circ h\circ g$ 在适当地延拓到整个 S^d 上后，是属于 Möb(d) 的；然而根据 9.3.3，9.5.2 和 10.8.1.2，这些 h 生成 $\mathrm{Sim}(\mathbf{R}^d)$. 在此我们假设了适当的延拓的存在性；最简单的做法就是在 $\mathbf{R}^d$ 上附加一个无穷远点并通过 $g(n)=\infty$ 将 g 延拓成 $S^d\to\mathbf{R}^d$，等等；我们在 20.6 将充分地讨论这个问题.

18.10.2.3 例. 我们特别可在 Möb(d) 中求得与 $\mathbf{R}^d$ 的向量位似相伴的映射 $f_\lambda=g^{-1}\circ H_{0,\lambda}\circ g$；若 $\lambda>1$，f_λ 以北极作为引力点，南极作为斥力点，也就是说合成映射 $f_\lambda^n(n\in\mathbf{N})$ 使 $S^d\backslash s$ 的所有点向北极 n 收敛，只有南极 s 免受北极 n 的引力.

18.10.2.4 其它的例：$n=2$ 的情形. 在这种情形下，群 Möb (2) 恰好是由这样的映射全体所生成，它们经由 4.3.8 和 18.1.4.5 的等同关系可写成下列形式之一：

$$z\longmapsto\frac{az+b}{cz+d}\ \text{或}\ z\longmapsto\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\quad(ad-bc\neq 0);$$

第二种形式有时称为反射影对应.

18.10.3 共形映射. 在 9.5.4 中，我们已经遇到过欧氏空间开集的共形映射的概念；对下面的更一般的定义，我们将随意地使用微分几何的术语，对这些术语，例如可参看 [B-G] 第 2 章. 然而对球面的情形，在 18.11.22 中将给出一种更初等的叙述，这是我们将使用的仅有的情形.

18.10.3.1 定义. 设 E, F 是两个欧氏仿射空间，且 $M\subset E$，$N\subset F$ 是 E, F 的同维 C^1 类微分子流形，C^1 类映射 $f: M\to N$ 称为共形的，如果对任何 $x\in M$，当切空间 $T_xM\subset E$，$T_{f(x)}N\subset F$ 附有由 E, F 所诱导的欧氏结构时，$f'(x): T_xM\to T_{f(x)}N$ 是它们之间的相似对应. 共形映射的集合记为 Conf (M; N)；我们也记 Conf (M) = Conf (M; M). 另外，如果 M 和 N 还是定向的，则把 Conf (M; N) 中使 $f'(x)$ 保持定向 $\forall x\in M$ 的 f 构成的子集

记为 $\mathrm{Conf}^{+}(M;N)$。

18.10.3.2 例. 两个共形映射的合成是共形的，特别是，$\mathrm{Conf}(M)$ 和 $\mathrm{Conf}^{+}(M)$ 关于合成运算成群。

Mercator 射影是共形的，参看 18.1.8.2。

在一个微分子流形上，反演的限制或反演的合成都是共形映射。例如球极射影是共形的；球面的反演也是共形的（参看 18.10.1.4）。

18.10.3.3 注. 想像力丰富的读者会注意到，只要 M 和 N 的切空间附有欧氏结构，我们就能定义共形映射 $f:M\to N$ 的概念；而这里用到的恰恰就是黎曼流形的概念。有关黎曼流形之间共形映射的一般定理，可见 18.10.9。

18.10.4 定理. 对所有 $d\geqslant 2$ 有 $\mathrm{M\ddot{o}b}(d)=\mathrm{Conf}(S^d)$。令 $\mathrm{M\ddot{o}b}^{\pm}(d)=\mathrm{Conf}^{\pm}(S^d)$。对 S^d 的任意一个小球面 σ 和 $\forall f\in\mathrm{M\ddot{o}b}(d)$，$f(\sigma)$ 必是 S^d 的小球面；反之，具有这一性质的 S^d 的一个双射必定属于 $\mathrm{M\ddot{o}b}(d)$。任一 $f\in\mathrm{M\ddot{o}b}(d)$ 都是 S^d 的至多 $d+2$ 个反演的乘积。群 $\mathrm{M\ddot{o}b}(d)$ 自然同构于方程为 $-\sum_{i=1}^{d+1}x_i^2+x_{d+1}^2$ 的二次超曲面的群 $PO(\alpha)$；特别地，它是 $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ 维的非紧致李群。我们还有下面的同构：$\mathrm{M\ddot{o}b}(1)\cong GP(1,\mathbf{R})$，$\mathrm{M\ddot{o}b}(2)\cong GP(1;\mathbf{C})$；最后那个群也是黎曼球面的自同构群。

根据 10.8.5.2 和 18.10.3.2，有 $\mathrm{M\ddot{o}b}(d)\subset\mathrm{Conf}(S^d)$；为证明相逆的包含关系，我们可以假设 $f\in\mathrm{Conf}(S^d)$ 保持北极 n 不动，这是由于 $\mathrm{M\ddot{o}b}(d)\subset\mathrm{Conf}(S^d)$ 和 $\mathrm{M\ddot{o}b}(d)$ 在 S^d 上可迁的缘故。若 $f(n)=n$，利用北极出发的球极射影 g，并考虑到 g 和 f 是共形映射(参看 18.10.3.2)，我们可得出

$$g\circ f\circ g^{-1}\in\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^d);$$

按照 Liouville 定理 9.5.4.6，这就是 $g\circ f\circ g^{-1}\in\mathrm{Sim}(\mathbf{R}^d)$，因而根据 18.10.2.2 即得 $f\in\mathrm{M\ddot{o}b}(d)$（读者会注意到，在此我们承认了一个很微妙的结论：若 f 是共形的，则它必定是 C^1 类的，参看

9.5.4.7)。

$f(\sigma)$ 是小球面，这一点可从反演的性质得出，参看 10.8.2；为证其逆，在此我们也可假设 $f(n)=n$。由于在映射 g 下，$\mathbf{R}^d$ 的直线对应于过 n 的小圆，因而 $g\circ f\circ g^{-1}$ 将 $\mathbf{R}^d$ 的直线变成直线；因此只需应用仿射几何基本定理 2.6.5 即可(试与 9.5.3.4 相比较)。

定理的余下部分可从 18.10.1.5 和 13.7.12 以及 16.3.9 得出。

18.10.5 注. $\text{Möb}(d)=\text{Conf}(S^d)$ 和 $\text{Is}(S^d)$ 的维数之差等于

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2}-\frac{d(d+1)}{2}=d+1;$$

我们可以说，这个差对应于连带于 $\lambda\in\mathbf{R}^*$ 的 18.10.2.3 中的 f_λ 和 S^d 上的若干点(d 对应这些点，1 对应 λ)，这些点在 $\text{Is}(S^d)$ 下是生成 $\text{Möb}(d)$ 的。

对 $d=1$ 和 $d=2$，$\text{Möb}(d)$ 的维数分别为 3 和 6；这与下面得出的结果是一致的。

18.10.6 命题. 群 Möb(1) 和 Möb(2) 分别在 S^1 和 S^2 的不同点所构成的三元组集合上单纯可迁。对任何 $d\geqslant 2$，群 $\text{Möb}(d)$ 在 S^d 的不同点所构成的三元组集合上可迁。

$d=1$ 和 $d=2$ 的情形，可从 4.5.10 经由 16.3.9 得出。如果 $d\geqslant 3$，我们只需注意到三个点生成一个 2 维子球面，而 $\text{Möb}(d)$ 包含 $\text{Is}^+(S^d)$，根据 8.2.7 它就在 2 维子球面上可迁。

18.10.7 Möbius 不变量. 将上面的命题与 6.1 比较后，我们就可进一步思考这样的问题：比如在 $d\geqslant 3$ 时，是否能将 18.10.6 的结论改进为四个点？如果不能，是否能找到一个必然的、可能还是作为特征量的不变量？答案是容易得到的；对不同的 $a,b,c,d\in S^d$，令

18.10.8 $$\mu(a,b,c,d)=\frac{ca}{cb}\Big/\frac{da}{db},$$

其中所用的是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 中的欧氏距离，则 μ 是 $\text{Möb}(d)$ 下的不变量，也就是说，对所有不同的 $a,b,c,d\in S^d$ 和 $f\in\text{Möb}(d)$，总有 $\mu(f(a),f(b),f(c),f(d))=\mu(a,b,c,d)$；我们称 μ 为 Möbius

不变量．根据 18.10.1.5，只需对 S^d 的任一反演证明 μ 的不变性；对称的情形是显然的，而对反演的情形可利用 10.8.1.3 通过直接计算而得出。

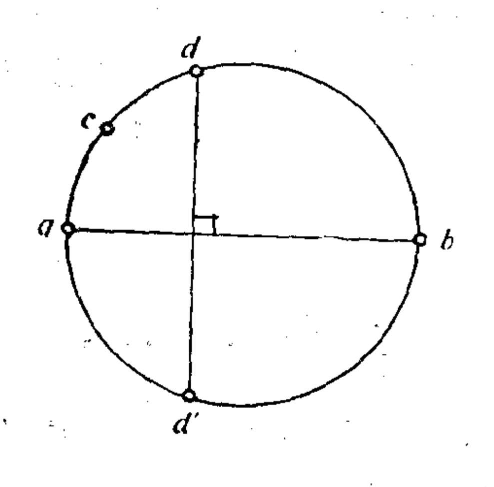


图 18.10.8.

与交比相反，如图 18.10.8 所示，μ 不是特征量，也可参看 19.6.10.

18.10.9 注． 球面具有一个严格地比它的等距变换群更大的共形变换群；这个现象对一个紧致黎曼流形来说，原本似乎并不太使人感到意外。然而，新近才证明的结果表明，球面是所有紧致黎曼流形中唯一具有这种性质的：见 [LF2] 或 [OA]，也可看 19.8.6.

近来，Möbius 群在好多研究中已经起着基本的作用，其中有：关于某些负常曲率空间的 Mostow 刚性定理（见[MW 1]和[MW 2]），关于黎曼球面 S^2 上 Laplace 算子的最小特征值的 Hersch 定理(见 [HS]，也可见 [E-S] 第 130—131 页).

18.11 练　　习

18.11.1 图 18.1.1 下面的球径计顶部杠杆系统有什么作用?

18.11.2 证明：若球面的图是共形的且保持面积，则它必定是等距的.

18.11.3 证明斜驶线的球极射影是对数螺线.

18.11.4 在 S^2 上讨论下列问题：寻找并作出一个小圆，它分别满足(1)通过三个点，(2)通过两个点且切于一已知小圆，(3)通过一点且切于两个已知小圆，(4)切于三个已知小圆.

18.11.5 在 S^2 上讨论三角形的下列概念：垂直平分线、高线，中线和角平分线，并讨论它们的共点性.

18.11.6 在球面上讨论 9.2.2.

18.11.7 对 S^d 的一族点 $(x_i)_{i=1,\cdots,k}$，讨论 9.7.6 变成什么。

18.11.8 讨论球面三角形全等的"不定"情形，例如两个三角形有两条边和一对角相等的情形。

18.11.9 对任意半径 R 的球面，求出 18.6.13 中的各公式，并观察当 R 变得很大时，这些公式情况如何。

18.11.10 Lexell 定理. 给定两点 $x, y \in S^2$ 后，讨论使 $\mathscr{E} = \langle x, y, z\rangle$ 的角 α, β, γ 满足 $\alpha + \beta - \gamma =$ 常数的点 $z \in S^2$ 的集合(容有已知角的弧在 S^2 上的推广，参看 10.9.4)；并由此导出使 $\mathscr{E}$ 具有不变面积的 z 的集合. 其推广可见 [DX] 第 227 页。

18.11.11 分别对下列球面三角形给出一个完整的公式表： 直角三角形，等腰三角形，等边三角形和直边三角形。

18.11.12 讨论 S^2 上的有三个直角的四边形；将余下的那个角表示成两条不相邻的边的函数。

18.11.13 球面上的三角形不等式. 利用三点的 Gram 行列式证明这不等式(参看 8.11.5)。

18.11.14 S^d 上 $d+2$ 个点之间距离的关系. 证明：若 $(x_i)_{i=1,\cdots,d+2}$ 是 S^d 的 $d+2$ 个点，则总成立 $\det(\cos(\overline{x_ix_j})) = 0$。

18.11.15 球面圆锥曲线. 设 $q \in Q(\mathbf{R}^3)$ 是非退化的，$C = q^{-1}(0)$ 是相应的迷向锥面，并假设是非空的. 证明存在两个或一个彼此平行的仿射平面系列，它们都交 C 于圆.

证明存在非退化的 $q^* \in Q(\mathbf{R}^3)$，使对任何 $x \in C^*\backslash 0$ (其中 $C^* = (q^*)^{-1}(0)$)，$x^\perp$ 成为 C 的切平面；我们称 C^* 是 C 的**极锥面**。

假设 C 含有两列不同的圆截口(参看 15.7.14)，证明 C^* 也必定如此. 设 D, D' 是 $\mathbf{R}^3$ 中垂直于 C^* 的圆截口的直线，对 $S = S^2$，令 $D \cap S = \{f, g\}$，$D' \cap S = \{f', g'\}$. 证明 $C \cap S$ 满足：

$$C \cap S = \{m \in S: \overline{mf} + \overline{mf'} = 常数\},$$

或

$$C \cap S = \{m \in S: \overline{mf} + \overline{mg'} = 常数\}.$$

反之，设 f, f' 是 S 的两个不同的点，$a \in \mathbf{R}_+$，证明对适当的 a，$\{m \in S: \overline{mf} + \overline{mf'} = a\}$ 是形如 $C \cap S$ 的。我们称 $C \cap S$ 是球面圆锥曲线，f 和 f'（以及 g, g'）称为焦点。有关球面圆锥曲线的其他结果，可见［DX］第 230—231 页。

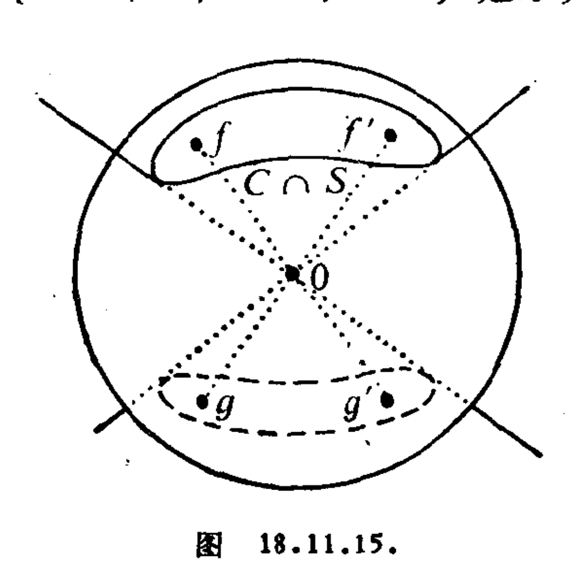


图 18.11.15.

18.11.16 Cardan 联轴节（万向节），等速万向节. 在两轴夹成角 θ 的Cardan 联轴节中，算出最差的角速度比；为此，在 S^2 上交角为 θ 的两个大圆 C，D 上考虑这样的动点 $m(t)$，$n(t)$：$\overline{m(t)n(t)} = \pi/2$。分别对 $\theta = \pi/3, \pi/4, \pi/6$，算出这最差的角速度比。证明：如果两根轴 A，A' 通过 Cardan 联轴节与一中间轴 B 相连接，使得 A，B，A' 在同一平面内，且 B 分别与 A 和 A' 所夹的角相等（等速万向节），则 A 和 A' 具有相同的角速度.

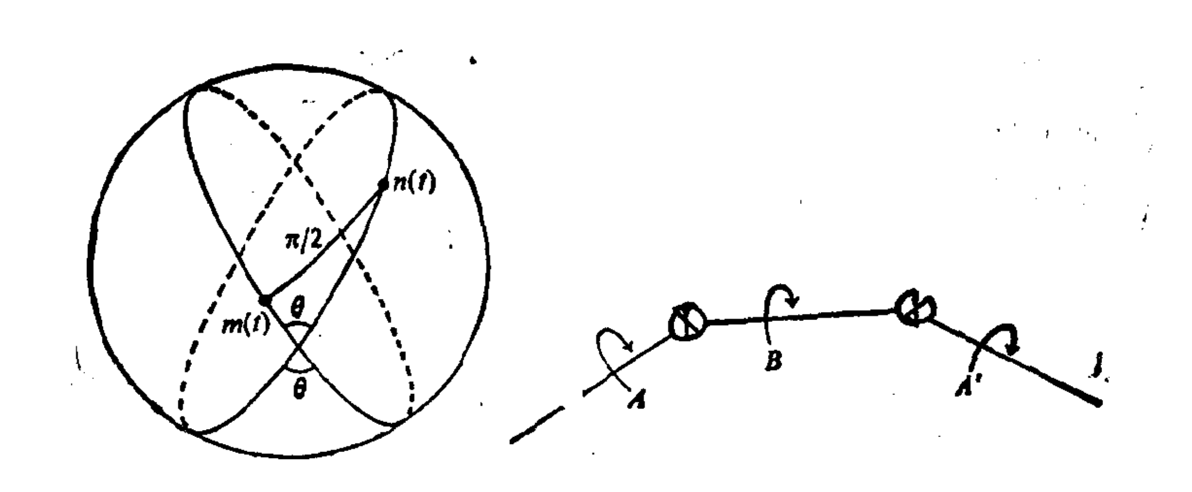


图 18.11.16.1.

18.11.17 平坦环面和 Clifford 平行圆. 设 Λ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个网格（参看 9.14.29），$\Theta_\Lambda = \mathbf{R}^2/\Lambda$ 是 $\mathbf{R}^2$ 关于子群 Λ 的商空间，即关于等价关系 $m \sim n \Longleftrightarrow m - n \in \Lambda$ 的商空间。对规范投影 $p: \mathbf{R}^2 \to \Theta_\Lambda$

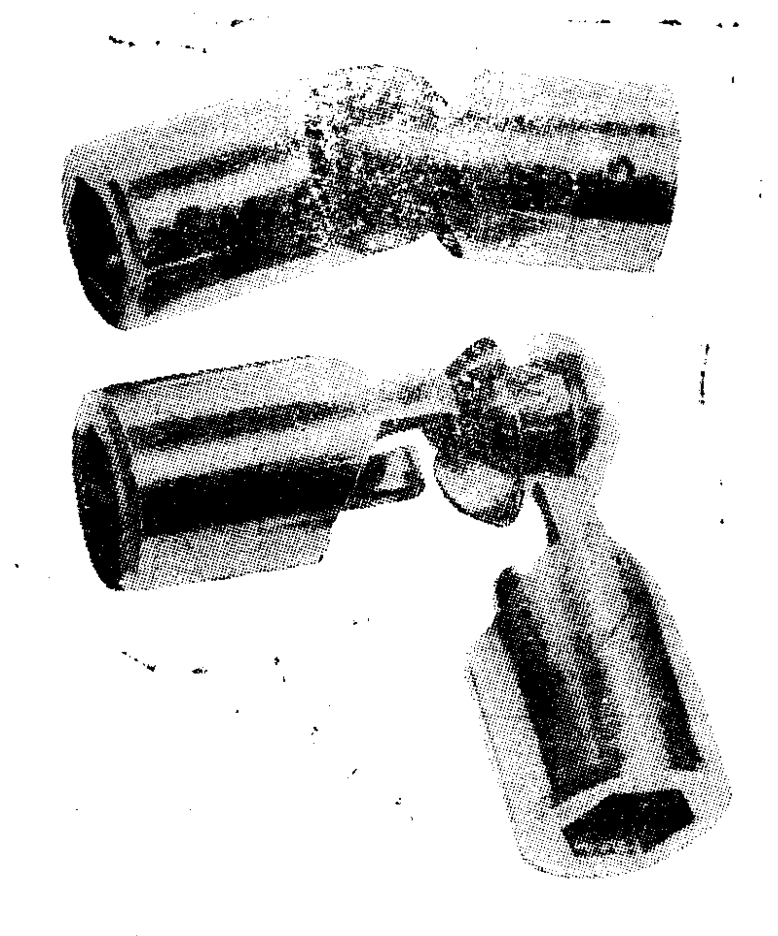


图 18.11.16.2.

及 $u, v \in \Theta_\Lambda$，令 $d(u, v) = d(p^{-1}(u), p^{-1}(v)) = \inf\{d(x, y): p(x) = u, p(y) = v\}$. 证明 d 是 Θ_Λ 上的一个度量而且定义了与商拓扑相同的拓扑，Θ_Λ 则局部等距于 $\mathbf{R}^2$. 根据 Λ 的性质（参看 9.14.29），讨论 Θ_Λ 中的最短路线。我们称 Θ_Λ 为平坦环面。

证明对 $\alpha \in]0, \pi/2[$，赋有 S^3 所诱导的度量的 18.8.6 的 C_α 等距于平坦环面；我们将按 α 的不同数值，具体作出网 Λ，使得 C_α 与 Θ_Λ 等距。

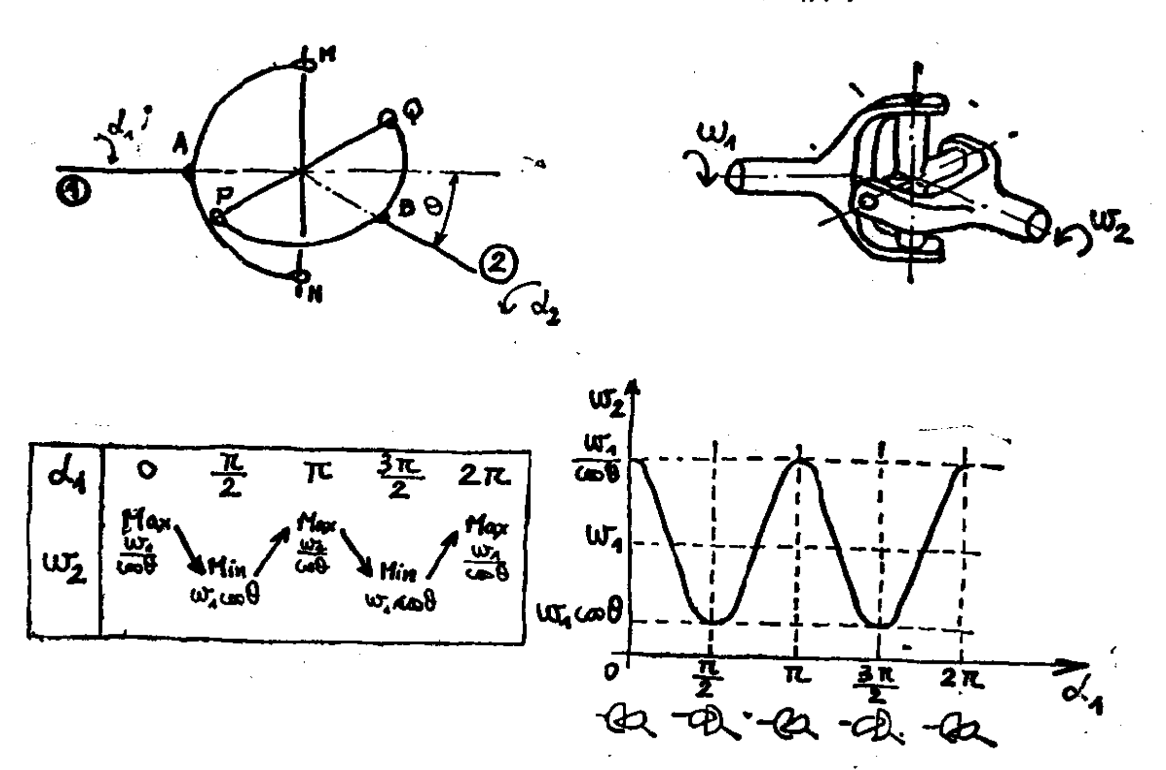
18.11.18 给定 S^3 的一个大圆 C，记 Σ 为 C 的第一类平行圆的集合，对 $C', C'' \in \Sigma$，令

$$\delta(C', C'') = 2d(C', C'').$$

证明 δ 使 Σ 成为一个等距于 S^3 的度量空间（参看 4.3.6.2）。

18.11.19 Dupin 四次圆纹曲面. 设 $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的三个球面；证明对这些球面的适当位置，与这三球面相切的球面的集合包络出一个旋转环面（在适当反演下）的反演曲面，由此推出这些曲

十字铰接式的 Cardan 联轴节



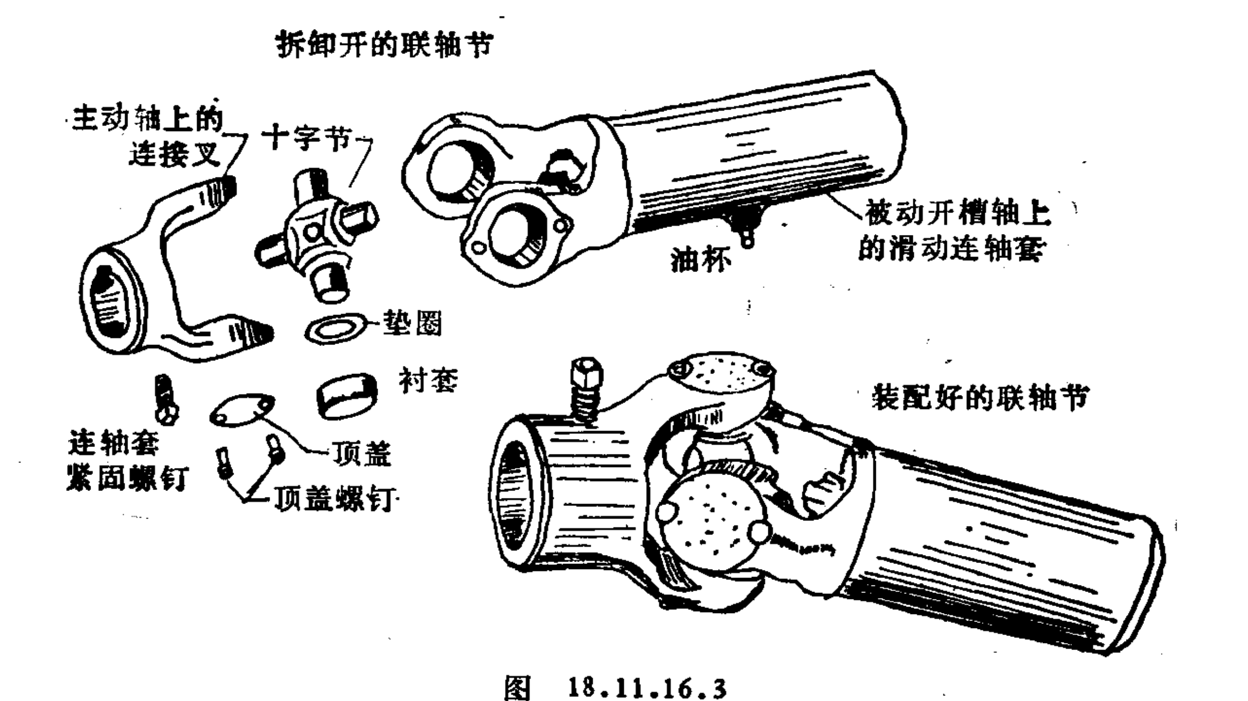
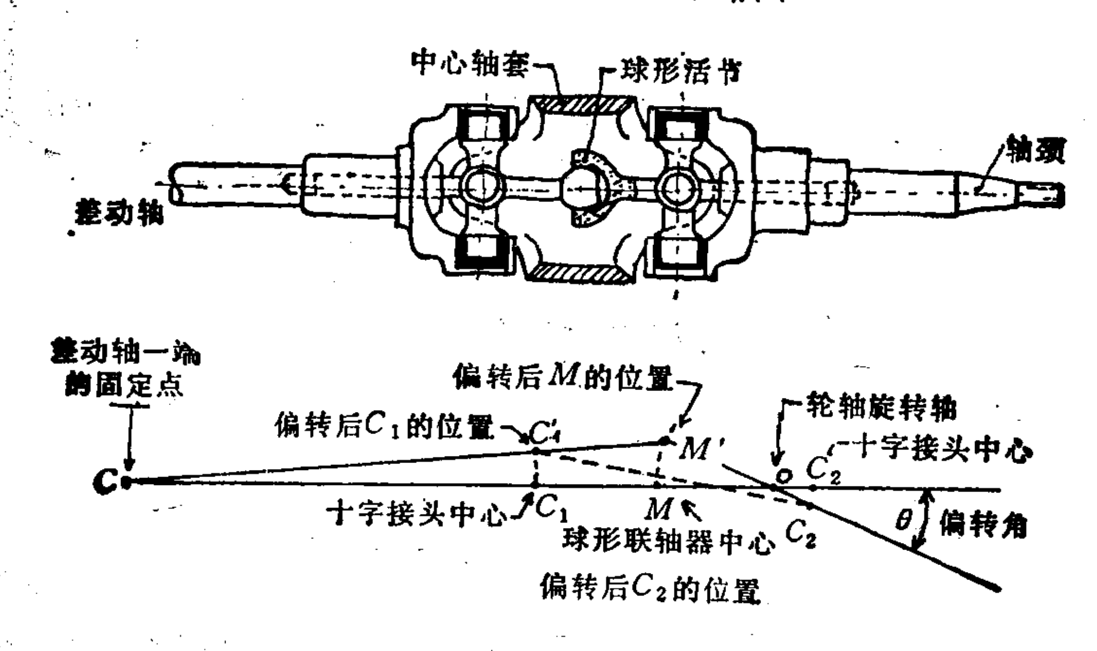


图 18.11.16.3

面的各种性质. 这种曲面称为 Dupin 四次圆纹曲面, 在 20.7 中我们会再次遇到它们.

18.11.20 证明任一与环面切于两点的球面与这环面交于两个 Villarceau 圆.

SPICER-GLAENZER 联轴节



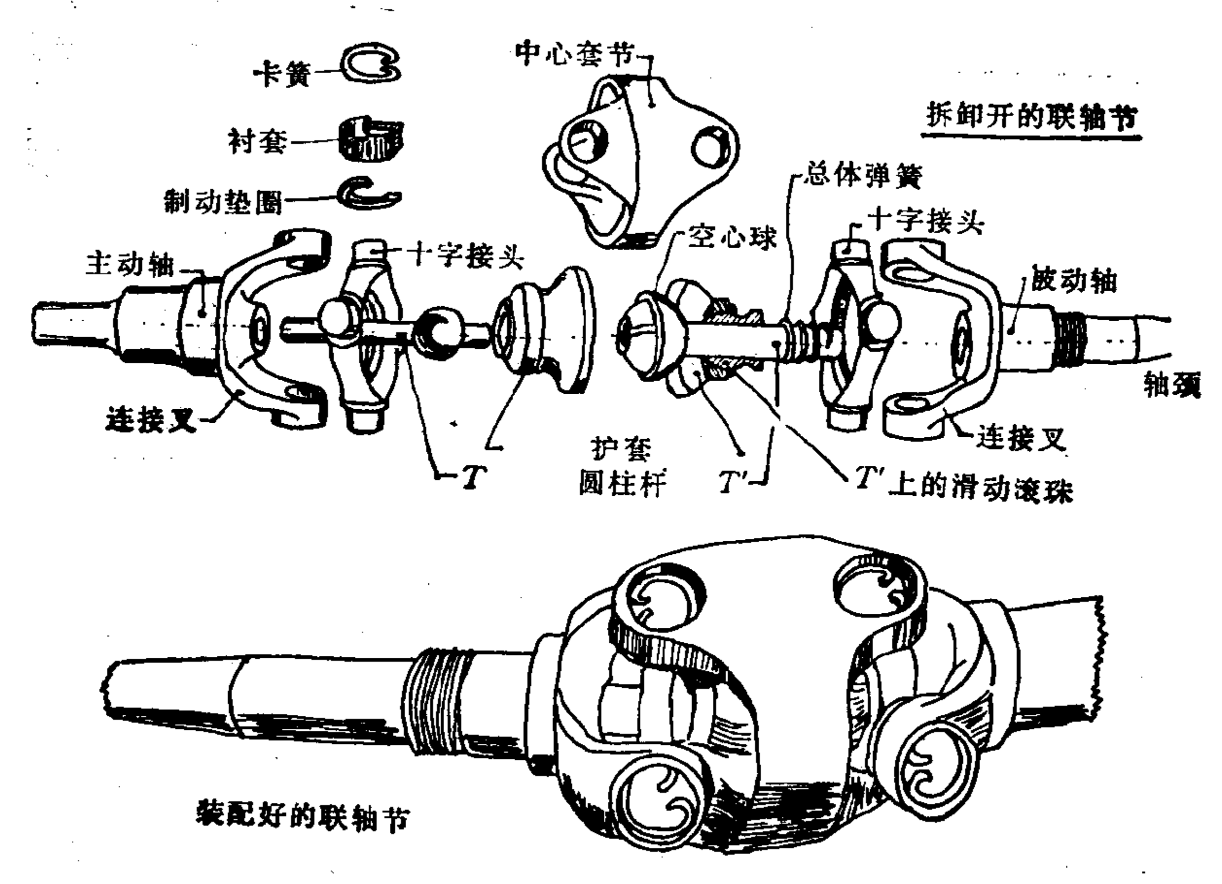


图 18.11.16.4.

18.11.21 在 S^1 中不同点构成的三元组集合中，群 Möb(S^1) 的轨道是什么？

18.11.22 设 $S=S^n$, $f:S\to S$ 是 C^1 类映射，S 在 $\mathbf{R}^n$ 从北极 ν 和南极 σ 出发的球极射影分别记为 φ 和 ψ. 证明 f 是共形映射的充要条件是下面定义的四个映射在 9.5.4.2 的意义下是共形的:

$$\varphi\circ f\circ\varphi^{-1},\ \psi\circ f\circ\varphi^{-1},\ \varphi\circ f\circ\psi^{-1},\ \psi\circ f\circ\psi^{-1}.$$

18.11.23 对球面，按照 9.8.1 中提出的问题，对 9.8.5 进行讨论。

18.11.24 对图 18.1.2 中的 Cosinus 球径计作出评论。

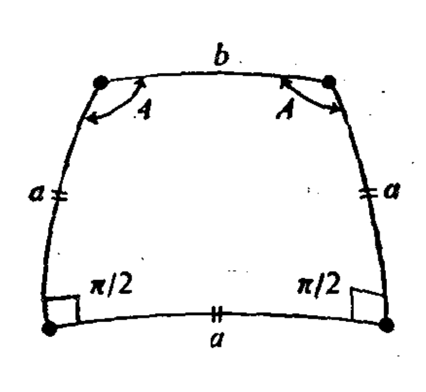


图 18.11.25.

18.11.25 在图18.11.25的球面四边形中，把角 A 和边 b 表成 a 的函数;对图 18.11.26 考虑同样的问题.

18.11.26 证明其像含于 S^n 中的 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的任一曲线,它在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的

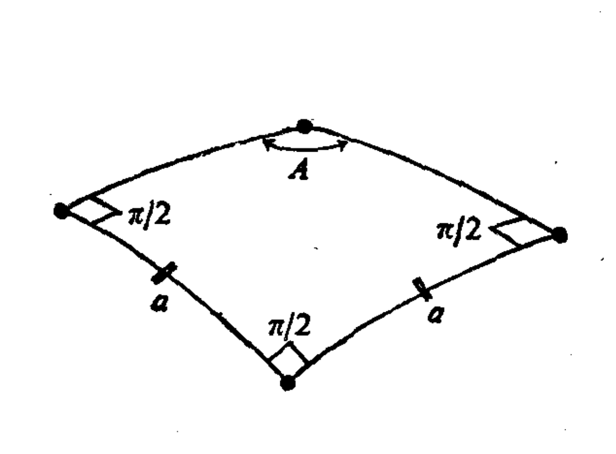


图 18.11.26.

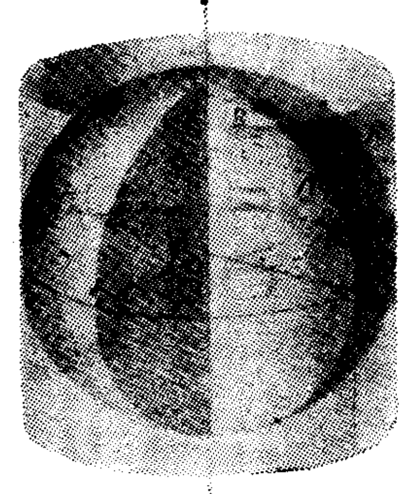


图 18.11.27.1.

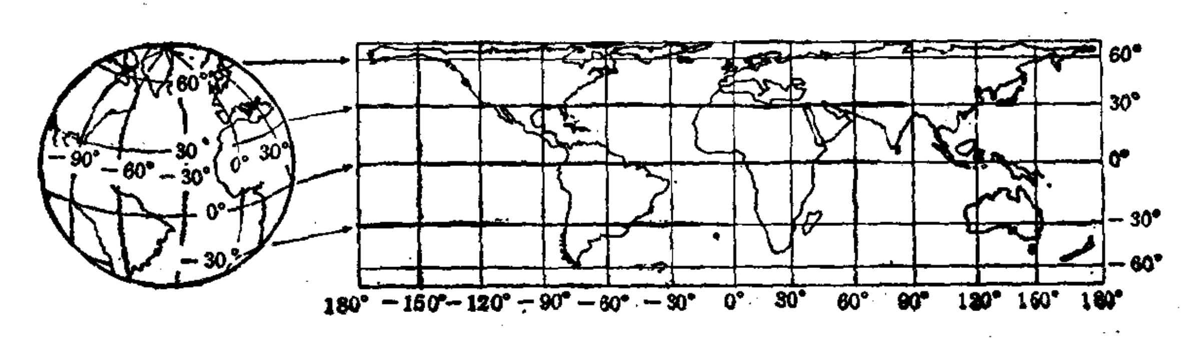


图 18.11.27.2.

欧氏度量下的长度，等于在 S^n 的内蕴度量下的长度。

18.11.27 证明球面沿正交于南北极轴线的直线向外切于赤道的圆柱面所作的射影，是保持面积的（见图 18.11.27.1 和 18.11.27.2）（这个射影有时被误称为 Lambert 射影）。

18.11.28 证明 18.1.8.4 中的公式。

18.11.29 确定 18.1.8.5 中的函数 Ξ。

18.11.30 证明在"Hopf 纤维化"映射 4.3.6.3 中，S^3 的任一大圆映射到 S^2 的一个（大或小）圆上。

第19章　椭圆几何与双曲几何

我们对这两种几何的兴趣首先是从历史角度引起的。它们是作为欧几里得公设的反例提出的，然而同时又是内容极为丰富的几何学，具有如我们所希望的那样多的对称性和完美的直线。在前一种几何中，从一点出发不能作一条直线的平行线，在后一种几何中则有无穷多条这样的平行线。在前一种几何中，三角形的内角和总大于π，而在后一种几何中这个和数总小于π。

连同欧几里得几何在内，我们就有了三个几何体系，它们之间有某种统一性，并且具有互为补充的性质。双曲几何的另一个引人注目之处，在于它是很多重要的数学成果的基础，其中包括一些最新的成果，有关参考文献见19.7.3。关于非欧几何的历史，见[CR 3]第1章。

第19.1节讨论椭圆几何，如果我们熟悉商空间结构，这种几何是很容易的。但对十九世纪的几何学家来说，情况就并非如此了，这也正说明了何以椭圆几何要比双曲几何晚发现达五十年之久。Clifford 平行在这种几何中很容易表达。

本章所有其它的篇幅都用于讨论双曲几何，这种几何，即使在平面上讨论，也显示出某些困难之处。我们可以在Poincaré半平面上给出一种初等的阐述，如19.7所示。但是，仅仅了解这一内容的读者，首先在进行某些计算，诸如计算一个三角形的边长或角度以及它的面积时，就会感到棘手。况且，这样的阐述掩盖了双曲几何与球面共形群之间的本质联系。因此我们另外给出一种阐述，也许比较冗长，但我希望它的双曲几何味儿是很纯正的。我想，它能使读者足以解决双曲几何及其计算中的绝大部分问题。

这样的阐述是以对三个基本模型的了解作为基础的：一个是射影模型，它对双曲几何作了深刻的解释，每当遇有难点时我们总

要引用这一模型，另两个是线性模型 $\mathscr{B}$ 和共形模型 $\mathscr{C}$。在讨论各种不同问题时，这三种模型都将加以引用。

在全书将近结束之际，我们逐步地让读者有更多的机会来显示自己的成熟。此外，当然我们也利用了第 13 章中的结果，但应用这些结果时，间或也在有此必要时用更简单的方法重新说明它们，以得到一种纯双曲几何的阐述形式。

第一部分：椭 圆 几 何

19.1 椭 圆 几 何

在整个这一节中，E 表示 $d+1$ 维欧氏向量空间；$P=P(E)$ 表示连带的射影空间，$p: E\backslash 0 \to P$ 表示规范射影，$S=S(E)$ 表示 E 的单位球面。我们将 P 等同于 E 中向量直线的集合 $G_{E,1}$，有时也把后者记为 $\mathscr{D}(E)$。$D, D' \in E$ 的夹角（$\in [0, \pi/2]$）记为 $\overline{DD'}$（参看 8.6.3）。方程为 $\|\cdot\|^2$ 二次超曲面的射影变换群记为 $PO(E)$（参看 14.7）。

19.1.1 定义

19.1.1.1 命题. 直线的夹角在 P 上定义了一个度量空间结构；P 具有这一度量后，称为 E 连带的**椭圆空间**。我们对 P 赋以连带拓扑，它与 4.3.1 的拓扑一致。

我们利用4.3.3.2：p 在 S 上的限制$p: S \to P$是满射，我们要将 S 中 x, y 的距离 $\overline{xy}$（参看 18.4）同 P 中的距离 $\overline{p(x)p(y)}$ 相比较。若 $m, n \in P$，且有 $p^{-1}(m), p^{-1}(n) \subset S$，则

19.1.1.2 $$\begin{cases}\overline{mn} = d(p^{-1}(m), p^{-1}(n)) = \inf\{\overline{xy}, \overline{(-x)y}\} \\ \forall x, y \text{ 使 } p(x) = m, \ p(y) = n.\end{cases}$$

这是 8.6.3 的推论，因为或者 $(x|y) \geqslant 0$，或者 $(-x|y) \geqslant 0$。由此可如下地得出命题：设任取 $m, n, s \in P$，x 使 $p(x) = m$；我们可求得 $y \in p^{-1}(n)$ 和 $z \in p^{-1}(m)$ 使 $\overline{xy} = \overline{mn}$ 和 $\overline{xz} = \overline{ms}$。

根据 18.4.2: $\overline{yz} \leqslant \overline{yx} + \overline{xz}$, 从而有

$$\overline{ns} = \inf\{\overline{yz}, \overline{(-y|z)}\} \leqslant \overline{yz} = \overline{mn} + \overline{ns}.$$

19.1.1.3 例. 设 $x \in S$, $m = p(x)$, $B_S(x, \pi/4) = \{y \in S: \overline{xy} \leqslant \pi/4\}$, $B_P(m, \pi/4) = \{n \in P: \overline{mn} \leqslant \pi/4\}$, 则 p 在 $B_S(x, \pi/4)$ 上的限制是从 $B_S(x, \pi/4)$ 到 $B_P(m, \pi/4)$ 上的一个等距映射。一旦 $r > \pi/4$, 这一结果对 $B_S(x, r)$ 就不成立.

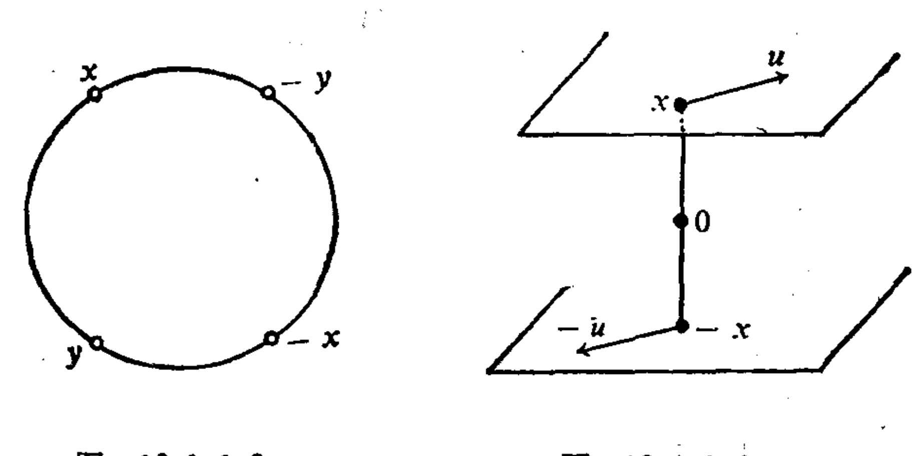


图 19.1.1.2.　　　　图 19.1.1.4.

19.1.1.3 (续)附注. 所有维数相同的椭圆空间是等距的(参看 8.1.6); 它们的公共直径为 $\pi/2$.

在 4.3.9 中, 我们曾经说明做出 $P^2(\mathbf{R})$ 的图形的困难性; 读者若想获得一个直观的印象,可考虑 19.1.2.1.

19.1.1.4 切向量,切纤维. 设 Θ 是使 $x \in S$ 和 $y \in x^{\perp} \subset E$ 的点偶 (x, y) 的集合, $\mathscr{R}$ 是等价关系

$(x, u) \sim (x', u')$ 如果 $x' = \varepsilon x$, $u' = \varepsilon u$, 其中 $\varepsilon = \pm 1$.

我们称商集 $\Theta/\mathscr{R}$ 为 P 的切纤维,并记为 TP. P 在 $m \in P$ 处的切空间是 $\Theta/\mathscr{R}$ 中与满足 $p(x) = m$ 的 (x, y) 连带的子集, 记为 T_mP. 因为 $-\mathrm{Id}_E$ 是一个等距变换, 故对所有 $m \in P$, T_mP 具有自然的欧氏向量空间结构; 因此 T_mP 的两个非零向量之间的夹角就是 8.6.3 中定义的角. 切空间 T_mP 与微分流形 P 的切空间是一致的, 参看 4.2.6.

19.1.1.5 直线, 射线. 无需定义 P 中的直线或子空间; 它们就是把 P 看作射影空间时的直线或子空间(参看 4.6). 设 $m \in P$,

$u \in T_m P$，$\|u\| = 1$，我们称 P 的子集

$$\{p(\cos t \cdot x + \sin t \cdot u) ; t \in [0, \pi/2]\}$$

是起点为 m、切向量为 u 的射线．射线的终点就是 $n = p(u)$；反之，设 $m, n \in P$ 是两个给定的点，若 $\overline{mn} < \pi/2$，则存在唯一的一条起点为 m 且包含 n 的射线；若 $\overline{mn} = \pi/2$，则恰好存在两条射线，它们的切向量方向相反．

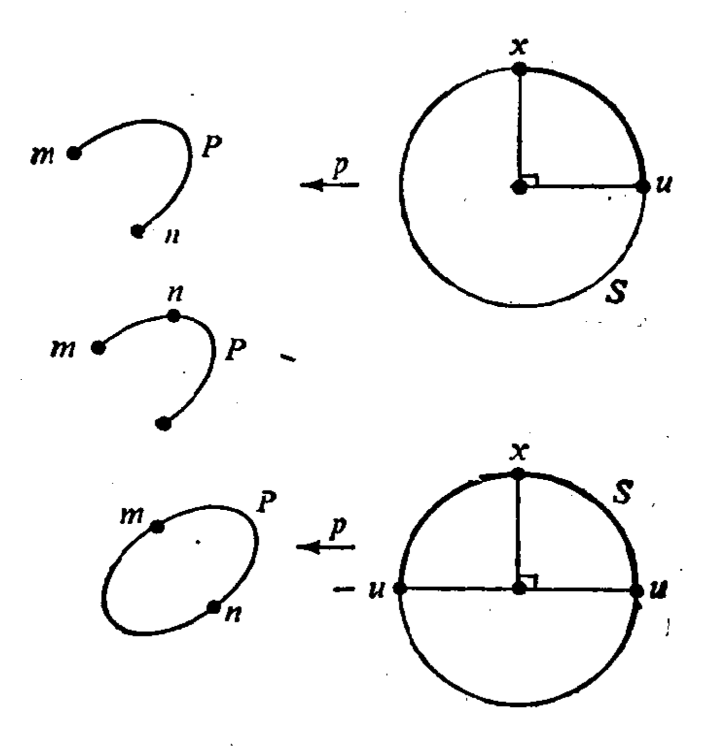


图 19.1.1.5.

19.1.1.6 注． 在椭圆空间中有一条且仅有一条直线通过两个不同的点；若 $d = 2$（椭圆平面），两条不同的直线有且仅有一个公共点；然而对球面则不然，这就是我们要将 P 作为 S 的商空间引入的缘故．因此，从来不可能有集合论意义下的平行线（参看 2.4.9.5 和 19.3.2），另外，椭圆空间满足欧几里德体系中欧几里德公设之前的所有欧氏几何的性质；椭圆几何之所以令人感兴趣，原因之一就在于它是对欧几里德公设的历史探索中的一个反例，见 2.6.7．19.1.1.4 表明 P 自然地是一个黎曼流形．

19.1.1.7 规范测度． 因为对所有 $m \in P$ 有 $\# p^{-1}(m) = 2$，故我们可通过下式来定义 P 的规范测度 τ：

$$\int_P f\tau = \frac{1}{2}\int_S (f\circ p)\sigma,$$

其中 σ 是 S 的规范测度（参看 18.3.7）。例如，P 的体积就是 S 的体积之半，即 $\dfrac{\alpha(d+1)}{2}$。

19.1.2 度量性质

19.1.2.1 严格三角形不等式，最短道路。 19.1.1.1中的证明表明：$\overline{ns} = \overline{nm} + \overline{ms}$ 当且仅当 m 在以 n 为起点、s 为终点的一条射线上(反之亦然)(参看 19.1.1.5)。由此得出，设 m 和 n 是在 P 中给定的点，则若 $\overline{mn} < \pi/2$，存在由起点为 m 的射线所提供的从 m 到 n 的唯一的一条最短道路。若 $\overline{mn} = \pi/2$，存在两条从 m 到 n 的最短道路，它们是起点为 m、终点为 n 的两条射线。

19.1.2.2 等距变换群。 由 P 上度量的定义可知，它的等距变换群 $\mathrm{Is}(P)$ 包含 $\mathrm{PO}(E)$（参见 14.7）。我们来证明两者是相等的；设 $f\in \mathrm{Is}(P)$，可假设存在 m 使 $f(m)=m$，这是因为 $\mathrm{PO}(E)\subset \mathrm{Is}(P)$ 在 P 上是可迁的。取定 x 使它满足 $p(x)=m$，根据 19.1.1.3，$f\in \mathrm{Is}(P)$ 通过唯一的一个等距变换 $\bar f\in O(E)$，按 9.8.2 可在 $B_S(x,\pi/4)$ 上诱导出一个等距变换。我们来证明 $\bar f$ 在整个 P 上(不仅在 $B_P(m,\pi/4)$ 上)诱导出 f：因为

$$\mathrm{PO}(E)\subset \mathrm{Is}(P),$$

因而我们可假设 $\bar f = \mathrm{Id}_E$，于是只需证明：若 $f\in \mathrm{Is}(E)$ 是 $B_P(m,\pi/4)$ 上的恒等变换，则它必是 P 上的恒等变换。设 $n\in P$，D 是从 m 到 n 的最短道路；则 $f(D)$ 也是从 m 到 $f(n)$ 的最短道路，因而就是射线，由此可推得 $f(D)=D$，因为 $D\cap B_P(m,\pi/4) = f(D)\subset B_P(m,\pi/4)$。

等距变换群在 P 上是两点可迁的，这一点可从 18.5.5 得出；对此可参看 9.1.7。

19.1.2.3 垂直平分集。 设 $m,n\in P$，$m\neq n$；与欧氏空间和双曲空间的情形相反(参见 9.7.5 和 19.4.2)，这两点的***垂直平分集***

$$\{s\in P;\ \overline{ms} = \overline{ns}\}$$

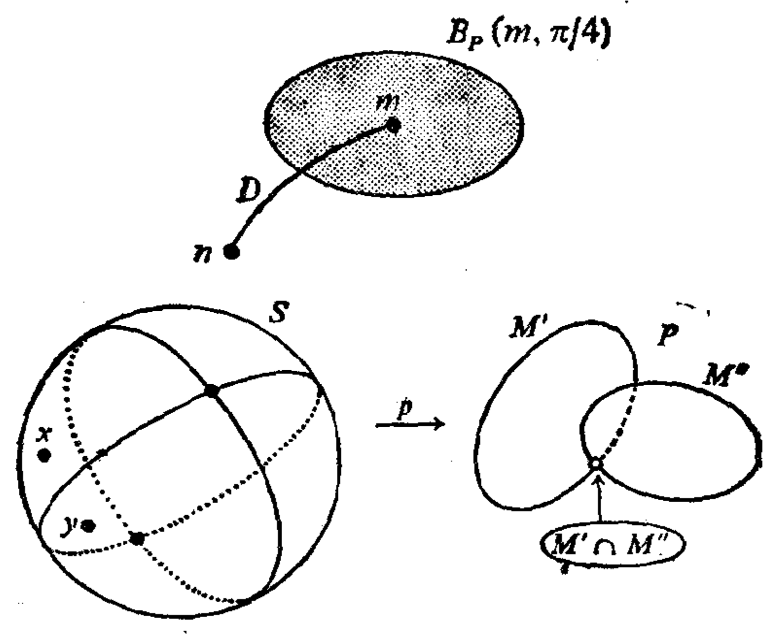


图 19.1.2.3.

不是一个超平面。事实上，对满足 $p(x)=m$，$p(y)=n$ 的任意 x，y，根据 19.1.1.2 有：

$M=\{s\in P:\overline{ms}=\overline{ns}\}=p(\{z\in S:\overline{zx}=\overline{zy}$ 或 $\overline{z(-x)}=\overline{zy}\})$.

特别地，M 是 P 的两个正交超平面 M'，M'' 的并集；交集 $M'\cap M''$ 则刚好是 $\{s\in P:\overline{sm}=\overline{sn}=\pi/2\}$。

例如，在 $d=2$ 的情形下，垂直平分集是由两条在交点处互相垂直的直线所组成的。

19.1.2.4 对称变换. 我们可在 P 中定义关于子空间，特别是关于超平面的对称变换，后者生成 $\mathrm{Is}(P)$，参看 8.2.12。

19.1.2.5 问题. 如同在 9.7.2 和 9.7.4 中对欧氏空间以及在 18.4.7 中对球面的讨论那样，我们可以找出 P 中 $d+2$ 个点之间的距离的一般关系，以及椭圆空间中一个纯度量特征；见 [BL] 第 IX，X，XI 章，同样可见 [B-K] 第 117 页和 [PV2]。

19.1.3 椭圆平面；三角形. 为讨论 P 的三角形，我们可假设 $d=2$，这是由于 P 的三个点生成一个椭圆平面。因此在这一小节中我们假设 $d=2$。

19.1.3.1 若 P 中射影无关的三点 m，n，s（参看 4.6.6）使 $\overline{mn}<\pi/2$，$\overline{ns}<\pi/2$，$\overline{sm}<\pi/2$，则称这三点的集合为 P 的三

角形 $\mathscr{E}=\{m, n, s\}$. 根据 19.1.1.5，这三角形具有完全确定的边，它们是三条射线，记这些边为 M, N, S. 在 m 处(分别还有 n, s 处)确定以 m 为起点的唯一射线 N 和 S 的那两个单位向量的夹角称为$\{m, n, s\}$在 m 处的角；我们记 $\mathscr{E}$ 的边长为 a, b, c，即 $a=\overline{ns}$, $b=\overline{sm}$, $c=\overline{mn}$, 记 $\mathscr{E}$ 在 m, n, s 处的角为 α, β, γ.

19.1.3.2 必须注意，给定 P 的三角形 $\mathscr{E}$ 后，并不总存在 S 的(球面)三角形使它具有与 $\mathscr{E}$ 相等的角和边长. 对这一现象有各种解释，首先看下面的例：设 $\theta \in]\pi/3, \pi/2[$，根据 18.6.10，存在一个边长为 $\pi/3, \pi/2, \theta$ 的球面三角形 $\langle x, y, z\rangle$ 和一个边长为 $\pi/3, \pi/3, \pi-\theta$ 的球面三角形 $\langle x', y', z'\rangle$; P 的两个三角形 $\{m=p(x), n=p(y), s=p(z)\}$, $\{m'=p(x'), n'=p(y'), s'=p(z')\}$ 的边长分别相等，即为 $\pi/3, \pi/3, \theta$. 如果 (α, β, β) 表示 $\langle x, y, z\rangle$ 的角，$(\alpha', \beta', \beta')$ 表示 $\langle x', y', z'\rangle$ 的角，则我们可看出 $\{m, n, s\}$ 的角是 (α, β, β)，而 $\{m', n', s'\}$ 的角为 $(\alpha', \pi-\beta', \pi-\beta')$. 因而看出，球面三角形全等的情形 (ii) 在 P 中是不成立的 (参看 18.6.13.10).

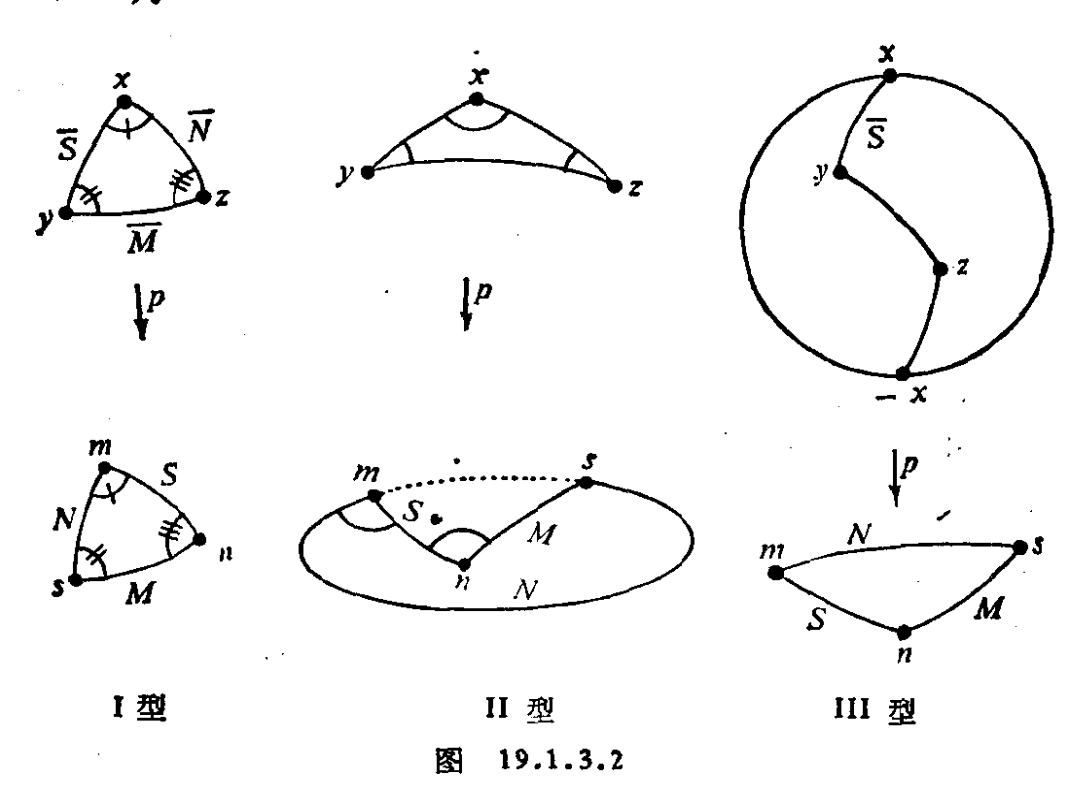


图 19.1.3.2

19.1.3.3 反过来，设已给定 P 的三角形 $\mathscr{E}=\{m, n, s\}$，我

们要作 S 上的一个三角形,使它刚好被射影到 $\mathscr{E}$ 上;取定 $x\in S$ 使 $f(x)=m$, 则存在以 x 为起点的唯一大圆弧 $\bar{S}$ 使 $p(\bar{S})=S$. 设 y 为 $\bar{S}$ 的终点, $\bar{M}$ 是起点为 y 且使 $p(\bar{M})=M$ 的大圆弧, 而 $\bar{N}$ 是以 $\bar{M}$ 的终点 z 为起点且使 $p(\bar{N})=N$ 的大圆弧. $\bar{N}$ 的终点 x' 是满足 $p(x')=m$ 的,因而 $x'=\pm x$. 容易看出, 若 $x'=x$(或 $x'=-x$), 不论我们从 n 还是从 s 出发"提升"三角形, 结果都是相同的;在第一种情形下我们说 $\mathscr{E}$ 是 I 型的, 在第二种情形下则说 $\mathscr{E}$ 是 II 型的. 说 $\mathscr{E}$ 是 I 型的(或 II 型的)等价于说回路 $M\cup N\cup S$ 是同伦于零的(或不同伦于零的),参看 4.3.9.3 和 18.2.3. 为了知道 $\mathscr{E}$ 是 I 型还是 II 型的,我们也可计算

$$\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha;$$

如果这个量是正的(或负的),则 $\mathscr{E}$ 是 I 型的 (或 II 型的). 从拓扑上说,出现这两种三角形的原因在于(维数 $\geqslant 2$ 的) 实射影空间的基本群有两个元素 (参看 4.3.9.3); 如果三角形 $\mathscr{E}$ 的边构成的回路同伦于 0(或不同伦于 0), 则 $\mathscr{E}$ 是 I 型的(或 II 型的).

如果 $\mathscr{E}$ 是 I 型的,那么我们可定义 $\mathscr{E}$ 的内部为与 $\mathscr{E}$ 相伴的球面三角形的内部的射影; 于是对 19.1.1.7 意义下的三角形内部的面积,有

$$\mathscr{E}\text{ 的面积}=\alpha+\beta+\gamma-\pi\ (\text{参看 } 18.3.8.4).$$

对 P 的三角形的其他事项,可见 19.8.4 或 [CE 3] 第 232—237 页. 特别是 P 中存在这样的三角形, 它们的对应边相等但对应角却不同,因而不是等距的.

19.1.4 $d=3$ 的情形: Clifford 平行性, 在射影空间的表述. 如果 $d=3$, 我们可将 18.8.4 移到 $P=P(\mathbf{R}^4)=p(S^3)$ 中, 这一节内容在射影空间的表述要比在球面上的表述更令人满意.

设 $\mathscr{D}=\mathscr{D}(P)$ 是 P 的直线的集合; 对 $D, D'\in\mathscr{D}$, 若 $\forall m\in D$ 有 $d(m,D')=d(D,D')$, 则记 $D/\!\!/D'$. 关系 $\cdot/\!\!/\cdot$ 不是等价关系,但存在 $\mathscr{D}$ 中的两个等价关系 $\cdot{}^+/\!\!/\cdot$ 和 $\cdot{}^-/\!\!/\cdot$, 使得 $D/\!\!/D'$ 导致 $D^+/\!\!/D'$ 或 $D^-/\!\!/D'$. 对所有 $m\in P$ 和 $D\in\mathscr{D}$, 存在唯一的 $D'\ni m$ 和 $D''\ni m$ 使 $D'^+/\!\!/D$, $D''^-/\!\!/D$; 如果 $l(D,D')=$

$d(D, D'')$ 且 $D^+ /\!/ D'$, $D^- /\!/ D''$, 则 $D' \cap D'' = \{1$ 点$\}$. $D', D'' \ni m$ 且 $D' /\!/ D$, $D'' /\!/ D$ 的特征是：若 $m_0 \in D$ 使 $d(m, D) = \overline{m_0 m}$, 则 D', D'' 垂直于直线 $\langle m_0, m\rangle$, 且都与平面 $\langle D, m\rangle$ 交成角 $\alpha = \overline{m_0 m}$.

当然也可作类似于 18.8.4(v) 和 (vi) 的叙述.

19.1.5 注. 关于复射影空间上类似的度量,见 19.8.22.

第二部分：双 曲 几 何

19.2 在模型 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{B}$ 上的定义

19.2.1 记号. 在本章的这后一部分，固定记号如下：空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 恒同于积空间 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, 其元素记为 $\xi = (z, t)$, $z \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$. 双曲平面 H 指 $\{(z, t) : t = 1\}$. q 表示符号数为 $(1, n)$ 的二次型 $-\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + x_{n+1}^2$, 其极型为 P, 迷向锥为 $Q = q^{-1}(0)$; 因而有

$$q(z, t) = -\|z\|^2 + t^2, \quad P((z', t), (z, t')) = -(z | z') + tt'.$$

$\mathscr{B} = U(0, 1) \subset \mathbf{R}^n$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中单位开球. 以 q 为方程的二次曲面 α 所成的射影群 $\mathrm{PO}(\alpha)$ 记为 $G(n)$. 我们还记得, $P^n(\mathbf{R}) = P(\mathbf{R}^{n+1})$ 恒同于 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中向量直线的集合 $G_{n+1,1} = \mathscr{D}(\mathbf{R}^{n+1})$.

19.2.2 度量. 作用在 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^{n+1})$ 上的群 $G(n)$ 有三条轨道（参见 13.7.1)：迷向直线集合, q 在其上正定的直线的集合 $\mathscr{P}$, q 在其上负定的直线的集合. 第一种情况正是 18.10 中讨论过的 Möb(d) 的情况, 参见 18.10.1.5. 第二种情况是以下几节的讨论对象; 第三种情况是第 20 章的对象.

19.2.3 于是, $\mathscr{P}$ 表示使

$$q(\xi) > 0 \ \forall \xi \in D \backslash 0$$

的 $D \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^{n+1})$ 的集合. 由 $q(\xi = (z, t)) = -\|\xi\|^2 + t^2 > 0$ 推得 $t \neq 0$, 特别还可推知 $D = \mathbf{R}\xi$ 与 H 交于一点 $(z/t, 1)$, 而

且使 $\|z/t\|<1$，由此可得映射

19.2.4 $$\Phi:\mathscr{D}\to\mathscr{B}:\Phi(p(z,t))=\frac{z}{t},$$

它是双射;令 $\Phi^{-1}=\Lambda$。

为作图方便,可将 $\mathscr{B}$ 等同于H的子集$\{(z,t)\in H:\|z\|<1\}$,以后有时就采用这一观点.

19.2.5 命题. 设 $D,D'\in\mathscr{P}$；任一过D和 D' 的平面（$D\neq D'$ 时是唯一的)与Q交于两条不同的直线 U,U'. 对任意的$\xi\in D\backslash 0$, $\xi'\in D'\backslash 0$, 有

$$\frac{P(\xi,\xi')}{\sqrt{q(\xi)q(\xi')}}\geqslant 1$$

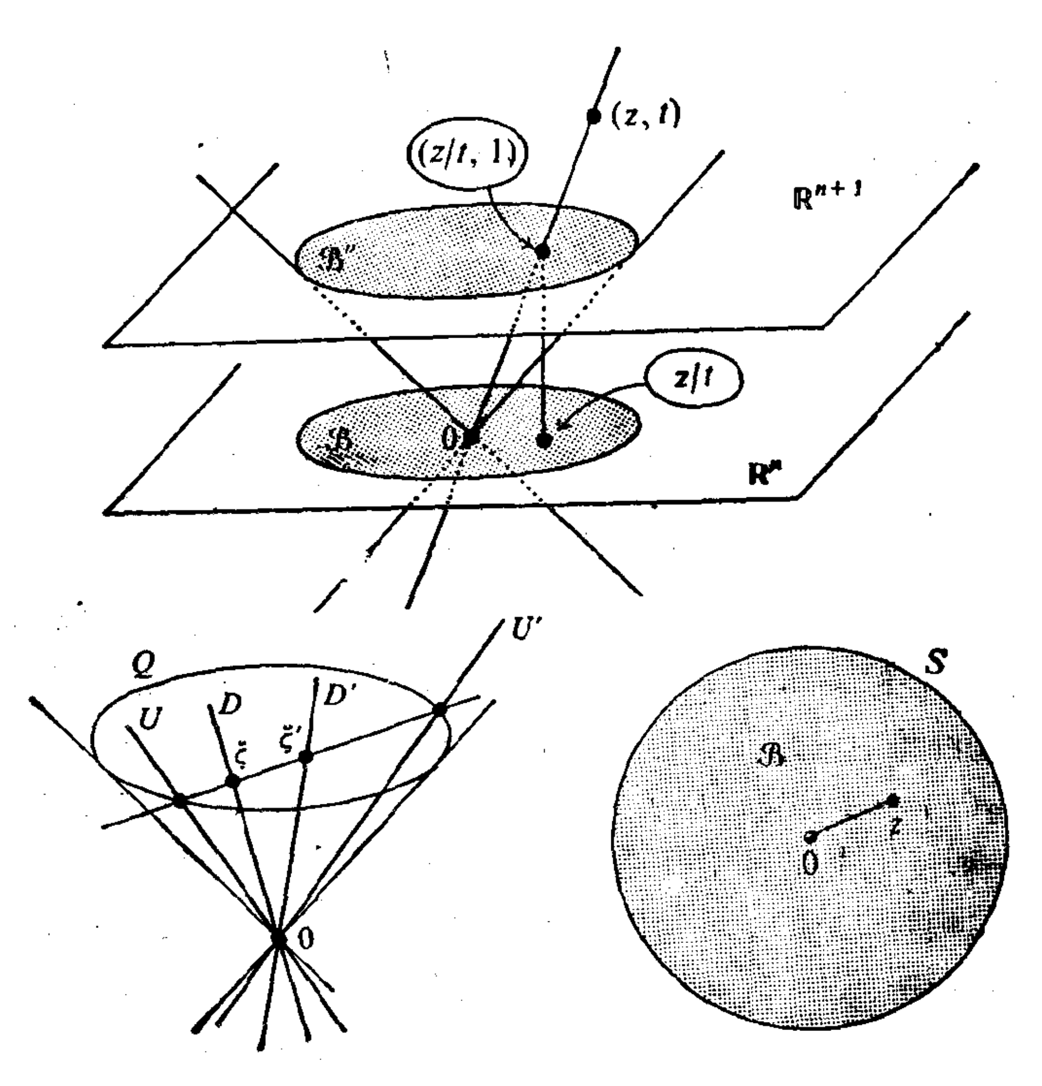


图 19.2.5.

和 $$\operatorname{Arc\,ch}\frac{P(\xi,\xi')}{\sqrt{q(\xi)q(\xi')}}=\frac{1}{2}|\log([D,D',U,U'])|.$$

后一数值记为 $d(D,D')$，它使 $\mathscr{P}$ 成为一个度量空间．该度量空间 $(\mathscr{P},d)$ 称为以 $\mathscr{P}$ 为模型的 n 维双曲空间．以 $\mathscr{B}$ 为模型的双曲空间的度量是由距离定义的，也记为 d，即 $d(z,z')=d(\Lambda^{-1}(z),\Lambda^{-1}(z'))$．一维(或二维)时称为双曲直线(或平面)．

其中涉及的交比，是对由 D 和 D'（假定是不同直线）生成的向量平面 P 所导出的射影直线而言的．不难验证 d 是度量，除三角形不等式将在 19.3.2 中证明外，其它性质可由 13.8.6 和 13.8.9 推出，其中只须证明 P 是一个 Artin 平面；而这一点又可由 13.4.7 推出，因为 q 在 P 上的限制是退化的，从而符号数不可能是 (2,0) 或 (0, 2)．

19.2.5.1 注． 请与 11.9.4 相比较．

19.2.6 例．设 $z\in\mathscr{B}$；则若令 $r=d(0,z)$ 就有

$$r=\operatorname{Arc\,ch}\frac{1}{\sqrt{1-\|z\|^2}},\quad \|z\|=\operatorname{th} r.$$

由此可知，$\|z\|$ 趋于 1 时，$d(0,z)$ 趋于无穷．读者可以考虑一下双曲空间是否是完备空间．

19.2.7 切空间． 我们跟 19.1.1.4 相仿地进行讨论，首先注意到根据 2.4.8.2，对任一使 $q(\xi)>0$ 的 ξ，$\xi^\perp$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的超平面．满足 $q(\xi)=1$ 和 $u\in\xi^\perp$ 条件的 (ξ,u) 偶全体在等价关系 $(\xi,u)\sim(\xi',u')\Longleftrightarrow\xi'=\varepsilon\xi$，$u'=\varepsilon u$（其中 $\varepsilon=\pm1$）下的商空间，称为 $\mathscr{P}$ 的切纤维，记为 $T\mathscr{P}$．$\mathscr{P}$ 在 D 处的切空间记为 $T_D\mathscr{P}$，就是满足 $q(\xi)=1$ 和 $\xi\in D$ 条件的 (ξ,u) 在 $T\mathscr{P}$ 中的象空间；它具有一种反欧几里得空间结构，也就是说具有一个负定的二次型．事实上，根据 13.4.7，对 $q(\xi)>0$ 来说，q 在 $\xi^\perp$ 上的限制是负定的；而 $-\mathrm{Id}_{\xi^\perp}$ 是具有 $q|_{\xi^\perp}$ 的 $\xi^\perp$ 上的等距变换，特别是，可以定义 $T_D\mathscr{P}$ 中两个向量的夹角；若这两个向量是由 (ξ,u) 和 (ξ,v) 给定的，则夹角 $\alpha\in[0,\pi]$ 定义为

19.2.8 $$\cos\alpha = -\frac{P(u, v)}{\sqrt{q(u)q(v)}}.$$

19.2.9 在模型 $\mathscr{B}$ 中，$z \in \mathscr{B}$ 的切空间由 $\Lambda(z)$ 的切空间推衍而得，但亦等同于 $\mathbf{R}^n$；要注意的是，除了 $z=0$ 的情形（这时读者可自行验证），在 $T_z\mathscr{B}$ 中的夹角是与在欧几里得空间中的夹角不一样的。这也是一个原因，使我们要在下面引进模型 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{H}$，对这两种模型而言的双曲角度，是与欧几里得角度一致的；但作为代价的是，它们不再象 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{B}$ 那样具有与通常直线一致的那种直线（参见 19.6.2）。

19.2.10 直线和射线．子空间． 在 $\mathscr{P}$ 中，把 $\mathscr{P}$ 和 $P^n(\mathbf{R})$ 的一条射影直线的非空交集称为直线；在 $\mathscr{B}$ 中，直线指 $\mathscr{P}$ 的直线在 Φ 下的象集，因而就是开线段（其端点是 $\mathscr{B}$ 的边界 S^{n-1} 上不同的两点）。

在 $\mathscr{P}$ 中，设 $q(\xi)=1$，$q(u)=-1$，且 $u \in \xi^\perp$，则当 t 取遍 $\mathbf{R}_+$ 时向量 $\mathrm{ch}t \cdot \xi + \mathrm{sh}t \cdot u$ 所生成直线的集合称为以 D 为始

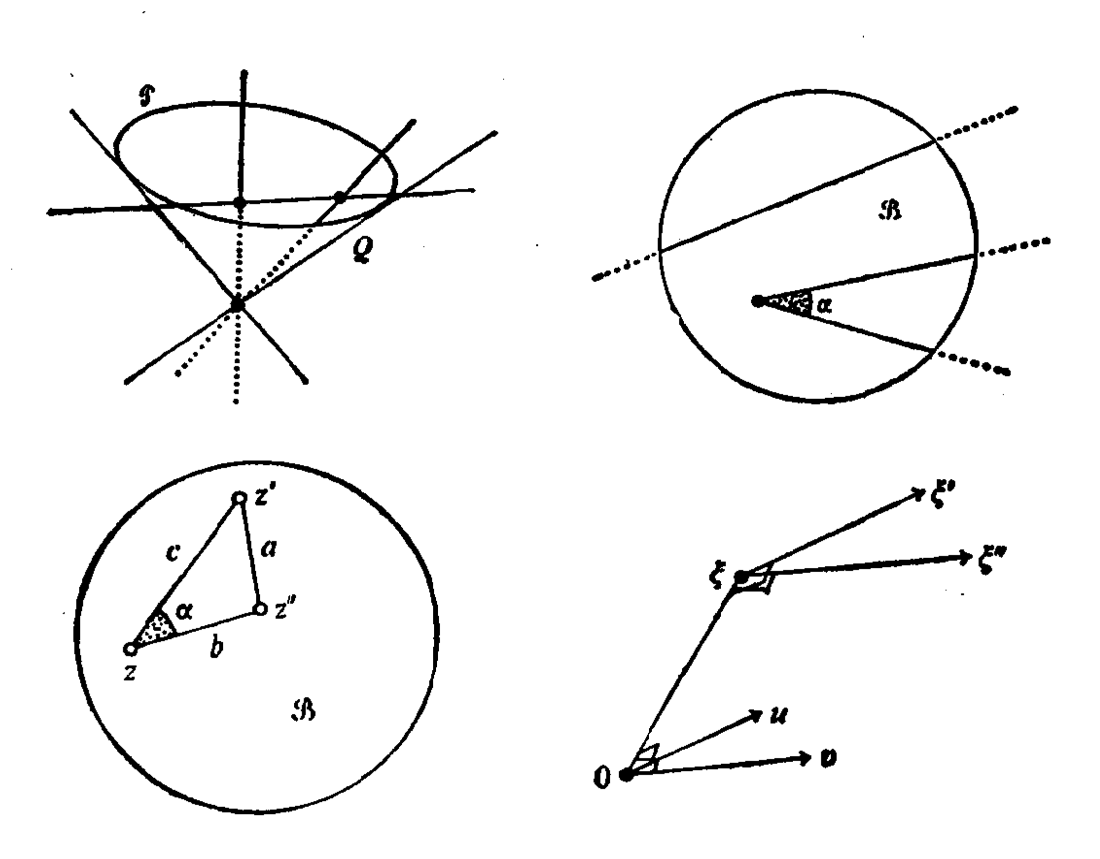


图 19.2.10.

点的射线；该射线的切向量就是 (ξ, u) 的伴随向量。

由 Φ 可推得模型 $\mathscr{B}$ 中的射线概念；这些射线就是半开线段，其闭端点在 $\mathscr{B}$ 中，开端点在 S^{n-1} 中。

两条具有相同始点(在 $\mathscr{P}$ 或 $\mathscr{B}$ 中)的射线的夹角，就是它们的切向量在 19.2.7 的意义下的夹角(关于 $\mathscr{B}$ 参见 19.2.9)。

$\mathscr{P}$ 或 $\mathscr{B}$ 中不同的两点决定唯一的一条包含该两点的直线；它们决定唯一的一条以其中指定一点为起点的射线。

同样可决定 $\mathscr{B}$ 的 k 维子空间，$n-1$ 维子空间就是超平面。

19.2.11 注. 与 9.7.4，18.4.7 和 19.1.2.5 相似的问题可见 19.8.16 和 [BL] 第 XII 章.

19.3 基本公式和推论

设 $z, z', z'' \in \mathscr{B}$ 且 $z \neq z'$，$z \neq z''$；令 $d(z', z'') = a$，$d(z'', z) = b$，$d(z, z') = c$ 且设以 z 为起点，经过 z' 和 z'' 的两条射线在 z 处的夹角为 α，则

19.3.1

$$\boxed{\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha.}$$

证明是跟 18.6.8 相仿的；设 $D = \Lambda(z)$，$D' = \Lambda(z')$，$D'' = \Lambda(z'')$，取 $\xi \in D$，$u, v \in \xi^{\perp}$，$k, h \in \mathbf{R}_+$ 使 $q(\xi) = 1$，$q(u) = q(v) = -1$，另取 $\xi' = \xi + ku \in D'$，$\xi'' = \xi + hv \in D''$. 根据 19.2.5，19.2.8，并因为 $k, h \in \mathbf{R}_+$，相继可得

$$q(\xi') = 1 - k^2,\ q(\xi'') = 1 - h^2,\ \operatorname{ch} c = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}},$$

$$\operatorname{sh} c = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}},\quad \operatorname{ch} b = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}},\ \operatorname{sh} b = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}},$$

$$P(u, v) = -\cos\alpha,\ P(\xi', \xi'') = 1 - \cos\alpha \cdot kh,$$

$$\operatorname{ch} a = \frac{1 - \cos\alpha \cdot kh}{\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-h^2}} = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha.$$

19.3.2 严格三角形不等式. 既然 $\cos\alpha \geqslant -1$，由 ch· 的递增性，

就有 $\operatorname{ch} a \leqslant \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c = \operatorname{ch}(b+c)$ 和 $a \leqslant b + c$. 又因 ch· 是严格递增的，等式 $a = b + c$ 仅在 $\cos\alpha = -1$ 时成立，而后一条件等价于 $\alpha = \pi$，或者还可以说成在 $\mathscr{B}$ 中点 z 属于端点为 z', z'' 的线段.

因而，在 $\mathscr{B}$ 的任意两点之间，存在唯一的一条最短道路，即单调地生成的线段 $[z, z']$. 其长为 $d(z, z')$；特别地，$\mathscr{B}$ 的度量是优异的，从而是内蕴的（参见 9.9.4.5）. 这样，直线集合 $\mathscr{B}$ 就具有了欧氏仿射空间中相应的性质，也就是说它们都是从一点到另一点的最短道路；与 19.1.1.6 比较可以看出，现在对双曲平面来说，过不在直线 Δ 上的一点 z，有无穷多条不与 Δ 相交的直线；它们构成两端直线之间所有直线的集合，见图 19.3.2.

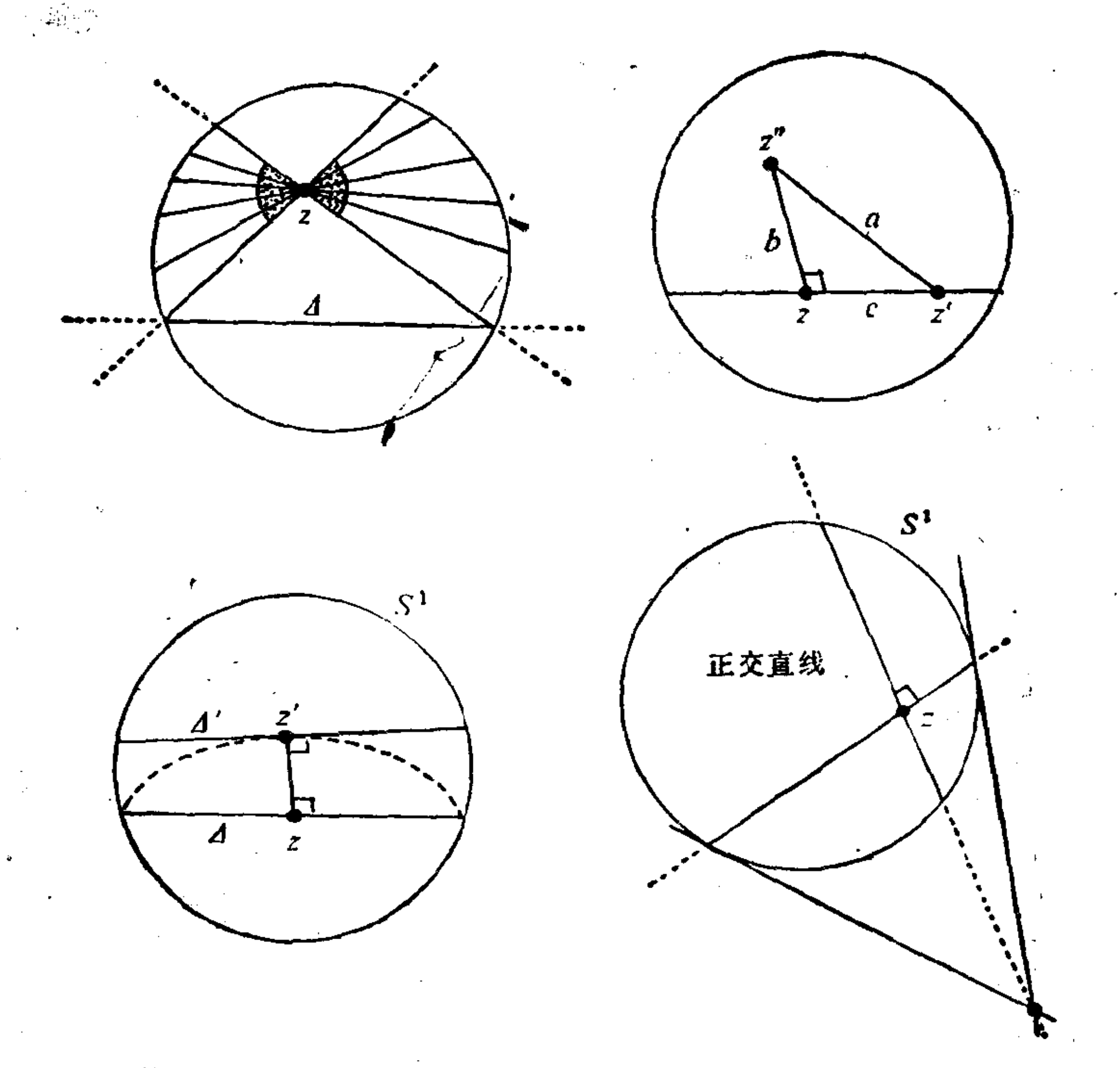


图 19.3.2.

19.3.3 例

19.3.3.1 到直线的距离. 假设在 19.3.1 中 $\alpha=\pi/2$（注意 19.2.9，几何条件是当 $n=2$ 时以 z 为起点的两条直线关于圆 S^1 共轭，这里关于圆周共轭的意义为 10.7.11 所述）;则

$$\operatorname{ch} a=\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c \text{ 从而 } a \geqslant b,$$

等式仅当 $z'=z$ 时成立. 这样就又完整地得出了 9.2.2，因为给定一条直线 Δ 和一点 z'' 后，由紧性可知存在一点 $z\in\Delta$ 使 $d(z, z'')=d(z'', \Delta)$（参见 19.2.6).

这里要注意的是，与欧几里得平面的情形相反，若 $z\in\Delta$, $z'\in\Delta'$ 使 $d(z, z')=d(\Delta, \Delta')$，且 Δ, Δ' 与直线 $\langle z, z'\rangle$ 在 z, z' 处的夹角正好是 $\pi/2$，则当 $w\in\Delta\backslash z$ 时有 $d(w, \Delta')>d(\Delta, \Delta')$. 亦可参见 19.8.8 和 19.8.11.

19.3.3.2 曲线的长度·圆· 容易在极坐标下算得曲线的长度，见 19.8.18. 若将集合 $\{z\in\mathscr{B}: d(z, z_0)=r\}$ 称为双曲平面上的圆，则圆的周长是 $2\pi \operatorname{sh} r$; 这一周长在欧几里得平面上是 2π，在球面 S^2 上是 $2\pi\sin r$. 在 $\mathscr{B}$ 中这些圆表现为椭圆，见 19.8.12，但在模型 $\mathscr{C}$ 或 $\mathscr{H}$ 中它们也是欧氏图：见 19.6.8.2.

19.3.4 三角形. 根据 19.3.1，直接计算可知，对双曲平面上边长为 a, b, c，内角为 α, β, γ 的三角形，有下列公式:

19.3.5

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh} a}=\frac{\sin\beta}{\operatorname{sh} b}=\frac{\sin\gamma}{\operatorname{sh} c},$$

$$\cos\alpha=\sin\beta\sin\gamma \operatorname{ch} a-\cos\beta\cos\gamma.$$

关于欧氏或球面的三角形所讨论过的内容，读者都可在 $\mathscr{B}$ 中进行讨论：如公式 10.3，10.13.2，18.6.13，给定边长和内角的三角形的实现，(在等距下)相等的情形，中线、角平分线、高线的交点. 关于角平分线，可以研究它们的交点和 Brianchon 定理之间的联系：参见 16.2.13 和 [CR 3] 的卷首插图. 关于给定三内角的三角形，我们看到，由 19.3.5 可求出边长；但在 19.5.4 中还将给出一个有趣的附加公式. 亦可参见 [CR 3] 第 XII 章的分析方法.

19.4 等距变换群

19.4.1 $\mathscr{B}$ 中的等距变换全体所成的群 $\text{Is}(\mathscr{B})$，当然包含 $G(n)$（参见 19.2.1）在 Φ 下所得的群，后面这个群不妨仍记为 $G(n)$：事实上只须应用 19.2.3 和 19.2.5 即可，因为 $\mathscr{B}$ 的度量是通过 q 定义的，而根据定义 $G(n)$ 又是保持 q 不变的。在看来稍有些兜圈子、但对其它的目的颇有裨益的论证之后，我们就会看到，其实有 $\text{Is}(\mathscr{B}) = G(n)$。

19.4.2 **超平面对称． 垂直平分集．** 设 η 使 $q(\eta) < 0$；则根据 13.4.7 和 19.2，$\eta^{\perp}$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的超平面，$\eta^{\perp}\cap\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{P}$ 的超平面．它在 $\mathscr{B}$ 中给出超平面 $\Phi(\eta^{\perp}\cap\mathscr{P})$。$P^{n}(\mathbf{R})$ 的伴随正交对称（参见 13.6.6，14.7.4.）是在 $PO(\alpha) = G(n)$ 中的；这是 $\mathscr{P}$ 的一个对

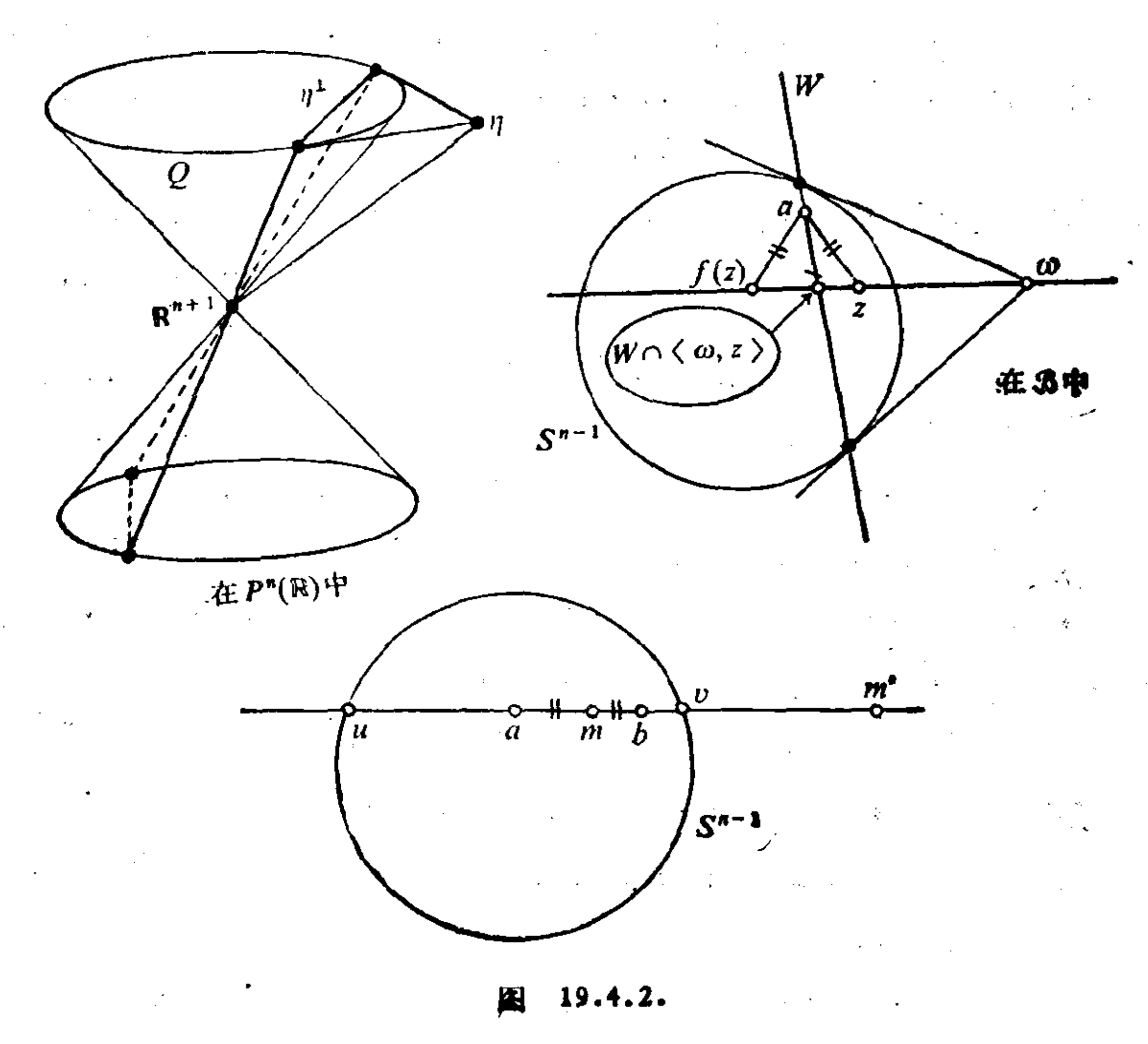


图 19.4.2.

合对称且其所有的不动点就是 $\eta^{\perp}\cap\mathscr{P}$ 的不动点. 在 $\mathscr{B}$ (或 $\mathscr{P}$) 中,称这样的对称为关于超平面 $W=\Phi(\eta^{\perp}\cap\mathscr{P})$(或 $\eta^{\perp}\cap\mathscr{P}$)的超平面对称. 特别有 $d(a,z)=d(a,f(z)),\forall a\in W,\forall z\in\mathscr{B}$. 反过来, 对满足 $a\neq b$ 的任何 $a,b\in\mathscr{B}$ 存在 $\mathscr{B}$ 中唯一的超平面 W, 使 W 所定义的超平面对称将 a, b 互换; 而且 $W=\{z\in\mathscr{B}: d(a,z)=d(b,z)\}$. W 也称为 a 和 b 的垂直平分超平面. 为说明这一点,只须取 $\xi\in\Lambda(a)$, $\xi'\in\Lambda(b)$ 使 $q(\xi)=q(\xi')$ 和 $\eta=\xi-\xi'$ 即可;根据 13.4.7, 有 $q(\xi-\xi')<0$. 于是根据 13.6.6.2, $\mathscr{B}$ 中的伴随超平面 W 的对称将 a 和 b 互换;而且,根据 19.2.5, 对 $z=\Phi(\mathbf{R}\zeta)$ 有 $d(a,z)=d(b,z)$ 等价于 $P(\xi,\zeta)=P(\xi',\zeta)$, 即 $P(\xi-\xi',\zeta)=0$, 这正好就是 $\zeta\in(\xi-\xi')^{\perp}$.

从几何的角度说,在 $\mathscr{B}$ 也可这样地定义超平面对称: 设 ω 是 W 关于 S^{n-1} 的极(参见 10.7.11, 若 $W\in\mathscr{B}$ 的中心 O, 则 ω 在 $W^{\perp}$ 方向的无穷远处),则超平面 W 的对称 f 将 $z\in\mathscr{B}$ 映成直线 $\langle f,z\rangle$ 上的点 $f(z)$, 使 ω, $\langle\omega,z\rangle\cap W$, z, $f(z)$ 四点成调和分割. 事实上这一点可由 14.7.4 和 15.5 推出.

19.4.3 例: 中点. 19.4.2 和 19.3.3.1 表明,给定不同的两点 $a,b\in\mathscr{B}$ 后,存在唯一的一点 m 使 $d(m,a)=d(m,b)=\frac{1}{2}d(a,b)$,这一点就是线段 $[a,b]$ 和 a, b 的垂直平分线的交点. 从几何的角度,可将该点作为直线 $\langle a,b\rangle$ 的对合的二重点而作出, 其中一对点是 (a,b), 另一对是 $\langle a,b\rangle$ 和 S^{n-1} 的交点 (u,v).

19.4.4 命题. 设 $(z_i)_{i=1,\cdots,n+1}$ 是 $\mathscr{B}$ 中仿射独立的点; 则由 $d(z,z_i)=d(z',z_i)$ $\forall i=1,\cdots,n+1$ 可推出 $z=z'$. 设 $(z_i)_{i=1,\cdots,k}$ 和 $(z'_i)_{i=1,\cdots,k}$ 是 $\mathscr{B}$ 中两个 k 元组,并使

$$d(z_i,z_j)=d(z'_i,z'_j)\ \forall i,j=1,\cdots,k;$$

则存在 $f\in G(n)$ 使 $f(z_i)=z'_i$ $\forall i=1,\cdots,k$.

由于上述关于垂直平分集的讨论, 我们可以完全和证明 9.7.1 时一样地进行讨论.

19.4.5 推论. $\mathrm{Is}(\mathscr{B})=G(n)$.

19.4.5.1 注. 特别可知 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 是二点可迁的，参见 9.1.7.

19.4.6 一些推论.

19.4.6.1 由 19.4.4 的证明可知，$\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 中的每一元素是至多 $n+1$ 个超平面对称的乘积；还可注意到，当 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的超平面是 $\eta^{\perp}$ 而 $q(\eta)>0$ 时，由 13.7.12 可得出对称，且它们不一定是超平面对称，其实，在这种情形所得出的是绕 $\mathscr{B}$ 的一点，即绕 $\Phi(\mathbf{R}\eta)$ 的对称。

19.4.6.2 由 13.7.1 可知，$\mathscr{B}$ 中两个 k 维子空间总是在某一个 $f\in\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 下互为映象的. 由此还可知，d 在一个这样的子空间上诱导的度量，就是 k 维双曲空间的度量（可取一个过 $\mathscr{B}$ 的原点 O 的子空间）。

19.4.6.3 如在 18.5.8 中一样，可以证明在不计数量因子差别的条件下，d 是 $\mathscr{B}$ 上唯一在 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 下不变的度量.

19.4.6.4 群 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 同构于 $\mathrm{M\ddot{o}b}(n-1)$（参见 18.10），但它作用在 $\mathscr{B}$（或 $\mathscr{P}$，或下面的 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{H}$）上的方式与作用在 S^{n-1} 上时很不相同.

19.4.6.5 一点 z 的稳定子群 $\mathrm{Is}_z(\mathscr{B})$ 自然同构于切空间的正交群 $O(T_z\mathscr{B})$，参见 19.2.7；而且在 0 处，这个稳定子群等同于 $O(n)$，因为我们可取 $\xi=(0,1)$，这时就有 $\xi^{\perp}=\mathbf{R}^n$.

19.4.6.6 群 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 是保角的，因为根据定义 $G(n)$ 是保角的(参见 19.2.7).

19.4.7 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 的紧子群. 这样的子群容有一个对所有元素共同的不动点；事实上，由 19.3.1 容易验证两点的中点（参见 19.4.3）满足 9.8.6.5 的条件.

19.5 $\mathscr{B}$ 的规范测度

19.5.1 命题. $\mathscr{B}$ 上每一在 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 下不变的测度必定形如 $k\lambda\omega$，其中 $k\in\mathbf{R}_+^*$，ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的 Lebesgue 测度在 $\mathscr{B}$ 上的限制，λ 是映射 $z\longmapsto(1-\|z\|^2)^{-(d+1)/2}$. $k=1$ 时，即关于 ω 在 0 处的比例

因子为 1 的上述测度，称为 $\mathscr{B}$ 的规范测度.

$\mathscr{B}$ 上每一在 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 下不变的测度形如 $g\omega$，其中 $g:\mathscr{B}\to\mathbf{R}_+^*$ 连续，这一事实已在 2.7.4.4 和 18.7.3.4 中提及；现在我们再利用下述事实：$\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 在 $\mathscr{B}$ 的每点沿每一方向都是连续作用的. 这也说明了两个不变测度总是成比例的，因为 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 是可迁的，从而函数比例因子应是常值，剩下只要说明 $\lambda\omega$ 确实是在 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 下不变的. 而它在稳定子群 $\mathrm{Is}_0(\mathscr{B})=O(n)$ 下是不变的（参见 19.4.6.5），因为 $\|\cdot\|^2$ 是在 $O(n)$ 下不变的；因此只须证明对任一 $z\in\mathscr{B}$ 存在 $f\in\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 使 $f^*(\lambda\omega)=\lambda\omega$ 且 $f(0)=z$. 我们甚至可以仅考虑形如 $(x,0,\cdots,0)$ 的 z；取

$$f:(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto\left(\frac{\operatorname{ch}t\,x_1+\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t\,x_1+\operatorname{ch}t},\ \frac{x_2}{\operatorname{sh}t\,x_1+\operatorname{ch}t},\cdots,\ \frac{x_n}{\operatorname{sh}t\,x_1+\operatorname{ch}t}\right),$$

这是如下定义的 $F:\mathbf{R}^{n+1}\to\mathbf{R}^{n+1}$ 在 $\mathscr{B}$ 上的效应：

$$(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\longmapsto(\operatorname{ch}t\,x_1+\operatorname{sh}t\,x_{n+1},x_2,\cdots x_n,\ \operatorname{sh}t\,x_1+\operatorname{ch}t\,x_{n+1}),$$

这个 f 显然是使 $q=-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+x_{n+1}^2$ 不变的. 计算 f 在 $0=(0,\cdots,0)$ 处的偏导数 Jacobi 矩阵后可知，Jacobi 行列式 $\det f'(0)$ 为 $(\operatorname{ch}t)^{-(d+1)}$，因而 $f^*(\lambda\omega)=\lambda\omega$，这对任何 t 都对；而由 $f(0,\cdots,0)=(\operatorname{sh}t/\operatorname{ch}t,0,\cdots,0)$ 可得出 $(x,0,\cdots,0)\in\mathscr{B}$.

19.5.2 一个例子. 设 $\mathscr{E}$ 是双曲平面 $\mathscr{B}$ 上的三角形，其内角为 $\alpha,\beta,\pi/2$；则

19.5.3 面积$(\mathscr{E})=\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta$.

由 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 的可迁性，可对顶点坐标为 $(0,0)$，$(u,0)$，$\left(u,\dfrac{u}{\sin\alpha}\right)$的三角形进行计算；事实上，在 0 和 $(u,0)$ 处的角为 α 和 $\pi/2$，因为对 $\mathscr{B}$ 和 $\mathbf{R}^2$ 来说，在 $(0,0)$ 处的角是一样的，在 $(u,0)$ 处的角也都是 $\pi/2$，于是由 19.2.6 有：$u=\operatorname{th}b$，其中 b 是

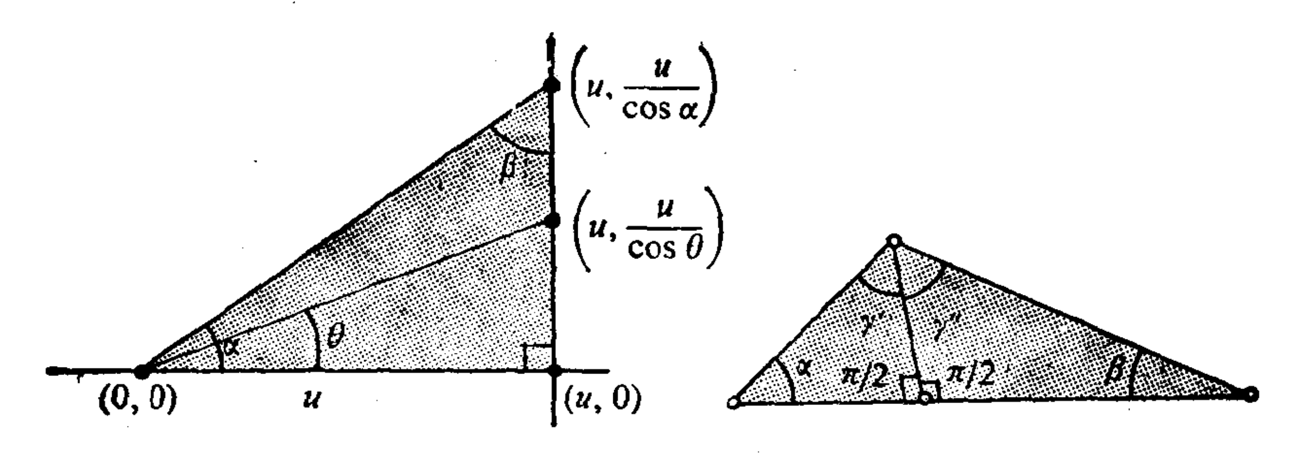


图 19.5.3.

$\mathscr{E}$ 中角 β 的对边，根据 19.3.5 有 $\operatorname{ch} b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$. 在极坐标 (ρ, θ) 中，规范测度为 $(1-\rho^2)^{-3/2}\rho d\rho d\theta$，由此相继可得：

$$\begin{aligned}
\text{面积}\ (\mathscr{E}) &= \int_0^\alpha \int_0^{u/\cos\theta} \rho(1-\rho^2)^{-3/2} d\rho d\theta \\
&= \int_0^\alpha [(1-\rho^2)^{-1/2}]^{u/\cos\theta} d\theta \\
&= \int_0^\alpha \left[\left(1 - \frac{u^2}{\cos^2\theta}\right)^{-1/2} - 1\right] d\theta \\
&= \int_0^\alpha \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta - u^2}} d\theta - \alpha \\
&= \left[\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right]_0^\alpha - \alpha \\
&= \operatorname{Arc}\sin(\sin\alpha \operatorname{ch} b) - \alpha \\
&= \operatorname{Arc}\sin(\cos\beta) - \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta - \alpha.
\end{aligned}$$

19.5.4 推论. 对双曲平面上任一内角为 α, β, γ 的三角形 $\mathscr{E}$ 有

$$\text{面积}(\mathscr{E}) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

依据 19.3.3.1 可将该三角形分成两个直角三角形，并对其中每个直角三角形应用 19.5.3.

19.5.5 注. 一般公式见 18.3.8.6，19.5.4 是它的很特殊的情形，因而亦可注意到，对任何三角形有 $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

19.6 共形模型 $\mathscr{C}$

19.6.1 考虑关于北极 ν 的球极射影 $f: S^n\backslash\nu \to \mathbf{R}^n$，并记 S^n 的开南半球为 Σ：

$$\Sigma = \{(z, t) \in S^n \subset \mathbf{R}^{n+1} : t < 0\}.$$

记 $\mathbf{R}^{n+1}$ 到 $\mathbf{R}$ 上的射影 $(z, t) \mapsto z$ 为 π；限制在 Σ 上后，π 是双射，记其逆为 g。令

$$\Xi = f \circ g : \mathscr{B} \to \mathscr{B}, \quad \Omega = \Xi^{-1} : \mathscr{B} \to \mathscr{B}.$$

映射 Ξ，Ω 都是双射．将赋有由 $\delta(x, y) = d(\Omega(x), \Omega(y))$ 定义的度量 δ 的集合 $\mathscr{B}$ 称为双曲空间的(共形)模型 $\mathscr{C}$，其中 d 是 $\mathscr{B}$ 的双曲距离．

19.6.2 在 $\mathscr{C}$ 中通过 Ξ，Ω 的推衍定义直线、射线、切向量和夹角；要注意，这里涉及的是与 $\mathscr{B}$ 中相同的集合，但直线不再是仿射直线．事实上，若 Δ 是 $\mathscr{B}$ 的一条直线，其载体直线 $\bar{\Delta}$ 与 S^{n-1} 交于 u，v，则 $g(\bar{\Delta})$ 是 S^n 中一个与 S^{n-1} 在 u，v 处交成直角的圆，因而 $\Xi(\bar{\Delta}) = f(g(\bar{\Delta}))$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 中一个与 S^{n-1} 在 u，v 处交成直角的圆(参见 18.1.4.3)；因而 $\mathscr{C}$ 的直线是正交于 S^{n-1} 的图与 $\mathscr{B}$ 相交而得的开圆弧．射线则是这些圆的半开弧．

19.6.3 我们要证明 $\mathscr{C}$ 中的角度是与在 $\mathbf{R}^n$ 中的角度一样的，从而说明“共形模型”一词的合理性．为此，我们注意到：

19.6.4 引理． 设 h 是 $\mathscr{B}$ 中关于超平面 W 的超平面对称，则当 W 关于 S^{n-1} 的、使 S^{n-1} 稳定的极点存在时，$\Xi \circ h \circ \Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中关于该极点的反演在 $\mathscr{C}$ 上的限制，当该极点不存在时，W 经过 $\mathscr{C}$ 的中心 0 且 $\Xi \circ h \circ \Omega = h$ 是关于超平面 W 的欧几里得对称．

后一种情形是显然的；现设 w 是 W 关于 S^{n-1} 的极点．将 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中经过 W 并与 $\mathbf{R}^n$ 正交的超平面记为 $\overline{W}$；它是 w 关于 S^n 的极线．若 $z \in \mathscr{B}$，$\theta = \langle w, z\rangle \cap W$，则由 19.4.2 有 $[x, \theta, z, h(x)] = -1$，因而根据 14.5.2.6，$g(z)$ 和 $g(h(z))$ 与 w 共线．因此经过 S^n 中以 w 为极点的反演可将 $g(z)$ 映成 $g(h(z))$(参见 18.10.1.4)；

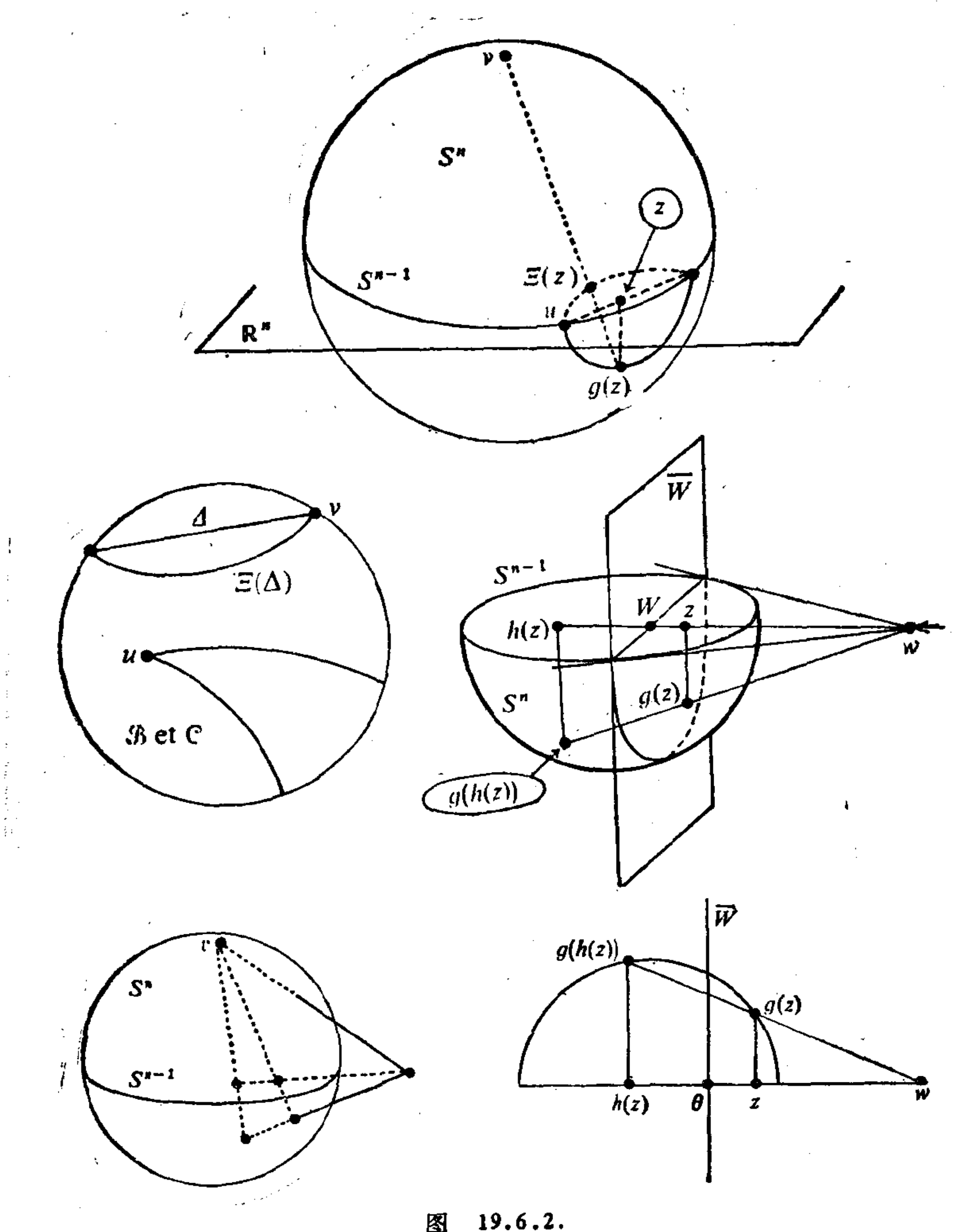


图 19.6.2.

但 $f \circ k \circ f^{-1}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中使 S^{n-1} 稳定的以 w 为极点的反演。

19.6.5 定理. 群 $\mathrm{Is}(\mathscr{C})$ 是由 $\mathbf{R}^n$ 中使 $\mathscr{C}$ 稳定且极点在 $\mathscr{C}$ 内的反演在 $\mathscr{C}$ 上的限制，以及以 0 为中心的超平面对称所生成的。

由 19.6.4 和 19.4.6.1 即可得证。

19.6.6 从而我们看到，Is($\mathscr{C}$) 可作为群 Möb($n-1$) 在S^{n-1}的内部 $\mathscr{C}$ 上的扩张；或者说，Möb($n-1$) 是 Is($\mathscr{C}$) 在 $\mathscr{C}$ 的边界 S^{n-1} 上的连续拓展.

19.6.7 推论. 模型 $\mathscr{C}$ 是共形的，在其中双曲角度和欧氏角度是一致的.

事实上，对 $\mathscr{B}$ 而言，欧氏角度和双曲角度是在 0 处一致的，因而对 $\mathscr{C}$ 而言也在 0 处一致；但由 19.6.5，8.6.6 和 10.8.5.2 可知，Is($\mathscr{C}$) 是保角的.

19.6.8 在双曲平面情形的例. 于是我们可以来考虑 $\mathscr{C}$ 中的角度. 这是非常实用的.

19.6.8.1 借助于 19.5.4 就可以计算一个三角形 $\mathscr{C}$ 的面积. 容易作出这样三个圆，它们都与 S^1 正交，而且在与 S^1 的交点处两两相切，从而可看出，存在 $\mathscr{C}$ 的(或 $\mathscr{B}$ 的!) 三角形，它们的内角

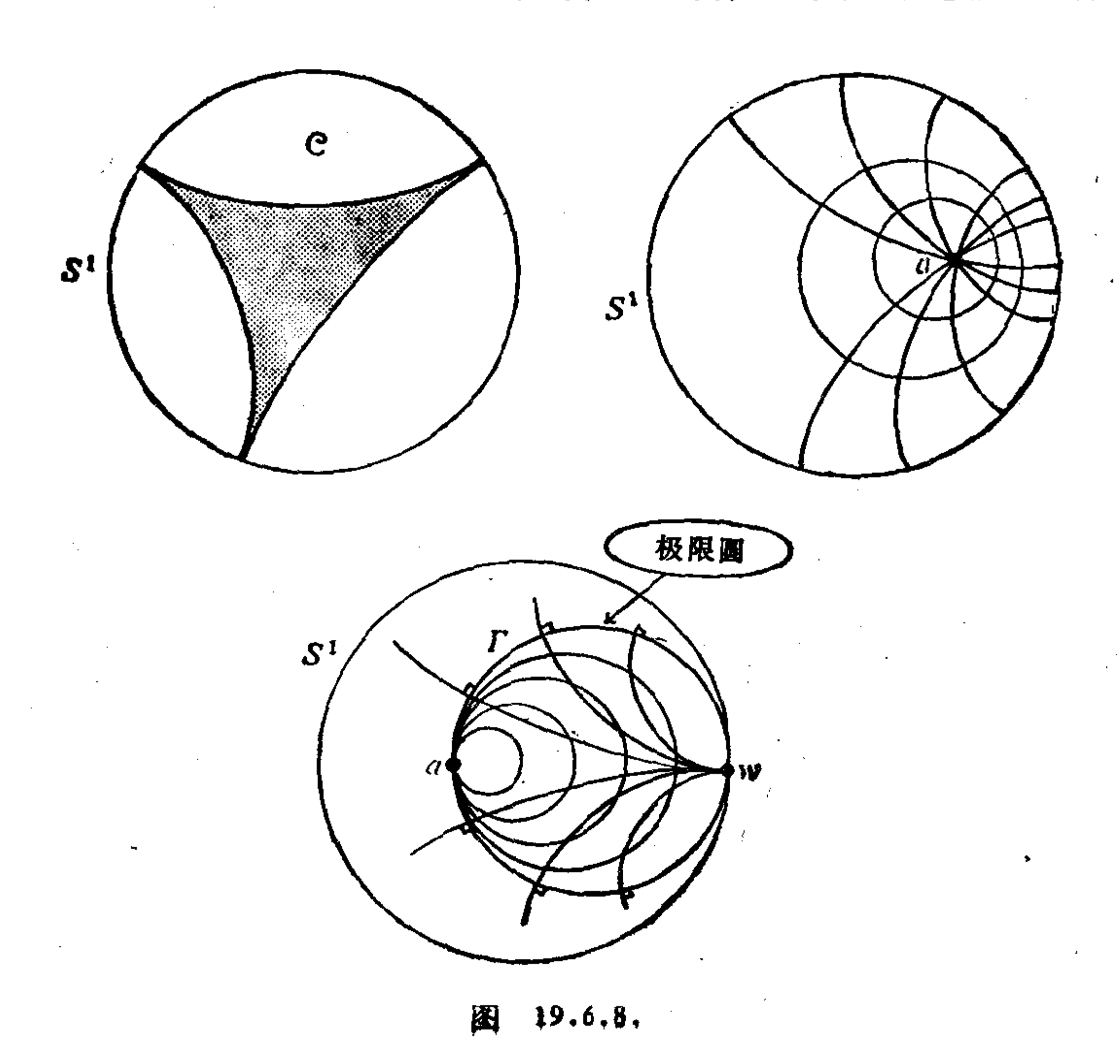


图 19.6.8.

是要多小有多小的，特别是，$\mathscr{C}$ 的三角形的面积的上界等于 π，且不能达到. 注意图中的阴影部分，其各边的长度都是无限的，然而面积却是有限的，等于 π.

19.6.8.2 圆. 根据 19.3.3.1，以 $a\in\mathscr{C}$ 为圆心的圆（参见 19.3.3.2）必与所有过 a 的直线正交；根据 10.10 可知这些圆就是在 $\mathscr{C}$ 内部的一个圆束，其中一个圆是 S^1，一个极限点为 a，于是，$\mathscr{C}$ 的圆也都是欧氏圆.

19.6.8.3 **极限圆.** 本小节旨在解释所有严格落在 S^1 内的圆；在 S^1 内，但在 w 处与 S^1 相切的圆代表什么？我们看到，一个这样的圆 Γ 是与 $\mathscr{C}$ 中任一以 w 为无穷远点的直线正交的；Γ 因而是一个圆心在无穷远处的圆，但它不是一条直线. 当然可以把 Γ 作为所有经过 a、圆心在直线 $\langle a, w\rangle$ 上延伸至无穷远处的圆的极限. $\mathscr{C}$ 的这些曲线称为极限圆；它们在双曲几何的各种应用中起着重要作用，例如参看 [A-A] 第 52 页和附录 20.

在模型 $\mathscr{B}$ 中，读者可证明极限圆（惊人的圆！）恰恰就是与 S^1 超切的椭圆.

19.6.9 **公式.** 19.6.1 的映射 Ω 由下式给出：

$$x\longmapsto\frac{2x}{1+\|x\|^2}.$$

$n=2$ 时，若将 $\mathbf{R}^2$ 与 $\mathbf{C}$ 等同起来，则可预期 $\mathrm{Is}(\mathscr{C})$ 的元素单单由复变量 z 表出；事实上，我们看到，$\mathrm{Is}^+(\mathscr{C})$ 的元素是限制在 $\mathscr{C}=\{z:|z|<1\}$ 上的 $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 映射，它可写为（试与 [CH 2] 第 187 页比较，并见 6.8.16）

$$z\longmapsto e^{i\theta}\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z},\ \theta\text{ 为实数},\ |z_0|=1.$$

19.6.10 **$\mathscr{C}$ 中的度量.** 我们很自然地要在模型 $\mathscr{C}$ 上借助于欧几里得结构来计算两点的距离. 设 $a, b\in\mathscr{B}$，u, v 是 $\langle a, b\rangle$ 与 S^{n-1} 的交点；则有（参看 19.2.5）$d(a,b)=1/2|\log([u,v,a,b])|$. 从而由 g 的（参见 19.6.1）和交比的（参见 6.2.4）定义，又因（见图

19.6.10) $\left(\frac{au}{av}\right)^2 = \frac{g(a)u}{g(a)v}$ 和 $\left(\frac{bu}{bv}\right)^2 = \frac{g(b)u}{g(b)v}$，就有

$$[u, v, a, b]^2 = [u, v, g(a), g(b)].$$

根据 18.10.7 的证明，有

19.6.11 $\delta(x, y) = \left|\log\left(\frac{xu}{xv}\Big/\frac{yu}{yv}\right)\right|, \ \forall\, x, y \in \mathscr{C},$

其中 u，v 表示经过 x 和 y 且与 S^{n-1} 正交的圆与 S^{n-1} 的交点。其实 18.10.7 中的讨论表明 $\mu(a, b, c, d)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 在一切反演下的不变量，特别是在球极射影下的不变量。亦可参看 16.8.6.

例：由公式 19.6.11 出发可以比 19.6.8.2 中更严密地说明 $\mathscr{C}$ 中的圆的性态。

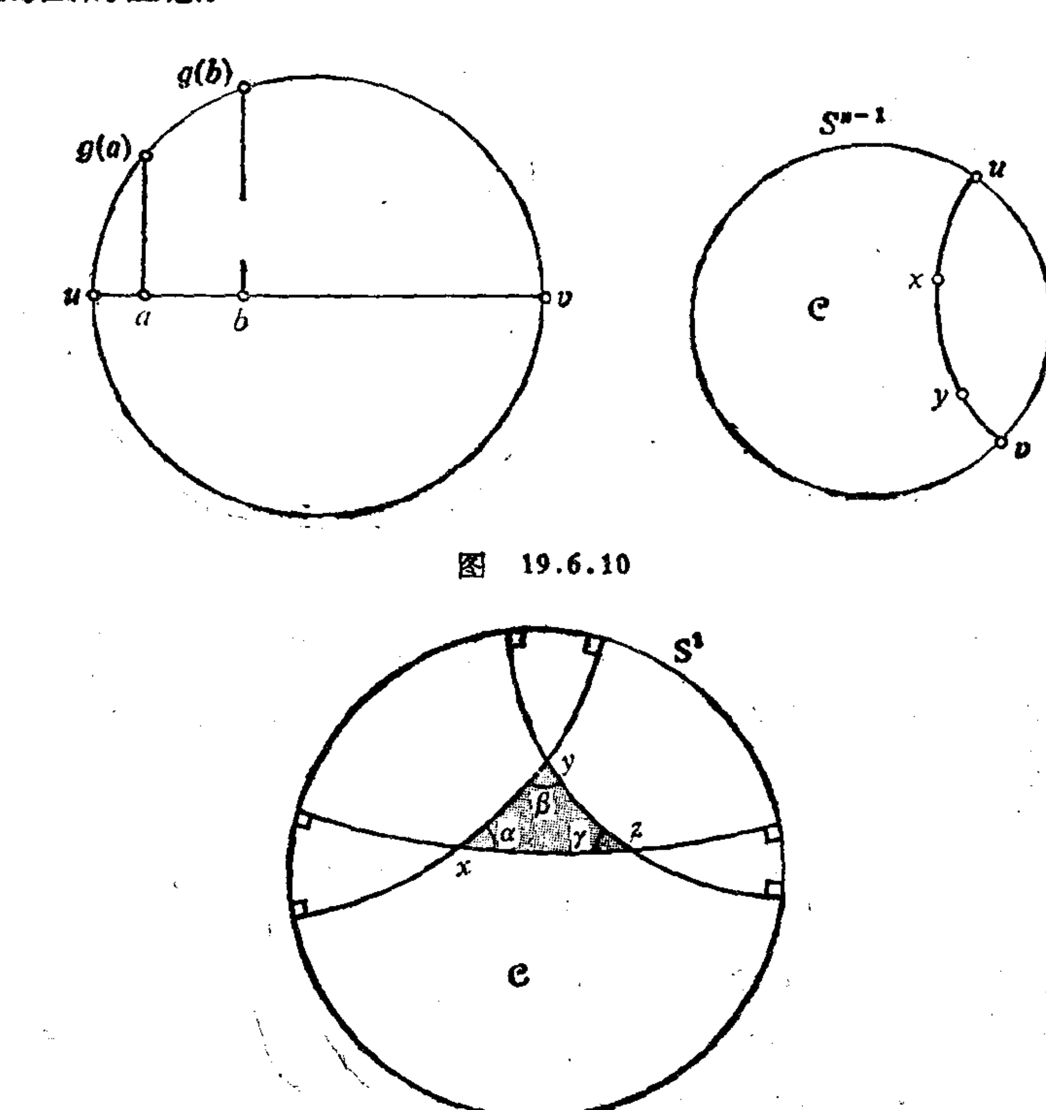


图 19.6.10

图 19.6.11

19.6.12 双曲铺嵌. 设 p, q, r 是三个$\geqslant 3$ 的整数并且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$；根据 19.3.4，存在双曲平面 $\mathscr{C}$ 上的三角形 $\mathscr{T}$，其内角为 $\alpha=\pi/p$，$\beta=\pi/q$，$\gamma=\pi/r$；可以证明关于 $\mathscr{T}$ 的各边的对称生成 $\mathrm{Is}(\mathscr{C})$ 的一个离散子群，由它可铺嵌 $\mathscr{C}$（参看［RM］和其中提

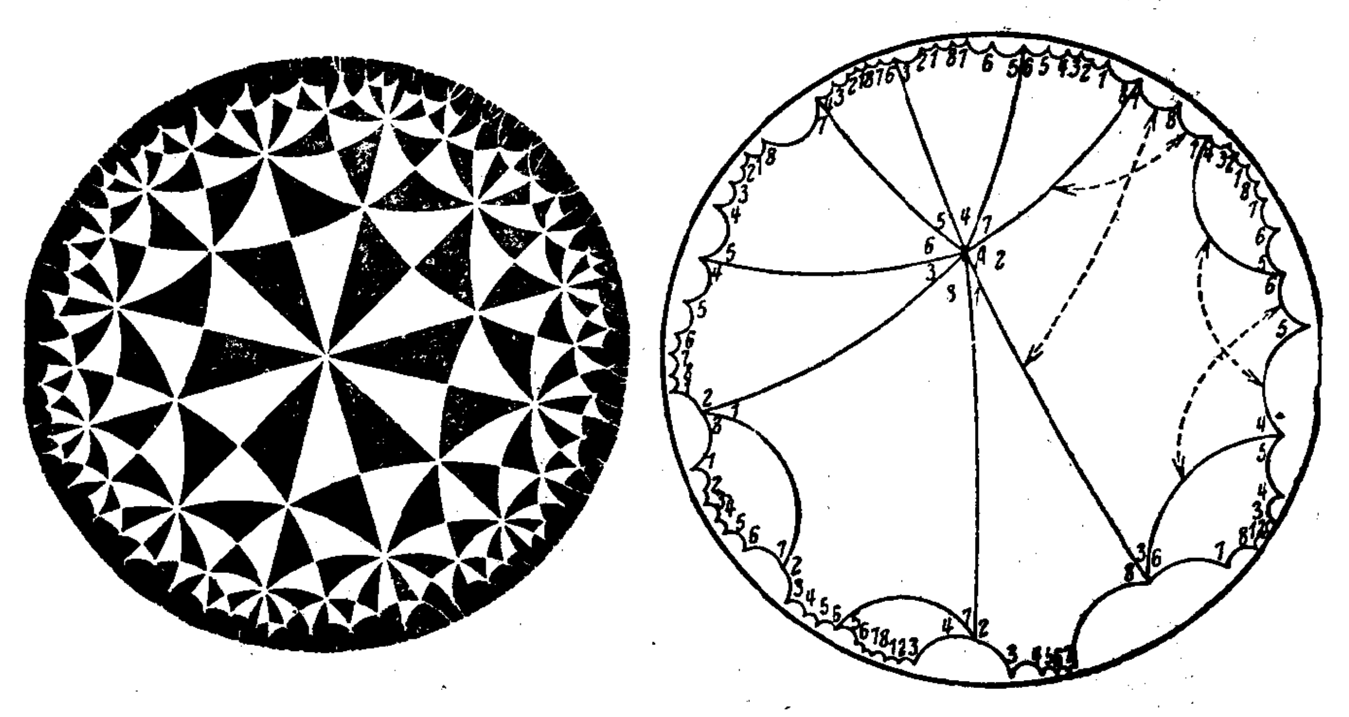


图 19.6.12.1.　　　　图 19.6.12.2.

Coxeter，«几何导引»，J. Wiley 出版社.

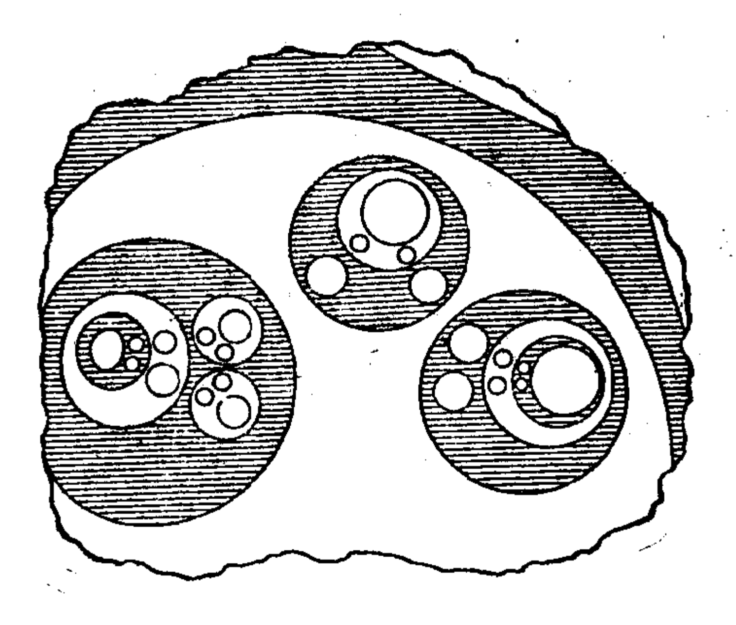


图 19.6.12.3.

及的文献)．因此,完全不同于欧氏或椭圆几何的情形(参看1.8.6, 1.7.4, 1.8.2),双曲平面有无穷多种铺嵌方式.

另外，除三角形外，也可用多边形来铺嵌 $\mathscr{C}$（图 19.6.11.2)；这些铺嵌不仅有审美上的情趣，而且在其它方面，特别在分析中 (Poincaré 的富克斯群，例如参见［RM］）或者在微分几何中起着重要的作用，在后者中可由它们构造出具有常负曲率的紧流形(这时，取 $4k$ 边形，并在商空间取具有 k 个洞的环面的拓扑，见 12.7.5.4)，例如参见［WF］第 69 页.

关于双曲情形下非周期性铺嵌的讨论（参见 1.7.2)，可参阅

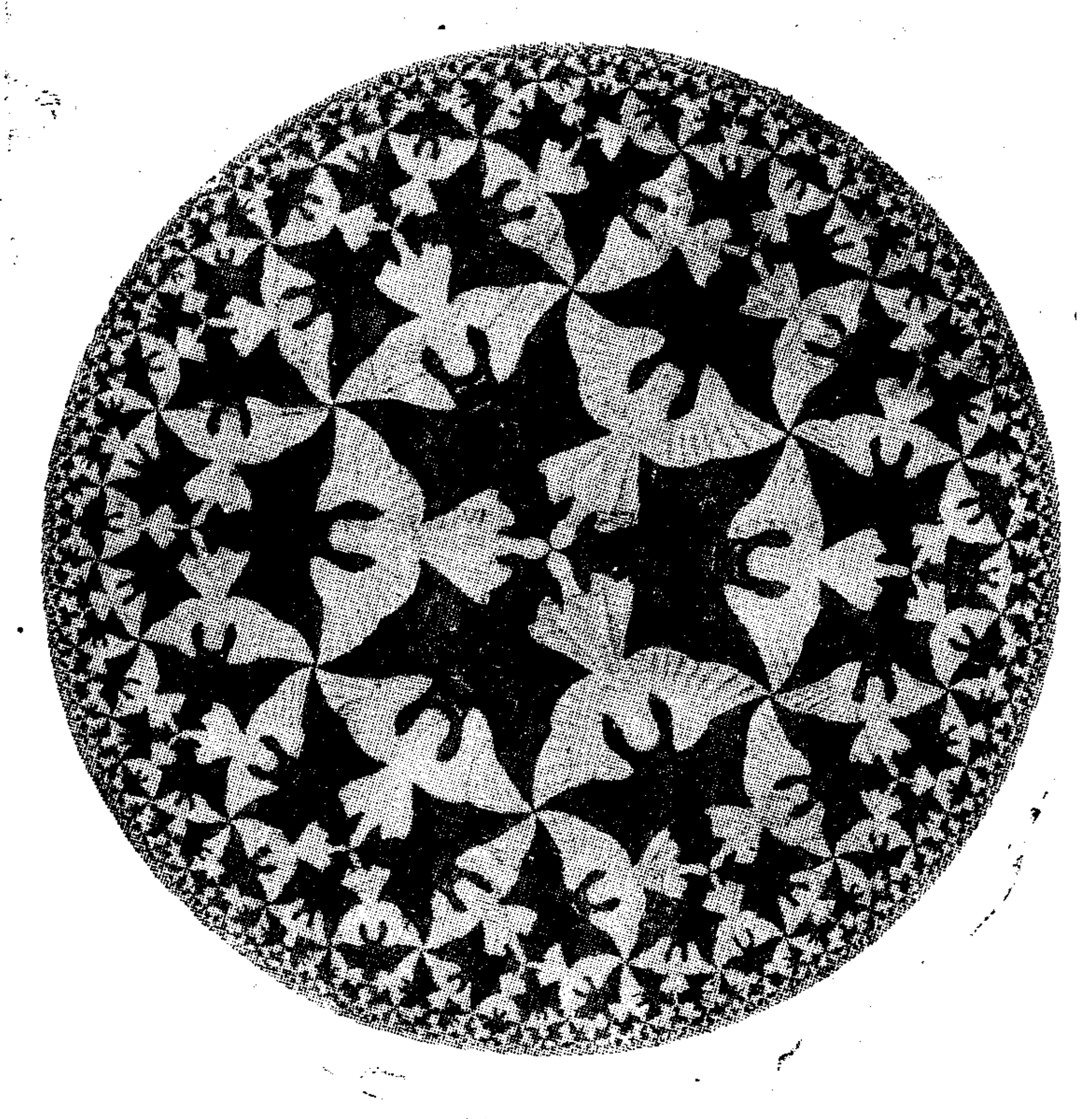


图 19.6.12.4.

M. Escher，"循环极限"，双色木刻，1960.

R. M. Robinson，《双曲平面上不可判定的贴砖问题》，California 大学，Berkeley，预印本.

19.7 跋注，其它模型

19.7.1 模型 $\mathscr{H}$，Poincaré 半空间. 该模型可由模型 $\mathscr{C}$ 经过 $\mathbf{R}^n$ 的一个极点在 S^{n-1} 上的反演得到；这时，构成 $\mathscr{C}$ 的 S^{n-1} 的内部成为一个开半空间 $\mathscr{H}$，其边界为超平面 H，即 S^{n-1} 在上述反演下的象. 将 $\mathscr{H}$（其上通过上述反演，由 $\mathscr{C}$ 可分别得出度量、角度、直线、射线等概念）称为 Poincaré 半空间（$n=2$ 时为半平面）. 它当然是共形的.

这一模型在有一点上是比 $\mathscr{C}$ 稍为逊色的：为得到统一的结果和概念，必须在H上添加一个无穷远点；要不然，比如说就会有两种直线： 圆和正交于H的直线（在 20.1 和 20.6 中还会遇到

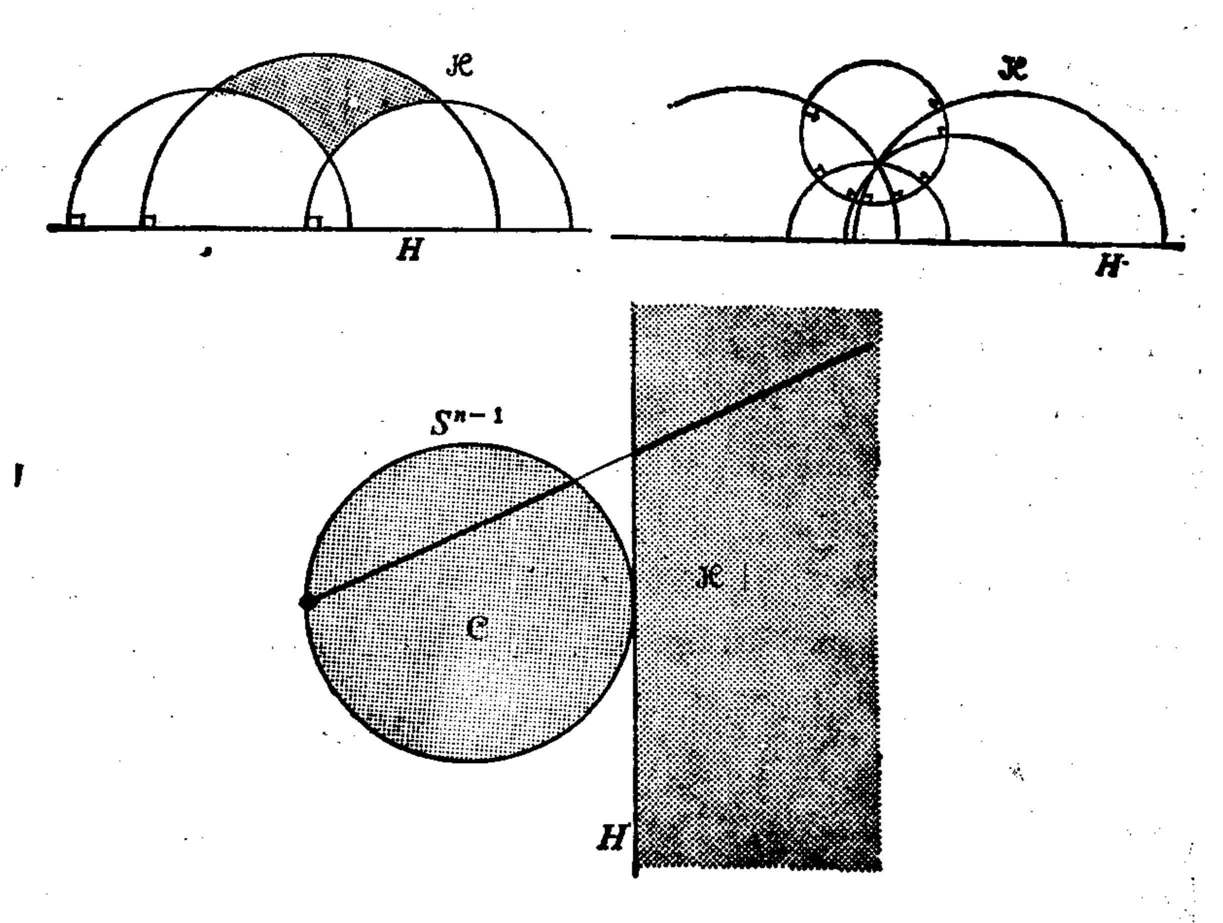


图 19.7.1.

$H\cup\infty$)，甚至连 Is($\mathscr{H}$) 也不是拓展到H上（参见 19.6.6），而仅仅是拓展到$H\cup\infty$上。

反过来，在许多情形下，这一模型又是所有模型中计算最简便的；$n=2$ 的情形尤为理想，在这一模型的基础上，我们可以给出双曲几何的初等阐述。最好的做法是取

$$\mathscr{H}=\{z\in\mathbf{C};\operatorname{Re}(z)>0\};$$

于是 Is($\mathscr{H}$) 的元素是

$$z\longmapsto\frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d\in\mathbf{R},\ ad-bc>0$$

和

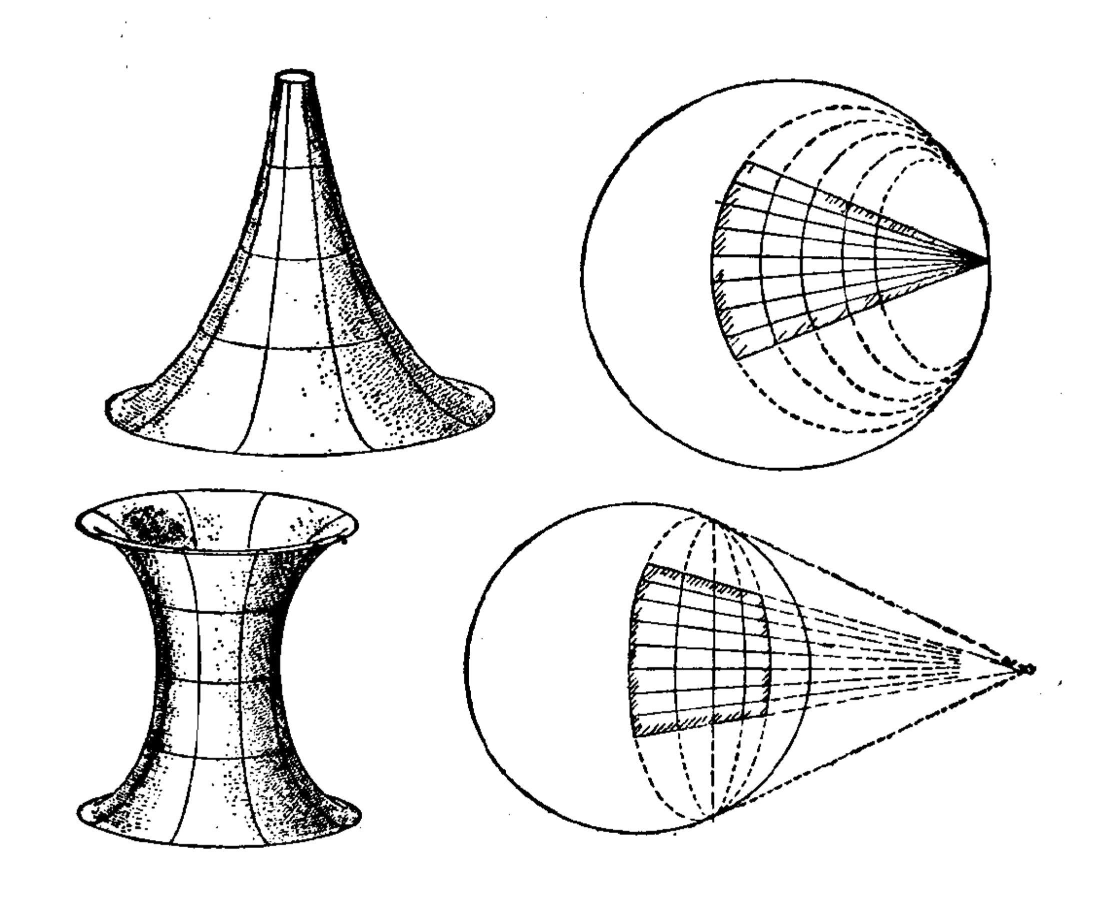
$$z\longmapsto\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},\ a,b,c,d\in\mathbf{R},\ ad-bc<0$$

（由这种写法很容易看出 Is($\mathscr{H}$) 是同构于 GP(1; $\mathbf{R}$) 的，参见 18.10.4 和 5.2.4）。不变测度很简单，就是

$$\frac{dxdy}{y^2}.$$

19.7.2 其它模型. 若要仿照第 18 章的做法，就该把 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中方程为 $q(\xi)=1$ 的超曲面（参见 15.4.3）的一个连通分支E取作模型；但这时E上就不是赋有 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的诱导度量所相伴的内蕴度量（参见 9.9.7 和 18.4.3），而得赋有一个黎曼度量，它是通过在每个 T_xE，$x\in E$上赋以由$-q$在 $\xi^{\perp}$ 的限制所诱导的欧氏结构而得到的。为简单起见，考虑 $\mathbf{R}^3$ 的曲面，若要其上由 $\mathbf{R}^3$ 的诱导度量所推得的内蕴度量是双曲度量，则可取如图 19.7.2 所示的旋转曲面；但是这仅仅是局部的模型。而且，Hilbert 的一个定理明确地指出，$\mathbf{R}^3$ 中的任一曲面都不可能整体地实现 $\mathscr{B}$，例如参见 [KM] 第 476 页。这些模型是 Beltrami 提出的；历史上的 Лобачевский 和 Bolyai 的模型是具有公理性质的。

19.7.3 注. 用到双曲几何的，有分析学，参见 [G-G-V] 第 IV 章；有数论，参见 [SA]；有微分几何，参见 [G-K-M] 第 195 页；有遍历理论，参见 [A-A]；最后还有相对论，其中的 Lorentz 群正是 $n=3$ 时的群 $O(q)$。双曲几何在当前的研究工作中起着很



F. Klein,«高等几何教程», Springer 出版社.
图 19.7.2.

活跃的作用，特别可参阅《Thurson 关于曲面微分同胚的工作》，Orsay 讨论班 76—77，Astérisque 1979.

有关双曲几何的文献是：[B-K]，很初等但很适合教学需要；[CR3]，其中有很完备的公式表；还有 [GR].

我们在 12.11.4.3 中已提及，等周不等式 12.11.1 可推广到双曲空间.

在下书中可找到双曲几何的公理化叙述：K. Borsuk 和 W. Szmielew，《几何基础》第 VI 章.

19.8 练　　习

19.8.1 在椭圆空间中讨论子集

$$\{m;\ \overline{mm_1}=\cdots=\overline{mm_k}\},$$

其中 m_i 是给定的 k 个点.

19.8.2 设 D, D' 是椭圆空间的两条直线;讨论 $\{m: d(m, D) = d(m, D')\}$ (分 $d=2$ 和 $d \geqslant 2$ 两种情形).

19.8.3 在椭圆平面上讨论配极三角形的概念.

19.8.4 讨论椭圆平面上三角形的各种相等情形.

19.8.5 将椭圆平面分割成三角形;证明顶点数 σ,边数 α 和三角形数 φ 恒满足

$$\sigma - \alpha + \varphi = 1.$$

19.8.6 证明从椭圆空间到自身的共形映射必是等距变换.

19.8.7 在 $\mathscr{B}$ 中有一个四边形,其三内角都为直角,且边 a 和 b 已知,求第四个内角.

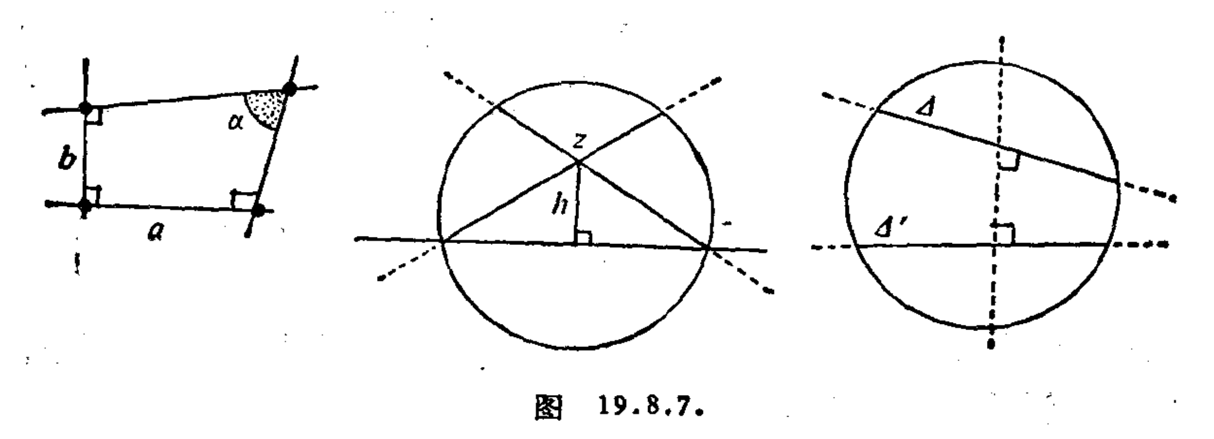


图 19.8.7.

19.8.8 证明: 在双曲平面 $\mathscr{B}$ 中,过 z 向Δ作的两条端头平行线的夹角 (参见 19.3.2) 只依赖于 $d(z,\Delta) = h$,并写出 α 与 h 的函数关系.

19.8.9 先在模型 $\mathscr{B}$ 中,然后在模型 $\mathscr{C}$ 中,从几何上作出双曲平面的两条直线 Δ, Δ' 之间的公垂线 Θ.

19.8.10 证明 19.6.9 和 19.7.1 中的公式.

19.8.11 在双曲平面 $\mathscr{B}$ 上给定一条直线 Δ,试讨论 $\{m \in \mathscr{B}: d(m, \Delta) = h\}$ $(h \in \mathbf{R}_+)$;证明它们都是圆锥曲线的并集,在 h 取遍 $\mathbf{R}_+$ 的情形下讨论这个集族 (作图). 在 $\mathscr{C}$ 中进行同样的讨论;将两者加以比较.

19.8.12 在双曲平面$\mathscr{B}$上给定一点 $m \in \mathscr{B}$,证明 $\{z \in \mathscr{B}; d(z,$

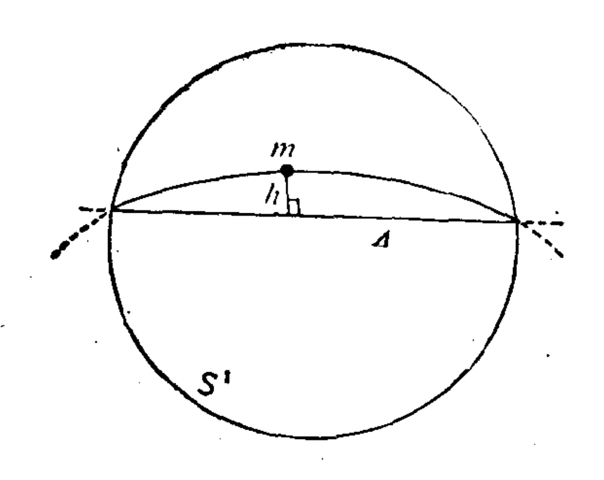
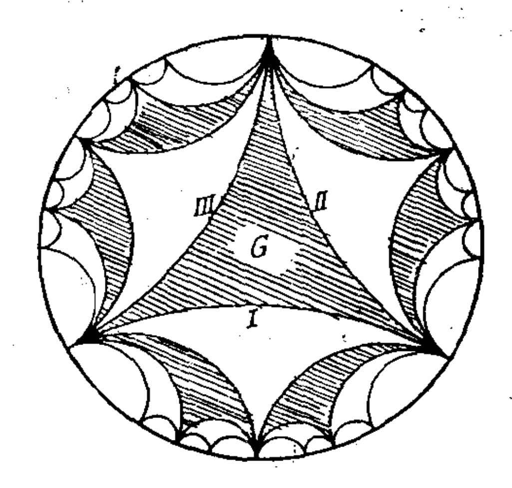


图 19.8.11.



F. Klein, «高等几何教程», Springer 出版社.

图 19.8.13.

$m) = r\}$ 都是 $\mathbf{R}^2$ 的椭圆，并在 r 取遍 $\mathbf{R}_+$ 的情形下讨论这个集族(作图).

19.8.13 解释图 19.8.13.

19.8.14 具体算出 19.6.1 中的 Ξ.

19.8.15 证明: S^{n-1} 的内切球面 Σ(即极限球面, 19.6.8.3 中极限圆在 $n \geqslant 3$ 时的推广)上由 $\mathscr{C}$ 诱导的度量,使 $\Sigma \cap \mathscr{C}$ 成为等距于 $\mathbf{R}^{n-1}$ 的度量空间. 因而,如果 $\mathscr{C}$ 上的居民都集中在 Σ 上,他们就无从知晓自己是生活在双曲空间中的. 反过来, 如果他们分布在整个 $\mathscr{C}$ 上,他们又是如何知道 (即使是局部地) 自己不是生活在欧氏空间的?

19.8.16 证明 n 维双曲空间中任意 $n+2$ 个点 $z_i(i=1,\cdots,n+2)$ 必满足

$$\det(\operatorname{ch}[d(z_i, z_j)]) = 0.$$

19.8.17 在 $\mathscr{B}$ 上定义新的距离 $\bar{d}$ 如下:

$$\bar{d}(x, y) = kd(x, y) \quad (k \in \mathbf{R}_+^*);$$

证明 $k \neq 1$ 时,$(\mathscr{B}, \bar{d})$ 不与 $(\mathscr{B}, d)$ 等距. 试在 $(\mathscr{B}, \bar{d})$ 中定义角度; 说明三角形公式会有什么改变. 再考察 k 趋于无穷时由这些公式可得出什么结果.

19.8.18 在双曲平面 $\mathscr{B}$ 上给定极坐标 $(\rho(t), \theta(t))$ 下的一条 C^1

类曲线；证明它在 $\mathscr{B}$ 中从 $t=a$ 到 $t=b$ 的长度为

$$\int_a^b \frac{\sqrt{\rho'^2+\rho^2(1-\rho^2)\theta'^2}}{1-\rho^2}\,dt.$$

19.8.19 在椭圆空间中讨论 9.8.1 到 9.8.5。

19.8.20 整数 n 大于或等于 3，在双曲平面上讨论内角均为 $2\pi/n$ 的正 n 边形。对于不同的 n，讨论这样的多边形的存在性和唯一性。

19.8.21 **一个人口密度定理.** 证明椭圆平面上任意九点的集合至少包含一个三角形，其周长小于或等于 π（参见 [BL]，第 262 页）.

19.8.22 **$P^n(\mathbf{C})$ 上的 Fubini-Study 度量.** 将 $P^n(\mathbf{C})$ 看作 $S^{2n+1}\subset\mathbf{C}^{n+1}=\mathbf{R}^{2n+2}$ 在由 4.1.1 的定义所诱导的等价关系下的商空间，并将规范射影记为

$$\pi: S^{2n+1}\to P^n(\mathbf{C}).$$

对 $m, n\in P^n(\mathbf{C})$，定义实数 $d(m,n)=\bar{d}(\pi^{-1}(m),\pi^{-1}(n))$，其中 $\bar{d}$ 是 S^{2n+1} 的内蕴度量。证明 d 使 $P^n(\mathbf{C})$ 成为度量空间。在其中讨论最短道路，并说明它们是否唯一。

将上述问题推广到 $P^n(\mathbf{H})$ 上。

19.8.23 图 19.6.12.3 表示什么？

19.8.24 椭圆等距点集。任一使所有的距离 $d(m_i, m_j)$ $(i<j)$ 彼此相等的点集 $\{m_i\}_{i=1,\cdots,n}$，称为度量空间的等距点集。证明椭圆平面 P 容有边长可取 0 与 $\pi/2$ 之间一切数值的等距三点组；按 $\mathrm{Is}(P)$ 的作用将它们进行分类。证明 P 容有边长可取 $\mathrm{Arc}\cos 1/\sqrt{3}$ 或 $\mathrm{Arc}\cos 1/\sqrt{5}$ 的等距四点组；按 $\mathrm{Is}(P)$ 的作用对它们进行讨论。证明在不计等距差别的条件下，P 容有边长为 $\mathrm{Arc}\cos 1/\sqrt{5}$ 的一个等距五点组和一个等距六点组（参见 [BL]，第 211—214 页）。

19.8.25 证明对双曲空间的任何三角形，总有不等式

$$b^2+c^2-2bc\cos\alpha\leqslant a^2\leqslant b^2+c^2+2bc\cos(\beta+\gamma).$$

对球面三角形讨论这一问题。

19.8.26 考虑3维双曲空间 $\mathscr{C}$，在其中固定一点 p. 对 $\mathbf{R}^3$ 的任一正多面体 P 和任一 $t>0$，构造 $\Pi(P,t)$ 如下：若 a 是 P 的中心，(b_i) 是顶点，则首先在 $\mathscr{C}$ 中作过 p 的射线 (D_i)，使它们两两之间的夹角分别与射影 $\overrightarrow{ab_i}$ 之间的夹角对应相等. 再在每条射线 $\overrightarrow{ab_i}$ 上取点 $q_i(t)$ 使其到 p 的距离等于 t.

证明：如果 b_i 都属于 P 的同一个面，则对应的 $q_i(t)$ 属于 $\mathscr{C}$ 中同一平面（2维子空间），且该平面是确定的. 这样的平面称为 $\Pi(P,t)$ 的面.

证明：当 t 趋于无限时，$\Pi(P,t)$ 的相邻的面所成的二面角有一极限，而且该极限值是 π 的有理数倍数.

找出这样的 P 和 t，使从"样模" $\Pi(P,t)$ 出发可得到 $\mathscr{C}$ 的铺嵌.

第20章 球面空间

在 18.10 和 19.2 中，我们已经遇到过群 $G(n)$，也就是 Möb(n)，它作用在 $\mathbf{R}^n$ 的球面 S^n 和单位开球 $B(0,1)=\mathscr{B}$ 上。在前一种情形，涉及在二次型 $q=-\sum_{i=1}^{n}x_i^2+x_{n+1}^2$ 的迷向锥面上的作用；在后一种情形，则是在这样的直线上的作用——q 在其上的限制是正定的。然而，q 在其上的限制为负定的直线的集合又是怎样的呢？

本章的目的是说明这一集合自然地等同于一个仿射欧氏空间中球面的集合。由射影的技巧出发，可以得到一个关于这些球面的集合的有趣的定理，尤其是这样就补足了从第 10 章以来所应有的统一定理之缺。在其上 $q<0$ 的直线的集合要比在其上 $q>0$ 的直线集合来得复杂，这正表明了球面几何的困难所在。

20.1 广义的球面空间

20.1.1 设已给定仿射欧氏空间 E，我们要研究 E 中所有球面的集合；一个几何上的想法是利用从一个球面(除去北极)到 E 上的球极射影 $f:S\to E$。图 20.1.1 表明，若将 E 的球面 σ 与外切于 S、与球面相切于 $f^{-1}(\sigma)$ 的锥面的顶点 w 相对应，则可将 E 的球面与球极射影在其中进行的空间 $\hat{E}$ 中的点对应起来。实际上确可这样地建立起一套理论；但它有两个缺点，一是 S 和 f 的选取并没有规范地与 E 相联系，二是必须用到 $\hat{E}$ 的无穷远点并须将所考察的对象作适当的嵌入。而且这种观点跟 18.10.2 很相近。

20.1.2 下面将从代数上进行讨论，从而避免上述所有缺点，至少能很好地确定所考察的对象；我们的想法是把球面写作仿射二次

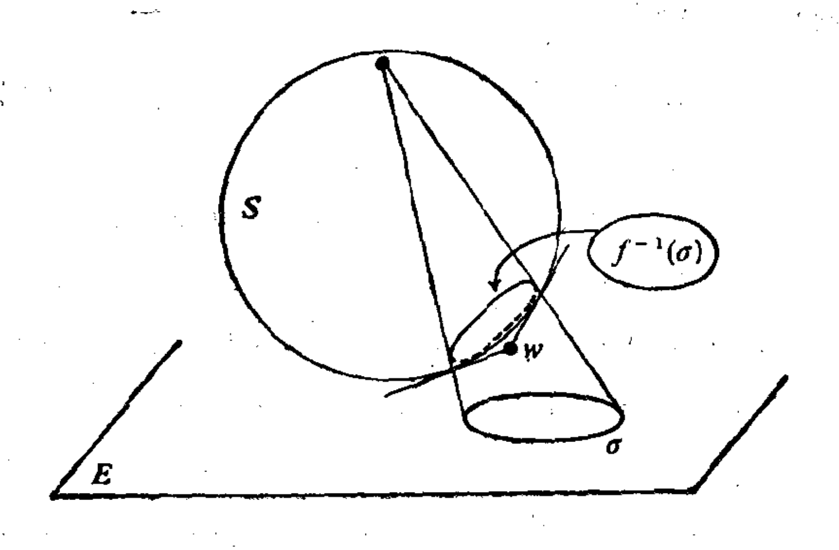


图 20.1.1

曲面，并在 E 上仿射二次型的射影空间中进行考察．整个想法之所以可行，是因为有这样一个事实：在所考虑的空间中存在一个规范二次型（对应于 20.1.1 的结构中作为象集的球面 S）．不过，我们的结构可能因此一开始显得不很自然；但愿读者在以后会对上述结构以及最终得出的结果感到满意．

20.1.3 记号． 对于本章中所考察的 n 维欧氏仿射空间 E，$Q(E)$ 表示 E 上仿射二次型的向量空间；对 $q\in Q(E)$，其相应的符号为 $\vec{q}\in Q(\vec{E})$．若 E 在 a 处向量化，则 q 可写为 $q=q_2+q_1+q_0$，$q_0\in\mathbf{R}$，$q_1\in E_a^*$，q_2 就是 $\vec{q}$（参见 3.3）．要注意，别将下面的内容跟在第 15 章所说的内容混为一谈；在第 15 章中，仿射空间 X 是通过无穷远点的超平面 ∞_X 而完备化的，现在 E 是通过无穷远点 ∞ 本身就完备化的．

10.7.6 中的讨论表明，为了得到球面，引进下述的 $Q(E)$ 的向量子空间是很自然的：

20.1.4 $\check{S}(E)=\{q\in Q(E):\vec{q}=k\|\cdot\|^2,\ k\in\mathbf{R}\}$.

我们看到，这是 $Q(E)$ 的一个 $n+2$ 维子空间．从我们关于仿射或射影二次曲面已经了解的内容出发，可以引进射影空间

20.1.5 $p:\check{S}(E)\backslash 0\to P(\check{S}(E))=S(E)$;

称 $S(E)$ 为 E 的广义球面空间；这是一个 $n+1$ 维实射影空间，

PQ(E) 的射影子空间 (参见 14.1).

20.1.6 象集. $\lambda \in S(E)$ 的象集是什么? 如同在 10.7.6 中一样, 我们在 E_a 中写出 λ 的一个方程 q:

20.1.7 $q = k\|\cdot\|^2 + (\alpha|.) + h$, 其中 $\alpha \in \vec{E}$, $h \in \mathbf{R}$;

如果 $k = 0$, $\alpha \neq 0$, 象集是 E 的一个仿射超平面, 如果 $k = 0$, $\alpha = 0$, 由于 $h \neq 0$, 象集为 $\varnothing$. 如果 $k \neq 0$, 在 10.7.6 中已经看到象集是一个球面、一个点或$\varnothing$. 但由 10.7.6 和上述讨论可知, 当 $\mathrm{im}(\lambda) \neq \varnothing$ 时, λ 是由其象集完全确定的. 由此可知, 若将 E 的仿射超平面全体记作 Θ, 将 E 中半径 >0 的球面全体记作 Σ, 则有单射

20.1.8 $i: \Sigma \cup E \cup \Theta \to S(E)$,

其中, 若将 E 的一点看作以该点为球心的一个"半径为 0 的球面", 则可得出在 E 上的单射性. $i(\Sigma \cup E \cup \Theta)$ 在 $S(E)$ 中的补集由两部分组成: 与方程 $q = 1$ 相伴的那一点, 以及与 $q = k\|\cdot\|^2 + (\alpha|\cdot) + h$, 其中 $\|\alpha\|^2 - 4kh < 0$, 相伴的那些点, 它们可被看作非零的"纯虚数半径的球面". 将第一个点记作 $\infty \in S(E)$, 称作 E 的无穷远点. 以后往往通过 i 把 Σ, E 和 $S(E)$ 的子集等同起来, 并令:

20.1.9 $\hat{E} = E \cup \infty \subset S(E)$, $\mathscr{S}(E) = \Sigma \cup \hat{E} \cup \Theta \subset S(E)$.

在 19.1.3 中提到过的一些问题, 是应该加以注意的. 至于何以要提出这些问题, 下文已足以说明; 20.1.1 也对此作了解释.

20.2 $\check{S}(E)$ 的基本二次型

20.2.1 引理. 对于 E_a 中的 20.1.7 式而言, 量

$$\rho(q) = \frac{\|\alpha\|^2 - 4kh}{4}$$

与 α 无关而仅与 $q \in \check{S}(E)$ 有关. 它是 $\check{S}(E)$ 上的二次型, 符号数为 $(n+1, 1)$, 称作 $S(E)$ 的基本二次型.

这一结果是可以预料到的, 因为 10.7.6 表明 $\rho(q)$ 极象球面

$q^{-1}(0)$ 的半径的平方。这一点可通过一个平移的计算得到验证(参见 2.1.8)。符号数可由定义看出：$\|\alpha\|^2$ 有 n 个正项，$4kh = (k+h)^2 - (k-h)^2$ 有一个正项和一个负项(参见 13.4.7)。

ρ 的配极型记作 $R(.,.)$; 从而有

20.2.2 $R(k\|.\|^2 + (\alpha|.) + h,\ k'\|.\|^2 + (\alpha'|.) + h')$

$$= \frac{1}{4}[(\alpha|\alpha') - 2(k'h + kh')].$$

例如，若 q, q' 的象分别是以 a, a' 为球心、以 r, r' 为半径的球面，则对两个球心之间的距离来说有：

20.2.3 $d^2(a, a') = r^2 + r'^2 - \frac{2}{kk'} R(q, q')$.

20.2.4 $S(E)$ 的基本二次曲面就是以 ρ 为方程的二次曲面，我们不妨仍记之为 ρ; 它是 $S(E)$ 的一个射影二次曲面。关于这个二次曲面的配极或对偶记为⊥(参见 14.5)。我们知道(参见 14.3.3 或 18.10)，ρ 的象集同胚于球面 S^n; 但前面(参见 10.7.6)已证明过 $\mathrm{im}(\rho) = \hat{E}$. 这正是说嵌入 $i: E \to S(E)$ 是到象集 $i(E)$ 上的同胚，而且 $\hat{E}$ 可看作 E 关于无穷远点(在这儿即∞)的 Alexandroff 紧化空间。这是把 10.8.4.2 中讲过的内容形式化，在 20.6.3 中还将就此给出结论。

20.2.5 现在，由 10.7.6 可知，在 $\check{S}(E)$ 中使 $\rho(q) < 0$ 的 q 对应的 $S(E)$中的点是半径为纯虚数的球面，而在 $\rho(q) > 0$ 的情形则是 $\Sigma \cup \Theta$ 的点，即实球面和超平面。若将 ρ 换成 $-\rho$, 则得到符号数为 $(1, n+1)$ 的一个二次型，且由 19.2 可知纯虚数半径的球面构成一个($n+1$ 维的)双曲空间中的点；而这正是 $S(E)$ 中我们不感兴趣的那一部分。$\hat{E}$ 的部分则有球面 S^n 的几何，其上有 Möb(n)(参见 19.2.2 或 18.10); 因而可以讨论 E 的共形群(或循环群)，即下面要在 20.6 中讨论的 Conf$(\hat{E})$. 说到

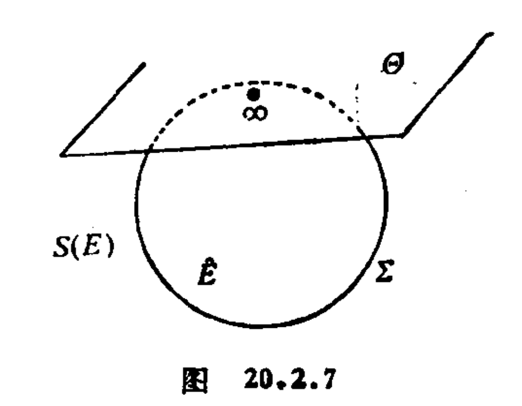


图 20.2.7

底，我们最感兴趣的是 $\mathscr{S}(E)$ 的几何。

20.2.6 这种几何并不简单，这一点由 10.8.4.2 已可见端倪，原因有二：首先因为 $\mathscr{S}(E)$ 的拓扑是除去一点的实射影空间的拓扑，这一空间可收缩成低一维的实射影空间，从而不是单通连的（除去一点的 $P^2(\mathbf{R})$ 已经同胚于 Möbius 带，参见 4.3.9.1）。其次因为，如果二次型 ρ 在 $\mathscr{S}(E)$ 上是恒正的，那么在连接 $\mathscr{S}(E)$ 的两点的 $S(E)$ 中直线上，它可能既取正号也取负号，也可能保证恒正，须视具体情况而定：见 20.4.2。

20.2.7 由 20.2.2 和 14.5.2.1 可知，$\Theta\cup\infty$ 是正好在 ∞ 与 $\hat{E}$ 相切的超平面。

20.3 正 交 性

根据 20.2.2，20.2.3，10.7.10.2，可直接验证：

20.3.1 引理. 对 $s, s'\in\mathscr{S}(E)$，关于基本二次曲面 ρ 的正交性 $s\perp s'$ 等价于：

——若 $s, s'\in\Sigma$：s, s' 在 10.7.10.2 的意义下正交；

——若 $s\in\Sigma$，$s'\in\Theta$：s' 是 s 的直径面；

——若 $s, s'\in\Theta$：s, s' 是在欧氏空间意义下的相互正交超平面；

——若 $s\in\Sigma\cup\Theta$，$s'\in E$：s' 是 s 的一点；

——若 $s\in\Sigma\cup\Theta$，$s'=\infty$：$s\in\Theta$。

因此我们看到，$S(E)$ 中的正交性可以用欧氏空间中的正交性来表达，但稍有些例外；为了弥补这一点，我们看到，只须对 $s\in S(E)$ 定义它在 $\hat{E}$ 中的象 $\overline{\mathrm{im}(s)}$ 如下即可：

$$\textbf{20.3.2}\quad \begin{cases}\overline{\mathrm{im}(s)}=\mathrm{im}(s),\ s\in\Sigma\ \text{时；}\\ \overline{\mathrm{im}(s)}=\mathrm{im}(s)\cup\infty,\ s\in\Theta\ \text{时；}\\ \overline{\mathrm{im}(\infty)}=\infty;\\ \overline{\mathrm{im}(s)}=s,\ s\in E\ \text{时；}\\ \overline{\mathrm{im}(s)}=\varnothing,\ \mathrm{im}(s)=\varnothing\ \text{且}\ s\neq\infty\text{时。}\end{cases}$$

据此就可由 20.3.1 将 $S(E)$ 中 $\mathrm{im}(s)$ 的点解释如下：

20.3.3 引理. 对 $s\in S(E)$，$\overline{\text{im}(s)}$ 中的点就是 $\hat{E}\cap s^{\perp}$ 的点，或是以 s 为顶点、外切于 $\hat{E}$ 的锥面与 $\hat{E}$ 的接触点。

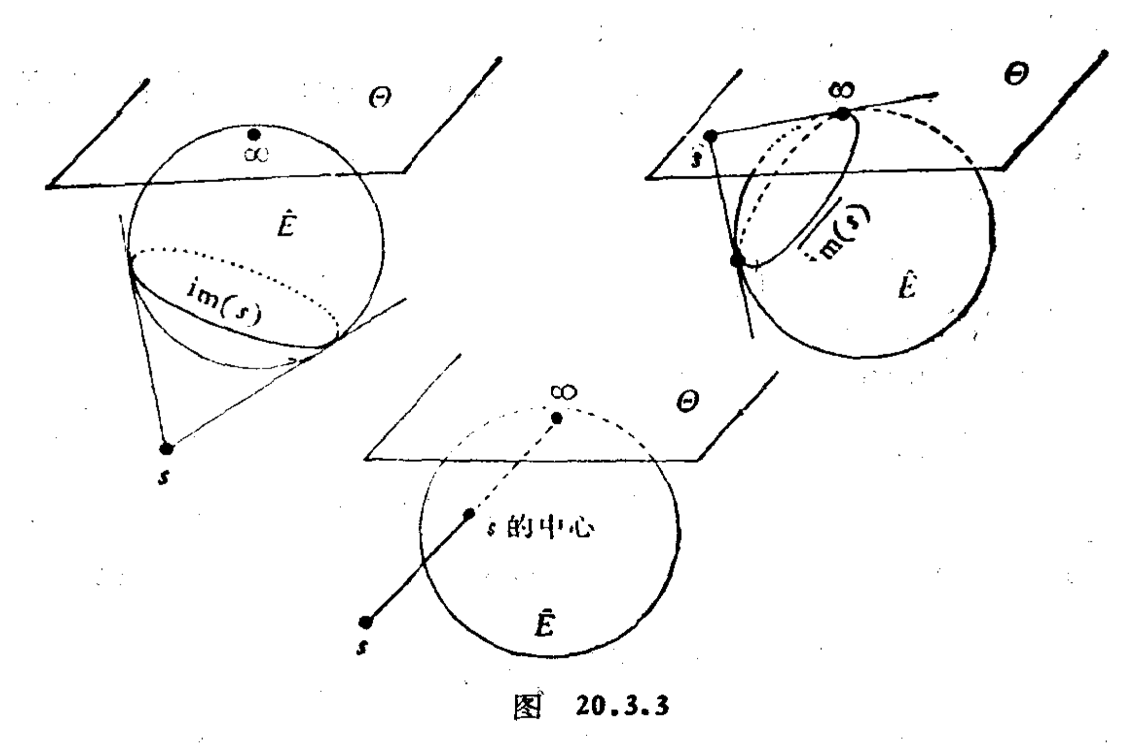


图 20.3.3

20.3.4 例. s 的中心是直线 $\langle s, \infty\rangle$ 与 $\hat{E}$ 的交点中除却∞的那个点。

事实上，s 的中心 ω 的特征是所有过 ω 的超平面都(在欧氏空间意义下)正交于 s；因此，由上述讨论可知这些超平面的全体就是

$$\omega^{\perp}\cap\Theta=\omega^{\perp}\cap\infty^{\perp}=(\omega\infty)^{\perp}\text{ (参见 14.5.2.3)}.$$

$s\perp(\omega\infty)^{\perp}$ 就是 $s\in\omega\infty$。

20.3.5 上述讨论说明：E 的超平面是以∞为中心的球面；至于∞本身，它既是一个特殊的超平面 ($\infty\in\Theta$)，又是一个半径为 0 的特殊球面 ($\infty\in\hat{E}$)，处处都是它的中心(参见 Pascal，《思想录》，第 72 节)。

20.4 两个球面的相交与夹角

20.4.1 现在设 $s, s'\in\Sigma\cup\Theta$，其方程为 q, q'；那么 $\dfrac{R(q,q')}{\sqrt{\rho(q)\rho(q')}}$

等于什么？这儿既不能用 19.2.5，也不能用 8.6.3；实际上问题取决于射影直线 $ss' = \langle s, s' \rangle$，视其是否与 $\hat{E}$ 相交而定. 根据二阶方程的古典理论，可得下述命题：

20.4.2 命题. 对于方程为 q, q' 的 $s, s' \in \Sigma \cup \Theta$，以下命题是等价的：

——射影直线 ss' 与 $\hat{E}$ 至多交于一点；

——$\dfrac{|R(q, q')|}{\sqrt{\rho(q)\rho(q')}} \leqslant 1$；

——ρ 在 ss' 上的限制是正的或是零；

——$\overline{\mathrm{im}(s)} \cap \overline{\mathrm{im}(s')} \neq \varnothing$.

这时我们说 s, s' 是相交的，如下定义的 $[0, \pi/2]$ 间的实数 $[s, s']$ 称为 s 与 s' 的夹角，它只与 s, s' 有关而与 q, q' 无关：

$$\operatorname{Arc}\cos([s, s']) = \frac{|R(q, q')|}{\sqrt{\rho(q)\rho(q')}}.$$

20.4.3 下述事实证明了上式的合理性：若 $m \in \mathrm{im}(s) \cap \mathrm{im}(s')$，则超切平面 $T_m s$，$T_m s'$（当 s 或 s'，或两者都在 Θ 中时，则为平面 $\mathrm{im}(s)$ 和 $\mathrm{im}(s')$ 本身）之间夹角为 $[s, s']$；这一事实，当 $s, s' \in \Sigma$ 时可由 20.2.3 得出，其中一个或两个为超平面的情形就更容易了.

若 $[s, s'] = 0$，则或者 s, s' 在 $m \in \mathrm{im}(s) \cap \mathrm{im}(s')$ 处相切，或者在

$$\mathrm{im}(s) \cap \mathrm{im}(s') = \varnothing (\text{即 } \overline{\mathrm{im}(s)} \cap \overline{\mathrm{im}(s')} = \infty)$$

的情形下 s, s' 是两个平行超平面.

若 $[s, s'] = \pi/2$，则得出 20.3.

对 $[s, s'] \in]0, \pi/2[$ 的情形，不能直接由 10.7.7 得出夹角，但在必要时只须通过 $\pi - \cdot$ 即可得出落在 $[0, \pi/2]$ 内的夹角；这是推衍到射影空间 $S(E)$ 并将超平面归入等价类所得的结果. 而用 $[0, \pi/2]$ 内的这个角 $[\cdot, \cdot]$，我们可以很容易地解决许多初等几何中的难题（例如参 见10.13.20)，下面就是一个例子. 几何问题现在又归结成了线性代数问题.

20.4.4 两个已知球面的等角球面．设 $s, s' \in \Sigma \cup \Theta$；则 $\{t \in \Sigma \cup \Theta: [t, s] = [t, s']\}$ 可划分为两个集合 F, F'．存在 $u, u' \in S(E)$，使 $t \in F$(或 $t \in F'$) 蕴含 $t \perp u$(或 $t \in u'$)．这些广义球面称为 s 和 s' 的等分球面．

取 s, s' 的方程使 $\rho(q) = \rho(q') = 1$，并由一个使 $\rho(q'') = 1$ 的方程 q'' 求出 t．由 $[t, s] = [t, s']$ 的条件就可得出 $|R(q, q'')| = |R(q', q'')|$，即 $R(q + q', q'') = 0$ 或 $R(q - q', q'') = 0$；球面 u, u' 就是以 $q + q'$，$q - q'$ 为方程的球面．

更一般地，我们研究集合 $\{t: [t, s_i] = \alpha_i \ \forall i = 1, \cdots, k\}$，其中 $\alpha_i \in [0, \pi/2]$，$s_i \in \Sigma \cup \Theta$；与 10.7.8 相比较．

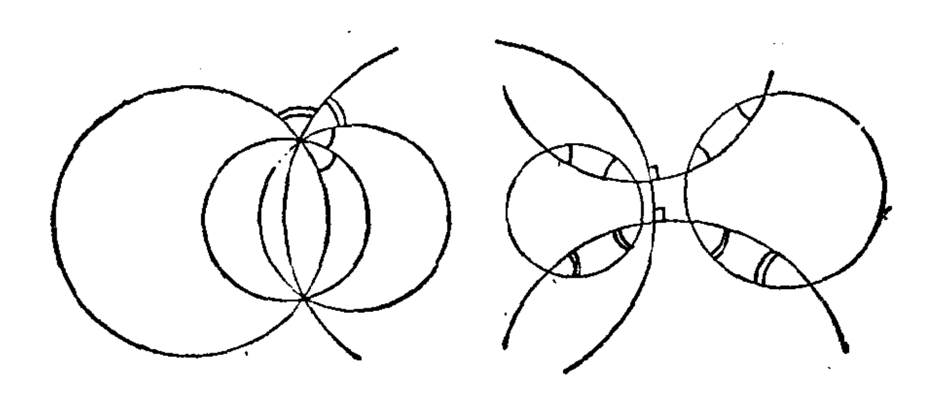


图 20.4.4

20.5 k 维球面，球面束

在 20.4.1 中我们曾遇到过 $S(E)$ 的射影直线，那是射影二次曲面束的特殊情形(参见 14.2)；若 s, s' 相交，一般来说，它们是沿一个 $n-2$ 维球面相交的 (参见 10.7.5)，该球面只与射影直线 ss' 有关．更一般地说，我们因此要引进：

20.5.1 定义． $S(E)$ 的 k 维射影子空间称为 E 的 k 维球面束．E 的 $(n-k-1)$ 维球面束称为 E 的(广义) k 维球面．

因此，在 $n = 2$，$k = 1$ 时得到的是点对(或 $\varnothing$)，在 $n = 3$，$k = 1$ 时得到的是我们所在的欧几里得空间的 (广义) 普通圆．

20.4.2 成为:

20.5.2 引理. 若K是一个(任意k维的)球面束;则$\bigcap\limits_{s\in K}\overline{\operatorname{im}(s)}\neq\varnothing$的充要条件是$\rho$在$K$上的限制是正的或为零.

根据 20.3.3,有 $\bigcap\limits_{s\in K}\overline{\operatorname{im}(s)}=\hat{E}\cap K^{\perp}$;但由 13.4.7,$\rho$不可能同时在$K$和$K^{\perp}$上是正的或为零.

20.5.3 定义. k维球面K与k'维球面K'的夹角定义为

$$[K,K']=\inf\{[u,u']:u\in K,u'\in K'\}.$$

因而这一夹角仅在某些情形下是有意义的. $k=1$,$k'=2$,$n=3$时,由 8.6.7 和 20.4.3 可知,它就是我们的欧氏空间中的一个圆和一个球面的通常意义下的夹角.

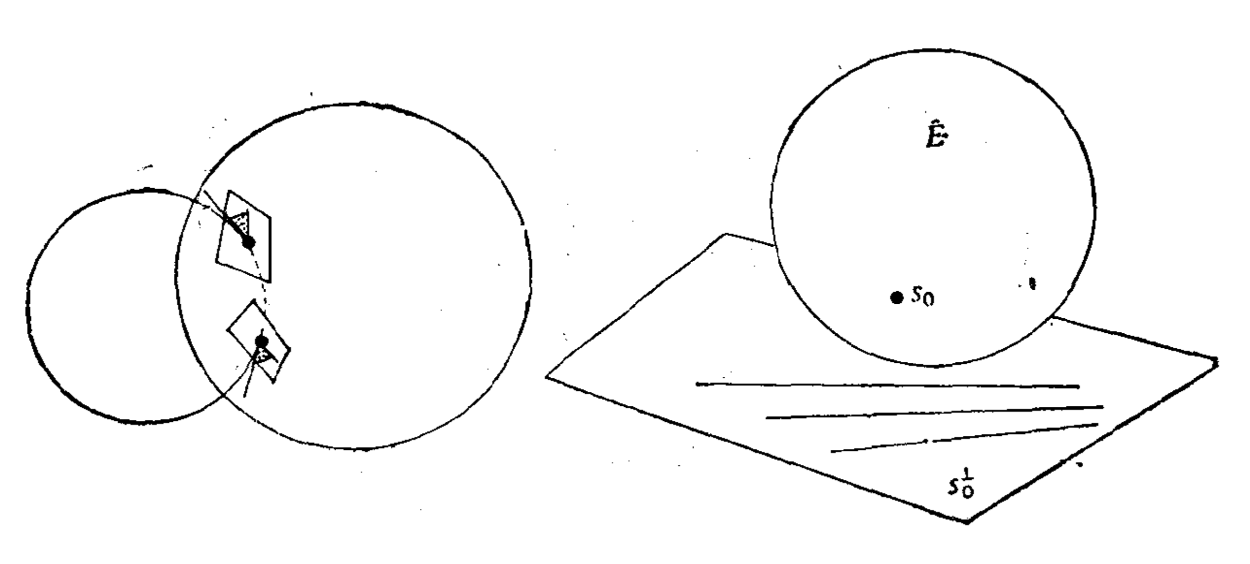


图 20.5.3

20.5.4 应用. 由上述讨论,可以得到 18.9 的一个很好的解释. 事实上,设s_0是给定的纯虚球面,则$s_0^{\perp}$是$S(E)$的超平面,ρ在其上正定;若$n=3$,则$s_0^{\perp}$是一个可应用 19.1.4 的椭圆空间;由此可得 10.12.3 的各种性质. 由于 $PO(\rho)$(参见 13.7.1)在纯虚球面s_0上可迁,我们看到,3 维欧氏空间中每对构成α角挠平行环面的圆,必可通过 $\operatorname{Conf}(\hat{E})$ 的一个元素互化. 请读者自己把 18.8.4 的所有结论详细地搬过来.

20.5.5 两个圆的交织. 仍在$n=3$的情形,我们可以从射影的观点来看两个圆 K,K' 的交织: 它们交织的充要条件是它们生成

的射影超平面 $\langle K\cup K'\rangle$ 不与 $\hat{E}$ 相交.

20.5.6 球面束的分类. 问题在于考察 $S(E)$ 中一条直线关于决定 E 中几何学的三元素 E, ∞ 和 Θ 的可能位置. 可以看到, 有六种可能情况:

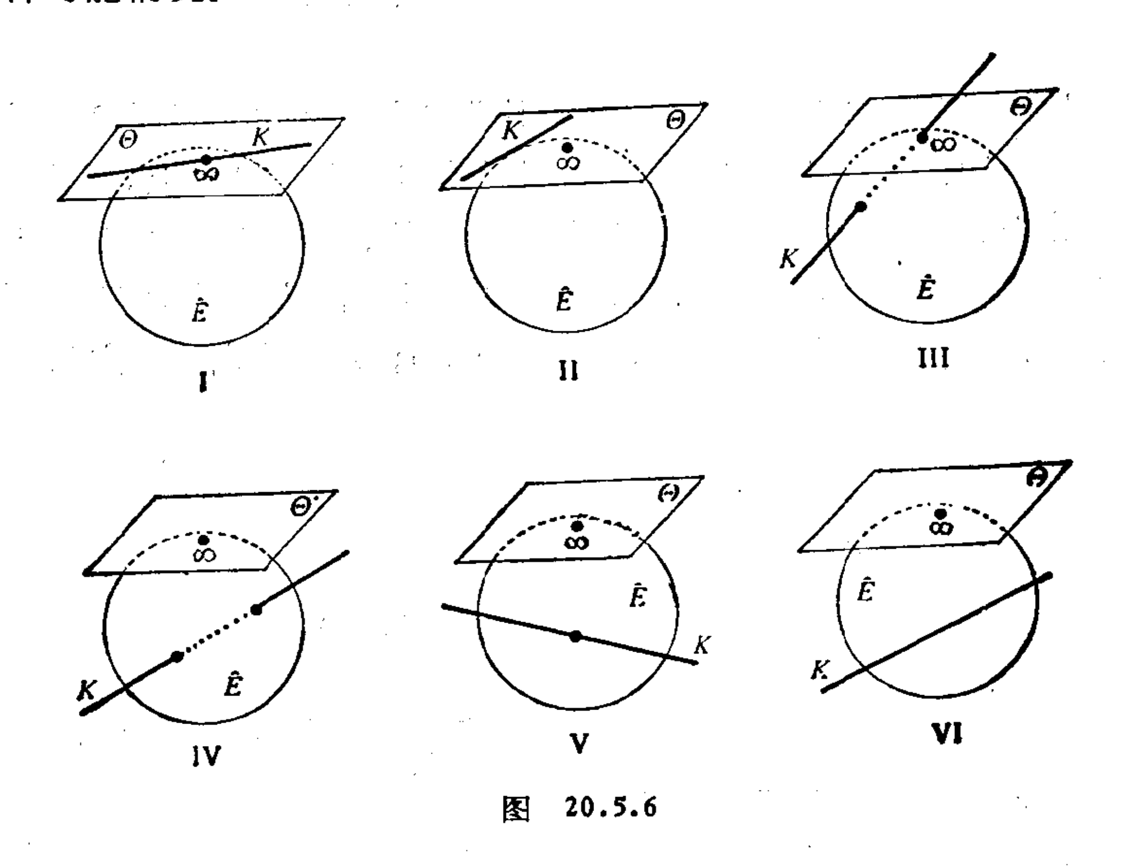


图 20.5.6

它们给出下列球面束:

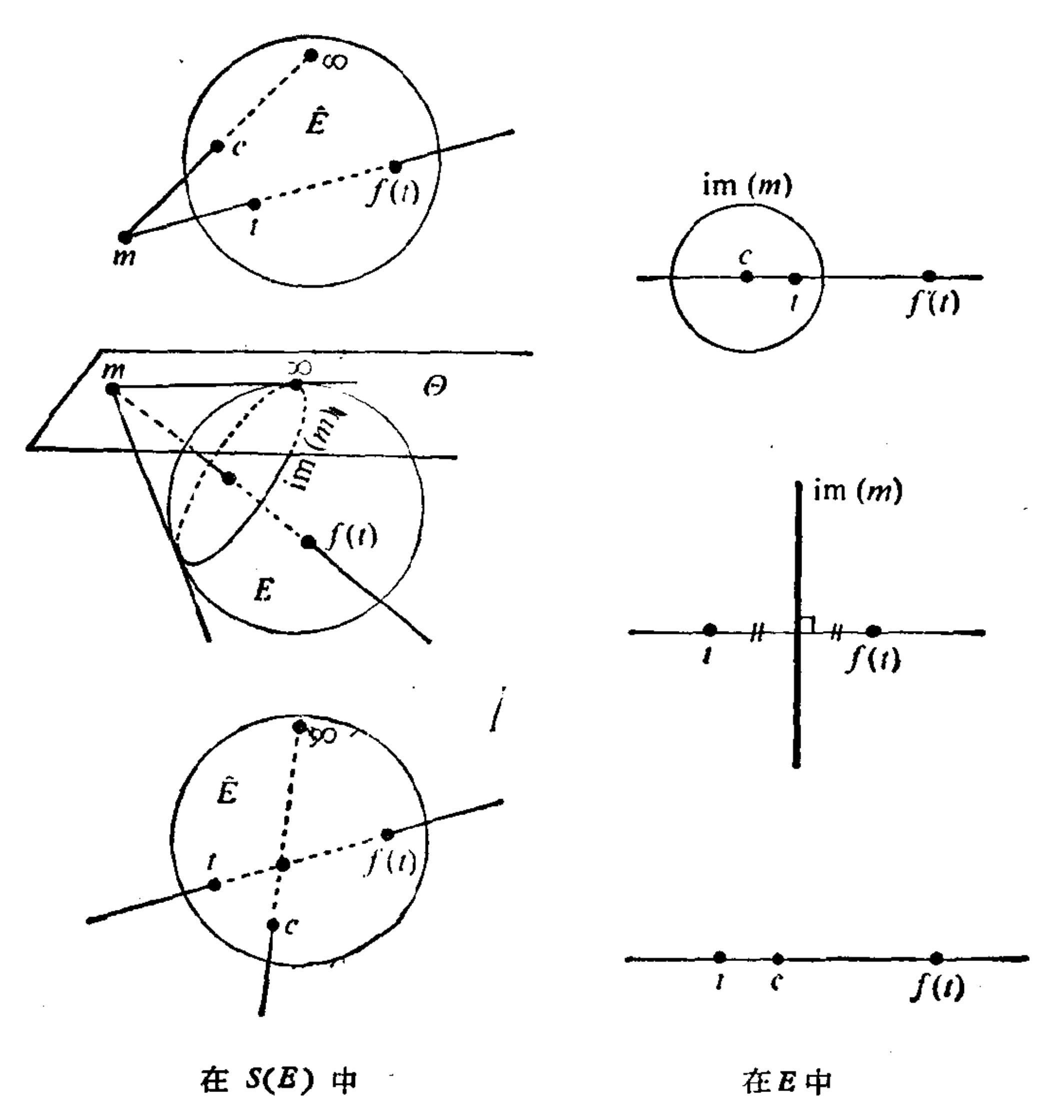
类　型	位　置	性　质	E 中的 $(n-2)$ 维球面
I	$K\subset\Theta$ 且 $K\ni\infty$	平行超平面	$\varnothing$
II	$K\subset\Theta$ 且 $K\not\ni\infty$	相交超平面	$(n-2)$ 维射影子空间
III	$K\not\subset\Theta$ 且 $K\ni\infty$	同心球面	$\varnothing$
IV	$K\not\ni\infty$ 且 $K\cap E=2$ 点	极限点处球面束	$\varnothing$
V	$K\not\ni\infty$ 且 $K\cap E=1$ 点	相切球面	1 点
VI	$K\not\ni\infty$ 且 $K\cap E=\varnothing$	相交球面	$(n-2)$ 维球面

在平面的情形, 由 IV, V, VI 即得 10.10.1 的三个圆: 由 20.3.1 和 10.10, 我们看到, 球面束 K 的正交圆束正好是 $K^\perp$. 当 $n=2$ 时, 对这些类型有 $\mathrm{I}^\perp=\mathrm{I}^\perp$, $\mathrm{II}^\perp=\mathrm{III}$, $\mathrm{IV}^\perp=\mathrm{VI}$, $\mathrm{V}^\perp=\mathrm{V}$.

20.5.7 注. 14.3.7 表明，在 3 维欧氏空间的圆的集合与复射影二次曲面 $C(4)$ 之间存在一个自然同构.

20.6 循环群 Conf ($\hat{E}$)

20.6.1 我们在 20.2.5 中已经看到，引进二次型 ρ 的射影群 PO(ρ) 是很自然的. 根据 13.7.1，这个群可迁地作用在 $\Sigma \cup \Theta$ 上，而且作用在 $\hat{E}$ 上，且该作用与 Möb(n) 的作用同构. 将 PO(ρ) 在 $\hat{E}$ 上的这一作用记为 Conf ($\hat{E}$)，称为 E 的循环群，以区别于等同于 Conf (E) 的相似群 Sim(E)，参见 9.5.4.6；要不然也可称之为 $\hat{E}$



在 $S(E)$ 中　　　　在 E 中

图 20.6.2

的共形群，见 20.6.4。

20.6.2 为了知道 $\mathrm{Conf}(\hat{E})$ 的元素的情况，我们利用 14.7.4，由那里可知，$\mathrm{Conf}(\hat{E})$ 是由图 14.7.4 类型的变换所生成的；现在点 m 属于 $S(E)\backslash\hat{E}$，而 $f:t\longmapsto f(t)$ 的定义满足 t, $f(t)$, m 共线的条件。在 E 中，若 $t, f(t)\in E$ 而 $\mathrm{im}(m)\neq\varnothing$，这就是说 $\mathrm{im}(m)$ 和两个点球面这三个球面构成一个球面束，也就是说 $f(t)$ 是 t 在以 $\mathrm{im}(m)$ 的中心 C 为极点、以 $\mathrm{im}(m)$ 为反演球面的反演的象。由 20.3.4，到 $\hat{E}$ 的扩张由 $f(c)=\infty$ 和 $f(\infty)=c$ 给出。若 $\mathrm{im}(m)$ 是超平面，则我们得到关于该超平面的对称，并由 $f(\infty)=\infty$ 延拓。最后，如果 $\mathrm{im}(s)=\varnothing$，那么得到的是中心反演，设 $q=\|\cdot\|^2+(\alpha|\cdot)+h$ 是 s 的一个法方程，则中心为 c 而幂等于 $\rho(q)$。据此，由 14.7.4 和 13.7.12 可推得：

20.6.3 定理. $\mathrm{Conf}(\hat{E})$ 的每一元素是至多 $n+2$ 个下列类型的变换的乘积：或者 f 是 E 的以 c 为极点的反演，且由 $f(c)=\infty$ 和 $f(\infty)=c$ 延伸到 $\hat{E}$，或者 f 是超平面的欧氏对称，且由 $f(\infty)=\infty$ 延伸到 $\hat{E}$。

20.6.4 注. “循环群”也叫“圆群”，这名称是这样来的：$\mathrm{Conf}(\hat{E})$ 把球面变换成球面，从而把圆变换成圆；这由 $\hat{E}$ 和 $\mathrm{Conf}(\hat{E})$ 的构造显而易见。根据 18.10.4，这一性质是可作特征的。这样，我们就完成了 10.8.4.2 和 18.10.2.2 中未尽的讨论。

有一种定向球面的几何学，主要归功于 Laguerre；它在 $\check{S}(E)$ 中考虑射线的几何学（以代替构成 $S(E)$ 的直线的几何学）。对此，在 10.11.6 曾有提及，在该节中读者还可了解有关文献。

20.7 多球坐标

20.7.1 浏览过一些较古老的书籍，例如 [KN 2] 第 49 页以后的内容的读者，会在平面上的圆或三维空间中的球面的讨论中见到“四圆坐标”、“五球坐标”的名称。按照前面的讨论，它们无非就是 $S(E)$ 的齐次坐标，且是由 $\check{S}(E)$ 的一组关于基本二次型 ρ

的正交基而得来的；这样的坐标称为多球坐标．它们可用以研究 E 的球面，但也可用以研究 E 中这样的点：它们是 $S(E)$ 中满足 $\rho=0$ 的点．下面是这种坐标的一个应用．

20.7.2 四次圆纹曲面及其圆族． 我们在 10.12 中遇到过一些相当简单的(四阶)曲面，它们是连通的，而且容有四个实的单参数族圆，这种曲面就是旋转环面；这是一类更一般的四阶曲面的特殊情况，这类曲面容有六族圆．设 3 维欧氏空间 E 的一个曲面可写为 $E\cap\operatorname{im}(\mu)$，其中 μ 是射影空间 $S(E)$ 的射影二次曲面，则称此曲面为四次圆纹曲面．本书不准备系统地研究这类曲面，读者可参阅[DX]，第 405—481 页．我们仅仅考察一个由 μ 定义的四次圆纹曲面，其中的 μ 是和 ρ 可以同时约化的(参见 13.5)；不妨假定(参见 13.4.2 和 20.2.2)它们形如

$$\rho=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2-z_5^2,\quad \mu=\sum_{i=1}^{5}a_iz_i^2.$$

要找圆，就是要在 $S(E)$ 的二次曲面束 $k\rho+h\mu$ 中找 $S(E)$ 的射影平面．该束中退化的二次曲面恰有以下五种：

20.7.3 $a_1\rho-\mu,\ a_2\rho-\mu,\ a_3\rho-\mu,\ a_4\rho-\mu,\ a_5\rho-\mu.$

根据 14.1.7，它们各是以一个超平面上的二次曲面为底的圆锥，例如 $a_5\rho+\mu$，其方程为 $\sum_{i=1}^{4}(a_5+a_i)z_i^2$，是以 $(0,0,0,0,1)$ 为顶、以超平面 $z_5=0$ 上的二次曲面 $\sum_{i=1}^{4}(a_5+a_i)z_i^2$ 为底的圆锥．然而，我们知道 $\sum_{i=1}^{4}(a_5+a_i)z_i^2=0$ 在 a_5+a_i 的符号为两正两负时(参见 14.4)包含两族直线．最后我们就看到，在四次圆纹曲面 $E\cap\operatorname{im}(\mu)$ 上，圆族的数目是 20.7.3 的五个方程中含两正两负项的方程个数的两倍．容易看出，这个数目不可能超过 $2\times 3=6$，而且，举例来说对 $2z_1^2+3z_2^2-4z_3^2-3z_4^2-z_5^2$ 它正等于 6．环面属于 Dupin 四次圆纹曲面，对这类曲面来说至少有两个 a_i 相等，因此属退化情形，并从而引出某些圆族相串连的情形．

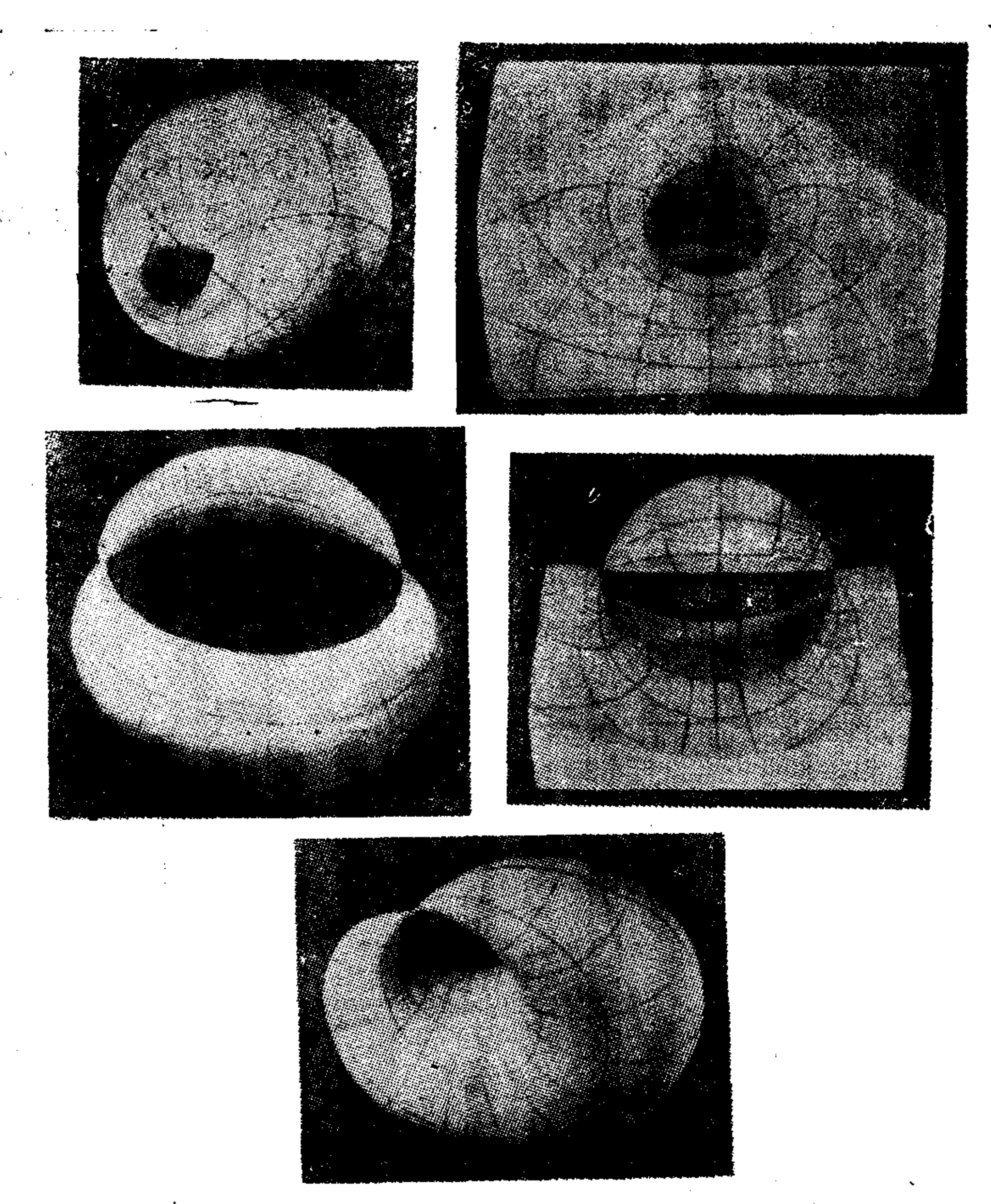


图　20.7.3.1—20.7.3.5.

Hilbert, Cohn-Vossen, 直观几何，Chelsea.

20.8 练　　习

20.8.1 从几何上作出 $S(E)$ 中与 $\mathrm{im}(s)$ 相切的超平面.

20.8.2 说明 20.4.4 中"等分球面"名称的理由.

20.8.3 用本章的语言叙述 [HD 2] 第 608—667 页的内容.

20.8.4 对［KN 2］第 49—58 页和 100—105 页做同样的工作。

20.8.5 验证环面是 Dupin 四次圆纹曲面。

20.8.6 设 C, D, C', D' 是 E 中四圆，半径分别为 r, s, r', s'；C, D（或 C', D'）的圆心距离记为 d（或 d'）。证明：存在 $f\in \mathrm{Conf}(\hat{E})$ 使 $f(C\cup D)=C'\cup D'$ 的充要条件是

$$\left|\frac{r^2+s^2-d^2}{2rs}\right|=\left|\frac{r'^2+s'^2-d'^2}{2r's'}\right|.$$

将你的证明与［D-C 1］第 222 页的证明相比较。

20.8.7 （Darboux 定理）. 若一条动直线上三点画出球心共线的三个球面，则该直线上任一点也画出这样的球面，而且，一般而言，其中有一点画出一个平面。找出该动直线上四点与它们所画出的四个球面的球心之间的联系。

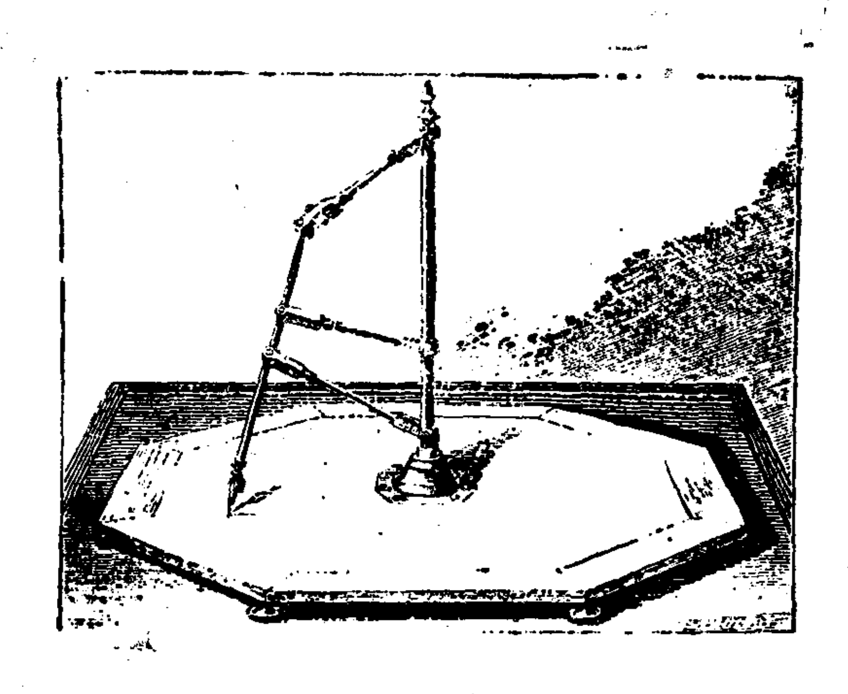


图 20.8.7.

Gabriel Koenigs, «运动学课程»,A. Hermann, 1897.

参考书目

[A-A] ARNOLD (V. I.) et AVEZ (A.). *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars.

[A-B] ANNEQUIN et BOUTIGNY. *Cours de Physique, Optique*, Vuibert.

[A-B-S] ATIYAH (M. F.), BOTT (R.) et SHAPIRO (A.). *Clifford Modules*, Topology, 3, 1964-1965, supplément, p. 3-38.

[AE] *Astronomie*, Encyclopédie de la Pléïade, Gallimard

[AN] ARTIN (Emil). *Geometric Algebra*, Interscience.

[AR] ARNOLD (V.). *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou.

[AS] ARNAUDIÈS (J.-M.), *Les cinq polyèdres de* $\mathbf{R}^3$ *et leurs groupes*, C.D.U.-S.E.D.E.S., Paris.

[AV] ALEXANDROW (A. D.). *Konvexe Polyeder*, Akademie Verlag, Berlin.

[AW] ALEXANDROW (A.D.). *Die innere Geometrie der konvexe Fläche*, Akademie Verlag, Berlin.

[BA] BIANCHI (L.). *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle transformazioni asintotiche delle curve el delle superficie*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 25, 1908, p. 291-325.

[BAN] BANCHOFF (Thomas). *Non-rigidity Theorems for Tight Polyhedra*, Archiv der Mathematik, 21, 1970, p. 416-423.

[BA-WH] BANCHOFF (Thomas) et WHITE (James). *The behavior of the total twist and self-linking number of a closed space curve under inversions*, Mathematica Scandinavica 36, 1975, p. 254-262.

[B-B] BECKENBACH (Edwin F.) et BELLMAN (Richard). *Inequalities*, Springer.

[BE] BROUSSE (Pierre). *Mécanique*, Armand Colin.

[BER] BERGER (M.). *Lectures Notes on Geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute, Bombay.

[BES] BESSE (Arthur). *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik, Band 93, Springer.

[B-F] BONNESEN (O.) et FENCHEL (W.). *Theorie der konvexe Körper*, Chelsea.

[B-G] BERGER (Marcel) et GOSTIAUX (Bernard). *Géométrie différentielle*, Armand Colin.

[B-H] BOREL (A.) et HIRZEBRUCH (F.). *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces*, American Journal of Math., 80, 1958, p. 458-538,

[B-H-H] BLACK (W. L.), HOWLAND (H. C.) et HOWLAND (B.). *A Theorem about Zigzags between two Circles*, American Math. Monthly, 81, 1974, p. 754-757.

[BI 0] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Théorie des Ensembles, Hermann, 1970.

[BI 1] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Topologie Générale, chapitres 5 à 10, Hermann, 1974.

[BI 2] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre II, chapitre 9, Hermann.

[BI 3] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre V, chapitres 1, 2, 2e édition, Hermann.

[BI 4] BOURBAKI (Nicolas). *Groupes et algèbre de Lie*, chapitre 4, 5, 6, Hermann.

[BI 5] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Algèbre chapitres 1 à 3, Hermann, 1970.

[B-K] BUSEMANN (Herbert) et KELLY (Paul J.). *Projective Geometry and Projective Metrics*, Academic Press

[BL] BLUMENTHAL (Leonard M.). *Theory and Applications of Distance Geometry*, Chelsea.

[BLA 1] BLASCHKE (Wilhelm). *Kreis und Kugel*, Chelsea.

[BLA 2] BLASCHKE (Wilhem). *Vorlesungen über Differential Geometrie, II : Affine Differential Geometry*, Springer.

[BLA 3] BLASCHKE (Wilhelm). *Vorlesungen über Differential Geometrie, III : Differential Geometrie der Kreise und Kugel*, Springer.

[BL-BO] BLASCHKE (W.) et BOL (G.). *Geometrie der Gewebe*, Springer, 1938.

[B-M] BLUMENTHAL (Leonard M.) et MENGER (Karl). *Studies in Geometry*, W. H. Freeman.

[BN] BOURGIN (D. G.). *Modern Algebraic Topology*, Mac Millan.

[BO 1] BOREL (Armand). *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes*, American Journal of Math., 76, 1954, p. 273-342.

[BO 2] BOREL (Armand). *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Annals of Math., 57, 1953, p. 115-207.

[BP] BAUDOIN (Paul). *Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal*, Vuibert.

[BR] BAER (R.). *Linear Algebra and Projective Geometry*, Academic Press.

[B-S] BOREVICH (Z. I.) et SHAFAREVICH (I. R.). *Number Theory*, Academic Press.

[B-T] BRUHAT (F.) et TITS (J.). *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées*, Public. Math. I.H.E.S., n° 41

[BU 1] BUSEMANN (Herbert). *Convex Surfaces*, Interscience.

[BU 2] BUSEMANN (Herbert). *Recent Synthetic Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik, nº 54, Springer.

[BUR] BURCKHARDT (J. J.). *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*, Birkhaüser.

[BV] BONNEVAL (H.). *Photogrammétrie générale* (4 *volumes*), Eyrolles.

[BZ] BENZ (Walter). *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer.

[CA] CAIRNS (Stewart Scott). *Introductory Topology*, Ronald Press.

[CAL] CALLAHAN (Francis P.). *Morley polygons*, American Math. Monthly 84, 1977, p. 325-337.

[C-B] COUDERC (P.) et BALLICIONI (A.). *Premier livre du tétraèdre*, Gauthier-Villars.

[CD] CARATHEODORY (C.). *The most general transformation which transform circles into circles*, Bull. Amer. Math. Soc., 43, 1937, p. 573-579.

[C-D-L] COHEN-TANNOUDJI (C.), DIU (B.) et LALOE (F.). *Mécanique quantique*, *vol.* 1, Hermann.

[CE 1] CARTAN (Elie). *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes*, Oeuvres complètes, tome I, volume 2, p. 1227-1246.

[CE 2] CARTAN (Elie). *The Theory of Spinors*, Hermann ou The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

[C-G] CHEEGER (Jeff) et GROMOLL (Detlef). *On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature*, Ann. of Math., 96, 1972, p. 413-443.

[CH 1] CARTAN (Henri). *Calcul différentiel*, Hermann.

[CH 2] CARTAN (Henri). *Théorie élémentaire des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

[CH-GR] CHERN (S. S.) et GRIFFITHS (P.). *Abel's theorem and webs*, Jahrbericht d. Deutsche Math.-Verein., 80, 1978, p. 13-110.

[CL 1] CONNELLY (Robert). *A counter example to the rigidity conjecture for polyhedra*, Public. Math. I.H.E.S., 47, 1978, p. 333-338.

[CL 2] CONNELLY (Robert). *A flexible sphere*, Math. Intelligencer, 1 1978, p. 130-131.

[C-M] COXETER (H. S. M.) et MOSER (W. O. J.). *Generators and Relations for Discrete Groups*, 2e édition, Springer.

[CN] CUENIN (R.). *Cartographie générale* (2 *volumes*), Eyrolles.

[CO] CONNELLY (Robert). *An attack on rigidity I, II*. Preprints, Cornell University.

[CR 1] COXETER (H. S. M.). *Introduction to Geometry*, John Wiley.

[CR 2] COXETER (H. S. M.). *Regular Polytopes*, Methuen.

[CR 3] COXETER (H. S. M.). *Non-euclidean Geometry*, The University of Toronto Press.

[CR 4] COXETER (H. S. M.). *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press.

[CR 5] COXETER (H. S. M.). *The Problem of Apollonius*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 5-15.

[CS] CASSELS (J. W. S.). *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer.

[CT] CHOQUET (Gustave). *Cours d'Analyse, tome II : Topologie*, Masson.

[CY] CHEVALLEY (Claude). *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press.

[CZ] CONZE (Jean-Pierre). *Le théorème d'isomorphisme d'Ornstein et la classification des systèmes dynamiques en théorie ergodique*, Séminaire Bourbaki, novembre 1972.

[D-C 1] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Géométrie*, J. B. Baillière.

[D-C 2] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Compléments de géométrie*, J. B. Baillière.

[DE 1] DIEUDONNÉ (Jean). *La géométrie des groupes classiques*, 2e *édition*, Springer.

[DE 2] DIEUDONNÉ (Jean). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, 3e *édition*, Hermann.

[DE 3] DIEUDONNÉ (Jean). *Calcul infinitésimal*, Hermann.

[DE 4] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome II*, Gauthier-Villars.

[DE 5] DIEUDONNÉ (Jean), *Eléments d'Analyse, tome III*, Gauthier-Villars.

[DE 6] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome IV*, Gauthier-Villars.

[DE 7] DIEUDONNÉ (Jean). *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press.

[DE 8] DIEUDONNÉ (Jean). *Cours de Géométrie Algébrique* (*tomes* 1 *et* 2), Presses Universitaires de France.

[D-G-K] DANZER (L.), GRÜNBAUM (B.) et KLEE (V.). *Helly's Theorem and its Relatives*, A.M.S. Symposium on Convexity Proc. Symp. Pure Math., volume 7, 1963.

[DI] DEMBOWSKI (P.). *Finite Geometries*, Ergebnisse der Mathematik, nº 44, Springer.

[DI-CA] DIEUDONNÉ (Jean) et CARRELL (James B.). *Invariant Theory, Old and New*, Academic Press.

[DN] DANJON (André). *Astronomie générale*, J. et R. Sennac.

[DO] DORRIE (Heinrich). 100 *Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover.

[DQ] DUPORCQ (Ernest). *Premiers principes de géométrie moderne*, 3e *édition*, Gauthier-Villars.

[DR] DIXMIER (Jacques). *Cours de mathematiques du premier cycle, deuxième année*, Gauthier-Villars.

[DV] DVORETSKY (Aryeh). *Some results on convex bodies and Banach spaces*, p. 123-160 dans Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1961.

[DX] DARBOUX (Gaston). *Principes de Géométrie Analytique*, Gauthier-Villars.

[DY] DOUADY (Adrien). *Le shaddock à six becs*, Bulletin A.P.M.E.P., 281, 1971, p. 699.

[EE] *Encyklopädie der Mathematischen Wissenchaften, Geometrie*, III.2.1, Teubner.

[E-K] EELLS (James) et KUIPER (Nicolas O.). *Manifolds which are like Projective Planes*, Public. Math. I.H.E.S., nº 14, p. 5-46.

[EL] ELLISON (W. J.). *Waring's problem*, American Math. Monthly, 78, 1971.

[EN] EGGLESTON (H. G.). *Convexity*, Cambridge University Press.

[ER] ESCHER (M. C.). *L'œuvre graphique*, Solin, Paris.

[E-S] EELLS (J.) et SAMPSON (J. H.). *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, American Journal of Math., 86, 1964, p. 109-160.

[FA] FALCONER (K. J.). *A characterisation of plane curves of constant width*, J. London Math. Soc., 16, 1977, p. 536-538.

[FI] FILLMORE (Jay P.). *Symmetries of surfaces of constant width*, J. of Diff. Geometry, 3, 1969, p. 103-110.

[FL] FRENKEL (Jean). *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann.

[FN] FULTON (William). *Algebraic Curves*, Benjamin.

[FR] FEDERER (Herbert). *Geometric Measure Theory*, Springer.

[FT 1] FEJES-TOTH (L.). *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer.

[FT 2] FEJES-TOTH (L.). *Regular Figures*, Pergamon.

[GA] GARDNER (Martin). *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, Scientific American, January 1977.

[GE] GONSETH (F.). *Un théorème relatif à deux ellipsoides confocaux*, Bulletin des Sciences Math., 42, 1918, p. 177-180 et 193-194.

[GG] GREENBERG (Marvin J.). *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin.

[G-G-V] GELFAND (I. M.), GRAEV (M. I.) et VILENKIN (N. Ya). *Generalized Functions, volume 5, Integral Geometry and Representation Theory*, Academic Press.

[GIS] GRIFFITHS (Phillip A.). *Variations on a Theorem of Abel*, Inventiones Math., 35, 1976, p. 321-390.

[GI-WE] GIBBONS (J. C.) et WEBB (C.). *Circle preserving maps of spheres*, preprint, Illinois Institute of Technology, Chicago.

[GK] *Grundzüge der Mathematik, Band IV : Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik*, Vandenhoeck and Ruprecht.

[G-K-M] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.) et MEYER (W.). *Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Mathematics*, n° 55, Springer.

[GL] GLUCK (Herman). *Almost All Simply Connected Closed Surfaces are Rigid*, preprint, University of Pennsylvania.

[GM] GRAMAIN (André). *Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France.

[GN] GÉRARDIN (Paul). *Mathématiques Elémentaires Approfondies*, cours polycopié, Université Paris VII, U.E.R. de Mathématiques.

[G-O] GELBAUM (Bernard D.) et OLMSTED (John M. H.). *Counterexamples in Analysis*; Holden-Day.

[GR] GUGGENHEIMER (Heinrich W.). *Plane Geometry and its Groups*, Holden-Day.

[GR-HA] GRIFFITHS (P.) et HARRIS (S.). *On Cayley's Explicit Solution to Poncelet's Porism*, L'Enseignement Mathématique, 24, 1978, p. 31-40.

[GR-SH1] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The eighty-one types of isohedral tilings in the plane*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 82, 1977, p. 177-196.

[GR-SH2] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The 91 types of isogonal tiling in the plane*, Trans. A.M.S., 242, 1978, p. 335-354.

[GS] *Geometric Inequalities* (BOTTEMA *et alia*), Wolters-Noordhoof.

[GT] GUICHARDET (A.). *Calcul intégral*, Armand Colin.

[GX] GODEAUX (Lucien). *Les géométries*, Armand Colin.

[HA] HALL (M.). *The Theory of Groups*, Mac Millan.

[HA-WR] HARDY (G. H.) et WRIGHT (E. M.). *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press.

[H-C] HILBERT (D.) et COHN-VOSSEN (S.). *Geometry and the Imagination*, Chelsea.

[HD 1] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome I*, 10e *édition*, Armand Colin.

[HD 2] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome II*, 7e *édition*, Armand Colin.

[H-K] HAUPT (O.) et KÜNNETH (H.). *Geometrische Ordnungen*, Springer.

[H-L-P] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) et POLYA (G.). *Inequalities*, Cambridge University Press.

[HM] HARTMAN (P.). *On Isometries and a Theorem of Liouville*, Mathematische Zeitschrift, 69, 1958, p. 202-210.

[HN] HELGASON (Sigurdur). *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press.

[HOL] d'HOLLANDER (Raymond). *Topologie Générale, tome I : Généralités, Mesure des angles et des distances*, Eyrolles.

[HO-PE] HODGE (W. V. D.) et PEDOE (D.). *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge University Press.

[H-P] HUGHES (Daniel R.) et PIPER (Fred C.). *Projective Planes*, Springer.

[HR] HADWIGER (H.). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer.

[HS] HERSCH (Joseph). *Quatre propriétés des membranes sphériques homogènes*, C.R.A.S., 270, 1970, p. 1714-1716.

[HU] HUSEMOLLER (Dale). *Fibre Bundles*, McGraw Hill.

[H-W] HILTON (P. J.) et WYLIE (S.). *Homology Theory*, Cambridge University Press.

[H-Y] HOCKING (John G.) et YOUNG (Gail S.). *Topology*, Addison-Wesley.

[HZ] HURWITZ (M. A.). *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales Ecole Norm., 19, 1902, p. 357-408.

[I-R] ILLIOVICI (G.) et ROBERT (P.). *Géométrie*, Eyrolles.

[JE] JOEDICKE (Jürgen). *Les structures en voiles et coques*, Vincent, Fréal et Cie.

[KE] KRÉE (P.). *Introduction aux mathématiques et à leurs applications fondamentales, M.P. 2*, Dunod.

[KF] KAZARINOFF (Nicholas D.). *Geometric Inequalities*, Random House.

[KG 1] KLINGENBERG (Wilhelm). *Eine Vorlesung über Differential Geometrie*, Springer.

[KG 2] KLINGENBERG (Wilhelm). *Paare symmetrischen und alternierenden Formen zweiten Grades*, Abhandl. Math. Sem. Hamburg, 19, 1955, p. 78-93.

[KH] KUROSH (A. G.). *Lectures in General Algebra*, Pergamon.

[KM] KLOTZ-MILNOR (Tilla). *Efimov's Theorem about Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature*, Advances in Math., 8, 1972, p. 474-543.

[KN 1] KLEIN (Félix). *Lectures on the Icosahedron*, Dover.

[KN 2] KLEIN (Félix). *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer.

[KO-NO 1] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume I*, Interscience.

[KO-NO 2] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume II*, Interscience.

[LB 1] LEBESGUE (Henri). *Leçons sur les constructions géométriques* Gauthier-Villars.

[LB 2] LEBESGUE (Henri). *Les coniques*, Gauthier-Villars.

[LB 3] LEBESGUE (Henri). *Octaèdres articulés de Bricard*, l'Enseignement mathématique, 13, 1967, p. 175-185.

[LE] LEKERKERKER (C. G.). *Geometry of numbers*, Walters-Noordhoff.

[LF 1] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Géométrie différentielle*, Masson.

[LF 2] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes*, Mémoires Acad. Royale Belg., Cl. Sci. Mém. Coll. in-8°, 1971, fascicule 5.

[LF 3] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes*, J. of Diff. Geometry, 8, 1973, p. 487-510.

[LF-AR] LELONG-FERRAND (J.) et ARNAUDIÈS (J.-M.). *Cours de mathématiques, tome* 3, Dunod.

[LG 1] LANG (Serge). *Elliptic Functions*, Addison-Wesley.

[LG 2] LANG (Serge). *Analysis II*, Addison-Wesley.

[LM 1] LEMAIRE (J.). *Hypocycloïdes et Epicycloïdes*, Vuibert.

[LM 2] LEMAIRE (J.). *L'hyperbole équilatère*, Vuibert.

[LP] *Le libre du problème, volume* 4 : *la convexité*, CEDIC.

[LR 1] LEHNER (Joseph). *A Short Course in Automorphic Functions*. Holt, Rinehart and Winston.

[LR 2] LEHNER (Joseph). *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, Math. Surveys, number VIII, American Math. Society.

[LS] LEVALLOIS (Jean-Jacques). *Géodésie Générale, tome II : Géodésie classique bidimensionnelle*, Eyrolles.

[LU] LUSTERNIK (Lazar A.). *Convex Figures and Polyhedra*, Heath.

[LY] LEVY (Harry). *Projective and Related Geometry*, Mac Millan.

[LZ] LAZUTKIN (V. F.). *The Existence of Caustics for a Billiard Problem in a Convex Domain*, Math. USSR Izvestia, 7, 1973, p. 185-214.

[MA] MALLIAVIN (Paul). *Géométrie différentielle intrinsèque*, Hermann.

[MD] MARCHAUD (A.). *Les surfaces du second ordre en géométrie finie*, J. Math. pures et appl., 9-15, 1936, p. 293-300.

[MI] MILNOR (John). *A problem in cartography*, American Math. Monthly, 76, 1969, p. 1101-1102.

[MJ] MANDELBROJT (Benoît). *Les Objets fractals*, Flammarion.

[ML] MICHEL (Charles). *Compléments de géométrie moderne*, Vuibert.

[M-P] MODENOV (P. S.) et PARKHOMENKO (A. S.). *Geometric Transformations, volume I*, Academic Press.

[MR] MATHER (J.). *The nice dimensions, Proceedings of Liverpool Singularities, Symposium I*, Lecture Notes in Mathematics n° 192, Springer.

[M-T] MARTINEAU (André) et TREVES (François). *Eléments de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions, fascicule I,* C.D.U.

[MW 1] MOSTOW (G. D.). *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces,* Annals of Mathematical Studies, n° 78, Princeton University Press.

[MW 2] MOSTOW (G. D.). *Discrete Subgroups of Lie Groups,* Advances in Mathematics, 15, 1975, p. 112-123.

[NA] NEVANLINNA (Rolf). *On Differentiable Mappings, Analytic Functions,* p. 3-9, Princeton University Press.

[OA] OBATA (M.). *The Conjecture on Conformal Transformations of Riemannian Manifolds,* J. of Differential Geometry. 6, 1972, p. 247-258.

[OM] O'MEARA (O. T.). *Introduction to Quadratic Forms,* Springer.

[OS 1] OSSERMAN (Robert). *Bonnesen-style Isoperimetric Inequalities,* American Math. Monthly, 86, 1979, p. 1-29.

[OS 2] OSSERMAN (Robert). *The isoperimetric inequality,* Bull. Amer. Math. Soc., 84, 1978, p. 1182-1238.

[PA] PALAIS (Richard). *The Classification of G-Spaces,* Memoirs of the A.M.S., n° 36.

[PC] PASCAL (Blaise). *Pensées,* édition Brunschwig.

[PE] PEDOE (D.). *A Course of Geometry,* Cambridge University Press.

[PL] POHL (William F.). *A Theorem of Géométrie finie,* Journal of Differential Geometry, 10, 1975, p. 435-466.

[PN] PAYNE (L. E.). *Isomerimetric Inequalities and their Applications,* SIAM Review, 9, 1967, p. 453-488.

[PO] PORTEOUS (I. R.). *Topological Geometry,* Van Nostrand-Reinhold.

[PR] PORTER (T. I.). *A History of the Classical Isoperimetric Problem, Contributions to the Calculus of Variations,* University of Chicago Press, 1933.

[P-S] POLYA (G.) et SZEGÖ (G.). *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics,* Princeton University Press ou Kraus Reprint Corporation.

[PT] PICKERT (G.). *Projektive Ebenen,* Springer.

[PV 1] POGORELOV (A. V.). *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces,* Israël Programm for Scientific Translation, Jerusalem.

[PV 2] POGORELOV (A. D.). *Complete Solution of Hilbert's Fourth Problem,* Soviet Math. Doklady, 14, 1973, p. 46-49.

[RA] RADEMACHER (Hans). *Topics in Analytic Number Theory,* Grundlehren n° 169, Springer.

[R-C 1] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie*, 1re *partie*, Gauthier-Villars.

[R-C 2] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie*, 2e *partie*, Gauthier-Villars.

[RE] ROUSSARIE (Robert). *Sur les feuilletages de variétés de dimension* 3, Annales de l'Institut Fourier, 21(3), 1971, p. 13-81.

[RM] DE RHAM (Georges). *Sur les polygones générateurs des groupes fuchsiens*, l'Enseignement mathématique, 17, 1971, p. 49-61.

[RN 1] ROBINSON (Raphael M.), *Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane*, Inventiones Math., 12, 1971, p. 177-209.

[RN 2] ROBINSON (Raphael M.). *Undecidable Tiling Problems in the Hyperbolic Plane*, Inventiones Math., 44, 1978, p. 259-264.

[RN 3] ROBINSON (Raphael M.). *Comments on the Penrose Tiles*, preprint, University of California, Berkeley.

[RO] ROMANOV (V. G.). *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations*, Springer.

[RS] ROGERS (C. A.). *Packing and Covering*, Cambridge University Press.

[R-V] ROBERTS (A. Wayne) et VARBERG (Dale E.). *Convex Functions*, Academic Press.

[SA] SHIMURA (G.). *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami Shoten et Princeton University Press.

[SB] STERNBERG (Shlomo). *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall.

[SC 1] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *The plane symmetry groups : their recognition and notation*, American Math. Monthly, 85, 1978, p. 439-450.

[SC 2] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *Tiling the plane with congruent pentagons*, Mathematics Magazine, 51 (1978), p. 29-44.

[SD 1] STAUDE (Otto). *Fadenconstructionen des Ellipsoides*, Math. Annalen, 20, 1882, p. 147-184.

[SD 2] STAUDE (Otto). *Die Fokaleigenschaften der Flächen Zweiter Ordnung*, Leipzig, 1896.

[SE 1] SERRE (Jean-Pierre). *Corps locaux*, Hermann.

[SE 2] SERRE (Jean-Pierre). *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France.

[SE 3] SERRE (Jean-Pierre). *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W. A. Benjamin.

[SE-TH] SEIFERT (H.) et THRELFALL (W.). *Lehrbuch der Topologie*, Chelsea.

[SF 1] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants of a class of transformation groups*, Aequationes Math., 14, 1976, p. 105-110.

[SF 2] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants à cinq points dans le plan projectif*, C.R.A.S., 285, 1977, p. 127-128.

[SG] SEIDENBERG (A.). *Lectures in Projective Geometry*, Van Nostrand.

[SGR] *Séminaire de Géométrie Riemannienne de l'Université Paris VII*, 1970-1971.

[SK] SPIVAK (Michael). *Differential Geometry, volume II*, Michael Spivak.

[SL 1] SALLEE (G. T.). *Maximal areas of Reuleaux polygons*, Canadian Math. Bull., 13, 1970, p. 175-179.

[SL 2] SALLEE (G. T.). *Reuleaux polytopes*, Mathematika, 17, 1970. p. 315-323.

[SN] STEIN (S. K.). *Tiling Space by Congruent Polyhedra*, Bulletin of the A.M.S., 80, 1974, p. 819-820.

[SO] SANTALO (L. A.). *Introduction to Integral Geometry*, Hermann.

[SR] SPANIER (E.). *Algebraic Topology*, McGraw Hill.

[S-T] SNAPPER (Ernst) et TROYER (Robert J.). *Metric Affine Geometry*, Academic Press.

[STE] STEFFEN (Klaus). *A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices*, preprint, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette.

[ST-RA] STEINITZ (E.) et RADEMACHER (H.). *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Springer.

[SU] SAMUEL (Pierre). *Unique Factorization*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 945-952.

[SW] STEWART (Ian). *Galois Theory*, Chapman and Hall.

[TG] *Seminar on Transformation Groups*, by Armand BOREL, Annals of Mathematical Studies, nº 46, Princeton.

[TM] THOM (René). *Sur la théorie des enveloppes*, J. de Math. pures et appl., 16, 1962, p. 177-192.

[TS] TITS (Jacques). *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer Lecture Notes in Mathematics, nº 386.

[VE] VALENTINE (Frederik A.). *Convex Sets*, McGraw Hill.

[VG 1] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1936, p. 229-231.

[VG 2] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1937, p. 159-160.

[VL] DU VAL (Patrick). *Homographies, Quaternions and Rotations*, Oxford University Press.

[VN] VALIRON (Georges). *Equations fonctionnelles. Applications*, Masson.

[V-Y] VEBLEN (O.) et YOUNG (J. W.). *Projective Geometry*, deux volumes, Ginn and Co.

[WF] ' ... A. Wolf.

[WK] '

[WL] ' ... ess.

[WN] ... nbridge

[WO] ... -Space, *C ... Hurwitz M*

[WR] W ... *lds and Li*

[Y-B] Y ... *igures,* H

[ZN] Z ... mand Co

[ZR] ZV ... *s and the*